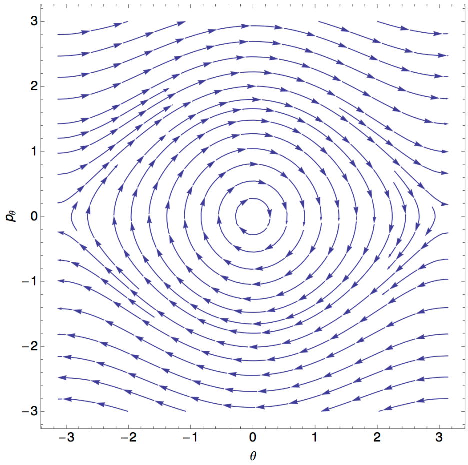
Aufgabe 1



Betrachten Sie das Phasenraum-Diagramm für ein Pendel. Beschreiben Sie mit Hilfe des Diagramms die Bewegungen des Pendels für verschiedene p_θ.

Aufgabe 2

Die fundamentalen Poisson-Klammern sind gegeben durch:

$$\{q_i, q_j\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) = 0$$

$$\{p_i, p_j\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = 0$$

$$\{q_i, p_j\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \delta_{ij} \,.$$

Wir betrachten nun einen zweiten kanonisch konjugierten Variablensatz $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$. Es gelte $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \widetilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$, wobei sich $\widetilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ durch Einsetzen von $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ und $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ aus $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ergibt.

Bestimmen Sie die Poisson-Klammern $\{P_i, P_j\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ und $\{Q_i, P_j\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$. Berechnen Sie dazu

$$\dot{P}_i = \frac{d}{dt} P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

Hinweis: Verwenden Sie die Kettenregel und die kanonischen Gleichungen.

Durch Vergleich erkennen Sie, dass die fundamentalen Poisson-Klammern auch für $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ mit der Basis $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ gelten. (Die Klammer $\{Q_i, Q_j\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ kann analog mit Hilfe von $\dot{Q}$ gezeigt werden.)

Optional: Zeigen Sie, dass der Wert einer Poisson-Klammer unabhängig vom Satz kanonischer Koordinaten ist, der als Basis verwendet wird. Berechnen Sie

$$\{F, G\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} =$$

Hinweis: Verwenden Sie die Kettenregel und die fundamentalen Poisson-Klammern für $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$.