

Übungen zur theoretischen Mechanik

Übungsblatt VII

Besprechung in den Übungen am 3. und 5. Dezember 2018

I. Steinerscher Satz

Der Trägheitstensor hängt von der Wahl des Ursprungspunkts P ab. Sei P der Schwerpunkt und P' ein anderer körperfester Punkt eines starren Körpers, der aus N starr miteinander verbundenen Massenpunkten m_i besteht. Es gilt $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{a}$ für jeden Massenpunkt (siehe Abb. 1).

- Nennen Sie die Definition des Trägheitstensors I_{lm} für diesen starren Körper.
- Berechnen Sie den Trägheitstensor I'_{lm} im gestrichenen Koordinatensystem mit Ursprung P' . Vereinfachungen ergeben sich dadurch, dass P der Schwerpunkt ist. Die Gesamtmasse des starren Körpers sei M .
- Betrachten Sie die Drehachse, die durch den Einheitsvektor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ gegeben ist. Diese Drehachse wird senkrecht zum Vektor \vec{a} gewählt. Leiten Sie aus dem Ergebnis von Aufgabenteil b) den *Steinerschen Satz* her:

$$I' = I + Ma^2. \quad (1)$$

Hierbei sind I' , I die Trägheitsmomente bezüglich der Drehachse \vec{n} im jeweiligen Koordinatensystem.

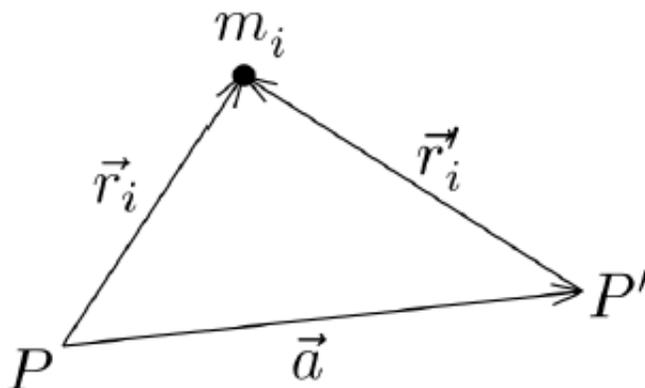


Abbildung 1. Ortsvektor in zwei unterschiedlichen körperfesten Systemen.

(bitte wenden)

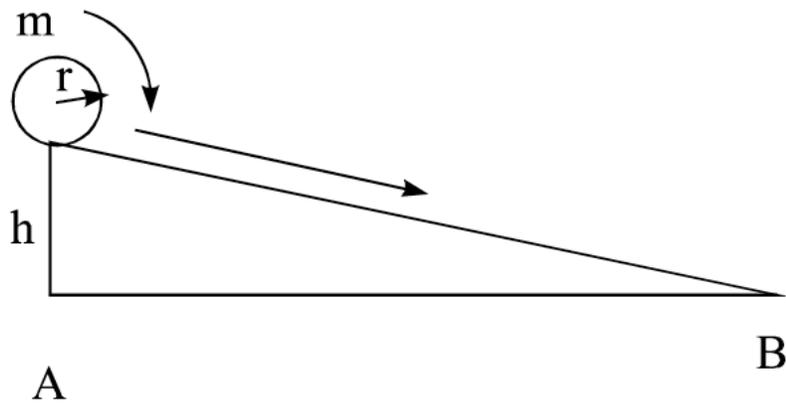


Abbildung 2: Eine Kugel rollt eine schiefe Ebene hinab.

II. Starrer Körper I

- a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer dreidimensionalen Kugel von konstanter Dichte mit Gesamtmasse M und Radius R .
- b) Die Kugel rollt eine schiefe Ebene hinab (siehe Abbildung 2). Berechnen Sie ihre Translationsgeschwindigkeit im tiefsten Punkt der Ebene.

English version: Rigid body I

- a) Calculate the moment of inertia of a three-dimensional ball of constant density with total mass M and radius R .
- b) The ball rolls on an inclined plane (see figure 2). Calculate its translation velocity at the lowest point of the plane.

(bitte wenden)

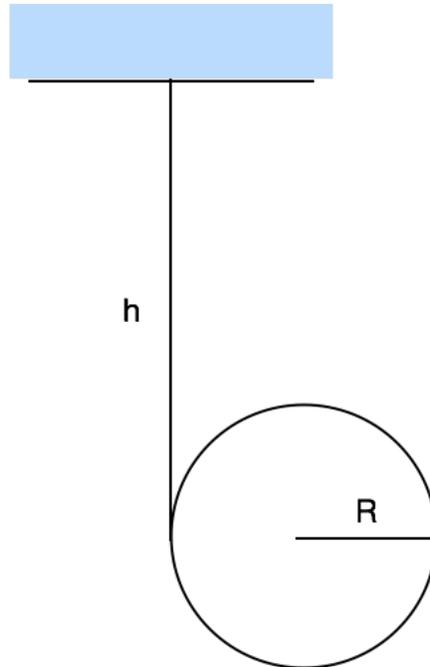


Abbildung 3: Jo-Jo.

III. Starrer Körper 2: Jo-Jo

Wir betrachten einen homogenen Zylinder der Masse M , dem Radius R und dem Hauptträgheitsmoment I bezüglich der Längsachse unter dem Einfluss der Schwerkraft.

Auf den Zylinder ist ein Faden der Länge L aufgewickelt, dessen freies Ende an der Zimmerdecke befestigt ist. Wir nehmen an, dass sich der Schwerpunkt des Zylinders nur in vertikaler Richtung bewegen kann und die Längsachse des Zylinders immer in dieselbe Richtung zeigt. Die Anordnung ist ein einfaches Modell für ein Jo-Jo.

Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Systems und deren Lösung für den Fall, dass die Rolle am Anfang in einer bestimmten Höhe losgelassen wird, wenn eine Strecke h des Fadens bereits abgewickelt ist.

Hinweis: Lösen Sie die Bewegungsgleichungen zunächst für beliebige Anfangsbedingungen für den Zeitraum bis zum Erreichen des Fadenendes und danach für die anschließende Aufwärtsbewegung. Setzen Sie diese Teillösungen dann geeignet zusammen. Nehmen Sie dabei an, dass $R \ll L$ und dass der Faden masselos, sehr dünn, nicht dehnbar und sehr leicht biegsam ist. Vernachlässigen Sie den genauen Bewegungsverlauf beim Übergang von der Abwärts- zur Aufwärtsbewegung.