Prof. Dr. Johanna Erdmenger Julius-Maximilians-Universität Würzburg

**Übungen zur theoretischen Mechanik**

**Übungsblatt VI**

**Besprechung in den Übungen am 26. und 28. November 2018**

## I. **Cycloid (Zykloide)**

A point mass is located on a wheel of radius $R$ that rolls on a horizontal plane at constant velocity without slipping. This is an idealised picture for the valve on a bicycle wheel, with the bicycle riding on a horizontal road at constant velocity.

Establish the motion constraints. How many generalized coordinates are there? Calculate the trajectory of the point mass. Calculate the length of the path that the mass point has travelled when the wheel has completed a full turn.

(Ein Massenpunkt befindet sich auf einem Kreis mit Radius $R$, der auf einer waagerechten Ebene mit konstanter Geschwindigkeit abrollt, ohne zu gleiten. Dies ist ein idealisiertes Bild für das Ventil an einem Fahrradreifen. Das Fahrrad fahre mit konstanter Geschwindigkeit auf einer ebenen Straße.
Stellen Sie die Zwangsbedingungen auf. Wieviele generalisierte Koordinaten gibt es? Bestimmen Sie die Bahnkurve des Massenpunkts. Berechnen Sie die Bahnlänge nach einer vollen Umdrehung des Kreises.)

## II. **Variationsrechnung: Brachistochronenproblem**

Wir betrachten einen Massepunkt der Masse $m$, der anfänglich am Ort $(x_0, y_0)$ ruht. Entlang welcher Kurve (gegeben durch eine vorgefertigte Schiene) gleitet dieser Massepunkt unter dem Einfluss der Schwerkraft innerhalb der kürzesten Zeit zum tiefer gelegenen Punkt $(x_1, y_1)$?

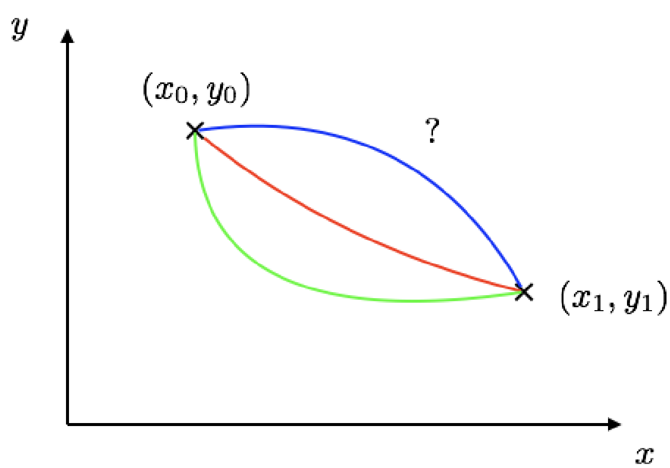


Abbildung 1. Brachistochronenproblem.

(bitte wenden)

III. **Rutherford-Streuproblem**

In der Vorlesung wird die Berechnung des Streuwinkels $\Theta$ für beliebiges radiales Streupotential $V(r)$ vorgestellt. Mit Hilfe der in Abbildung 2 eingeführten Koordinaten ergibt sich

$$\Theta = \pi - \frac{2sp}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{p^2}{2m} - \frac{s^2 p^2}{2mr^2} - V(r)}} \,. \tag{1}$$

Hierbei ist $s$ der Stoßparameter, d.h. der Abstand des einlaufenden Teilchens von der gezeigten Achse bei $r \to \infty$ vor der Streuung, und $p$ der Betrag des Impulses des einlaufenden Teilchens. Weiterhin wird gezeigt, dass das Perihel $r_0$ durch die Gleichung

$$E\left(1 - \frac{s^2}{r_0^2}\right) - V(r_0) = 0 \tag{2}$$

gegeben ist, mit $E = p^2/(2m)$.

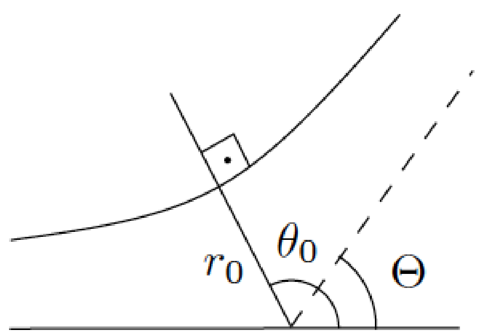


Abbildung 2. Zeitumkehrsymmetrie der Bahn eines am Zentralpotential gestreuten Teilchens.

Wir betrachten nun als Beispiel die Rutherfordstreuung am Coulomb-Potential

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} \,. \tag{3}$$

.

a) Berechnen Sie den Streuwinkel $\Theta$ für die Rutherford-Streuung als Funktion von $E$, $s$ und $\alpha$.

b) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung am Coulomb-Potential und leiten Sie damit die *Rutherfordsche Streuformel* her:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{16E^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}} \,. \tag{4}$$