Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Reflexion an weicher Wand

Ein Teilchen der Masse m komme aus dem positiv Unendlichen, wobei der Betrag der Geschwindigkeit v_∞ sei. Es werde elastisch an einer weichen Wand senkrecht reflektiert, d. h. es kann ein eindimensionales Problem betrachtet werden. Die Wand wird beschrieben durch das Potential

$$V(x) = \frac{1}{2} V_0 \exp\,(-\alpha x), \;\; \alpha > 0, V_0 > 0.$$

a) Berechnen Sie die Energie des Teilchens und den Umkehrpunkt x_0 . (8 Punkte)

b) Berechnen Sie $x(t)$ und wählen Sie dabei $x(0) = x_0$. (10 Punkte)

c) Berechnen Sie $\dot{x}(t)$, und betrachten Sie die Grenzfälle $t \to \pm\infty$ für $x(t)$ und $\dot{x}(t)$. Skizzieren Sie $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ für alle t. (4 Punkte)

d) Betrachten Sie den Grenzfall $\alpha \to \infty$. Welche anschauliche Bedeutung hat er? (3 Punkte)

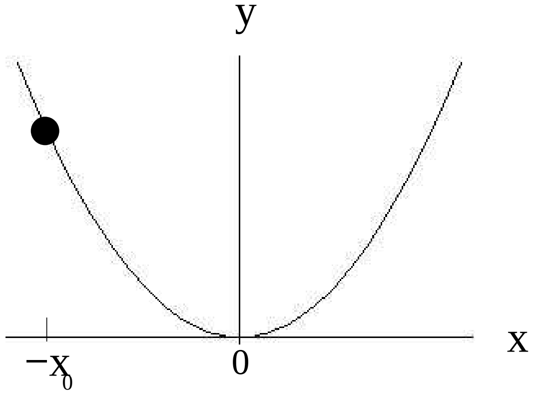
Hinweis:

$$\int_0^x dx' \, \frac{1}{\sqrt{1 - \exp(-\alpha x')}} = \frac{2}{\alpha} \,\mathrm{arcosh}\, \{\exp \frac{\alpha x}{2}\}$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Masse auf der Achterbahn

Auf einer Achterbahn rollt ein Wagen auf einer parabelförmigen Bahn in die Tiefe. Wir wollen ihn durch ein punktförmiges Teilchen der Masse m beschreiben, das sich reibungsfrei auf der Kurve $y = ax^2$ im Potential mgy der Schwerkraft bewegt (siehe Skizze). Es soll bei $-x_0 < 0$ aus der Ruhelage heraus starten und nach der Zeit T das Minimum $x = 0$ der Bahn erreicht haben. Um die Rechnung zu vereinfachen, untersuchen wir nur den Fall $x_0 = 1/(2a)$.



a) Welche Erhaltungsgröße gibt es bei diesem Problem? Geben Sie diese an. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit am Minimum $x = 0$ der Bahn. (3 Punkte)

c) Welche Wegstrecke hat das Teilchen zurückgelegt, wenn es nach der Zeit T das Minimum erreicht hat? (9 Punkte)

d) Berechnen Sie diese Zeit T. (10 Punkte)

Hinweis: Sie dürfen folgende Integrale verwenden:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+z^2}{1-z^2}}\,\mathrm{d}z \simeq 1.91, \qquad \int_0^1 \sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}z \simeq 1.15$$

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Gleichstrom und Poyntingvektor

a) Ein in z-Richtung orientierter zylinderförmiger Draht mit Radius r_1 werde im gesamten Querschnitt homogen von einer Stromdichte $\vec{j} = j\vec{e}_z$ durchflossen. Berechnen Sie das magnetische Feld $\vec{H}$ außerhalb des Leiters. (5 Punkte)

b) Der Leiter genüge dem ohmschen Gesetz $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, wobei σ die spezifische Leitfähigkeit und $\vec{E}$ die elektrische Feldstärke im Leiter ist. Berechnen Sie die Normalkomponente des Poyntingvektors $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ auf der Leiteroberfläche. Bestimmen Sie ferner die durch die Oberfläche eines Leiterstücks der Länge L zugeführte Leistung, und drücken Sie das Ergebnis durch den Gesamtstrom I und den Widerstand R des Leiterstücks aus. Was passiert mit der zugeführten Leistung? (7 Punkte)

Es soll nun der Grenzfall eines idealen Leiters ($\sigma \to \infty$) untersucht werden. Dazu ergänzen wir den bis jetzt betrachteten Draht um einen hohlzylinderförmigen Leiter mit Innenradius $r_2 > r_1$ zu einem Koaxialkabel. Zwischen den beiden Leitern liege eine Potentialdifferenz U an.

c) Bestimmen Sie das elektrische Feld im ladungsfreien Raum zwischen den beiden Leitern. (8 Punkte)

d) Überzeugen Sie sich davon, dass der Poyntingvektor zwischen den beiden Leitern in z-Richtung zeigt. Berechnen Sie diesen, und integrieren Sie über den Querschnitt senkrecht zum Koaxialkabel. Drücken Sie das Resultat durch den Strom I und die Potentialdifferenz U aus. (5 Punkte)

Hinweis: Die Divergenz eines Vektors $\vec{u}$ lautet in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z):

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Dipolmoment des HCl-Moleküls

In einem vereinfachten Modell entsteht ein Salzsäure-Molekül (HCl) durch Verbindung eines Wasserstoff-Atoms mit einem Chlor-Atom ($Z = 17$), wobei das H-Atom ein Elektron an das Cl-Atom abgibt. Die 18 Elektronen des Cl-Ions bilden eine näherungsweise sphärische Wolke um den Cl-Kern. Die beiden Kerne sind 1.28 Å voneinander entfernt. Das Dipolmoment des oben beschriebenen Moleküls soll berechnet und mit dem experimentellen Wert von $d = 3.4 \times 10^{-28}$ Coulomb cm verglichen werden.

a) Zeigen Sie, dass das Dipolmoment einer Ladungsverteilung genau dann vom Koordinatenursprung unabhängig ist, wenn die Gesamtladung verschwindet.

(7 Punkte)

b) Drücken Sie das Dipolmoment einer Summe von Ladungsverteilungen,

$$\rho(\vec{r}\,) = \rho_1(\vec{r}\,) + \rho_2(\vec{r}\,) \ ,$$

durch die jeweiligen Gesamtladungen $Q_{1,2} (\neq 0)$ und deren Ladungsschwerpunkte aus.

(6 Punkte)

c) Berechnen Sie das Dipolmoment des obigen Moleküls (Elementarladung: $e = 1.6 \times 10^{-19}$ Coulomb). Verwenden Sie hierzu die Verallgemeinerung der Aussage aus Teilaufgabe (b) auf drei verschiedene Ladungsverteilungen, nämlich die der beiden Kerne und der Elektronenwolke.

(6 Punkte)

d) Wie weit muss der Schwerpunkt negativer Ladung vom Cl-Kern in Richtung zum Proton verschoben werden, damit das Dipolmoment in unserem Modell den gemessenen Wert annimmt?

(6 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Trockenadiabate

Erfahrungsgemäß nehmen Druck und Temperatur in der Atmosphäre mit zunehmender Höhe z ab. Diese Abnahme kann durch ein einfaches Modell beschrieben werden, bei dem sich ein ideales Gas im Schwerefeld adiabatisch abkühlt.

a) Betrachten Sie ein infinitesimales Höhenelement $\mathrm{d}z$ und leiten Sie aus dem Druckgleichgewicht im Schwerefeld (Erdbeschleunigung g, Massendichte der Luft ρ) mit Hilfe der idealen Gasgleichung für den Zusammenhang zwischen Druck p und Teilchendichte $n = \rho/m$ eine Gleichung für den Druckgradienten $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$ her. (6 Punkte)

b) Lösen Sie diese Differentialgleichung explizit unter der (unrealistischen) Annahme einer konstanten Temperatur T. Berechnen Sie explizit die Höhendifferenz Δz, auf der $p(z)$ bei $T = 300\,\mathrm{K}$ um einen Faktor $1/\mathrm{e}$ abnimmt ($m = 2.6 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$ ist die Masse von O_2 und $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$) (6 Punkte)

c) Leiten Sie für eine reversible, adiabatische (also isentrope) Expansion eines idealen Gases mit f Freiheitsgraden eine Beziehung zwischen der relativen Druckänderung $\mathrm{d}p/p$ und der relativen Temperaturänderung $\mathrm{d}T/T$ her. (6 Punkte)

d) Bestimmen Sie aus der differentiellen Druckabahme $\mathrm{d}p$ mit der Höhe im Schwerefeld g aus Teilaufgabe (a) den Wert des trockenadiabatischen Temperaturgradienten $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$ bei der isentropen Expansion eines idealen Gases. Berechnen Sie $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$ explizit (in Einheiten Grad pro 100 m Höhendifferenz) für Sauerstoff als zweiatomiges Gas mit $f = 5$ Freiheitsgraden. (7 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Adiabatische Entspannung mit Arbeitsverrichtung

Gegeben sei ein mit einem Gas gefüllter und mit einem Kolben abgeschlossener, isolierter Zylinder. Das Gas habe eine konstante Wärmekapazität C_V. Der Kolben möge Arbeit verrichten können, etwa durch Kompression einer Spiralfeder, siehe die Abbildung.

Im Folgenden soll die Änderung der Temperatur des Gases bei *quasistatischer* Expansion untersucht werden.

a) Welche thermodynamischen Größen des Gases bleiben konstant beim Prozess der Expansion des Gases und simultaner Kompression der Feder? (3 Punkte)

b) Weisen Sie die Maxwell-Relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

nach. (6 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass bei konstanter Entropie die Änderung der Temperatur des Gases mit der Änderung des Volumens durch

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{(\partial p/\partial T)_V}{C_V/T} \tag{1}$$

gegeben ist. (7 Punkte)

d) Werten Sie Gleichung (1) für das van der Waals-Gas mit der Zustandsgleichung

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

aus. (4 Punkte)

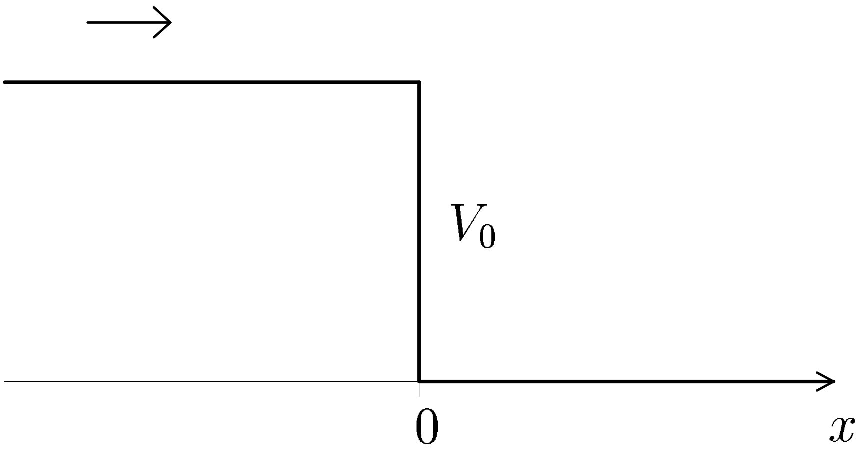
e) Das van der Waals-Gas habe die Anfangstemperatur T_1 und das Volumen V_1. Berechnen Sie die Temperatur T_2 für eine Expansion von V_1 nach V_2. (5 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Potentialstufe – abwärts

Ein nicht-relativistisches quantenmechanisches Teilchen (Masse m) falle von links ($x < 0$) auf die absteigende Potentialstufe der Tiefe V_0 (siehe Zeichnung). Die kinetische Energie des einfallenden Teilchens sei K. Das Problem ist eindimensional.



a) Stellen Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung auf. Geben Sie den Lösungsansatz auf beiden Seiten der Stufe an, und begründen Sie ihn. (8 Punkte)

b) Bestimmen Sie explizit die Lösung zur Energie $E = K + V_0$. Normieren Sie die Amplitude der einfallenden Welle auf 1. (8 Punkte)

c) Wie hängt der Reflexionskoeffizient dieser Potentialstufe bei festgehaltenem K von V_0 ab? Betrachten Sie insbesondere die Grenzfälle $V_0/K \ll 1$ und $V_0/K \gg 1$. Vergleichen Sie mit dem Verhalten eines klassischen Teilchens, und erklären Sie das quantenmechanische Ergebnis qualitativ. (9 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Induziertes Diplolmoment und Polarisierbarkeit

Ein Elektron, das in einem Atom oder Molekül gebunden ist, lässt sich oft in guter Näherung als (quantenmechanischer) 3-dimensionaler harmonischer Oszillator beschreiben. Wenn wir die Ladung des Elektrons mit e bezeichnen und an ein solches System ein homogenes, statisches elektrisches Feld $\vec{E}$ anlegen, lautet die potentielle Energie

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 - e\vec{E} \cdot \vec{r}.$$

a) Wie ändern sich die Energien und Entartungsgrade der Eigenzustände des 3-dimensionalen harmonischen Oszillators aufgrund des äußeren elektrischen Feldes? (Nur die Änderung angeben.)

   Hinweis: Führen Sie das vorliegende Problem durch eine geeignete Koordinatentransformation auf das des harmonischen Oszillators ohne elektrisches Feld zurück. (9 Punkte)

b) Das elektrische Feld induziert ein Dipolmoment

$$\vec{D} = e\vec{r}.$$

   Bestimmen Sie den Erwartungswert des entsprechenden quantenmechanischen Dipol-Operators im Grundzustand. Nutzen Sie hierbei die Koordinatentransformation aus Teilaufgabe (a) aus, und führen Sie das Problem zurück auf einen Erwartungswert des gewöhnlichen harmonischen Oszillators. Was erhält man für die Polarisierbarkeit α, definiert durch

$$\langle \vec{D} \rangle = \alpha \vec{E} \ ?$$

   (8 Punkte)

c) Was lässt sich über die Polarisierbarkeit in angeregten Zuständen aussagen?

   Hinweis: Begründen Sie, dass der Erwartungswert von $\vec{r}$ in allen angeregten Zuständen des harmonischen Oszillators verschwindet. Warum gilt das auch für die entarteten Zustände? Verwenden Sie ein Symmetrieargument. (8 Punkte)