

Themenschwerpunkt AMechanikAufgabe 1: Stabile Kreisbahnen im Zentralpotential

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im Raum unter dem Einfluss einer Kraft $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$, deren Richtung durch den radialen Einheitsvektor \vec{e}_r in Kugelkoordinaten um den Ursprung gegeben ist.

- a) Zeigen Sie, dass eine Kraft der Form $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ für beliebige Funktionen $F(r)$ konservativ ist, und geben Sie das zugehörige Potential in allgemeiner Form an ($F(r)$ verschwinde für $r \rightarrow \infty$ schneller als $1/r$). (4 Punkte)
- b) Begründen Sie, weshalb die Bewegung des Teilchens im Kraftfeld $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ immer in einer Ebene verläuft, und geben Sie aus den Anfangsbedingungen der Bewegung des Teilchens zur Zeit $t = 0$ zwei Vektoren an, die diese Ebene im Raum festlegen. (4 Punkte)
- c) Betrachten Sie nun den Spezialfall einer Kraft $F(r) = -F_0/r^{1+\alpha}$, mit positiven Konstanten $F_0 > 0$ und $\alpha > 0$. Geben Sie die Lagrange-Funktion L des Teilchens und die Bewegungsgleichungen an (wählen Sie Polarkoordinaten r, φ in der Ebene der Bewegung). (5 Punkte)
- d) Reduzieren Sie die Bewegungsgleichungen auf eine geschlossene Differentialgleichung für $r(t)$, und zeigen Sie, dass für beliebige Werte von $F_0 > 0$ und $\alpha > 0$ immer eine Kreisbahn als Lösung existiert, ausgenommen im Fall $\alpha = 2$. Geben Sie deren Radius R als Funktion des Drehimpulses an. Gibt es eine Kreisbahn auch im Fall $\alpha = 2$? (5 Punkte)
- e) Betrachten Sie kleine Störungen $r(t) = R + \epsilon(t)$ dieser Kreisbahn, und entwickeln Sie die exakte Bewegungsgleichung für $r(t)$ in linearer Ordnung in $\epsilon(t)$. Für welchen Bereich des Parameters α ist die Kreisbewegung stabil gegen kleine Fluktuationen? (7 Punkte)

Aufgabe 2: Planetare U-Bahn

Zwei Orte auf der Oberfläche eines Planeten mit Radius R und homogener Massendichte ρ seien durch eine Untergrundbahn verbunden. Der Tunnel der Untergrundbahn verlaufe geradlinig durch das Planeteninnere und besitze die Gesamtlänge B . Der Zug mit Gesamtmasse m soll als punktförmig angenommen werden. Er werde nur durch die Gravitation beschleunigt, und Reibung sei abwesend. Verwenden Sie als Ortskoordinate des Zuges seine Position x relativ zum Mittelpunkt der Bahn.

- a) Fertigen Sie eine beschriftete Skizze der Situation an. (5 Punkte)
- b) Zeigen Sie, dass für die potentielle Energie V des Zuges

$$V(x) = \frac{2\pi}{3} mG\rho \left(x^2 - 2R^2 - \frac{B^2}{4} \right)$$

gilt, wobei G die Gravitationskonstante ist. (10 Punkte)

Hinweis: Die Gravitationsenergie eines Massenpunktes m im Abstand a vom Mittelpunkt einer Kugelschale mit Radius r , infinitesimaler Dicke dr und Massendichte ρ ist $-4\pi mG\rho r dr$ für $a \leq r$ und $-4\pi mG\rho r^2 a^{-1} dr$ für $a > r$.

- c) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf, und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichung für den Zug ab. (5 Punkte)
- d) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den Fall, dass der Zug anfangs in Ruhe ist und auf der Oberfläche startet. Wie lange dauert eine einfache Fahrt? (5 Punkte)

Themenschwerpunkt B**Elektrodynamik/Optik****Aufgabe 1: Punktladung vor leitender Kugel mit der Methode der Bildladungen**

Eine Punktladung q (mit $q > 0$) befinde sich am Ort $\vec{a} = a\vec{e}_z$ im Abstand a vom Mittelpunkt einer geerdeten ideal leitenden Kugel vom Radius R (mit $a > R$). Zu berechnen ist das elektrische Potential $\phi(\vec{r})$ und das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im Außenraum der Kugel mit der Methode der Bildladungen (Spiegelladungen).

Hinweis: Es genügt, eine einzelne punktförmige Bildladung zu verwenden. Nehmen Sie eine Bildladung der Größe q' im Abstand a' vom Mittelpunkt der Kugel an.

- a) Was kann man aus Symmetriegründen über die Position der Bildladung sagen? (4 Punkte)
- b) Bestimmen Sie das elektrische Potential $\phi(\vec{r})$ im Außenraum der Kugel als Funktion von q , q' , a und a' . Bestimmen Sie q' und a' aus der Bedingung, dass die Kugel geerdet ist. (9 Punkte)

Zwischenergebnis:

$$q' = -q \frac{R}{a}, \quad a' = \frac{R^2}{a}.$$

- c) Bestimmen Sie nunmehr das elektrische Feld im Außenraum der Kugel. In welche Richtung zeigt das elektrische Feld an den der Punktladung zugewandten und abgewandten Stellen der Kugeloberfläche? Skizzieren Sie die elektrischen Feldlinien, insbesondere auch in der Richtung von \vec{a} und in Gegenrichtung. (12 Punkte)

Aufgabe 2: Magnetisch permeable Kugel

Betrachtet sei eine magnetisch permeable Kugel mit relativer Permeabilität μ_r und Radius R . Die Kugel wird nun in ein ursprünglich homogenes, magnetisches Feld $\vec{H}_\infty = H_\infty \vec{e}_z$ gebracht. Das Medium außerhalb der Kugel habe die magnetische Permeabilität des Vakuums.

- a) Begründen Sie anhand der Maxwell-Gleichungen, dass man das magnetische Feld in beiden Bereichen durch $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_M$ darstellen kann, wobei Φ_M ein geeignetes skalares magnetisches Potential ist. Zeigen Sie, dass das skalare Potential innerhalb und außerhalb der Kugel die Laplace-Gleichung $\nabla^2\Phi_M = 0$ erfüllt. (5 Punkte)
- b) Aufgrund der Symmetrie ist es vorteilhaft, Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) mit dem Ursprung im Zentrum der Kugel zu verwenden. Verwenden Sie den Ansatz

$$\Phi_M = \begin{cases} -H_i r \cos \vartheta & \text{für } r < R \\ (-H_\infty r + m r^{-2}) \cos \vartheta & \text{für } r > R \end{cases}$$

für das magnetische Potential, und berechnen Sie das durch die Koeffizienten H_∞ , H_i und m ausgedrückte Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ in Kugelkoordinaten in den beiden Bereichen. Zeigen Sie, dass das magnetische Feld für große Abstände von der Kugel homogen und gleich \vec{H}_∞ wird. (5 Punkte)

Hinweis: In Kugelkoordinaten gilt

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

- c) Welche Stetigkeitsbedingungen sind für das magnetische Feld \vec{H} und die magnetische Induktion \vec{B} an der Grenzfläche $r = R$ zu fordern? (5 Punkte)
- d) Berechnen Sie die unbestimmten Koeffizienten H_i und m . Wie verhält sich das magnetische Feld im Inneren der Kugel für $\mu_r \rightarrow \infty$? Welche Richtung hat das magnetische Feld auf der äußeren Oberfläche der Kugel in diesem Grenzfall? (10 Punkte)

Themenschwerpunkt CThermodynamikAufgabe 1: Spezifische Wärme eines Supraleiters

Setzt man bei einer Temperatur T ein supraleitendes Material einem äußeren Magnetfeld H aus, das den kritischen Wert

$$H_c(T) = H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]$$

übersteigt, so wird das Material normalleitend. Im Folgenden sollen thermodynamische Eigenschaften des Supraleiters mit denen eines entsprechenden Materials verglichen werden, das keinen Phasenübergang zeigt. Die jeweiligen Größen werden mit den Indizes „s“ bzw. „n“ gekennzeichnet. Das Volumen wird als konstant vorausgesetzt.

- a) Bei geeigneter Geometrie kompensiert die Magnetisierung M im Supraleiter das äußere Magnetfeld H , es gilt also $M = -H$. Für den Normalleiter soll dagegen angenommen werden, dass die Magnetisierung vernachlässigt werden kann. Berechnen Sie für beide Fälle die Differenz $G(T, H) - G(T, 0)$ der freien Enthalpien. (6 Punkte)

Hinweis: Das Differential der freien Enthalpie bei festem V lautet hier

$$dG = -SdT - \mu_0 V M dH.$$

- b) Beim kritischen Magnetfeld $H_c(T)$ gilt $G_s(T, H_c(T)) = G_n(T, H_c(T))$. Zeigen Sie, dass

$$G_s(T, H) = G_n(T, 0) - \frac{1}{2} \mu_0 V (H_c^2 - H^2)$$

gilt. (4 Punkte)

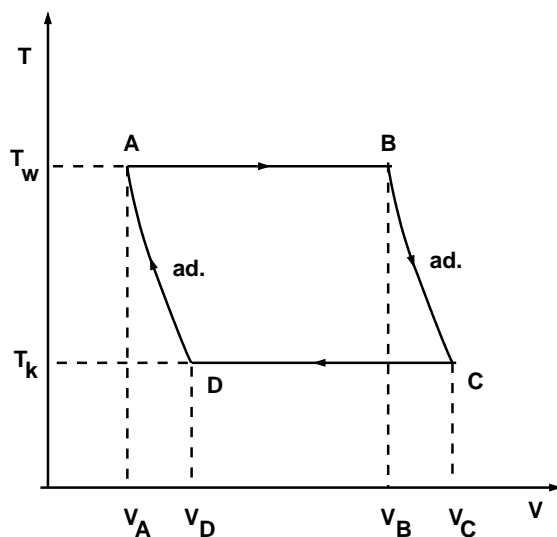
- c) Berechnen Sie die Differenzen $S_n - S_s$ und $C_n - C_s$ der Entropien bzw. spezifischen Wärmen in Abwesenheit eines äußeren Magnetfelds. Typischerweise findet man $C_n = 2\mu_0 V H_0^2 T / T_c^2$. Skizzieren Sie für diesen Fall C_n und C_s als Funktion der Temperatur. (15 Punkte)

Aufgabe 2: Carnot-Prozess mit Photonengas

Für ein Photonengas (Hohlraumstrahlung) gelten zwischen Druck p , innerer Energie U , Volumen V und Temperatur T die Zustandsgleichungen

$$p = \frac{1}{3} \frac{U}{V} \quad \text{und} \quad U = \sigma T^4 V,$$

wobei σ eine Konstante ist. Ein solches Gas soll als Arbeitsmittel in einer reversiblen Carnot-Maschine eingesetzt werden. Die vier Arbeitsschritte der Carnot-Maschine bestehen aus den Isothermen $A \rightarrow B$ ($T = T_w$) und $C \rightarrow D$ ($T = T_k$) und den Adiabaten $B \rightarrow C$ und $D \rightarrow A$ (siehe Skizze).



- a) Zeigen Sie, dass für das System die Gleichung

$$\delta Q = 4\sigma T^3 V dT + \left(\sigma T^4 + \frac{\sigma}{3} T^4 \right) dV$$

gilt.

(4 Punkte)

- b) Zeigen Sie die Adiabatangleichung

$$\frac{V_B}{V_C} = \frac{T_C^3}{T_B^3}.$$

(6 Punkte)

- c) Berechnen Sie für die Teilschritte $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow C$ die Änderung der inneren Energie ΔU , die dem System zugeführte Wärme ΔQ und die vom System geleistete Arbeit ΔA . Dabei sollen alle Ergebnisse durch T_w , T_k , V_A und V_B ausgedrückt werden.

(10 Punkte)

- d) Berechnen Sie den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{zugeführte Wärme}}$$

der Maschine als Funktion der Temperaturen T_k und T_w .

(5 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Quantenmechanischer Messprozess

Für ein Quantensystem gebe es eine gemeinsame Eigenbasis aus den Eigenfunktionen zweier Observablen A und B . Das Spektrum von A und B sei jeweils diskret. Die zugehörigen Eigenwerte werden mit a und b bezeichnet und seien jeweils die natürlichen Zahlen inklusive der Null, d. h. $a = 0, 1, 2, \dots$ und $b = 0, 1, 2, \dots$. Die orthonormalen Eigenvektoren des Systems werden damit als $|ab\rangle$ angegeben, z. B. kennzeichnet $|00\rangle$ den Grundzustand mit $a = 0$ und $b = 0$, $|10\rangle$ einen angeregten Zustand mit $a = 1$ und $b = 0$.

- a) Das System werde durch den Zustandsvektor $|\psi\rangle = \frac{1}{c} (|00\rangle + 3|11\rangle + \sqrt{15}|32\rangle)$ beschrieben. Bestimmen Sie die Normierungskonstante c . Warum fordert man allgemein die Normierung quantenmechanischer Zustände? (6 Punkte)
- b) Berechnen Sie mit dem Zustandsvektor $|\psi\rangle$, den Sie in Teilaufgabe a) bestimmt haben, die Erwartungswerte $\langle\psi|A|\psi\rangle$ und $\langle\psi|B|\psi\rangle$ und die Schwankungsbreiten (ΔA) und (ΔB) , wobei die Schwankungsbreite eines Operators O bzgl. eines Zustandes $|\psi\rangle$ definiert ist als

$$(\Delta O) = \sqrt{\langle\psi|(O - \langle\psi|O|\psi\rangle)^2|\psi\rangle}.$$

Welche minimale gemeinsame Unschärfe $(\Delta A)(\Delta B)$ wäre für das betrachtete System (für einen anderen Zustand als $|\psi\rangle$ aus Teilaufgabe a) möglich? Begründen Sie Ihre Antwort knapp in Worten.

Hinweis: Falls Sie die Konstante c in Teil a) nicht bestimmen konnten, dann können Sie hier mit allgemeinem c weiterrechnen. (12 Punkte)

- c) Welche Messwerte können Sie bei einer einzelnen Messung von A im Zustand $|\psi\rangle$ finden? Mit welcher Wahrscheinlichkeit finden Sie diese Messwerte? (3 Punkte)
- d) Betrachten Sie nun die Situation, dass an $|\psi\rangle$ eine Messung von A durchgeführt wurde. Diese hat den Messwert 1 ergeben. Welche Messwerte können bei einer anschließenden Messung von B mit welchen Wahrscheinlichkeiten gefunden werden? (4 Punkte)

Aufgabe 2: Rückstoßfreie Emission (Mößbauer-Effekt)

Ein Atomkern, der sich intern in einem angeregten Zustand befindet, sei an einem Gitterplatz im Festkörper harmonisch gebunden. Seine Schwerpunktsbewegung werde durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2 = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

eines eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Frequenz ω beschrieben (\hat{a}^\dagger und \hat{a} sind die üblichen Auf- und Absteige-Operatoren des harmonischen Oszillators). Beim Übergang in den Grundzustand der internen Bewegung wird ein Photon mit Wellenvektor k emittiert. Dies führt zu einem Rückstoß, der den Zustand $|\psi_0\rangle$ der Schwerpunktsbewegung vor der Emission in den Zustand $|\psi\rangle = \exp(ik\hat{x})|\psi_0\rangle$ überführt.

- a) Der Atomkern sei vor der Emission im Grundzustand $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ des Oszillators. Bestimmen Sie den Zustand $|\psi\rangle$ nach der Emission des Photons in der Basis der Energie-Eigenzustände $|n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), indem Sie die Darstellung $\hat{x} = \ell_0(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ des Ortsoperators durch die Auf- und Absteige-Operatoren verwenden. Dabei ist $\ell_0 = (\hbar/2m\omega)^{1/2}$ die charakteristische Breite des Oszillatorgrundzustands. (6 Punkte)

Hinweis: Benützen Sie die Relationen

$$\exp(i\eta(\hat{a}^\dagger + \hat{a}))|0\rangle = \exp(-\eta^2/2)\exp(i\eta\hat{a}^\dagger)|0\rangle \quad \text{sowie} \quad (\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = \sqrt{n!}|n\rangle.$$

- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_n dafür, dass der Atomkern nach der Emission in den n -ten angeregten Zustand der Schwingungsbewegung übergeht, als Funktion des Parameters η . (6 Punkte)
- c) Zeigen Sie, dass die mittlere Zahl $\langle n \rangle$ der Anregungen durch $\langle n \rangle = \eta^2$ gegeben ist. Berechnen Sie speziell die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Atomkern nach der Emission im Grundzustand der Schwerpunktsbewegung befindet (rückstoßfreie Emission). Wie hängt diese Wahrscheinlichkeit mit der mittleren Zahl $\langle n \rangle$ der Anregungen zusammen? (7 Punkte)
- d) Wie groß ist der mittlere Energieübertrag

$$\Delta E = \sum_{n=0}^{\infty} p_n n\hbar\omega$$

durch die Emission des Photons? Zeigen Sie, dass ΔE gerade den Wert des Energieübertrags ergibt, den man klassisch aus dem Impulsübertrag an ein ursprünglich ruhendes Teilchen erwartet. (6 Punkte)