Prof. Dr. Johanna Erdmenger Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Übungen zur theoretischen Mechanik

Übungsblatt XI

Besprechung in den Übungen am 14. und 16. Januar 2019

I. **Fundamentale Poisson-Klammern und kanonische Transformationen**

Beweisen Sie die folgende Aussage: Die Phasenraumtransformation $(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i)$ ist genau dann kanonisch, wenn die fundamentalen Poisson-Klammern für die neuen Koordinaten gelten, also wenn

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0\,, \quad \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}\,.$$

Beweisidee: Berechnen Sie $\dot{Q}_i$ sowie $\dot{P}_i$ und führen Sie eine kanonische Transformation mit der Erzeugenden $F_2 = F_2(q_i, P_i, t)$ durch.

II. **Kanonische Invarianz des Phasenraumvolumens**

Betrachten Sie eine kanonische Transformation $q_i \to Q_i(q_j, p_j, t)$, $p_i \to P_i(q_j, p_j, t)$, die durch eine Funktion $F_1(q_i, Q_i, t)$ erzeugt wird. Zeigen Sie, dass das endliche Phasenraumvolumen

$$V = \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$$

invariant unter der kanonischen Transformation ist. (Es werden geeignete Integrationsgrenzen angenommen.)

Hinweis: Zeigen Sie hierfür, dass die Funktionaldeterminante (d.h. die Jacobi-Determinante) für die Transformation des Integrals auf die neuen Koordinaten gleich eins ist. Benutzen Sie hierfür

$$\frac{\partial P_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j}\,.$$

Die gezeigte Invarianz des Phasenraumvolumens ist wichtig für den Beweis des Satzes von Liouville.

(bitte wenden)

III. **Konstruktion von Erzeugenden kanonischer Transformationen**

Ein Teilchen der Masse $m = 1/2$ bewegt sich auf der x-Achse im Potential $V(x) = \exp(x)$.

Berechnen Sie die nicht explizit zeitabhängige Erzeugende $F_2(x, P)$, die die Hamiltonfunktion

$$H = p^2 + e^x \qquad \text{auf} \qquad K = \frac{P^2}{4}$$

transformiert. Bestimmen Sie die Transformationsgleichungen und geben Sie $x(t)$ und $p(t)$ an.