Tutorium zur Theoretischen Mechanik

Vektoranalysis & d'Alembert'sches Prinzip

Vektoranalysis zur Erinnerung

Betrachten Sie den Nabla-Operator $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$ mit $\partial_i = \frac{\partial}{\partial i}$. Wie wird er bezeichnet, wenn

(a) er auf ein Skalarfeld angewendet wird ($\vec{\nabla} \cdot a$).

(b) das Skalarprodukt mit einem Vektorfeld gebildet wird ($\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$).

(c) das Kreuzprodukt mit einem Vektorfeld gebildet wird ($\vec{\nabla} \times \vec{a}$).

(d) das Skalarprodukt mit sich selbst gebildet auf ein Skalarfeld angewendet wird ($\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot a$).

Geben Sie auch stets an, was das Ergebnis physikalisch bedeutet beziehungsweise ein typische Beispiel aus der Physik.

Zeigen Sie, dass konservative Kraftfelder wirbelfrei sind.

Prinzip von d'Alembert

Das Prinzip wird dafür verwendet, Systeme zu beschreiben, die durch Zwangsbedingungen eingeschränkt sind. Das führt dazu, dass die Teilchenkoordinaten nicht mehr unabhängig voneinander sind. Die Kräfte, die diese geometrischen Bindungen sicherstellen heißen Zwangskräfte. Nennen Sie Beispiele für Zwangskräfte.

Die Zwangsbedingungen werden klassifiziert als holonome Zwangsbedingungen, die durch Bedingungen der Form $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ..., \vec{r}_n, t) = 0$ dargestellt werden können beziehungsweise nicht-holonome, für die solch eine Darstellung nicht möglich ist. Gelten für ein System p holonome Zwangsbedingungen, so verringert sich die Anzahl an Freiheitsgrade um p. Ist die Zwangsbedingung nicht explizit zeitabhängig, so nennt man sie skleronom, ansonsten rheonom. Stellen Sie die Zwangsbedingungen für folgende Systeme auf und klassifizieren Sie diese.

(a) Hantel

(b) Schiefe Ebene mit/ohne zeitliche veränderlichen Neigung

(c) Teilchen auf unendlich ausgedehnter Zylinderoberfläche ohne Schwerkraft

(d) Teilchen im Aufzug mit konstanter Geschwindigkeit

(e) Teilchen auf Kugeloberfläche im Schwerefeld

Betrachten Sie nun einen Massepunkt im Schwerefeld $\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ mit der Zwangsbedingung $x + a \cdot z - s(t) = 0$. Überlegen Sie sich, was die Zwangsbedingung geometrisch bedeutet.

Die Bewegung des Massepunkts wird durch die treibende Kraft $\vec{F}$, in diesem Beispiel die Gewichtskraft, und die Zwangskraft $\vec{Z}$, die die Zwangsbedingung sicherstellt, bestimmt. Stellen Sie allgemein die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie sie nach der Zwangskraft auf.

Das d'Alembert'sche Prinzip besagt nun, dass Zwangskräfte bei virtuellen Verrückungen (momentan durchgeführte, infinitesimale Koordinatenänderungen, kompatibel mit den Zwangsbedingungen) keine Arbeit leisten $\vec{Z}\delta\vec{r} = \sum_i Z_i \delta r_i = 0$. Multiplizieren Sie die Bewegungsgleichung mit $\delta\vec{r}$ und führen Sie das Skalarprodukt aus.

Da die virtuelle Verrückung der Zwangsbedingung genügen muss, sind δx, δy und δz nicht unabhängig voneinander und man kann die drei Terme nicht einzeln gleich 0 setzen. Verwenden Sie die Zwangsbedingung, um einen Freiheitsgrad zu eliminieren. Stellen Sie dann die zwei unabhängigen Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie sie.

Berechnen Sie mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = 0$ und $\dot{\vec{r}}(0) = 0$ unter der Annahme, dass $l(t) = bt^3$ mit $b > 0$ gilt, wie weit der Massepunkt nach unten rutscht.