

Übungen zur theoretischen Mechanik

Übungsblatt XII

Besprechung in den Übungen am 21. und 23. Januar 2019

I. Hamilton-Jacobi-Theorie

Betrachten Sie einen Massenpunkt m im Schwerfeld, $V(z) = mgz$. Wir können uns auf die (x, z) -Ebene beschränken.

- a) Stellen Sie die Hamiltonfunktion für diesen Massenpunkt auf.
- b) Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung für diesen Massenpunkt auf.
- c) Zeigen Sie: Die Hamilton-Jacobi-Gleichung ist durch den Ansatz $S(x, z) = S_1(x) + S_2(z)$ für die Wirkungsfunktion lösbar. Führen Sie zwei Integrationskonstanten ein. Eine davon kann gleich der Energie gesetzt werden. Berechnen Sie $S(x, z)$.
- d) Berechnen Sie nun $z(t)$. Erläutern Sie Ihr Ergebnis.

(bitte wenden)

II. Wiederholung: Lagrangeformalismus 2. Art

Atwoodsche Fallmaschine

Ein Hohlwalze (Radius R , Masse m_h , Länge L_h , die Masse sei homogen in der Schale zwischen $0.9R$ und R verteilt) und eine Vollwalze (Radius R , Masse m_v , Länge L_v , die Masse homogen zwischen 0 und R verteilt) seien mittels eines über eine masselose Rolle laufendes Seil der Länge ℓ miteinander gekoppelt. Beide Walzen befinden sich auf schiefen Ebenen mit Neigungswinkeln $0 \leq \alpha_h \leq \pi/2$ und $0 \leq \alpha_v \leq \pi/2$ im Schwerfeld der Erde (siehe Abbildung).

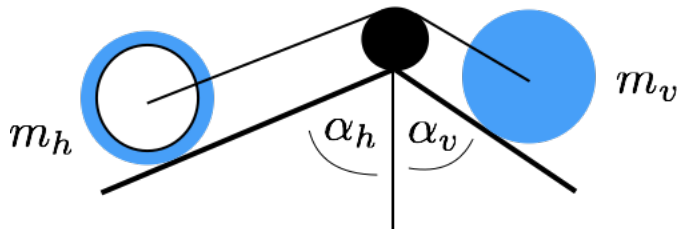


Abbildung: Hohlwalze und Vollwalze auf einer schiefen Ebene.

- Berechnen Sie die Trägheitsmomente der beiden Walzen und verwenden Sie diese für die weitere Aufgabe.
- Geben Sie die Zwangsbedingungen und geeignete generalisierte Koordinaten an. Bemerkung: Für die Berechnung der Trägheitsmomente wurde oben die Länge der Walzen angegeben. Hier reicht es nun, das zweidimensionale Problem zu betrachten.
- Geben Sie die Lagrangefunktion an und berechnen Sie die Lagrange-Gleichungen.
- Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für den Spezialfall, dass $L_h = L_v$, $m_h = m_v$, $\alpha_h = \pi/2, \alpha_v = \pi/4$, mit den Anfangsbedingungen

$$\dot{\ell}_h(t=0) = \dot{\ell}_v(t=0) = 0, \quad \ell_h(t=0) = \ell_v(t=0) = \ell/2$$

.

- Berechnen Sie die potentielle und die kinetische Energie beider Walzen als Funktion der Zeit.