Tutorium zur Theoretischen Mechanik

$\{\mathcal{T}ut\nabla r,um^{\text{TM}}\}$

ϵ-Tensor und Drehungen

Betrachten Sie ϵ_{ijk}, den total antisymmetrische Tensor dritter Stufe oder das Levi-Civita Symbol, d. h.

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{321}$$

und alle anderen Komponenten verschwinden. Betrachten Sie das folgende Produkt zweier ϵ-Tensoren

$$\forall i, j, i', j' \in \{1, 2, 3\} : \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{i'j'k}$$

Welche Kombinationen von i, j, i', j' tragen zur Summe bei?

Bestimmen Sie die zwei Terme und stellen Sie das Ergebnis mithilfe von

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dar.

Die Komponenten der Matrizen für Drehungen um die drei Koordinatenachsen im kartesischen Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) können wie folgt beschrieben werden:

$$R_{n\,ij}(\theta) = \delta_{ni}\delta_{nj}(1 - \cos\theta) - \epsilon_{ijn}\sin\theta + \delta_{ij}\cos\theta\,,$$

wobei $n \in \{1, 2, 3\}$ die Koordinatenachse angibt und $i, j \in \{1, 2, 3\}$ die Komponenten der Matrix. Überprüfen Sie dies, indem Sie die drei Matrizen explizit ausrechnen.

Betrachten Sie nun die Drehung um die Drehachse $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ mit $|\vec{n}| = 1$ um den Winkel θ. Die Komponenten der allgemeinen Drehmatrix können folgendermaßen berechnet werden ($c_\theta = \cos\theta$, $s_\theta = \sin\theta$).

$$R_{ij} = n_i n_j(1 - c_\theta) - \epsilon_{ijk} n_k s_\theta + \delta_{ij} c_\theta\,.$$

Für Interessierte: Die allgemeine Drehmatrix für eine Drehung um eine beliebige Achse kann aus den Drehmatrizen, die die Drehung um die Koordinatenachsen beschreiben, berechnet werden. Statt die Rotation um $\vec{n}$ auszuführen kann die Drehachse mit Hilfe einer Rotation um die y-Achse und die z-Achse auf die x-Achse gelegt werden. Dort rotiert man um die x-Achse mit dem Winkel θ, um im Anschluss die Rotationen um die x- und die z-Achse rückgängig zu machen. Nach länglicher Rechnung erhält man die allgemeine Drehmatrix.

Überprüfen Sie im Indexkalkül, ob für die allgemeine Drehmatrix gilt: $R^T R = \mathbf{1}$. Berechnen Sie zunächst:

$$\sum_{k,m=1}^{3} \epsilon_{ikm} n_k n_m$$

Zeigen Sie mit Hilfe von $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ und $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, dass bei zwei aufeinanderfolgenden Drehungen um dieselbe Achse $\vec{n}$ gilt:

$$[R(\theta)R(\theta')]_{ij} = [R(\theta+\theta')]_{ij}$$

Wer immer noch nicht genug hat, kann im Indexkalkül zeigen, dass die Determinante der allgemeinen Drehmatrix 1 ist.
Tipp:

$$\det R = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} R_{1i} R_{2j} R_{3k}$$