Es hat sich gezeigt, dass man viele Bereiche der Physik mithilfe des Variationsprinzips beschreiben kann. In der theoretischen Mechanik besagt das Hamiltonsche Prinzip, dass für die tatsächliche Bahn eines Teilchens die Wirkung extremal ist. Die Wirkung ist definiert als

$$S(\gamma) = \int dt L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)\,.$$

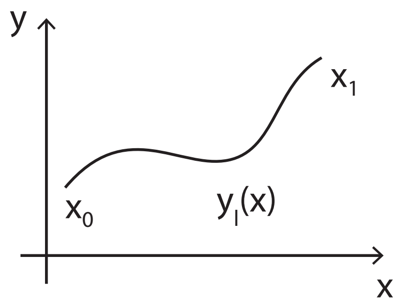
Was ist die Definitionsmenge und die Wertemenge von S? Was ist γ?

Die Wirkung ist also keine Funktion der Form $\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, so dass die in der Schule kennengelernte Berechnung der Extrema über die erste Ableitung hier nicht verwendet werden kann. Eine Funktion, wie die Wirkung, in die eine Funktion eingesetzt wird und eine Zahl herauskommt, nennt man Funktional. Die Variationsrechnung ist eine mathematische Methode diejenige Funktion zu bestimmen, für die das Funktional extremal wird, z.B. die Bahn eines Teilchens, den optischen Lichtweg, den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten etc..
Die dabei auftretenden Funktionale sind von der Form

$$S = \int_{x_0}^{x_1} f(y(x), y'(x), x) dx\,.$$

Überprüfen Sie, ob die Wirkung diese Form hat.

Im Folgenden betrachten Sie hier das Beispiel einer Bahnkurve $y(x)$. Die gesuchte Lösung bezeichnen wir mit $y_l(x)$, eine Kurve, die nahe an der Lösungskurve liegt mit $Y(x)$. Zeichnen Sie in den nebenstehenden Graphen zwei mögliche Kurven $Y(x)$ ein. Beachten Sie, dass $Y(x)$die gleichen Randbedingungen hat wie $y_l(x)$.



Stellen Sie nun $Y(x)$ mit Hilfe von $y_l(x)$ und einer Funktion $\alpha\eta(x)$ dar, die die Abweichung der nahen Kurve von der Lösungskurve beschreibt. Der Faktor α skaliert dabei die Größe der Abweichung.

Welchen Wert hat η an den Stellen x_0 und x_1?

Für welchen Wert von α ist das Funktional S extremal? Wie sieht $Y(x)$ aus? (keine Rechnung)

Wie sieht das Integral $S(\alpha)$ für die Kurven $Y(x)$ aus?

Überprüfen Sie das notwendige Kriterium, dass $S(\alpha)$ ein Minimum hat. Berechnen Sie dazu zunächst die Ableitung $dS/d\alpha$.

Sie erhalten zwei Terme im Integral. Formen Sie den Term proportional zu $\eta'(x)$ mithilfe partieller Integration so um, dass Sie einen Term proportional zu $\eta(x)$ erhalten.

Setzen Sie Ihr Ergebnis in die Ableitung $dS/d\alpha$ ein. Ihr Ergebnis muss für jedes $\eta(x)$ gelten. Sie erhalten die Euler-Lagrange-Gleichung!

Betrachten Sie zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$. Gesucht wird die Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten, bei der die Fläche, die bei einer Rotation um die y-Achse entsteht, minimal wird. Machen Sie sich zunächst eine Skizze

Wie sieht ein infinitesimales Wegelement ds entlang der Verbindungslinie aus?

Schreiben Sie nun die Rotationsfläche als Funktional.

Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. Hinweis: Sie erhalten eine DGL 1. Ordnung.

Bestimmen Sie die Verbindungslinie. Hinweis: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh}(x)$.