

**Übungen zur theoretischen Mechanik****Übungsblatt V****Besprechung in den Übungen am 19. und 21. November 2018****I. Lagrangegleichungen 1. Art**

Ein Massenpunkt bewegt sich reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft auf der Oberfläche eines Paraboloids, der durch  $z = kr^2$  gegeben ist (siehe Abbildung 1).

- Wie lautet die Zwangsbedingung ?
- Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Lagrangegleichungen 1. Art auf.
- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die  $r$ - und  $\phi$ -Koordinaten auf, indem Sie den Lagrange-Multiplikator mit Hilfe der Zwangsbedingungen eliminieren. (Die Lösung der Bewegungsgleichungen ist nicht erforderlich.)
- Berechnen Sie die  $z$ -,  $r$ - und  $\phi$ -Komponenten der Zwangskraft als Funktion der unabhängigen Koordinaten und Geschwindigkeiten (Eine Kraft darf nicht explizit von Beschleunigungen abhängen.)

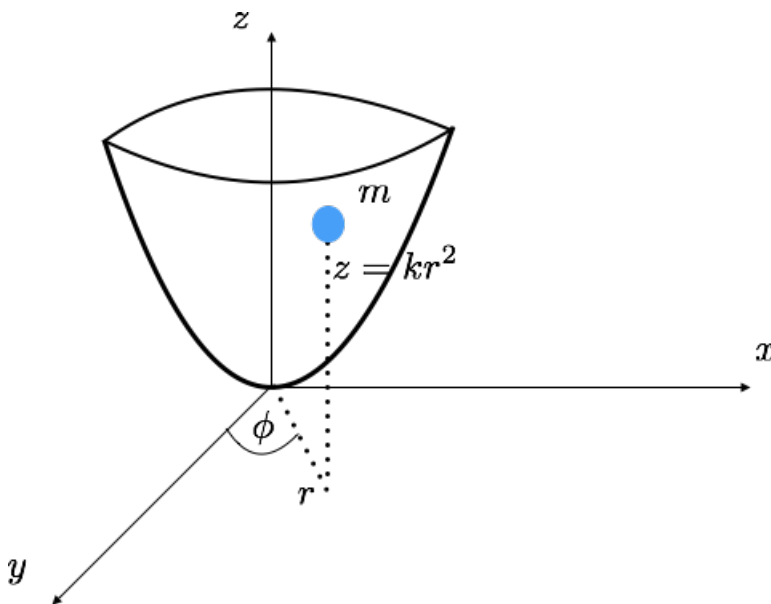


Abbildung 1. Massenpunkt auf einem Paraboloiden.

(bitte wenden)

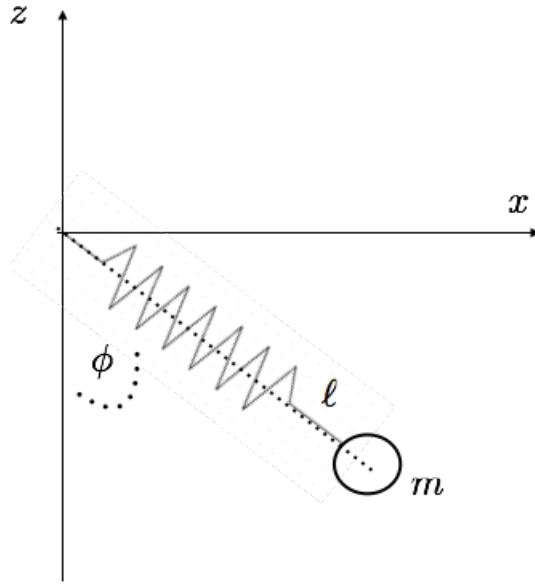


Abbildung 2: Federpendel.

## II. Lagrange-Gleichung 2. Art

Das Federpendel in Abbildung 2 besteht aus einem Massenpunkt der Masse  $m$  und einer Feder mit Federkonstante  $c$ . Es wirken die Schwerkraft und die Federkraft entlang der Feder. Die momentane Länge der Feder wird mit  $\ell$ , die Ruhelage der Feder wird mit  $\ell_0$  bezeichnet, so dass die Federkraft  $\vec{F} = -c(\ell - \ell_0)\vec{e}_r$  wirkt. Wir nehmen an, dass sich das Federpendel nur in der  $(x, z)$ -Ebene bewegt.

- Stellen Sie die Zwangsbedingungen auf. Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten.
- Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und berechnen Sie die Lagrange-Gleichungen.
- Lösen Sie die Lagrange-Gleichungen für den Spezialfall  $\phi(t=0) = \dot{\phi}(t=0) = 0$  und beschreiben Sie die zugehörige Bewegung.

(bitte wenden)

### III. Energy conservation

Consider a Lagrangian  $L(q, \dot{q}, t)$  that is invariant under time translations  $t \rightarrow t' + a$  with constant  $a$ .

a) Show that  $L$  does not depend on time explicitly, i.e.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

b) Calculate the total time derivative  $\frac{dL}{dt}$ . Show that the function

$$H \equiv \sum_{i=1}^{3N-p} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$$

is independent of time,  $dH/dt = 0$ .  $H$  is called the *Hamiltonian*.

### IV. Noether-Theorem

Gegeben sei ein Massenpunkt der Masse  $m$ , der sich unter dem Einfluss eines Potentials  $V(r, \phi, z)$  auf der Oberfläche eines in  $z$ -Richtung unendlich ausgedehnten Kreiszyinders mit Radius  $R$  um die Symmetrieachse gegeben durch  $\vec{e}_z$  bewegt.  $(r, \phi, z)$  sind Zylinderkoordinaten. Das Potential besitzt die Symmetrie einer Schraubenlinie mit Ganghöhe  $c$ ,

$$V(r, \phi, z) = V(r, \phi + \alpha, z + \frac{c}{2\pi}\alpha),$$

für alle reellen Transformationsparameter  $\alpha$ .

Bestimmen Sie mit Hilfe des Noether-Theorems die Erhaltungsgröße, die sich aus der Symmetrie des Potentials ergibt.