

Übungen zur theoretischen Mechanik

Übungsblatt XIV - Probeklausur

Besprechung in den Übungen am 4. und 6. Februar 2019

Es gibt 4 Aufgaben à 25 Punkten. Die erste Aufgabe enthält eine Liste von Verständnisfragen. Die weiteren 3 Aufgaben sind Textaufgaben.

In der Klausur muss jedes Blatt mit Name und Matrikelnummer gekennzeichnet werden. Bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt beginnen.

I. Verständnisfragen

Beantworten Sie kurz (2-3 Sätze oder Gleichungen) die folgenden Fragen:

- a) Nennen Sie die Newtonschen Axiome. (3 Punkte)
- b) Was sind holonome Zwangsbedingungen und worin liegt ihre Bedeutung? (2 Punkte)
- c) Was ist ein konservatives Kraftfeld? (2 Punkte)
- d) Was besagt das Prinzip der stationären Wirkung? (3 Punkte)
- e) Wie lauten die Lagrangegleichungen 2. Art? (2 Punkte)
- f) Was ist der Unterschied zwischen den Lagrangeformalismen 1. und 2. Art? (3 Punkte)
- g) Wie erhält man die Hamiltonfunktion aus der Lagrangefunktion? (3 Punkte)
- h) Welche der folgenden Transformationen sind kanonisch? (a und b sind Konstanten.) (3 Punkte)

1. $(q, p) \rightarrow (Q, P) = (a - p, b + q)$,

2. $(q, p) \rightarrow (Q, P) = (ap, q/a)$,

3. $(q, p) \rightarrow (Q, P) = (p + q, p - q)$.

- i) Wie lauten die beiden Additionsregeln für relativistische Geschwindigkeiten $v_1, v_2 \leq c$? (2 Punkte)

$$v \oplus c = ? , \quad v_1 \oplus v_2 = ? \quad (1)$$

- j) Wie ist der Phasenraum definiert und welche Bedeutung hat er? (2 Punkte)

II. Mit Feder gekoppelte Massen im freien Fall

Zwei Massen m_1 und m_2 bewegen sich entlang der z -Achse (eindimensionales System). Sie sind durch eine Feder der Federstärke k und Ruhelänge $l = 0$ miteinander verbunden. Weiterhin wirkt auf beide die Schwerkraft.

1. Geben sie die Lagrangefunktion für dieses System in Abhängigkeit der Positionen z_1 und z_2 der beiden Massen an.
2. Führen Sie eine geschickte Transformation in neue Koordinaten q_1, q_2 durch, so dass die Lagrangefunktion entkoppelt; d. h. die Lagrangefunktion soll von der Form

$$L = L_1(q_1) + L_2(q_2) \quad (2)$$

sein.

3. Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für diese neuen Koordinaten auf und lösen Sie sie.

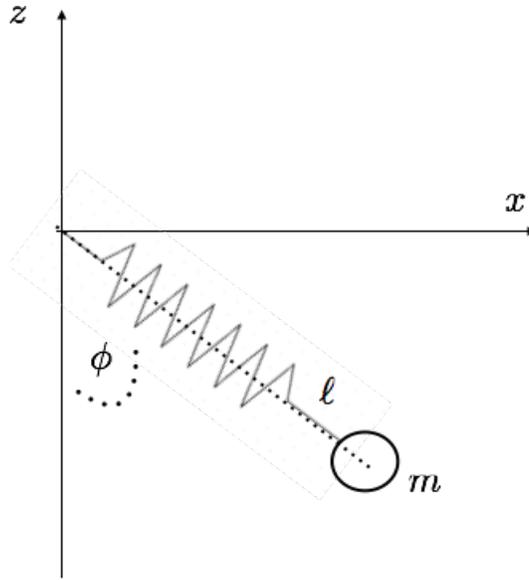


Abbildung 1: Federpendel.

III. Federpendel

Das Federpendel in Abbildung 1 besteht aus einem Massenpunkt der Masse m und einer Feder mit Federkonstante c . Es wirken die Schwerkraft und die Federkraft entlang der Feder. Die momentane Länge der Feder wird mit ℓ , die Ruhelage der Feder wird mit ℓ_0 bezeichnet, so dass die Federkraft $\vec{F} = -c(\ell - \ell_0)\vec{e}_r$ wirkt. Wir nehmen an, dass sich das Federpendel nur in der (x, z) -Ebene bewegt.

- Stellen Sie die Zwangsbedingungen auf. Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten.
- Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen.
- Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für den Spezialfall $\phi(t=0) = \dot{\phi}(t=0) = 0$ und beschreiben Sie die zugehörige Bewegung.

IV. Kreisel im Hamilton-Formalismus

Betrachten Sie einen symmetrischen Kreisel mit $I_1 = I_2 = I$, $I_3 = 0$ mit Gesamtmasse M .

a) Skizzieren Sie die Geometrie dieses Körpers. Welche Folgen hat insbesondere $I_3 = 0$?

Der Körper sei im Abstand ℓ vom Schwerpunkt im Schwerfeld aufgehängt. Eine geeignete Lagrangefunktion als Funktion der Euler-Winkel (ϕ, θ) ist dann

$$L = \frac{I}{2} \left(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right) - M g \ell \cos \theta.$$

b) Begründen Sie (in Worten), warum L nicht vom dritten Eulerwinkel ψ und der zugehörigen Geschwindigkeit $\dot{\psi}$ (Drehung um die Figurenachse) abhängt.

c) Bestimmen Sie die konjugierten Impulse.

d) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion aus einer Legendre-Transformation.

e) Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

f) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage, gegeben durch $(\theta, p_\theta, \phi, p_\phi) = \text{const.}$.

g) Bestimmen Sie die zwei Erhaltungsgrößen des Systems und interpretieren Sie sie physikalisch.