

Skriptum zur Theoretischen Mechanik

Prof. J. Erdmenger

Constantin Mierau, Marius Möller et.al.

Januar 2019

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur zweiten, unvollständigen Fassung	5
Vorwort zur ersten, unvollständigen Fassung	5
1 Theoretische Mechanik - Einführung	7
1.1 Was ist theoretische Physik?	7
1.2 Kinematik: Grundlagen	8
1.3 Dynamik: Grundlagen	10
1.4 Wechsel des Bezugssystems und Scheinkräfte	12
1.5 Arbeit und Energie	15
1.6 Newton-Mechanik für Mehrteilchensysteme	19
2 Lagrangesche Mechanik	21
2.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte	22
2.2 Holonome Zwangsbedingungen	23
2.2.1 Holonom-skleronome Zwangsbedingung	23
2.2.2 Holonom-rheonome Zwangsbedingung	23
2.2.3 Anzahl der Freiheitsgrade	24
2.3 Nicht-Holonome Zwangsbedingungen	24
2.3.1 Zwangsbedingungen als Ungleichungen	24
2.3.2 Zwangsbedingungen in differentieller, nicht integrierbarer Form	24
2.4 Generalisierte Koordinaten und Konfigurationsraum	25
2.5 Virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}_i$	26
2.6 D'Alembertsches Prinzip	27
2.7 Die Lagrange-Gleichungen 2.Art	30
2.7.1 Herleitung aus dem d'Alembertschen Prinzip	30
2.8 Die Lagrange-Funktion	33
2.9 Die Lagrange-Gleichungen 2.Art	33
2.10 Die Lagrange-Gleichungen 1.Art	35
2.10.1 How to...: Lagrange-Gleichungen 1.Art	37
2.11 Forminvarianz der Lagrange-Gleichung unter Koordinatentransformation	39
2.12 Symmetrien und Erhaltungsgrößen	41
2.12.1 Symmetrie	41
2.13 Noether-Theorem	42

Inhaltsverzeichnis

2.14	Beweis des Noether-Theorems	43
2.15	Eichinvarianz der Lagrange-Gleichungen	44
3	Anwendungen der Lagrangeschen Mechanik	47
3.1	Zentralkraftprobleme und Keplersche Gesetze	47
3.1.1	2. Keplersches Gesetz	48
3.1.2	1. Keplersches Gesetz	49
3.1.3	3. Keplersches Gesetz	50
4	Der starre Körper	51
4.1	Kinetische Energie des starren Körpers	52
4.2	Trägheitstensor, Trägheitsmoment	53
4.3	Der Drehimpulssatz	54
4.4	Die Euler-Gleichungen	54
5	Kleine Schwingungen	61
5.1	Lineare Schwingungen	61
5.2	Erzwungene Schwingungen	62
5.3	Gedämpfte Schwingungen	62
5.4	Schwingungen von Systemen mehrerer Freiheitsgrade	62
6	Hamiltonsche Mechanik	67
6.1	Das Hamiltonsche Prinzip	67
6.1.1	Variationsrechnung	67
6.2	Der Hamilton-Formalismus	70
6.2.1	Legendre-Transformation	71
6.2.2	Die Hamilton-Funktion	72
6.2.3	Forminvarianz unter einer Punkttransformation	75
6.2.4	Der Phasenraum	75
6.2.5	Zyklische Koordinaten	76
6.3	Die Poisson-Klammern	78
6.4	Kanonische Transformation	80
6.4.1	Erzeugende Funktionen	81
6.4.2	Herleitung der Hamiltonschen Gleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip	82
6.5	Satz von Liouville	85
6.6	Hamilton-Jacobi-Theorie	88
6.6.1	Die Hamilton-Jacobi-Gleichung	88
6.6.2	How to: Hamilton-Jacobi-Gleichung	89
7	Literaturverzeichnis	93

Vorwort zur zweiten, unvollständigen Fassung

Im Rahmen der zweiten unvollständigen Fassung dieses Skriptes wurde der Hamilton-Formalismus sowie Anwendungsbeispiele ergänzt. Die fehlenden Abschnitte zur speziellen Relativitätstheorie und chaotischen Systemen sowie weitere Ergänzungen werden voraussichtlich im März hinzugefügt. Das Skript hat keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Wir wünschen allen Studierenden eine erfolgreiche Klausurenphase.

Constantin Mierau, Marius Möller im Januar 2019

Vorwort zur ersten, unvollständigen Fassung

Dieses Skriptum wird im Laufe der Vorlesung ergänzt und in unregelmäßigen Abständen erneuert. Es hat damit also keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Das nächste größere Update wird voraussichtlich Mitte Januar erscheinen. Wir wollen neben der Fortführung des theoretischen Stoffes auch mehr Beispiele einbinden.

Gleichzeitig wollen wir die Gelegenheit nutzen, unsere fleißigen Vorarbeiter zu würdigen. Im Wintersemester 2017/2018 hat eine Gruppe Studenten je eine Vorlesung mitgeschrieben. Ihre Aufzeichnungen bieten einen Pfeiler, auf dem dieses Skriptum steht. Ihre Namen sind (in ungeordneter Reihenfolge) Florian Wirth, Manuel Kunkel, Johannes Düreth, Moritz Meinecke, Simon Sanke, Petra Albertova, Krzysztof Radacki, Konstantin Weisenberger, Kaja Jurak, Henri Scheppach, Florian Faaber, Lennart Königer und Thorsten Umlauf. Vielen Dank.

Wir wünschen nun allen Studenten, die mit diesem Skriptum lernen, eine ruhige Adventszeit und erholsame, besinnliche Weihnachten.

Constantin Mierau, Marius Möller im Dezember 2018

1 Theoretische Mechanik - Einführung

1.1 Was ist theoretische Physik?

Die theoretische Physik formuliert physikalische Theorien und wendet sie an. Was aber ist genau eine Theorie? Eine Theorie ist eine widerspruchsfreie Formulierung allgemeiner Gesetzmäßigkeiten. Eine Theorie lässt sich nicht mathematisch beweisen, jedoch durch ein einziges Gegenbeispiel falsifizieren. Wissenschaftsphilosophische Ansätze dieser Art gehen zurück auf Sir Karl Popper. Eine Theorie lässt sich zum Beispiel aus der Verallgemeinerung von experimentellen Ergebnissen ableiten und Vorhersagen für neue Experimente treffen. So ergänzen und bedingen sich Theorie und Experiment:

Viele Theorien sind in einem physikalischen Sinne sinnvoll, auch wenn sie nicht im mathematischen Sinne zu beweisen sind. Ein Beispiel für eine sehr ausgereifte und grundlegende Theorie ist die **Theoretische Mechanik**. Sie ist die Lehre der Bewegungen. Ist die Frage nur nach der Art der Bewegung, liefert darauf die Kinematik Antworten. Untersucht man daneben auch die Ursache der Bewegungen, nämlich Kräfte, hilft die Lehre der Dynamik weiter. Im Laufe des Semesters lernen wir weitere Formalismen zur Berechnung von Bewegungsgleichungen neben dem Newton'schen Kraftansatz kennen. Mehr dazu erfahren wir im Kapitel zum Lagrangeansatz und dem Hamiltonprinzip.

Viele Konzepte der Theoretischen Mechanik sind die Grundpfeiler anderer Theorien der theoretischen Physik.

Dabei hilft die Mathematik als Sprache zur Beschreibung der allgemeinen Gesetzmäßigkeiten. Sie ist prägnant und für Berechnungen nützlich. Dazu benötigen wir die Mittel der linearen Algebra, Differential- und Integralrechnung sowie Lösungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL).

Die Theoretische Mechanik soll Vorhersagen über die Bewegung materieller Körper treffen. Zuerst wollen wir materielle Körper idealisieren und Massenpunkte behandeln, später wollen wir unsere Betrachtungen auf starre Körper ausdehnen.

Unser Ziel muss dabei sein, ein Verständnis für die Funktionsweise einer physikalischen Theorie zu erlangen und Techniken anwenden zu können, Bewegungen vorherzusagen.

Beispiele für weitere Theorien sind die Quantenmechanik, statistische Dynamik (Thermodynamik), Feldtheorien (Elektrodynamik) und die allgemeine Relativitätstheorie. Bei der Aufstellung von Theorien bedient man sich oft der systeminhärenten Symmetrie eines Problems.

1.2 Kinematik: Grundlagen

Die Bewegung eines Massenpunktes ist charakterisiert durch die Vektoren Ort $\vec{r}(t)$, die Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$.

Aus Betrachtung der wirkenden Kräfte ist \vec{a} meist gegeben, die Vektoren der Geschwindigkeit und des Ortes erhält man durch ein- bzw. zweimaliges Integrieren. Die Integration führt zu zwei Integrationskonstanten \vec{r}_0 und \vec{v}_0 , die zur genauen Kenntnis der Bewegungsgleichung gegeben sein müssen. In einem ersten - seit dem ersten Semester altbekanntem - Beispiel sei $\vec{a} = \text{const.} = \vec{a}_0$:

$$\vec{v}(t) = \vec{a}_0(t - t_0) + \vec{v}_0, \quad (1.1)$$

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}_0(t - t_0)^2 + \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{r}_0. \quad (1.2)$$

$\vec{v}(t)$ liegt dabei in der von \vec{v}_0 und \vec{a}_0 aufgespannten Ebene. Die Trajektorie $\vec{r}(t)$ liegt ebenfalls in dieser Ebene durch den Punkt \vec{r}_0 .

Für jede Zeit t ist die Geschwindigkeit tangential zur Trajektorie. Die Ebene wird charakterisiert durch den Normalenvektor, gegeben durch das normierte Kreuzprodukt

$$\vec{n} = \frac{\vec{v}_0 \times \vec{a}_0}{|\vec{n}|}. \quad (1.3)$$

\vec{n} ist konstant in der Zeit. Für eine Kreisbewegung in der (x,y)-Ebene haben wir $\vec{n} = \vec{e}_z$. Es ist zweckmäßig, **Zylinderkoordinaten** zu verwenden,

$$x = r \cos(\varphi), \quad (1.4)$$

$$y = r \sin(\varphi), \quad (1.5)$$

$$z = z. \quad (1.6)$$

Die Koordinaten r , φ und z sind paarweise linear unabhängig voneinander. Dies werden wir später bei der Einführung der Lagrange'schen Mechanik brauchen.

Zudem sind sie genau dann bestens geeignet, wenn das Problem eine inhärente Zylinder- oder Rotationssymmetrie aufweist. Die Infinitesimale dx und dy der kartesischen Koordinaten lauten in Zylinderkoordinaten (dz bleibt logischerweise dz):

$$dx = \cos(\varphi)\dot{r} + r \sin(\varphi)\dot{\varphi} \quad (1.7)$$

und

$$dy = \sin(\varphi)\dot{r} + r \cos(\varphi)\dot{\varphi} \quad (1.8)$$

Die normierten Basisvektoren, die den Raum zylindersymmetrisch beschreiben, lauten:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Man beachte: Die Einheitsvektoren sind zeitabhängig! Die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ lässt sich schreiben als $\vec{r}(t) = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$, da $\vec{e}_r = \vec{e}_r(\varphi)$; $\varphi = \varphi(t)$. Wir sehen im Vektor $\vec{r}(t)$ die Abhängigkeit von φ nicht direkt. Sie ist versteckt im Vektor \vec{e}_r , der seinerseits von φ abhängt. Ein infinitesimales Wegstück lässt sich in Zylinderkoordinaten darstellen als:

$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z. \quad (1.12)$$

Um die Geschwindigkeit und Beschleunigung zu erhalten, muss man einmal (zweimal) ableiten und erhält

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z, \quad (1.13)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z. \quad (1.14)$$

1 Theoretische Mechanik - Einführung

Man nehme solche Rechnungen nicht nur gegeben, sondern mache sich die Mühe und verifiziere für sich selbst nach.

Den Vektoren der Geschwindigkeit und Beschleunigung sieht man an, dass es je eine radiale und tangentielle Komponente gibt. Wir wollen zu diesen Rechnungen noch ein Beispiel rechnen. Dazu betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn ($|\vec{r}| = \text{const.} = R$):

$$\vec{v} = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = -R\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Mit $\omega = \dot{\varphi}$ wird die Winkelgeschwindigkeit definiert. Dieser Größe ordnet man einen Vektor zu, der definitionsgemäß senkrecht zur Rotationsebene, also längs der Rotationsachse, steht:

$$\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z \quad (1.15)$$

Außerdem gilt:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v} = \omega R\vec{e}_\varphi \quad (1.16)$$

Eine gleichförmige Kreisbewegung ist genau dann gegeben, wenn $\omega = \text{const.}$, dann wird die Tangentialbeschleunigung $a_\varphi = 0$.

Soweit sollte noch alles aus dem ersten Semester bekannt sein.

1.3 Dynamik: Grundlagen

Das Wort Dynamik kommt aus dem Altgriechischen von $\delta\nu\nu\alpha\mu\iota\kappa\eta$ und bedeutet "mächtig", in der substantivierten Form "Kraft". Damit ist semantisch klar gestellt: In diesem Kapitel geht es um **Kräfte**. Newton hat sich in seiner "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" (1687) intensiv mit Kräften und Bewegungen befasst und folgende 5 Axiome aufgestellt:

N1: Die Geschwindigkeit von Körpern, auf die keine Kräfte ausgeübt werden, ist konstant.

Def.: Träge Masse m_t :

Maß für den Widerstand von Körpern gegen Bewegungsänderungen (skalare Größe)

N2: In einem Inertialsystem ist die Änderung des Impulses eines Körpers pro Zeiteinheit ist gleich der Summe aller angreifenden Kräfte:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \quad (1.17)$$

Ist die Masse konstant, gilt das altbekannte:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (1.18)$$

Der Impuls werde definiert als:

$$\vec{p} = m_t \vec{v} \quad (1.19)$$

N3: Reaktionsprinzip: Die Kraft \vec{F}_{12} , die ein Körper 2 auf einen Körper 1 ausübt, ist betragsgleich entgegengerichtet mit der Kraft \vec{F}_{21} des Körper 1 auf den Körper 2.

N4: Das vierte Axiom besitzt keine allgemeine Gültigkeit. Es postuliert die Ab-solutheit von Raum und Zeit. Dies gilt nur für nicht-relativistische Geschwindig-keiten. Wir werden genau diese Bedingungen am Ende des Semesters fallen lassen, wenn wir uns der Relativitätstheorie widmen.

N5: Superpositionsprinzip: Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper, so ist die gesamt angreifende Kraft gleich der Vektorsumme der einzelnen Kräfte:

$$\vec{F}_{res} = \sum_i \vec{F}_i \quad (1.20)$$

Wir wollen im Folgenden drei kurze Beispiele für Kräfte anbringen:

Gewichtskraft: Aufgrund der Erdbeschleunigung \vec{g} ; m_s sei die schwere Masse:

$$\vec{F} = m_s \cdot g \quad (1.21)$$

Aus der Relativitätstheorie (wie wir später sehen werden) gilt für alle Körper, dass die schwere und träge Masse gleich groß sind.

Gravitationskraft: Zwei Massen ziehen sich aufgrund ihrer Masse an. Abstoßen-de Schwerkraft wird unter der Theorie der Quantengravitation diskutiert, steht aber (noch) auf sehr wackeligen Füßen. Es gilt (für die anziehende Gravitation):

$$\vec{F}_{grav}(\vec{r}) = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r \quad (1.22)$$

G ist die Gravitationskonstante und beträgt circa $6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$

(Stoke'sche) Reibungskraft: für laminare Bewegungen (s. BAM, V.5) in einer Flüssigkeit:

$$\vec{F}_s = -\kappa \vec{v} \quad (1.23)$$

Für eine Kugel, die langsam genug durch eine Flüssigkeit fällt, gilt $\kappa = 6\pi r \eta$

1.4 Wechsel des Bezugssystems und Scheinkräfte

Def.: Inertialsystem:

Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, in dem Newton'sches erstes Axiom Gültigkeit besitzt. Damit ist $\vec{v} = \text{const.}$ für Körper, auf die keine Kräfte wirken.

Es gibt mehr als ein Inertialsystem pro betrachtetes Problem.

Oft sind Bezugssysteme nützlich, die keine Inertialsysteme sind (\rightarrow rotierende Bezugssysteme).

In diesen gelten die Newton'schen Axiome nicht (zumindest nicht einfach so wie in einem Inertialsysteme, s. unten), trotzdem lassen sich die Bewegungsgleichungen aufstellen.

Zwei Bezugssysteme seien S, S', sie fallen zum Zeitpunkt $t=0$ zusammen, S sei ein Inertialsystem, es gelte $m\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$ ohne äußere Kräfte. S' gehe aus S durch eine zeitabhängige Translation $\vec{R}(t)$, $\vec{R}(t=0) = \vec{0}$ hervor.

S' ist genau dann ein Inertialsystem, wenn für die Koordinaten \vec{r}' in dem neuen System S' ebenfalls gilt:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{0} \quad (1.24)$$

Der Vektor \vec{r} sei wie folgt definiert:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \quad (1.25)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}}' \quad (1.26)$$

Wir folgern daraus einen speziellen Typ von Transformationen:

$$\begin{aligned} \vec{0} = m\ddot{\vec{r}} &= m(\ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}}'); \quad \rightarrow \quad \ddot{\vec{R}} = \vec{0} \\ \rightarrow \quad \vec{R} &= \vec{v}t \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \vec{v}t + \vec{r}' \end{aligned} \quad (1.27)$$

Da S ein Inertialsystem ist, musste $m\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$ gelten. Soll aber S' wieder ein Inertialsystem sein, muss auch $m\ddot{\vec{r}}' = \vec{0}$ gelten und es bleibt nur $\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$. Ein System S' ist also dann ein Inertialsystem, wenn es sich unbeschleunigt in Bezug zum Inertialsystem, aus dem hervorgegangen ist, bewegt. Bei unserer Transformation haben wir die Zeit invariant gelassen: $t = t'$. Eine solche Art der Transformation nennt man **Galilei-Transformation**. Sie ist die allgemeinste Art der Transformation, die ein System wieder in ein Inertialsystem überführt. Dies geht solange gut, wenn $\vec{v} \ll c$, die Systeme also nichtrelativistisch sind. Diese Annahme werden wir am Ende des Semesters fallen lassen und uns genau mit solchen, relativistischen, Systemen befassen.

Wir wollen nun Transformationen betrachten, die keine Gallileitransformationen

1.4 Wechsel des Bezugssystems und Scheinkräfte

sind (beschleunigte Bezugssysteme):

Für beliebige Transformationen zwischen S und S' gilt

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t), \quad m\ddot{\vec{r}} = m(\ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}}'). \quad (1.28)$$

Wir wollen Kräfte \vec{F}'_i in S' so definieren, dass auch in S' gilt: $\vec{F}' = m\ddot{\vec{r}}'$. Daraus können wir folgern:

$$\vec{F}' = m\ddot{\vec{r}}' = m(\ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{R}}) = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} \quad (1.29)$$

Der Term $m\ddot{\vec{R}}$ ist eine **Scheinkraft**. Wir können also die Newton'schen Axiome (die Bewegungsgleichungen) doch in S' verwenden, wenn wir zur Kraft \vec{F} eine Scheinkraft addieren. Scheinkräfte beruhen nicht auf fundamentalen Kräften, sondern auf der Wahl eines beschleunigten Bezugssystems (bspw. rotierend). Das heißt aber nicht zwangsläufig, dass sie nicht wirken. Der Passatwind erlebt die Corioliskraft genauso wie das Kind im Kettenkarussell die Zentrifugalkraft. Diese Kräfte wirken aber nur innerhalb des Bezugssystems und können von außerhalb betrachtet als Folge anderer Kräfte interpretiert werden.

In der Folge wollen wir uns genauer **rotierenden Bezugssystemen** widmen:

Rotationen sind Koordinatentransformationen, für die gelten:

- 1:** Die Norm aller Vektoren bleibt während aller Rotationen konstant.
- 2:** Der Winkel zwischen Vektoren bleibt gleich.
- 3:** Rechtshändige Systeme bleiben rechtshändige Systeme, keine Spiegelung.

Die Erhaltung von Größen werden wir später als das Resultat von Symmetrien des Systems erkennen. Der Energieerhaltungssatz beispielsweise ist eine Folge einer temporalen Symmetrie. In rotierenden Bezugssystemen ist der Drehimpuls erhalten etc. Eine **Erhaltungsgröße** wie Energie und Drehimpuls lässt sich schreiben als

$$I(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t). \quad (1.30)$$

Sie wird definiert über folgende Eigenschaft:

$$\frac{d}{dt} I(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) = 0 \quad (1.31)$$

Erhaltungsgrößen sind für die theoretische Physik von immenser Bedeutung, denn sie spiegeln die Symmetrie der physikalischen Probleme wider (mehr dazu siehe

1 Theoretische Mechanik - Einführung

Emmy-Noether-Theorem). Sie bieten eine experimentell nachweisbare Aussage an und helfen ungemein bei der Lösung von Problemen (man erinnere sich an die Aufstellung von Bewegungsgleichungen mittels des Energieerhaltungssatzes KP1).

Bei Rotationen in drei Dimensionen kommt es stets auf die Reihenfolge an: Rotationen kommutieren nicht. Für einen beliebigen Vektor gilt:

$$\vec{a}' = R\vec{a}; \quad R \cdot S \neq S \cdot R \quad (1.32)$$

Eine Drehmatrix R werde auf den Vektor \vec{a} angewandt. Danach soll auf das Resultat mit einer weiteren Matrix S multipliziert werden. Das Ergebnis RS stimmt i.A. nicht mit SR überein.

In drei Dimensionen ist R eine orthogonale 3×3 -Matrix, deren Determinante $\det(R) = +1$ ist. Die Menge aller dieser Matrizen bildet die spezielle orthogonale Gruppe $SO(3)$. Dies ist eine nicht-abel'sche Gruppe.

Für infinitesimale Drehungen kann man die Drehmatrix R schreiben als die Einheitsmatrix plus eine kleine Störung:

$$R = 1 + D \quad (1.33)$$

Wie man leicht sieht folgt aus der Orthogonalität von R die Antisymmetrie von D :

$$R^{-1} = R \Rightarrow D^T = -D \quad (1.34)$$

D sieht damit o.B.d.A. aus wie folgt:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -d\Omega_3 & d\Omega_2 \\ d\Omega_3 & 0 & -d\Omega_1 \\ -d\Omega_2 & d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

Für einen beliebigen Vektor \vec{a} gilt:

$$R\vec{a} = (1 + D)\vec{a} = \vec{a} + d\vec{\Omega} \times \vec{a} \quad (1.36)$$

mit:

$$d\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} d\Omega_1 \\ d\Omega_2 \\ d\Omega_3 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

Die infinitesimale Änderung von \vec{a} ist demnach $d\vec{a} = d\vec{\Omega} \times \vec{a}$.

Mithilfe der Zeichnung können wir für den Drehwinkel ϕ einen Ausdruck finden:

$$d\phi = \frac{|d\vec{a}|}{\rho} = \frac{|d\vec{\Omega} \times \vec{a}|}{\rho} = \frac{d\Omega \cdot a \cdot \sin(\vartheta)}{a \cdot \sin(\vartheta)} = d\Omega \quad (1.38)$$

Die infinitesimale Änderung von \vec{a} ist

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} \times \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{a} \quad (1.39)$$

$\vec{\omega}$ soll hierbei die bekannte Winkelgeschwindigkeit sein. $\vec{\omega}$ ist dabei kein Vektor, sondern ein sog. Axialvektor. Unter einer Punktspiegelung am Ursprung ändern \vec{a} und $d\vec{a}$ ihre Vorzeichen, $\vec{\omega}$ jedoch nicht.

1.5 Arbeit und Energie

I.A. haben wir gesehen, dass sich Bewegungsgleichungen in der folgenden Form schreiben lassen können:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (1.40)$$

mit den zwei Anfangsbedingungen $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0$ und $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$.

Die Trajektorie eines Massenpunktes ist bei bekannten Kräften und Anfangsbedingungen für alle Zeiten festgelegt. Die Trajektorie liegt im sog. Phasenraum, einem mathematischen Raum, der durch die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren aufgespannt wird.

Um einen Massenpunkt m durch ein Kraftfeld \vec{F} von \vec{r} nach $d\vec{r}$ infinitesimal zu bewegen, muss eine **Arbeit** verrichtet werden:

$$\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.41)$$

Um die entlang eines Weges C geleistete Arbeit zu erhalten, integriere man über diesen:

$$W = \int_C \delta W = - \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (1.42)$$

Wir wollen nun der Frage nachgehen, wann δW ein totales Differential, also ein dW ist. Daraus lassen sich auch Schlüsse über unser zugrunde liegendes Kraftfeld ziehen:

$$\delta W \stackrel{!}{=} dW = \frac{\delta W}{d\vec{r}} d\vec{r} + \frac{\delta W}{d\dot{\vec{r}}} d\dot{\vec{r}} + \frac{\delta W}{dt} dt \quad (1.43)$$

Im allgemeinen Fall ist δW eine Funktion vom Ort, der Geschwindigkeit und der Zeit. Mit der Ableitung nach dem Ort sei der Nabla-Operator gemeint: $\frac{\delta W}{d\vec{r}} = \vec{\nabla} W$. Nach der Definition gilt aber $\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$, $-\vec{F}$ muss dann genau der Ableitung $\frac{\delta W}{d\vec{r}}$ entsprechen. Damit sind die anderen beiden Ableitungen nach Geschwindigkeit

1 Theoretische Mechanik - Einführung

und Zeit gleich 0. Damit δW ein totales Differential ist, darf W nur eine Funktion des Ortes sein und es muss gelten:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}W(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) \quad (1.44)$$

Ist $\delta W = dW$, so nennt man das zugehörige Kraftfeld **konservativ**. In einem solchen gilt (wie sicherlich bereits bekannt):

$$W_C = - \int_C \vec{F}(d\vec{r})d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla}W d\vec{r} = \int_C \frac{\delta W}{\delta \vec{r}} d\vec{r} = W(\vec{r})_{Ende} - W(\vec{r})_{Anfang} \quad (1.45)$$

\Rightarrow Die Arbeit ist in konservativen Kraftfeldern weginvariant.

Fallen Anfangs- und Endpunkt des Weges zusammen, so ist W_C für konservative Kraftfelder 0.

Legen wir nun den Nullpunkt der Arbeit geeignet fest ($W=0$ für geeigneten Punkt \vec{r}_0), lässt sich ein **Potential V** definieren:

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{\rho}) \cdot d\vec{\rho} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) \quad (1.46)$$

Anmerkung: In der theoretischen Physik werden die Begriffe *Potential* und *potentielle Energie* synonym verwendet.

Da \vec{F} konservativ ist, muss hier kein Integrationsweg festgelegt werden:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}V) = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}V = 0 \quad (1.47)$$

$rot\vec{F} = 0$ ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass \vec{F} konservativ ist.

Wir wollen unsere Ergebnisse etwas zusammenstellen. Wir haben durch Rechnung und Überlegung 5 zueinander äquivalente Aussagen gefunden:

1. \vec{F} ist konservativ.
2. $rot\vec{F} = 0$.
3. \exists ein Potential $V(\vec{r})$, sodass $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$.
4. Bis auf Anfangs- und Endpunkt ist $W = - \int d\vec{r}\vec{F}(\vec{r})$ wegunabhängig.
5. Die Arbeit verschwindet für jeden geschlossenen Weg.

Konservative Kräfte erleichtern das Rechnen sehr. Wer sich nicht mehr sicher ist, wiederhole aus der Mathematik die Wegintegrale. Man wird sie brauchen.

Wir wollen en passant noch eine weitere Größe definieren, die **Leistung**: Sie ist die Arbeit pro Zeiteinheit:

$$P = \frac{dW}{dt} = -\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} = -m\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} (v^2) \right) \quad (1.48)$$

Das Endergebnis kommt uns bekannt vor. Es ist die zeitliche Ableitung der kinetischen **Energie**. Energie ist die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten. Wir wollen die kinetische Energie in Folge mit T bezeichnen:

$$E_{kin} = T = \frac{m}{2} v^2 \quad (1.49)$$

Ebenso ist die geleistete Arbeit gerade die Änderung der (kinetischen) Energie:

$$W_{21} = \int_{t_1}^{t_2} dt P(t) = T_1 - T_2 \quad (1.50)$$

In einem konservativen Kraftfeld gilt:

$$W_{21} = T_1 - T_2 = V_1 - V_2 \quad \Rightarrow \quad E_{ges} = T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (1.51)$$

Für konservative Kräfte ist die Summe $E=T+V$ für alle Zeiten erhalten (wir betrachten ein abgeschlossenes System und vernachlässigen wie so oft Reibung etc. Allerdings könnte man Reibungsverluste wieder als Teil des Systems sehen und der Energieerhaltungssatz besäße nach Anfügen eines entsprechenden Verlustenergietermes nach wie vor Gültigkeit)

Wir wollen nun noch zwei Größen definieren, die die rotierenden Äquivalente zu Impuls und Kraft sind: **Drehimpuls** und **Drehmoment**:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad (1.52)$$

Ändert sich \vec{L} unter dem Einfluss einer Kraft \vec{F} :

$$\dot{\vec{L}} = m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = \vec{M} \quad (1.53)$$

Der Vektor \vec{L} sei dabei der Drehimpuls, \vec{M} das Drehmoment. Der Drehimpuls zeigt in \vec{e}_ω -Richtung.

Der Drehimpuls ist konstant, wenn $\vec{M} = 0$. Dies ist der Fall, wenn \vec{r} und \vec{F} parallel sind, also wenn $\vec{F} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot \vec{e}_r$ ein **Zentralkraftfeld**. Dann steht \vec{L} senkrecht

1 Theoretische Mechanik - Einführung

auf \vec{r} und $\dot{\vec{r}}$, d.h. für $\vec{L} = const.$ ist die Bahn $\vec{r}(t) \forall t \perp$ zu \vec{L} .

Wann aber ist eine Zentralkraft konservativ?

$$\vec{F} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot \vec{e}_r = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) \quad (1.54)$$

Wir folgern (wieder), dass f unabhängig sein muss von $\dot{\vec{r}}$ und t . Schauen wir uns doch die Lösung in Kugelkoordinaten an (Nabla-Operator in Kugelkoordinaten):

$$-(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi})V(\vec{r}) \quad (1.55)$$

Durch einen Koeffizientenvergleich erhalten wir:

$$f(\vec{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0 = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (1.56)$$

Wir folgern:

$$V = V(r) \quad (1.57)$$

Ein Zentralpotential ist ein Potential, das nur vom Ort, nicht aber von der Geschwindigkeit oder explizit der Zeit abhängt. Es gilt ferner:

In einem Zentralpotential sind Energie und Drehimpuls erhalten.

Man wähle seine Koordinaten so, dass die Bahn in der (x,y)-Ebene liegt. Es bieten sich Polar- oder Zylinderkoordinaten an.

Wir wollen uns nochmal Drehimpuls und Energie zuwenden, um noch mehr über das Potential zu erfahren. Zum Drehimpuls:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m\vec{r} \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z \quad (1.58)$$

Die Gesamtenergie eines Systemes lässt sich schreiben:

$$E = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + V(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)^2 + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + V(r) = \quad (1.59)$$

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{=V_{eff}} + V(r) = const. \quad (1.60)$$

Wir haben die Energie für ein effektiv eindimensionales Problem erhalten. Die einzige Koordinate ist r . Da $\frac{m}{2}\dot{r}^2 \geq 0$ ist, ist $E \geq V_{eff}(r)$. Dies schränkt mögliche Bahnen innerhalb des Potentials ein. Wir wollen diese am Beispiel des Coulomb-Potentials der Elektrostatik betrachten: $V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r} \sim \frac{1}{r}$. Das V_{eff} setzt sich also aus zwei Komponenten zusammen, eine proportional zu $\frac{1}{r^2}$ und eine proportional zu $-\frac{1}{r}$: Wir erhalten folgende mögliche Bahnen einer Probeladung:

1. Für $E < V_{min}$ existieren keine Lösungen.
2. Für $E = V_{min}$ ist die Bahn eine Kreisbahn mit festem Radius.
3. Für $V_{min} \leq E \leq 0$ erhält man Ellipsen. Die Bahnen sind geschlossen, r aber innerhalb eines Intervalls variabel.
4. Für $E \geq 0$ erhält man ungebundene Bewegungen (Parabeln und Hyperbeln), da der Radius nach unten hin beschränkt ist durch $E \geq V_{eff}(r)$, nach oben hin aber beliebig groß werden kann.

1.6 Newton-Mechanik für Mehrteilchensysteme

Wir wollen nun unser Wissen aus Einteilchensystemen auf Mehrteilchensysteme ($N \geq 2$) verallgemeinern. Beispiele für Mehrteilchensysteme sind die Atome in einem Gas, das Doppelpendel, die Bewegung der Planeten im Sonnensystem und viele mehr. Wir wollen Massen durchnummerieren mit m_i , Impulse mit p_i , Orte mit r_i ; i laufe dabei von $1, \dots, n$.

Die Gesamtkraft auf ein Teilchen i addiert sich aus äußeren, externen Kräften $F_i^{\vec{ex}}$ und inneren Kräften $F_{j \neq i}^{\vec{}}$. Mit dem zweiten und dritten Newton'schen Axiom gilt:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i = F_i^{\vec{ex}} + \sum_{j \neq i} F_{j \neq i}^{\vec{}}; \quad F_{ij}^{\vec{}} = -F_{ji}^{\vec{}} \quad (1.61)$$

Wir definieren die Gesamtmasse, Schwerpunkt und Gesamtimpuls als:

$$M = \sum_i m_i, \quad \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad \vec{P} = \sum_i \vec{p}_i \quad (1.62)$$

Leiten wir den Gesamtimpuls ab, erhalten wir:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{F}_i^{\vec{ex}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} F_{ij}^{\vec{}}}_{=0} = \vec{F}_{ex} \quad (1.63)$$

Der Impulssatz besagt:

$$\vec{p} = \text{const.} \quad \vec{F}_{ex} = \vec{0}$$

Bleiben die Massen konstant, können wir schreiben:

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{\delta^2}{\delta t^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = M \ddot{\vec{l}} \quad (1.64)$$

1 Theoretische Mechanik - Einführung

$\ddot{\vec{l}}$ sei die Beschleunigung des Schwerpunkts. Der Schwerpunkt bewegt sich wie ein Massenpunkt der Masse M , auf dem die Summe aller äußeren Kräfte wirkt. Wir nähern den Schwerpunkt durch einen Massenpunkt.

Für den Drehimpuls können wir ebenso einen Satz formulieren:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \quad (1.65)$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} = \sum_i \underbrace{[m_i \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i]_{=0}} + m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{ex} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}) \quad (1.66)$$

Der Beitrag der inneren Kräfte liefert:

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_j \vec{r}_j \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \end{aligned} \quad (1.67)$$

Für Zentralkräfte gilt:

$$\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \Rightarrow (70) = \vec{0} \quad (1.68)$$

Das Äußere Drehmoment ist definiert als:

$$\vec{M}_{ex} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ex} = \dot{\vec{L}} \quad (1.69)$$

2 Lagrangesche Mechanik

In seinem Werk "Mécanique analytique" von 1788 veröffentlichte Joseph-Louis de Lagrange (* 25. Januar 1736 in Turin; † 10. April 1813 in Paris) seine Formulierung der klassischen Mechanik. Die darin beschriebene Lagrangesche Mechanik ist auch heute noch brandaktuell und aus dem physikalischen Alltag nicht mehr wegzudenken. Diese ermöglicht es uns, auch kompliziertere mechanische Problemstellungen anzugehen.

In der Newtonschen Mechanik haben wir uns oft mit Systemen von Massenpunkten befasst. Ein Nachteil der Newtonschen Mechanik ist, dass diese nicht kovariant ist, d. h. die Bewegungsgleichungen haben in unterschiedlichen Koordinatensystemen unterschiedliche Formen. Auch hat jeder Massenpunkt drei Freiheitsgrade, d.h. über drei Parameter wird der Zustand des Teilchens bestimmt. In einem N-Teilchen System benötigt man also $3N$ Parameter. Für ein System von N Teilchen erhält man $3N$ Differentialgleichungen 2. Ordnung, für deren Lösungen die Anfangsbedingungen bekannt sein müssen.

Die meisten physikalischen Systeme im Alltag sind jedoch keine typischen Teilchensysteme: wenn man zum Beispiel den Kurbelmechanismus einer Dampfmaschine (siehe 2.1) beschreiben will, interessieren die Kräfte und Spannungen in der Pleuelstange nicht. Die Maschine, die selber aus unendlich vielen Teilchen besteht, kann allein durch die den Winkel φ beschrieben werden.

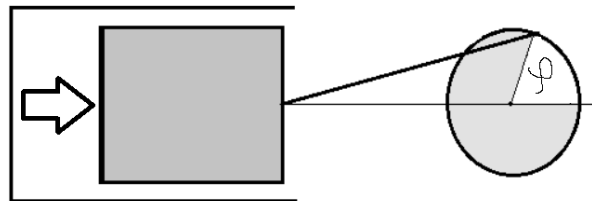


Abbildung 2.1: Kolben

2.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

Bei Betrachtung einer starren Hantel (siehe Abb. 2.2) benötigt man in kartesischen Koordinaten sechs reelle Größen, um die Positionen der beiden Massenpunkte zu beschreiben. Der Abstand der beiden Massenpunkte ist jedoch konstant: er ist über eine sogenannte **Zwangsbedingung** festgelegt. Man kann also eine der sechs reellen Größen durch die anderen Größen ausdrücken. Also sind von den sechs Größen nur fünf unabhängig voneinander und reichen aus, um die Lage der Hantel eindeutig zu beschreiben.

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = |\vec{R}_H| \quad (2.1)$$

Die fünf reellen Größen reichen also aus, um die Lage der Hantel in geeigneten Koordinaten vollständig zu bestimmen. Den Schwerpunkt der Hantel beschreibt man mit kartesischen Koordinaten und die Orientierung von $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = |\vec{r}_H|$ in Polarwinkeln.

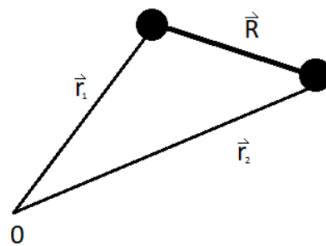


Abbildung 2.2: starre Hantel

Für ein in zwei Dimensionen auf einer Ebene rollendes Rad gilt, dass der Mittelpunkt immer denselben Abstand R von der Ebene ($\rightarrow y = y_0 = \text{const.}$) hat. Da der Auflagepunkt des Rades nicht gleitet, ist er momentan gesehen in Ruhe. Also folgt daraus die Rollbedingung

$$\dot{x} = R\dot{\varphi} \rightarrow x = x_0 + R\varphi. \quad (2.2)$$

Hier gibt es nur eine unabhängige Koordinate φ .

Zwangsbedingungen: geometrische Bedingungen, die die Bewegung einschränken

Zwangskräfte: die Kräfte, die in der Bewegungsgleichung für die Einhaltung der Zwangsbedingung sorgen

Diese Zwangskräfte sind jedoch meist nicht explizit bekannt. Es gibt im Lagrange-Formalismus also zwei Möglichkeiten:

1. die Zwangskräfte werden berechnet.
2. die Bewegung des Systems wird berechnet, ohne dass eine genaue Kenntnis der Zwangskräfte erforderlich ist (Vorgriff: dies ist ein Lagrange-Formalismus 2.Art)

Es gibt verschiedene Arten von Zwangsbedingungen: holonom und nicht-holonom.

2.2 Holonome Zwangsbedingungen

Holonome (griechisch: holonom = „ganz gesetzlich“) Zwangsbedingungen sind definiert wie folgt:

$$f_\nu(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0. \quad (2.3)$$

- N: Anzahl der Massenpunkte im \mathbb{R}^3
- $\nu = 1, 2, \dots, p$: Anzahl der Zwangsbedingungen

2.2.1 Holonom-skleronome Zwangsbedingung

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} = 0 \quad (2.4)$$

Diese Art von Zwangsbedingung (griechisch: skleros = starr) hängt **nicht explizit** von der Zeit ab (die Ortsvektoren \vec{r}_i können natürlich von t abhängen).

Beispiele hierfür wären die Hantel ($f(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - |\vec{R}_H| = 0$) oder die Rollbedingung (2.2).

2.2.2 Holonom-rheonome Zwangsbedingung

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} \neq 0 \quad (2.5)$$

Die holonom-rheonomen Zwangsbedingungen hängen dagegen explizit von der Zeit ab (griechisch: rheos = "fließend"). Als Beispiel für das Auftreten solcher Zwangsbedingungen kann man sich das oben erwähnte rollende Rad in einem Aufzug vorstellen. Die Ebene bewegt sich nun und $y = h(x)$ ist eine Funktion der Zeit. Somit gilt für die Zwangsbedingung: $f(\vec{r}_1, t) = y - h(t) = 0$.

2.2.3 Anzahl der Freiheitsgrade

Wenn man ein System mit N Massenpunkten betrachtet, hat dieses $3N$ Freiheitsgrade. Bei Anwesenheit von Zwangsbedingungen sind manche Koordinaten jedoch voneinander abhängig. Somit gilt für die Anzahl der unabhängigen Koordinaten S bei N Massenpunkten und p Zwangsbedingungen

$$\boxed{S = 3N - p}. \quad (2.6)$$

- N : Anzahl der Massenpunkte im \mathbb{R}^3
- p : Anzahl der Zwangsbedingungen

2.3 Nicht-Holonome Zwangsbedingungen

2.3.1 Zwangsbedingungen als Ungleichungen

$$g_\nu = (r_1, r_2, \dots, r_N, t) \geq 0 \quad (2.7)$$

Ein Beispiel für eine Zwangsbedingung, gegeben durch eine Ungleichung, wäre zum Beispiel ein Teilchen, welches in einer Kugel mit dem Radius r eingesperrt ist. Der Mittelpunkt der Kugel sei der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems. Somit gilt für das eingesperrte Teilchen die Zwangsbedingung

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq r. \quad (2.8)$$

2.3.2 Zwangsbedingungen in differentieller, nicht integrierbarer Form

Zwangsbedingungen in differentieller Form, welche nicht integrierbar sind:

$$\delta f_\nu = \vec{a}_1 d\vec{r}_1 + \vec{a}_2 d\vec{r}_2 + \dots + \vec{a}_n d\vec{r}_n + b dt \quad (2.9)$$

Die Koeffizienten seien außerdem **nicht** so durch partielle Ableitung gegeben, dass ein totales Differential vorliegt. Läge ein totales Differential vor, wäre es eine holonome Zwangsbedingung. Die nicht-holonomen Zwangsbedingungen werden später in (?) behandelt.

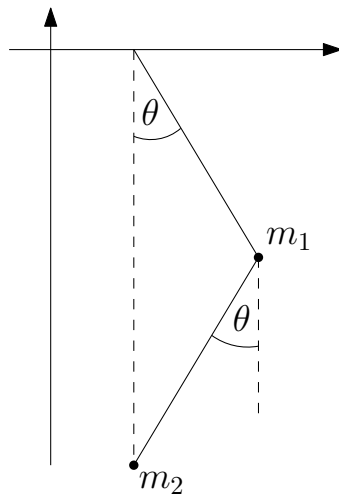


Abbildung 2.3: ebenes Doppelpendel

2.4 Generalisierte Koordinaten und Konfigurationsraum

Mit den holonomen Zwangsbedingungen kann man nun p der $3N$ kartesischen Koordinaten eliminieren, da diese die Anzahl der Freiheitsgrade reduzieren. Wir führen nun die generalisierten Koordinaten ein, wie sie in der Lagrange Mechanik verwendet werden. Die generalisierten Koordinaten müssen die momentane Konfiguration des Systems **eindeutig** festlegen (bijektiv) und voneinander **unabhängig** sein.

Dieser von den generalisierten Koordinaten aufgespannte S -dimensionale **Konfigurationsraum** ($3N - P = S$) ist eine Menge von Tupeln (q_1, q_2, \dots, q_s) . Die Punkte im Konfigurationsraum entsprechen jeweils einem möglichen Zustand des Systems bzw. einer Konfiguration. Dementsprechend gibt es zu den Punkten

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_s) \quad (2.10)$$

auch generalisierte Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$. Wir wollen dies am Beispiel des ebenen Doppelpendels veranschaulichen:

Die generalisierten Koordinaten hierfür sind die beiden Winkel φ_1 und φ_2 .

Somit ist der Konfigurationsraum

$$[0, 2\pi[\otimes [0, 2\pi[.$$

Bei dem Zeichen \otimes handelt es sich um das Tensorprodukt, welches multilineare Abbildungen beschreibt. Für die generalisierten Koordinaten der Hantel wären,

2 Lagrangesche Mechanik

wie in (1.1) schon kurz angerissen, kartesische Koordinaten für den Schwerpunkt und Polarwinkel für die Orientierung der beiden Massen geeignet. Also ergibt sich für den Konfigurationsraum

$$\mathbb{R}^3 \otimes S^2(\theta, \varphi).$$

Dieser Konfigurationsraum charakterisiert, mit den Koordinaten in ihrer Gesamtheit, das System. Damit handelt es sich bei den Koordinaten nicht notwendigerweise um Längen.

Mit bekannten Anfangsbedingungen für q und \dot{q} ist der Zustand des Systems im Konfigurationsraum über die entsprechenden Bewegungsgleichungen festzulegen.

2.5 Virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}_i$

Ziel ist es, die unbekanntenen Zwangskräfte aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren. Deswegen führen wir die virtuelle Verrückung ein $\delta\vec{r}_i$:

Die **virtuelle Verrückung** $\delta\vec{r}_i$ ist eine willkürliche, infinitesimale Verschiebung, die mit den Zwangsbedingungen unseres Problem verträglich ist. Außerdem erfolgt sie **instantan**, also bei festgehaltener Zeit ($\delta t = 0$).

Die realen Verrückungen erfolgen in einem Zeitintervall dt . Wir gehen mit δ mathematisch wie mit einem Differential d um. Da die virtuellen Verrückungen die Zwangsbedingungen erfüllen, können virtuelle Verrückungen bei skleronomen Zwangsbedingungen auch reale Verrückungen sein. Bei rheonomen Zwangsbedingungen liegt ein Unterschied vor, wie man an dem rollenden Rad im Aufzug erkennen kann.

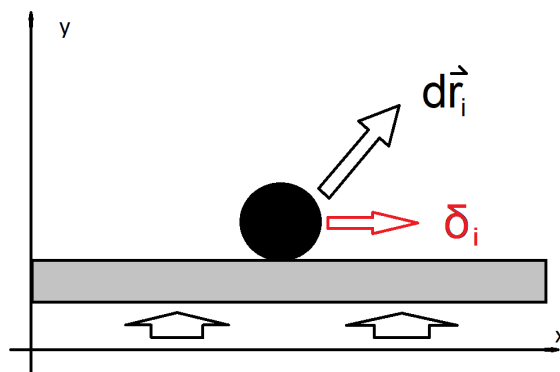


Abbildung 2.4: Unterschied zwischen virtueller und realer Verrückung

Mit der holonom-rheonomen Zwangsbedingung (siehe 1.2.2) $y - h(t) = 0$ ergeben sich mit $q=x$ als generalisierter Koordinate die

- reale Verrückung: $d\vec{r} = (dx, dy) = (dq, v_0 dt)$ und die
- virtuelle Verrückung: $\delta\vec{r} = (\delta x, \delta y) = (\delta q, 0)$.

Man erkennt bei genauerer Betrachtung auch, dass die virtuelle Verrückung rechtwinklig auf den Zwangskräften steht.

2.6 D'Alembertsches Prinzip

Das 2. Newtonsche Axion lässt sich schreiben

$$m\ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_i}_{\text{von den Zwangsbedingungen unabhängige Kräfte}} + \underbrace{\vec{Z}_i}_{\text{Zwangskräfte}},$$

also ergibt sich für die Zwangskräfte

$$\rightarrow m\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i = \vec{Z}_i.$$

Für N-Teilchen multipliziert mit der virtuellen Verrückung ergibt sich die **virtuelle Arbeit**:

$$\sum_{i=1}^N (m\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \delta\vec{r}_i \quad (2.11)$$

D'Alembert postuliert:

”Die Natur der Zwangskräfte ist derart, dass sie keine virtuelle Zwangsarbeit verrichten.”

$$\boxed{\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \delta\vec{r}_i = 0} \quad (2.12)$$

Das Verschwinden der Zwangsarbeit kann nicht bewiesen oder hergeleitet werden, es wird aber durch die Übereinstimmung mit der Erfahrung als bestätigt angesehen. Dieses Postulat, das **Prinzip der virtuellen Arbeit**, impliziert, dass die Summe der einzelnen Beiträge zur virtuellen Arbeit Null sein muss:

$$\sum_{i=1}^N (m\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \delta\vec{r}_i = 0 \quad (2.13)$$

2 Lagrangesche Mechanik

Wir sollten jedoch im Hinterkopf behalten, dass nur die Summe Null sein muss, nicht zwangsweise aber die einzelnen Summanden. Bei holonomen Zwangsbedingungen können die virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_i$ mit Koordinatentransformationen $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_{3N-P}, t)$ mit $i = 1, \dots, N$ als Funktion der $3N-P$ unabhängigen Verrückungen geschrieben werden:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-P} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2.14)$$

wobei $i = 1, \dots, N$ ist. Wenn man dies nun in die d'Alembert-Gleichung (2.13) einsetzt, erhält man unabhängige q_j sowie δq_j . Also muss jeder Summand der Summe **einzeln** gleich null sein:

$$\sum_{j=1}^{3N-P} \left[\sum_{i=1}^N (m\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, 3N-P \quad (2.15)$$

Somit erhält man $3N - P = S$ unabhängige Bewegungsgleichungen. Wir wollen uns das Alles nocheinmal am folgenden Beispiel verdeutlichen:

LEITER AN DER WAND

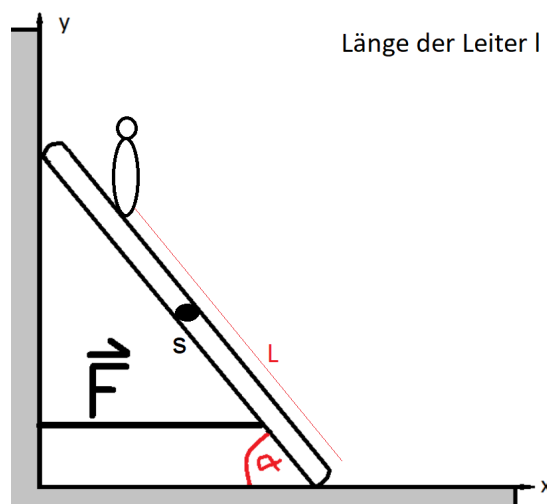


Abbildung 2.5: Leiter an der Wand

Uns interessiert die Spannkraft \vec{F} im Seil. Dafür müssen wir uns Gedanken über die Zwangsbedingungen machen. Hier liegen vier holonom-skleronome Zwangsbedingungen vor

$$\begin{aligned}x_B &= (l - L) \cos(\alpha), \\y_B &= L \sin(\alpha), \\x_S &= \frac{l}{2} \cos(\alpha) \text{ und} \\y_S &= \frac{l}{2} \sin(\alpha).\end{aligned}$$

Wir haben also einen Freiheitsgrad ($4 - 3 = 1$ bzw. als dreidimensionales Problem betrachtet gilt $z_B = z_S = \text{const.}$ und somit $6 - 5 = 1$) und wählen α als generalisierte Koordinate. Die Kraft \vec{F} darf **nicht** als Zwangskraft betrachtet werden, da sie sonst nicht mit dem d'Alembert-Prinzip berechnet werden kann (und sie raubt uns den letzten Freiheitsgrad). Die d'Alembert-Gleichung (vektoriell und in Beträgen) lautet

$$\begin{aligned}m\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_S + M\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_B + \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_A &= 0, \\-mg \cdot \delta y_S - Mg \cdot \delta y_B - F \cdot \delta x_A &= 0.\end{aligned}$$

und mithilfe der Zwangsbedingungen und trigonometrischer Beziehungen erhält man für die virtuellen Verrückungen in generalisierten Koordinaten:

$$\delta x_A = -l \sin(\alpha); \quad \delta y_B = L \cos(\alpha) \delta\alpha; \quad \delta y_S = \frac{l}{2} \cos(\alpha) \delta\alpha$$

Durch Einsetzen in die d'Alembert-Gleichung mit Beträgen erhält man

$$\left(-mg \frac{l}{2} \cos(\alpha) - MgL \cos(\alpha) + Fl \sin(\alpha)\right) \delta\alpha = 0.$$

Da $\delta\alpha$ beliebig ist, folgt daraus das $(-mg \frac{l}{2} \cos(\alpha) - MgL \cos(\alpha) + Fl \sin(\alpha)) = 0$ sein muss. Man erhält also final

$$F = g \cot(\alpha) \left(\frac{m}{2} + M \frac{L}{l}\right).$$

2.7 Die Lagrange-Gleichungen 2.Art

2.7.1 Herleitung aus dem d'Alembertschen Prinzip

Wir kennen aus dem vorhergegangenen Abschnitt schon die d'Alembert-Gleichung (2.13):

$$\sum_{i=1}^N (m\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \delta \vec{r}_i = 0$$

Diese enthält keine Zwangskräfte: die virtuellen Zwangsarbeiten verschwinden. Somit wäre ein Zwischenziel, die Zwangskräfte zu eliminieren, bereits erreicht. Die kartesischen Verrückungen hängen aufgrund der Zwangsbedingungen voneinander ab, weshalb die einzelnen Summanden nicht gleich null gesetzt werden dürfen. Um diese Unabhängigkeit zu gewährleisten und so die erforderliche Anzahl an $3N-p$ Bewegungsgleichungen aufstellen zu können, können wir bei holonomen Zwangsbedingungen auf (hier nicht explizit bestimmte) generalisierte Koordinaten transformieren $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-p}, t)$

$$\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-p} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} q_j, \quad (2.16)$$

welche nach der Zeit abgeleitet die generalisierten Geschwindigkeiten ergeben

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{3N-p} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \quad (2.17)$$

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-p} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad i = 1, \dots, N \quad (2.18)$$

Aus der zeitlichen Ableitung folgt für die virtuelle Verrückung ($\delta t = 0$) die Gleichung (2.18). Auch gilt mit den in 1.4 eingeführten generalisierten Geschwindigkeiten:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}} \quad (2.19)$$

Wir wollen dies kurz nachrechnen und dazu \vec{r}_i (Gl.2.17) partiell nach q_j ableiten.

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\sum_{j=1}^{3N-p} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right] = \sum_{j=1}^{3N-p} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

gleichet der Ableitung von \vec{r}_i (Gl. 2.16) nach q_j , also

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\sum_{j=1}^{3N-p} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} q_j \right] = \sum_{j=1}^{3N-p} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j},$$

was offensichtlich äquivalent ist. Für die virtuelle Arbeit gilt

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-p} \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N-p} Q_j \delta q_j,$$

wobei es sich bei Q_j um die verallgemeinerten bzw. generalisierten Kräfte handelt. Es lohnt sich jedoch im Hinterkopf zu behalten, dass die Dimension bzw. Einheit von Q_j keinesfalls Kraft sein muss, es handelt sich ja auch bei q_i nicht notwendigerweise um eine Länge. Das Produkt $Q_j q_j$ muss jedoch immer die Dimension einer Energie besitzen.

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (2.20)$$

Den ersten Term der d'Alembert-Gleichung kann man wie folgt umschreiben und kommt mit der Produktregel auf

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-p} \left[\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N-p} \left[\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}) - (m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}) \right] \delta q_j.$$

Wenn man nun die generalisierten Geschwindigkeiten und Gleichung 2.19 einsetzt, erhält man

$$\sum_{j=1}^{3N-p} \left[\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}) - (m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}) \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N-p} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) - (m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}) \right] \delta q_j.$$

Für den uns schon bekannten Ausdruck für die kinetischen Energie des Teilchensystems schreiben wir nun

2 Lagrangesche Mechanik

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N-p} m_i \vec{v}_i^2. \quad (2.21)$$

Es ergibt sich also für den ersten Term der d'Alembert-Gleichung 2.13

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-p} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j, \quad (2.22)$$

für den zweiten Term setzen wir nun unsere generalisierten Kräfte (2.20) ein und erhalten schlussendlich für die allgemeine d'Alembert-Gleichung

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-p} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \quad (2.23)$$

Die obige Gleichung ist allgemein gültig. Für holonome Zwangsbedingungen liegen $3N-p=S$ unabhängige Koordinaten q_j vor und somit sind die δq_j frei wählbar. Also verschwindet die Summe, bzw. jeder Summand:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, S \quad (2.24)$$

In konservativen Kraftfeldern gilt aufgrund eines geschwindigkeitsunabhängigen Potentials V für die generalisierte Kraftkomponenten

$$\begin{aligned} \vec{F}_i(\vec{r}, t) &= \nabla_i V = \frac{\partial V(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} \\ Q_j &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (2.25)$$

und schließlich mit dem Potential in generalisierten Koordinaten

$$Q_j = - \frac{\partial V(q_1, \dots, q_{3N-p}, t)}{\partial q_j}. \quad (2.26)$$

Somit können wir Gleichung (2.23) umschreiben zu

$$\sum_{j=1}^{3N-p} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right] \delta q_j = 0. \quad (2.27)$$

2.8 Die Lagrange-Funktion

Wir definieren die Lagrange-Funktion $L = L(q_1, \dots, q_{3N-p}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$:

$$\boxed{L = T - V} \quad (2.28)$$

Diese Gleichung erfüllt die Lagrangegleichungen 2. Art. Für konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen gilt die Lagrangegleichung 2. Art.

2.9 Die Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \dots, 3N - p} \quad (2.29)$$

Diese Gleichung ist eine der wesentlichsten Gleichungen der theoretischen Physik und auch heute noch brandaktuell. Wie wir sehen, sind die Zwangskräfte eliminiert und erscheinen nicht mehr in den Bewegungsgleichungen. Es genügen für die vollständige Lösung nun $2(3N - p) = 2S$ Anfangsbedingungen.

PENDEL MIT GLEITENDER AUFHÄNGUNG

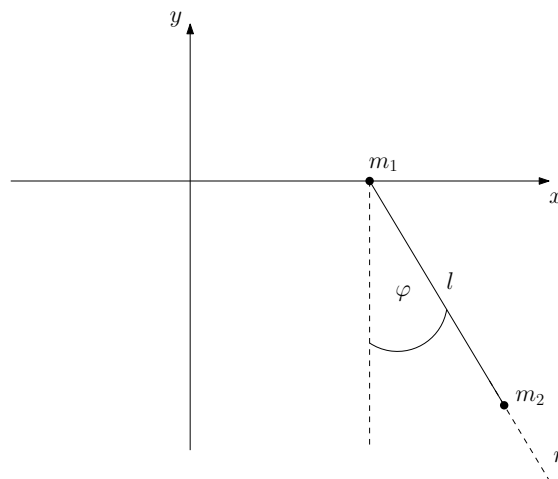


Abbildung 2.6: Pendel mit gleitender Aufhängung

2 Lagrangesche Mechanik

Die Zwangsbedingungen lauten

$$z_1 = z_2 = \text{const.} = 0, \quad y_1 = \text{const.} = 0 \quad \text{und} \quad (x_1 - x_2)^2 + y_2^2 - l^2 = 0 .$$

Damit folgt für die Anzahl an Freiheitsgraden $6 - 4 = 2$. Wir benötigen also zwei generalisierte Koordinaten und wählen $q_1 = x_1$ sowie $q_2 = \varphi$. Dann ist

$$\begin{aligned} x_2 &= q_1 + l \sin q_2 \quad \text{und} \\ y_2 &= l \cos q_2 . \end{aligned}$$

Man erhält also für die kinetische Energie T und für das Potential V mit eingesetzten generalisierten Koordinaten

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) , \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\dot{q}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{q}_2^2 + 2l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2) , \\ V &= -m_2 g l \cos q_2 . \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt die Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\dot{q}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{q}_2^2 + 2l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2) + m_2 g l \cos q_2 .$$

Somit erhalten wir 2 Lagrange-Gleichungen (für q_1 und q_2):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

Für q_1 ist L jedoch nur von \dot{q}_1 abhängig. Daraus folgt eine Erhaltungsgröße, wie wir später begründen werden. Die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left((m_1 + m_2) \dot{q}_1 + m_2 g l \cos q_2 \right)}_{\text{zeitunabhängig}} = 0$$

ist nicht zeitabhängig, was uns auch auf eine Erhaltungsgröße (es handelt sich um den verallgemeinerten Impuls, bzw. die x-Komponente des Gesamtimpulses) führt. Die Lagrange-Gleichung für q_2

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= \frac{d}{dt} \left[m_2 l^2 \dot{q}_2 + m_2 l \dot{q}_1 \cos(q_2) \right] - \left[-m_2 l \left(\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) - g \sin(q_2) \right) \right] \\ &= m_2 l \left[l \ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) + g \sin(q_2) \right] \end{aligned}$$

wird nun durch Linearisierung vereinfacht (man betrachtet also nur infinitesimale Veränderungen $dq_2, d\dot{q}_2$)

$$\sin(q_2) \approx q_2 \quad \cos(q_2) \approx 1 \quad \dot{q}_2^2 \approx 0$$

Damit ergibt sich für q_1

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + m_2 l \ddot{q}_2 = 0 \quad (2.30)$$

und für q_2

$$l m_2 \ddot{q}_1 + m_2 l g q_2 + m_2 l^2 \ddot{q}_2 = 0. \quad (2.31)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (2.30) in (2.31) erhält man

$$q_2(t) = -\dot{q}_2 \cos(\omega(t - t_0)), \quad (2.32)$$

was eine Schwingungsgleichung darstellt (keine erste Ableitung enthalten).

Für ω^2 ergibt sich

$$\omega^2 = \frac{g(m_1 + m_2)}{l m_1}, \quad (2.33)$$

was uns zu folgendem Ergebnis bringt:

$$q_1(t) = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \dot{q}_2 \cos(\omega(t - t_0)). \quad (2.34)$$

2.10 Die Lagrange-Gleichungen 1.Art

Bei der Konstruktion von Maschinen ist es notwendig, die Zwangskräfte und die realen Zwangsarbeiten zu kennen. Im Lagrange-Formalismus 2.Art werden diese eliminiert, der Lagrange-Formalismus 1. Art ermöglicht es uns jedoch die Zwangskräfte explizit auszurechnen.

Für den Lagrange-Formalismus 1.Art betrachten wir unsere Lagrange-Funktion, im Gegensatz zum Lagrange-Formalismus 2.Art, als Funktion aller $3N$ generalisierten Koordinaten. Hierbei sind also keine Freiheitsgrade durch Zwangsbedingungen eliminiert, wir führen also die Zwangsbedingungen in unserer Rechnung mit. Also erhalten wir $3N$ Lagrangegleichungen

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0. \quad (2.35)$$

Durch die Zwangsbedingungen sind die Gleichungen jedoch voneinander abhängig

2 Lagrangesche Mechanik

und die Klammern dürfen nicht mehr einzeln gleich Null gesetzt werden. Deswegen führen wir die **Lagrange-Multiplikatoren** ein. Holonome und differentielle Zwangsbedingungen lassen sich (mit $i = 1, \dots, p$)

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0 \quad (2.36)$$

schreiben. Mit der virtuellen Verrückung (siehe 2.18) ergibt sich

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = 0, \quad (2.37)$$

da die virtuelle Verrückung instantan erfolgt. Durch multiplizieren mit dem Faktor λ_i , erhält man

$$\sum_{j=1}^{3N} \lambda_i a_{ij} \delta q_j = 0, \quad (2.38)$$

welches man in die allgemeine d'Alembertgleichung (2.23) einsetzt. Dies ergibt

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{ij} \delta q_i \right] \delta q_j = 0. \quad (2.39)$$

Hier sind p Verrückungen voneinander abhängig. Dies sollen die letzten der $3N$ Verrückungen, also $\delta q_{3N-p+1}, \dots, \delta q_{3N}$, sein. Nun kann man die Summe aufspalten, um die abhängigen und unabhängigen Verrückungen voneinander zu trennen.

$$\sum_{j=1}^{3N-p} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{ij} \delta q_i \right] \delta q_j + \sum_{j=3N-p+1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{ij} \delta q_i \right] \delta q_j = 0. \quad (2.40)$$

In der zweiten Summe werden die Multiplikatoren λ_i so gewählt, dass jede Klammer der zweiten Summe verschwindet. Aufgrund der Unabhängigkeit der Verrückungen ist es in der ersten Summe möglich, jede Klammer einzeln gleich Null zu setzen. Durch umstellen erhalten wir die **Lagrange-Gleichungen 1.Art**, welche es uns ermöglichen, die Zwangskräfte direkt auszurechnen.

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{ij} \quad ; \quad j = 1, \dots, 3N}$$

Unsere unbekanntenen Faktoren heißen **Lagrange-Multiplikatoren**. Man kann die rechte Seite der Gleichung auch als generalisierte Zwangskraft auffassen: im Lagrange-Formalismus 1.Art eliminieren wir die Zwangsbedingungen durch die virtuellen Verrückungen. Somit verrichten die Zwangskräfte keine virtuelle Zwangsarbeit. In dieser Rechnung sind jedoch die Zwangsbedingungen implementiert. Die rechte Seite der Gleichung stellt also generalisierte Zwangskräfte dar.

$$z_j = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{ij} \quad ; \quad j = 1, \dots, 3N$$

Wie man mit den Lagrange-Gleichungen 1.Art rechnet, soll in einem kurzen Rezept erläutert werden:

2.10.1 How to...: Lagrange-Gleichungen 1.Art

Mit den Lagrange-Gleichungen 1.Art rechnet man wie folgt:

- Nach Wahl von $3N$ geeigneten Koordinaten werden die ZB in differentieller Form aufgestellt
- $L = T - V$ wird als Funktion der $6N$ Variablen q_j und \dot{q}_j geschrieben
- Die $3N$ Lagrange-Gleichungen werden berechnet und gelöst

PENDEL MIT GLEITENDER AUFHÄNGUNG

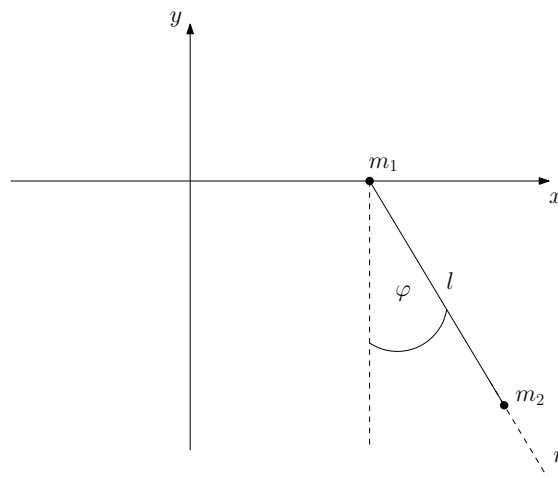


Abbildung 2.7: Pendel mit gleitender Aufhängung

2 Lagrangesche Mechanik

Das Pendel mit gleitender Aufhängung haben wir schon mit dem Lagrange-Formalismus 2. Art gerechnet. Die geeigneten Koordinaten sind für m_1 : (x, y) und für m_2 : (r, φ) . Über die holonomen Zwangsbedingungen

$$y_1 = \text{const.} = 0 \quad \text{und} \quad (x_1 - x_2)^2 + y_2^2 - l^2 = 0$$

haben wir, diesmal in der zweidimensionalen Betrachtung, uns bei der vorherigen Betrachtung des Problems .

$$\begin{aligned} f_1(x, y, r, \varphi) &= y = 0 \\ f_2(x, y, r, \varphi) &= r - l = 0 \end{aligned}$$

und erhält somit für die a_i

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial r} = 1,$$

da die sechs übrigen partiellen Zeitableitungen verschwinden. Für die Lagrange-funktion erhält man somit

$$L = T - V = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1 g y_1 - m_2 g y_2,$$

was mit den folgenden Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x_2 &= x + r \sin \varphi \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = \dot{x} + \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \quad \text{und} \\ y_2 &= y - r \cos \varphi \quad \rightarrow \quad \dot{y}_2 = \dot{y} + \dot{r} \cos \varphi + r \dot{\varphi} \sin \varphi, \end{aligned}$$

auf die neue Darstellung der Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_1 + m_2}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m}{2} \left[r^2 \dot{\varphi}^2 + 2r(\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi) + 2r \dot{\varphi} [\dot{x} \cos \varphi \dot{y} \sin \varphi] \right] \\ &\quad - m_1 g y_1 - m_2 g (y - \cos \varphi) \end{aligned}$$

führt. Es ist **wichtig**, dass die **Zwangsbedingungen nicht in die Lagrange-funktion eingesetzt** werden. Dies muss erst in der Lagrange-gleichung erfolgen, da sonst die entscheidenden Terme in der Lagrange-gleichung fehlen. Wir erhalten also für die einzelnen Lagrange-gleichungen mit eingesetzten Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} L_x &= (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 - \sin \varphi) = 0 \\ L_{y_1} &= m_2 l \ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 - \cos \varphi + (m_1 + m_2)g = \lambda_1 = Z_{\text{Schiene}} \\ L_r &= m_2(\ddot{x}_1 \sin \varphi - l \dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi) = \lambda_2 = -Z_{\text{Faden}} \\ L_\varphi &= m_2 l(\ddot{x}_1 \cos \varphi + l \dot{\varphi}^2 + g \sin \varphi) = 0 \end{aligned}$$

und somit auch unsere Zwangskräfte Z_{Schiene} und Z_{Faden} . Diese Differential-gleichungen sind zu den mit dem Lagrange-formalismus 2. Art ermittelten äquivalent. Insofern man also nicht explizit an den Zwangskräften interessiert ist, bietet der Lagrange-formalismus zweiter Art oft einen angenehmeren Lösungsweg, da er nicht ganz so rechenintensiv ist.

2.11 Forminvarianz der Lagrange-Gleichung unter Koordinatentransformation

Im Gegensatz zu Bewegungsgleichungen in der Newtonschen Mechanik, sind die Lagrange-Gleichungen forminvariant. Sie sind also unter der bijektiven differenzierbaren **Punkttransformation**

$$q'_i = q'_i(q_1, \dots, q_s, t) \quad ; \quad i = 1, \dots, s$$

forminvariant. Punkttransformationen beschreiben beispielsweise die Transformation von kartesischen auf krummlinienige Koordinaten oder die Transformation zwischen einem inertialen und nicht-inertialen Bezugssystem. Die Darstellung der Bewegungsgleichungen ändert sich also nicht.

Aus der Lagrange-Gleichung (2.29) für die gestrichene Fnktn erhält man durch Umstellen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'(q'_i, \dot{q}'_i, t)}{\partial \dot{q}'_i} = \frac{\partial L'}{\partial q'_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, s$$

und aus der Bijektivität folgt $q_i = q_i(q'_j, \dots, q'_s, t)$. Mit der Kettenregel kommt man auf

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \dot{q}'_j + \frac{\partial q_i}{\partial t},$$

woraus

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}'_j} = \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \tag{2.41}$$

folgt. Es soll jedoch auch gezeigt werden, dass die Lagrange-Gleichungen identisch sind, also

$$L'(q'_1, \dots, q'_s, \dot{q}'_1, \dots, \dot{q}'_s, t) = L(q_1(q'_1, \dots, q'_s), \dots, \dot{q}_1(q'_1, \dots, q'_s, \dot{q}'_1, \dots, \dot{q}'_s), t).$$

2 Lagrangesche Mechanik

Der Beweis erfolgt durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L'}{\partial q'_i} &= \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_i} \right) \frac{\partial L'}{\partial q'_i}, \\
 &= \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q'_i}, \\
 &= \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial q'_i} \quad \text{und} \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} &= \sum_{j=1}^s \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} \right]
 \end{aligned}$$

Wir wissen, dass

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} = \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_i}$$

gilt. Schließlich erhalten wir also

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} - \frac{\partial L'}{\partial q'_i} = \sum_{j=1}^s \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right)}_{=0} \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} = 0$$

und sehen, dass L' die Lagrange-Gleichungen erfüllt. Forminvarianz ist eine starke Symmetrie, es verlangt nur eine bijektive und hinreichend differenzierbare Abbildung. Im folgenden Abschnitt werden wir uns im Rahmen des Noether-Theorems ausführlicher mit Symmetrien beschäftigen.

2.12 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

2.12.1 Symmetrie

Eine Symmetrie ist in der Physik die Eigenschaft eines Systems, nach einer bestimmten Änderung unverändert zu bleiben. Transformationen, die den Zustand eines Systems nicht verändern, nennt man **Symmetrietransformationen**. Man unterscheidet hierbei

- **diskrete Symmetrie**: endliche Anzahl an Symmetrietransformationen (z.B. Spiegelungen) und
- **kontinuierliche Symmetrie**: unendliche Anzahl an Symmetrietransformationen (z.B. Rotation), bzw. sie können aus infinitesimalen Transformationen zusammengesetzt werden.

Symmetrien kann man verknüpfen (bzw. hintereinander ausführen) und invertieren. Mathematisch kann man sie mit **Gruppen** beschreiben. Da Gruppen relativ häufig vorkommen, soll hier ganz kurz auf die Grundlagen eingegangen werden:

Def.: Gruppe

Eine Gruppe (G, \circ) ist ein Paar aus einer Menge G und einer inneren Verknüpfung \circ , die folgende Eigenschaften aufweist:

1. Abgeschlossenheit: $\forall x, y \in G : x \circ y \in G$
2. Assoziativität: $\forall x, y, z \in G : x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$
3. Existenz eines neutralen Elements: $\exists_1 e \in G : \forall x \in G : x \circ e = x$
4. Existenz eines inversen Elements: $\forall x \in G : \exists_1 x^{-1} \in G : x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$

Ist die Gruppe kommutativ, wird sie **abelsch** genannt, andernfalls **nichtabelsch**. Erfüllen bestimmte Elemente der Gruppe ebenfalls die oben genannten Forderungen, bilden diese eine Untergruppe.

Unsere Symmetrietransformationen sind also Elemente einer Gruppe. Besonders wichtig sind kontinuierliche Symmetrien, wie zum Beispiel die Rotation in drei Dimensionen ($SO(3)$). Diese bildet eine Lie-Gruppe, welche eine Lie-Algebra assoziiert. Die Begriffe Lie-Gruppe und Lie-Algebra sind hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt, Interessierte finden in Fachbüchern mehr Informationen darüber. Wenn Systeme Symmetrien aufweisen, folgen daraus Erhaltungsgrößen.

2.13 Noether-Theorem

”Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gehört eine Erhaltungsgröße.”

”Every continuous symmetry is associated to a conserved quantity.”

Dieses Theorem, dass kontinuierlichen Symmetrien eine Erhaltungsgröße zuordnet, wurde in 1918 von der deutschen Mathematikerin Amalie Emmy Noether (* 23.03.1882, Erlangen; † 14.04.1935, Pennsylvania) formuliert. Uns schon bekannte Beispiele für kontinuierliche Symmetrien und ihre Erhaltungsgrößen sind:

Translationssymmetrie	\Leftrightarrow	Impulserhaltung
Rotationssymmetrie	\Leftrightarrow	Drehimpulserhaltung
Translation in der Zeit	\Leftrightarrow	Energieerhaltung

Aber wie finden wir unsere Erhaltungsgrößen in der klassischen Mechanik? Wir definieren den **verallgemeinerten Impuls** (ebenfalls kanonischer oder auch konjugierter Impuls genannt):

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.42)$$

Dieser konjugierte Impuls entspricht bei geschwindigkeitsunabhängigen Potentialen dem kinematischen Impuls. Es gilt Koordinaten zu finden, die nicht selber in der Lagrange-Funktion auftreten, sondern nur ihre Ableitung. Diese Koordinaten nennt man **zyklisch**. Die Lagrange-Gleichung für den konjugierten Impuls einer zyklischen Koordinate

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} p_j = 0 \quad \rightarrow p_j = \text{const.} \quad (2.43)$$

Die konjugierten Impulse von zyklischen Koordinaten sind erhalten. Ist ein System unter einer Verschiebung der Koordinate q_i invariant, kann diese nicht in der Lagrange-Gleichung vorkommen. Also verursachen Symmetrien zyklische Koordinaten und damit Erhaltungsgrößen. Wir betrachten eine kontinuierliche Koordinatentransformation

$$q_i \rightarrow q_i + \alpha \quad (2.44)$$

mit der infinitesimalen Koordinatentransformation α . Wenn die Lagrange-Funktion danach invariant ist, ist der konjugierte Impuls zyklisch und somit eine Erhaltungsgröße. Ist ein System zum Beispiel rotationsinvariant, kann die Lagrange-Funktion nicht vom entsprechenden Winkel abhängen. Das Noether-Theorem besagt:

Eine Funktion $f(q, \dot{q}, t)$ heißt **Erhaltungsgröße** (oder Konstante der Bewegung, sowie auch erstes Integral), wenn für alle die Lagrange-Gleichungen erfüllenden Bahnen gilt

$$\frac{d}{dt}f(q, \dot{q}, t) = 0, \quad (2.45)$$

also das $f(q, \dot{q}, t)$ für alle Bewegungen konstant ist. Es ist ratsam, möglichst viele Erhaltungsgrößen in seinen generalisierten Koordinaten zu wählen, da jede Erhaltungsgröße die Anzahl an notwendigen Integrationen verringert. Außerdem werden mögliche Bewegungsformen (z.B. chaotisches Verhalten) eingeschränkt.

2.14 Beweis des Noether-Theorems

Wir betrachten die invertierbare Koordinatentransformation

$$q_i \rightarrow q'_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-p}, t, \alpha)$$

die (mit $i = 1, \dots, 3N - p$) im kontinuierlichen Parameter α stetig differenzierbar sind.

$$q_i = q'_i(q'_1, q'_2, \dots, q'_{3N-p}, t, \alpha)$$

Dies ist die Invertierung der Koordinatentransformation. Unsere Lagrange-Funktion definieren wir

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q(q', t, \alpha), \frac{d}{dt}q(q', t, \alpha), t) := L'(q', \dot{q}', t, \alpha) \quad (2.46)$$

und schauen nun, wie die neue Lagrange-Funktion L' vom Parameter α' abhängt.

2 Lagrangesche Mechanik

Dazu berechnen wir die partielle Ableitung nach α

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L'}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^{3N-p} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{dq_i(q', t, \alpha)}{dt} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^{3N-p} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right) \right] \\
 &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^{3N-p} \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

und setzen α gleich Null (die Gleichung gilt ja $\forall \alpha$). Wenn der linke Term gleich Null ist,

$$\left. \frac{\partial L'(q', \dot{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^{3N-p} \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right] \tag{2.48}$$

folgt auch für den rechten Term

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^{3N-p} \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right] = \frac{d}{dt} [I(q, \dot{q}, t)] = 0. \tag{2.49}$$

I ist also eine Erhaltungsgröße.

2.15 Eichinvarianz der Lagrange-Gleichungen

Wir wollen nocheinmal nachrechnen, dass die Lagrangegleichungen unter Symmetrietransformationen invariant sind. Die totale zeitliche Ableitung einer beliebigen Eichfunktion $F(q, t)$ soll die Lagrangegleichungen identisch erfüllen. Also darf $F(q, t)$ nicht explizit von \dot{q} abhängen. Durch Berechnen der Ableitung

$$\frac{d}{dt} F(q, t) = \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{2.50}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q} \tag{2.51}$$

und

2.15 Eichinvarianz der Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial q} \frac{dF}{dt} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q} \quad (2.52)$$

$F(q, t)$ erfüllt also die Lagrange-Gleichungen für **alle** $q_i(t)$. Wir dürfen also zu unserer Lagrange-Funktion beliebig totale geschwindigkeitsunabhängige Zeitableitungen addieren, ohne die Bewegungen zu verändern. Dies nennt man **Umeichung**. Transformationen der Form

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L(q', \dot{q}', t) + \frac{d}{dt} f(q', t, \alpha) \quad (2.53)$$

lassen die Lagrangefunktion invariant. Man nennt sie **Eichtransformationen**. Eichtransformationen sind Symmetrien der Lagrange-Funktion, die die Lagrange-Gleichungen unverändert lassen. Also erhalten wir auch hier eine Erhaltungsgröße

$$I(q, \dot{q}, t) := \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (2.54)$$

Beispiele zum Noether-Theorem werden noch ergänzt

3 Anwendungen der Lagrangeschen Mechanik

3.1 Zentralkraftprobleme und Keplersche Gesetze

Als Anwendungen der Lagrangeschen Mechanik wollen wir uns mit Zentralkraftproblemen, wie z.B. Planetenbahnen um ein Zentralgestirn beschäftigen. In diesem Zuge werden wir natürlich auch die Keplerschen Gesetze behandeln und sie mit dem Lagrange-Formalismus bestätigen.

Wir betrachten ein Zweikörperproblem mit den beiden Massenpunkten m_1 und m_2 mit dem

$$\text{Schwerpunkt } \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (3.1)$$

sowie dem Relativvektor $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Gemäß dem Schwerpunktsatz

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i^{ex} \quad (3.2)$$

können wir für $\ddot{\vec{r}}$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_1^{ex}}{m_1} + \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} - \frac{\vec{F}_2^{ex}}{m_2} \quad (3.3)$$

$$= \frac{\vec{F}_1^{ex}}{m_1} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12} \quad (3.4)$$

schreiben, da $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ gilt. Wir setzen $\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) := \frac{1}{\mu}$, wobei μ die

$$\text{reduzierte Masse } \mu = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad (3.5)$$

ist. Für $\vec{F}_i^{ex} = 0$ oder \vec{F}_i^{ex} proportional zu m_i (z.B. Gravitation) ist

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}}. \quad (3.6)$$

3 Anwendungen der Lagrangeschen Mechanik

Wenn \vec{F}_{12} nur von \vec{r} abhängt, entkoppeln sich die Bewegungsgleichungen für \vec{R} und \vec{r} , man erhält also zwei Einkörperprobleme. Im Folgenden wollen wir annehmen dass gilt

$$\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla} V, V = V(|\vec{r}|),$$

der Drehimpuls erhalten

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

und die Bahn eben ist. Das Koordinatensystem soll in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) sein und so gewählt werden, dass $\vec{L} \parallel \vec{L}_z$.

Mit $\mu \rightarrow m$ ergibt sich für die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r). \quad (3.7)$$

φ ist eine zyklische Koordinate, ihr kanonischer Impuls ist also konstant,

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}^2 = \mathbf{const.} \quad (3.8)$$

Wenn r konstant ist, handelt es sich bei der Bahn um eine Kreisbahn. Da aber $\omega = r^2 \dot{\varphi} = \mathbf{const.}$ ist, sind auch Ellipsen zugelassen.

3.1.1 2. Keplersches Gesetz

Wir wissen, dass die infinitesimal (vom sogenannten *Fahrstrahl*) überstrichene Fläche dA sich

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\varphi \quad (3.9)$$

schreiben lässt. Somit gilt für die pro Zeiteinheit überstrichene Fläche

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{2m} = \frac{L_z}{2m} = \mathbf{const.} \quad (3.10)$$

Dies ist das zweite Keplersche Gesetz.

"Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen."

$$\boxed{\Delta A = \frac{L_z}{2m} \Delta t = \mathbf{const.} \rightarrow \mathbf{2. Keplersches Gesetz}} \quad (3.11)$$

3.1 Zentralkraftprobleme und Keplersche Gesetze

Dies gilt für jedes Zentralpotential, auch für nicht-konservative. Jetzt werden jedoch die Annahmen, dass $\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}V$, $L(q, \dot{q}) \rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$ gilt, wichtig. Die Gesamtenergie ist also erhalten

$$E = T + V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \mathbf{const.} \quad (3.12)$$

Auflösen des Ausdrucks nach \dot{r} liefert

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left[E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \right]}, \quad (3.13)$$

was wir nun in $\dot{\varphi}$ einsetzen

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{2mr^2}, \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \pm \frac{\sqrt{2m}}{L} r^2 \sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}. \quad (3.14)$$

Zusammengefasst erhält man

$$\pm \sqrt{\frac{2m}{L}} = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{(r')^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left[E - \frac{L^2}{2mr'^2} - V(r') \right]}}, \quad (3.15)$$

wobei $r(\varphi = 0) = r_0$.

3.1.2 1. Keplersches Gesetz

Für Potentiale der Form $V(r) = \frac{\alpha}{r}$ mit $k := \frac{L^2}{m(\alpha)}$ und der Exzentrizität $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$ erhalten wir

$$\frac{1}{r} = \begin{cases} \frac{1}{k} \left[-1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0) \right] & \alpha > 0 \\ \frac{1}{k} \left[-1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0) \right] & \alpha < 0 \end{cases},$$

Dies sind Gleichungen für **Kegelschnitte**. Für eine abstoßende Kraft ($\alpha > 0$) wird $\epsilon > 1$ (natürlich ist $E > 0$) erhält man **Hyperbeln**.

Für anziehende Kräfte ($\alpha < 0$) erhält man für

$$\begin{array}{ll} \epsilon = 0 & \text{Kreise,} \\ 0 < \epsilon < 1 & \text{Ellipsen,} \\ \epsilon = 1 & \text{Parabeln und für} \\ \epsilon > 1 & \text{Hyperbeln.} \end{array}$$

3 Anwendungen der Lagrangeschen Mechanik

Da anziehende Kräfte vorliegen ($\alpha < 0$), $E > 0$ und somit $\epsilon < 1$ ist, laufen die Planeten auf Ellipsenbahnen.

”Die Planeten laufen auf Ellipsenbahnen um.” \rightarrow **1. Keplersches Gesetz**

Die große Halbachse a der Ellipse ist gegeben durch

$$a = \frac{k}{1 - \epsilon^2} = \frac{\alpha}{2E} \quad (3.16)$$

und die Fläche ergibt sich mit

$$A = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{\pi L}{\sqrt{-m\alpha}} a^{\frac{3}{2}}. \quad (3.17)$$

3.1.3 3. Keplersches Gesetz

In einer Umlaufzeit T soll die gesamte Fläche überstrichen werden. Den Zusammenhang zwischen überstrichener Fläche und Zeit kennen wir schon aus dem zweiten Keplerschen Gesetz

$$\Delta A = \frac{L}{2m} \Delta t. \quad (3.18)$$

Für die Fläche können wir jedoch auch unseren Ausdruck aus Gl. (3.17) schreiben und erhalten somit

$$A = \frac{\pi L}{\sqrt{-m\alpha}} a^{\frac{3}{2}} = \frac{L}{2m} T, \quad (3.19)$$

also

$$\frac{T^2}{a^3} = -\frac{4\pi^2 m}{\alpha} = \mathbf{const.} \quad (3.20)$$

Mit $\alpha = -G m_{ZG} m_P$ (Gravitation), wobei m_{ZG} die Masse des Zentralgestirns und m_P die Masse des Planeten ist, erhalten wir schließlich das dritte Keplersche Gesetz.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G_N(m_{ZG} + m_P)} = \mathbf{const.} \rightarrow \mathbf{3. Keplersches Gesetz} \quad (3.21)$$

Streuung am Zentralpotential wird noch ergänzt.

4 Der starre Körper

Ein **starrer Körper** ist ein System vieler Teilchen. Der Abstand zwischen allen Teilchen sei konstant (keine Flüssigkeit, Gas, etc.): $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const. } \forall i, j$. Dies sind alles holonome Zwangsbedingungen.

Ein starrer Körper in drei Raumdimensionen hat sechs Freiheitsgrade, die mit unabhängigen, generalisierten Koordinaten beschrieben werden. Zweckmäßig wählt man den Ort des Schwerpunktes sowie drei Winkel, die die Orientierung des Körpers im Raum beschreiben. Die Bewegung eines starren Körpers ist eine Superposition einer Translation eines körperfesten Punktes P und einer Rotation um eine Drehachse, die nicht zwingend körperfest sein muss.

Beispielsweise stelle man sich hier eine Fahrt mit einer Achterbahn vor: Zu einer Vorwärtsbewegung in drei Dimensionen auf der Schiene kann sich der Wagen bei manchen Fahrgeschäften um seine eigene oder eine äußere Achse drehen.

Jedoch lässt sich die Gesamtrajektorie immer in ihre einzelnen Translations- und Rotationskomponenten aufschlüsseln.

Wir betrachten zwei Bezugssysteme:

Das System 1), im folgenden S_L sei das Laborsystem, ein Inertialsystem. System 2), im folgenden S , sei ein körperfestes, bewegliches System S mit dem Koordinatenursprung in P .

Der Vektor $\vec{R}_L = \vec{r}_0 + \vec{r}$ sei ein aus dem Laborsystem betrachteter Ortsvektor. Die Geschwindigkeit aus der Sicht von S erhält man durch

$$\dot{\vec{R}}_L = \left(\frac{d}{dt} \right)_L \vec{R} = \dot{\vec{r}}_0 + \left(\frac{d}{dt} \right)_L \vec{r} \quad (4.1)$$

Wir erinnern uns: Wenn sich das körperfeste System S gegenüber dem Laborsystem S_L mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ dreht, gilt, angewandt auf einen beliebigen Vektor, dass die Zeitableitung im Laborsystem gleich ist mit der Zeitableitung im körperfesten System.

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_L = \underbrace{\frac{d}{dt}}_{\text{aus Sicht von } S} + \vec{\omega} \cdot x \quad (4.2)$$

Daraus folgt, dass

Hier fehlt noch die Formel

Die Bewegung des Punktes \vec{r} wird - wie oben schon vermerkt - in eine Translation von P und eine Rotation um die momentane Drehachse $\vec{\omega}$ durch P zerlegt. Wir wollen nun die kinetische Energie eines starren Körpers berechnen:

4.1 Kinetische Energie des starren Körpers

Die kinetische Energie eines starren Körpers setzt sich zusammen aus der Translationsenergie und der Rotationsenergie. Dies wollen wir - allgemeiner als im ersten Semester - herleiten.

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\dot{\vec{r}}_{iL} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i \right)^2 \quad (4.3)$$

Nach dem Einsetzen des oben in (3) gefundenen Ausdrucks für $\dot{\vec{r}}_{iL}$ ziehen wir nun die Summen auseinander und vereinfachen zu

$$\underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\dot{\vec{r}}_0 \right)^2}_{=M} + \underbrace{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_0 \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i \right)}_{\Xi} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i \right)^2. \quad (4.4)$$

Die Summanden Ξ können wir noch durch Vorziehen von nicht von i abhängigen Variablen vereinfachen.

$$\Xi = M \dot{\vec{r}}_0 \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{R} \right) \quad (4.5)$$

Dies ist die gesamte kinetische Energie eines starren Körpers. Wir wollen später durch das Einführen des Trägheitsmoments manche Ausdrücke noch aufhübschen. Betrachten wir aber nun zuerst zwei Fälle, die sich aus (5) ergeben:

- (1) Ein Punkt des Körpers ist raumfest. Wir wählen P als raumfesten Punkt:
 $\Rightarrow \vec{r}_0 = \text{const.} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_0 = 0$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i \right)^2 \quad (4.6)$$

Übrig bleibt alleine die **Rotationsenergie** T_R . Als Beispiel stelle man sich einen starren Körper - zum Beispiel eine Computermaus - vor, der an einem Punkt festgehalten wird. Er kann sich nunmehr nur drehen um Achsen, die sich in diesem Punkt schneiden.

- (2) Kein Punkt des Körpers ist raumfest. Wir wählen P als Schwerpunkt.

$$\vec{R} = 0 \quad \forall t. \quad \Rightarrow \quad T = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_0^2}_{\text{Translationsenergie } T_T} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i \right)^2}_{\text{Rotationsenergie } T_R} \quad (4.7)$$

4.2 Trägheitstensor, Trägheitsmoment

Im Folgenden wollen wir uns genauer der Rotationsbewegung widmen. Sei α der Winkel zwischen zwei beliebigen, dreidimensionalen Vektoren \vec{a} und \vec{b} , so gilt, dass

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = a^2 b^2 \sin^2 \alpha = a^2 b^2 (1 - \cos^2 \alpha) = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \quad (4.8)$$

Die Rotationsenergie können wir mit Formel 77 als

$$\begin{aligned} T_R &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega_1 x_{i1} + \omega_2 x_{i2} + \omega_3 x_{i3})^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dabei sind die x_i die Komponenten des Vektors \vec{r}_i im körperfesten System S. T_R enthält nur Terme 2. Ordnung in den ω_i . Dadurch können wir die Rotationsenergie schöner mit einer Matrix schreiben. Wir erhalten

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^3 I_{lm} \omega_l \omega_m \quad (4.10)$$

als Ergebnis. Die Matrix I_{lm} sei

$$I_{lm} = \sum_i m_i (\delta_{lm} r_i^2 - x_{il} x_{im}). \quad (4.11)$$

Das auftretende δ_{lm} ist das Kronecker- δ . Die Matrix I_{lm} heißt **Trägheitstensor**.

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

$$T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \vec{\omega} \quad (4.12)$$

Ist die Massenverteilung des Körpers kontinuierlich, d.h. der Körper besteht nicht aus einer endlichen Summe an Massenpunkten sondern aus einer unendlichen Anzahl von Massenpunkten, geht die Summation in ein Integral über. Das Massenelement bei \vec{r} ist $dm(\vec{r}) = d^3 r \rho(\vec{r})$. Die Gesamtmasse kann über eine Integration über alle dm berechnet werden. Setzen wir den gewonnen Ausdruck in die Gleichung für den Trägheitstensor ein, erhalten wir

$$I_{lm} = \int d^3 r \rho(\vec{r}) (\delta_{lm} r^2 - x_l x_m). \quad (4.13)$$

4 Der starre Körper

ρ ist die Dichte des Körpers am Punkt \vec{r} .

Dreht sich der Körper um eine Achse, die durch den Einheitsvektor \vec{n} beschrieben ist, so ist $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{n}$ und

$$T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{n}^T I \vec{n} \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (4.14)$$

In Folge definieren wir

$$I \equiv \vec{n}^T I \vec{n} \quad (4.15)$$

als das **Trägheitsmoment** des Körpers bezüglich der Achse \vec{n} .

4.3 Der Drehimpulssatz

Im Laborsystem gilt:

$$\dot{\vec{L}}_{ges,L} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{L,i} \times \dot{\vec{r}}_{L,i} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{L,i} \times \ddot{\vec{r}}_{L,i} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{L,i} \times \vec{F}_{ex,i}. \quad (4.16)$$

Der Beitrag der inneren Kräfte hebt sich heraus (3. Newton'sches Axiom + $\vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_{ij}$).

Wir definieren uns hier das schon aus KP1 bekannte **Äußere Drehmoment**

$$\vec{M}^{ext} = \sum_i \vec{M}_i^{ext} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}. \quad (4.17)$$

Es folgt $\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{ext}}$.

Für $\vec{L} = const$ folgt automatisch $\vec{M}^{ext} = 0$.

4.4 Die Euler-Gleichungen

Im Folgenden sprechen wir immer vom äußeren Drehmoment \vec{M}^{ext} , sodass von nun \vec{M} das äußere Drehmoment bezeichne, sofern nicht anders angegeben. Wir wissen aus dem Drehimpulssatz, dass die zeitliche Ableitung des Drehimpulses im Laborsystem das äußere Drehmoment liefert. Gleichzeitig wissen wir über \vec{L} auch noch, dass

$$\vec{L} = I \vec{\omega}. \quad (4.18)$$

4.4 Die Euler-Gleichungen

L ist im Laborsystem zeitabhängig, da die Hauptträgheitsachsen mit dem Körper mitrotieren. Wir benutzen den Drehimpulssatz, um \vec{M} zu berechnen,

$$\vec{M} = \left(\frac{d}{dt} \right)_L \vec{L} = \left[\left(\frac{d}{dt} \right)_L I \right] \vec{\omega} + I \left(\frac{d}{dt_L} \right) \vec{\omega}. \quad (4.19)$$

Wir haben $\left(\frac{d}{dt_L} \right)_L = \frac{d}{dt} + \vec{\omega} \times$ und können damit \vec{M} angeben zu

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = I\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (I\vec{\omega}). \quad (4.20)$$

Der erste Term ist 0, da er im körperfesten System nicht zeitabhängig ist. In einer kleinen Rechnung kann man sich selbst veranschaulichen, dass die zeitlichen Ableitungen von $\vec{\omega}$ im körperfesten System und im Laborsystem übereinstimmen. Wir wählen nun die Hauptträgheitsachsen als Koordinatenachsen des körperfesten Systems. Dies diagonalisiert unseren Trägheitstensor mit den Diagonaleinträgen I_1, I_2, I_3 .

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\dot{\omega}_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Die Komponenten ergeben die drei **Euler-Gleichungen**, drei nichtlineare, gekoppelte Differentialgleichungen für ω_1, ω_2 und ω_3 . Diese Gleichungen beschreiben für jedes Drehmoment und jeden Körper die Drehbewegung. Allerdings sind sie um einiges komplizierter als das bekannte $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ der Translation. Zur Übersicht seien die drei Gleichungen nochmal aufgeführt.

$$M_1 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3, \quad (4.22)$$

$$M_2 = I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1, \quad (4.23)$$

$$M_3 = I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2. \quad (4.24)$$

Um diese Gleichungen lösen zu können, benötigen wir noch geeignete unabhängige Koordinaten für Drehungen in drei Raumdimensionen. Diese sind die drei **Euler-Winkel** (ϕ, θ, ψ) . Um diese zu definieren, betrachten wir zunächst allgemein Drehungen im Raum (insert graphic). Wir haben

$$\vec{r}_L = \vec{r}_0 + r_i \vec{e}_i; \quad \vec{e}_i^S = \vec{e}_i^S(t). \quad (4.25)$$

Wir drücken die \vec{e}_i^S durch die \vec{e}_i^L aus. Damit können wir die Lage des starren Körpers im Raum zu jedem Zeitpunkt eindeutig bestimmen.

4 Der starre Körper

Mit der Einsteinschen Summenkonvention (über doppelt vorkommende Indizes wird summiert) können wir schreiben

$$\vec{e}_i^S(t) = D_{ij}\vec{e}_i^L; \quad \vec{r}_S = r_i\vec{e}_i^S = r_i D_{ij}(t)\vec{e}_i^L. \quad (4.26)$$

Drehungen werden durch orthogonale Matrizen $D(t)$ beschrieben, also gilt sowohl $DD^T = D^T D = 1$ als auch $\det(D) = 1$. Diese Matrizen kommutieren nicht in drei Dimensionen. Ihre Reihenfolge in der Berechnung ist also entscheidend. Die Euler-Winkel liefern eine eindeutige Parametrisierung aller Drehungen. Man kann jede Drehung als Überlagerung von drei bestimmten Drehbewegungen identifizieren. Jeder dieser Bewegungen kann ein Euler-Winkel zugewiesen werden. Wir führen eine Transformation aus dem körperfesten System ins Laborsystem. Zu jeder Drehung um einen Euler-Winkel gehört daher eine Drehmatrix.

1. Drehung um \vec{e}_3 um den Winkel φ :

Die zugehörige Matrix heißt $R_3(\varphi)$. Der Winkel φ läuft im Bereich von 0 bis 2π . Es gilt

$$\vec{e}_i^{L'} = R_{i,j}^3 \vec{e}_j^L. \quad (4.27)$$

Die Matrix $R^3(\varphi)$ ist die schon als Drehmatrix um die z-Achse bekannte Matrix. Sie lautet

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Ihre Zeilen ergeben jeweils die Umrechnung der Komponenten des Einheitsvektors im gestrichen System ins Laborsystem ($\vec{e}_i^{L'} \rightarrow \vec{e}_i^L$). Die durch $\vec{e}_1^{L'}$ gegebene Achse heißt **Knotenlinie**.

2. Drehung um $\vec{e}_1^{L'}$ um den Winkel θ Die zugehörige Matrix heißt $R^1(\theta)$. Der Winkel θ verläuft im Bereich von 0 bis π . Es gilt

$$\vec{e}_k^{L''} = R_{k,r}^1 \vec{e}_r^{L'}. \quad (4.29)$$

R^1 lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

3. Drehung um $\vec{e}_3^{L''}$ um den Winkel ψ Die zugehörige Matrix heißt $R^3(\psi)$. Der Winkel ψ verläuft im Bereich von 0 bis 2π . $R^3(\psi)$ lautet

$$\begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Nun gehen wir alle Schritte der Transformation zurück und wollen die Einheitsvektoren des körperfesten Systems im Laborsystem beschreiben. Wir machen also die Rücktransformation:

$$\vec{e}_i^S = R_{ij}^3(\psi)\vec{e}_j^{L''} = R_{ij}^3(\psi)R_{jk}^1(\theta)\vec{e}_k^{L'} = R_{ij}^3(\psi)R_{jk}^1(\theta)R_{kl}^3(\varphi)\vec{e}_l^L. \quad (4.32)$$

Wir definieren uns die allgemeine Drehmatrix jeder Drehbewegung als das Produkt

$$D_{il} = R_{ij}^3(\psi)R_{jk}^1(\theta)R_{kl}^3(\varphi). \quad (4.33)$$

Diese ergibt sich nach längerer Rechnung zu

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Fazit: Die Eulerschen Winkel φ, θ, ψ parametrisieren jede Drehung eindeutig. Sie hängen im allgemeinen von der Zeit ab und sind unabhängige, verallgemeinerte Koordinaten.

Dazu wollen wir ein Beispiel rechnen und betrachten einen **Kreisel**. Wir wollen als Lösung die Bewegungsgleichung die zeitabhängige Orientierung des Kreisels im Laborsystem bestimmen. Hierfür müssen wir die Euler-Winkel und die zugehörigen generalisierten Geschwindigkeiten mit dem körperfesten Komponenten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ in Beziehung setzen.

Betrachten wir zuerst eine infinitesimale Drehung $\vec{\omega}dt = (\omega_1\vec{e}_1^S + \omega_2\vec{e}_2^S + \omega_3\vec{e}_3^S)dt$. Diese lässt sich aus den infinitesimalen Änderungen der Euler-Winkel zusammensetzen.

1. $d\varphi$ um \vec{e}_3^L ,
2. $d\theta$ um die Knotenlinie,
3. $d\psi$ um \vec{e}_3^S .

Jetzt wollen wir alle Ausdrücke ins Koordinatensystem der Hauptträgheitsachsen umrechnen. Nach einiger Rechnung erhält man

$$\begin{aligned} \vec{\omega}dt &= (d\varphi \sin \theta \sin \psi + d\theta \cos \psi)\vec{e}_1^S \\ &+ (d\varphi \sin \theta \cos \psi - d\theta \sin \psi)\vec{e}_2^S \\ &+ (d\varphi \cos \theta + d\psi)\vec{e}_3^S. \end{aligned} \quad (4.35)$$

4 Der starre Körper

Wir erhalten also für jede Komponente ω_i eine Differentialgleichung.

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad (4.36)$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \quad (4.37)$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (4.38)$$

Im Folgenden betrachten wir den Kreisel zunächst **kräftefrei**. Auf ihn wirkt kein äußeres Drehmoment ($\vec{M}^{ext} = \vec{0}$). Aufgrund der Drehimpulserhaltung gilt im körperfesten System

$$\vec{0} = \dot{\vec{L}} = I\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}. \quad (4.39)$$

Dann lauten die Euler-Gleichungen

$$M_1 = (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = 0, \quad (4.40)$$

$$M_2 = (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = 0, \quad (4.41)$$

$$M_3 = (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = 0. \quad (4.42)$$

Wir befassen uns jetzt kurz mit der Symmetrie unseres Kreisels.

1. asymmetrischer Kreisel

Wir betrachten den Fall, dass sich alle Hauptträgheitsmomente unterscheiden. $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. Zwei der ω_i müssen gleich Null sein, damit ist $\vec{\omega}$ parallel zu einer der Hauptträgheitsachsen.

$\Rightarrow \vec{L} \parallel \vec{\omega}$. Dies gilt nicht für jeden Kreisel, es gibt auch Fälle, in denen der Drehimpuls nicht mehr parallel zu $\vec{\omega}$.

2. symmetrischer Kreisel

Zwei der Hauptträgheitsmomente sind gleich. $I_1 = I_2 \neq I_3$. Die ausgezeichnete Symmetrieachse heißt Figurenachse. Die Euler-Gleichungen reduzieren sich dann zu

$$0 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3, \quad (4.43)$$

$$0 = I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1, \quad (4.44)$$

$$0 = I_3\dot{\omega}_3. \quad (4.45)$$

Aus der dritten Gleichung folgern wir, dass ω_3 konstant sein muss. Dann erhalten wir für ω_1 und ω_2 folgende Differentialgleichungen,

$$0 = \dot{\omega}_1 - \frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_3\omega_2 = 0; \quad (4.46)$$

$$0 = \dot{\omega}_2 + \Omega\omega_1 \quad (\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_3) \quad (4.47)$$

die wir mit dem Lösungsansatz

$$\omega_1 = \alpha \sin(\Omega t + \beta); \quad \omega_2 = \alpha \cos(\Omega t + \beta) \quad (4.48)$$

lösen wollen. Ein Differentialgleichungssystem dieser Art heißt harmonischer Oszillator. Der Vektor $\vec{\omega}$ hat dann die Form

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \alpha \sin(\Omega t + \beta) \\ \alpha \cos(\Omega t + \beta) \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Im körperfesten System läuft $\vec{\omega}$ auf einem Kegelmantel (Polkegel) um die Figurenachse. Diese Bewegung nennt man **freie Nutation**.

Der schwere Kreisel Nun wollen wir als zweites Beispiel die Kreiselbewegung verallgemeinern. Wir nehmen nun an, dass es sich um einen schweren Kreisel handelt, ein Kreisel der Masse M . Auf ihn wirkt ein äußeres Drehmoment, das durch die Schwerkraft hervorgerufen wird. Die Komponenten des Drehmoments hängen von der Orientierung des Körpers im Raum ab. Dies erfordert die Lagrangegleichungen für φ, θ, ψ . Die Euler-Winkel bleiben die generalisierten Koordinaten unserer Wahl. Um uns die Rechnung etwas zu vereinfachen, gehen wir von einem symmetrischen Kreisel aus. Machen wir uns jetzt an die Lagrangefunktion $L = T - V$:

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \quad (4.50)$$

$$V = MgZ_L = Mg(X_S \sin \theta \sin \psi + Y_S \sin \theta \cos \psi + Z_S \cos \theta). \quad (4.51)$$

Für den symmetrischen Kreisel gilt $X_S = Y_S = 0$, da der Schwerpunkt auf der Symmetrieachse \vec{e}_3^S liegt. Dabei stellen X_S, Y_S, Z_S die Koordinaten des Schwerpunkts im körperfesten System dar. Definieren wir l als Abstand zwischen dem Koordinatenursprung des körperfesten Systems und dem Schwerpunkt des starren Körpers, ist

$$V = Mgl \cos \theta. \quad (4.52)$$

Also lautet die Lagrangefunktion für den schweren Kreisel

$$L = T - V = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgl \cos \theta. \quad (4.53)$$

Die Koordinaten φ und ψ erweisen sich als zyklisch. Wir haben damit zwei Erhaltungsgrößen.

$$p_{\dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta = \text{const.} \quad (4.54)$$

$$p_{\dot{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = I_3 \omega_3 = \text{const.} \quad (4.55)$$

4 Der starre Körper

Die zyklischen Koordinaten können gedeutet werden als

1. p_ψ ist die Drehimpulskomponente L_3 entlang der Figurenachse \vec{e}_3^S im körperfesten System.
2. p_φ ist die Drehimpulskomponente $(L_L)_3$ entlang der Senkrechten \vec{e}_3^L im Laborsystem.

Da die Schwerkraft konservativ ist und die Zwangsbedingungen holonom, ist die Energie erhalten:

$$E = T + V = \text{const.} \quad (4.56)$$

Trotz zweier Erhaltungsgrößen lassen sich die Bewegungsgleichungen nur numerisch lösen. Das Ergebnis der allgemeinen Kreiselbewegung ist eine Überlagerung dreier Bewegungen.

1. Rotation um Figurenachse, $\psi(t)$
2. Die Figurenachse kreist um die Senkrechte \vec{e}_3^L im Laborsystem, $\varphi(t)$. Diese Bewegung nennt man **Präzession**.
3. Der Winkel $\theta(t)$ zwischen Figurenachse und Senkrechten ändert sich periodisch. Diese Bewegung heißt **Nutation**.

Mit einem Gyroskop lassen sich alle drei Bewegungen gut veranschaulichen. Die Nutation sichtbar zu machen, erfordert jedoch etwas Übung, da ein sich ein sichtbarer Effekt beim Gyroskop erst sehr spät im Laufe der Bewegung einstellt.

5 Kleine Schwingungen

5.1 Lineare Schwingungen

Für kleine Schwingungen (lineare Schwingungen) gilt das **Hooke'sche Gesetz**. Demnach ist die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung.

$$\vec{F} = -\kappa \cdot \vec{x} \quad (5.1)$$

κ ist die Federkonstante. Betrachten wir ein konservatives, holonom-skleronomes System (bspw. ein Fadenpendel, das in einer Ebene schwingt) mit einem Freiheitsgrad q . Die Lagrangegleichung ist nun nicht mehr explizit von der Zeit abhängig.

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad (5.2)$$

Sei die Auslenkung $q - q_0$ klein, q_0 sei das Potentialminimum. Dann können wir das Potential taylor nähern:

$$V(q) = V(q_0) + 0 \cdot V'(q_0)(q - q_0) + \frac{1}{2}V''(q_0)(q - q_0)^2 + \mathcal{O}((q - q_0)^3) \quad (5.3)$$

Wir bekommen keinen linearen Term, da $V'(q_0)$ Null ist. $V''(q_0)$ ist gerade κ . Ist $\kappa \neq 0$, erhalten wir eine quadratische Näherung für das Potential. Höhere Ordnungen wollen wir vernachlässigen, da $(q - q_0)$ eine kleine Zahl ist, deren Potenzen noch viel kleiner sind. Setzen wir nun in die Lagrangegleichung die allgemeine Form der kinetischen Energie ($T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$) und legen wir q_0 o.B.d.A auf Null fest, ergibt sich

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\kappa q^2. \quad (5.4)$$

Als Lagrangefunktion erhalten wir

$$\ddot{q} = -\frac{\kappa}{m}q \quad (5.5)$$

Diese Differentialgleichung beschreibt einen harmonischen Oszillator mit den altbekannten Lösungen $q = e_1 \cos(\omega t) + e_2 \sin(\omega t)$; $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$. Die Lösung zeigt gleiches Verhalten auch für mehrere Freiheitsgrade: Bei einer

5 Kleine Schwingungen

(kleinen) Auslenkung um ein Potentialminimum führt das System harmonische Schwingungen aus. Die allgemeine Lösung für q lässt sich umschreiben

$$q = a \cos(\omega t + \alpha), \quad a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \tan \alpha = -\frac{c_2}{c_1} \quad (5.6)$$

Die Gesamtenergie des Systems E ist erhalten:

$$E = T + V = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 = \text{const.} \quad (5.7)$$

Wer will, darf auch die komplexe Schreibweise nutzen:

$$q = \Re(Ae^{i\omega t}), \quad A = ae^{i\alpha} \quad (5.8)$$

A wird auch als komplexe Amplitude bezeichnet.

5.2 Erzwungene Schwingungen

Hier lautet die allgemeine Lagrangegleichung

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{\kappa q^2}{2} + qF(t). \quad (5.9)$$

$qF(t)$ entspricht hierbei einer potentiellen Energie, die von der Wirkung eines äußeren, unveränderlichen Kraftfeldes herrührt. Die Lagrangegleichung ist dann

$$m\ddot{q} + \kappa q = F(t). \quad (5.10)$$

$F(t)$ ist die Kraft, die die Schwingungen erzeugt.

5.3 Gedämpfte Schwingungen

Hierbei wirkt eine Reibungskraft der Form $\vec{F} = -\gamma\dot{\vec{q}}$. Die Lagrangegleichung lautet

$$m\ddot{q} + \gamma\dot{q} + \kappa q = 0. \quad (5.11)$$

5.4 Schwingungen von Systemen mehrerer Freiheitsgrade

Für kleine Auslenkungen werden wiederum nur die Beiträge zum Potential beachtet, die bis zur zweiten Ordnung in der Taylorentwicklung stehen. Für ein System mit N verallgemeinerten Koordinaten haben wir

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N \kappa_{ik} q_i q_k, \quad q_i^0 = 0 \forall i. \quad (5.12)$$

5.4 Schwingungen von Systemen mehrerer Freiheitsgrade

κ_{ik} ist positiv definit, da die Entwicklung um ein Minimum beginnt. Nur der symmetrische Anteil von κ_{ik} trägt bei ($\kappa_{ik} = \kappa_{ki}$). Die kinetische Energie ist im Allgemeinen von der positiv definiten quadratischen Form

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k; \quad (5.13)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k - \kappa_{ik} q_i q_k). \quad (5.14)$$

Die Lagrangegleichungen lauten

$$\sum_k m_{ik} \ddot{q}_k + \sum_k \kappa_{ik} q_k = 0. \quad (5.15)$$

Wir haben ein System von N linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten vor uns.

Lösungsansatz: $q_k = A_k e^{i\omega t}$. Wir setzen diesen Ansatz in die Bewegungsgleichung ein und teilen die Ausdrücke jeweils durch $e^{i\omega t}$. Dies ergibt

$$\sum_k (-\omega^2 m_{ik} + \kappa_{ik}) A_k = 0. \quad (5.16)$$

Für nichttriviale Lösungen muss die Determinante verschwinden, $\det(-\omega^2 m_{ik} + \kappa_{ik}) = 0$. Wir erhalten durch eine Eigenwertberechnung eine **charakteristische Gleichung** der Matrix. Sie ist ein Polynom des Grades N in ω^2 . Sie hat i.A. N verschiedene positive Lösungen ω_α , da m_{ik}, κ_{ik} positiv definit sind. Die hierdurch definierten ω_α heißen **Eigenfrequenzen** des Systems.

Man kann durch eine kleine Überlegung zeigen, dass die Eigenfrequenzen nicht nur positiv definit, sondern auch reell sein müssen. Eine imaginäre Eigenfrequenz führt zu $q_k = e^{\pm\omega_k t}$. Dies ist keine Schwingung mehr und widerspricht damit dem Energieerhaltungssatz. Um ω^2 zu erhalten, multiplizieren wir die Matrixdifferentialgleichung mit A_i^* ,

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i,k} \kappa_{ik} A_i^* A_k}{\sum_{i,k} m_{ik} A_i^* A_k} \leq 0. \quad (5.17)$$

Hat man die ω_α aus $\det(-\omega^2 m_{ik} + \kappa_{ik}) = 0$ berechnet, so kann man sie in die Differentialgleichung einsetzen, um die A_k zu bestimmen. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass, falls alle ω_i verschieden sind, die Koeffizienten A_k zu den Unterdeterminanten vom Grad $N - 1$ der ursprünglichen Determinante proportional sind. Dabei ist in der jeweiligen Unterdeterminante ω durch das jeweilige ω_α zu

5 Kleine Schwingungen

ersetzen. Die Unterdeterminanten bezeichnet man mit $\Delta_{k\alpha}$. Eine spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems hat daher die Form

$$q_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}. \quad (5.18)$$

C_α ist eine komplexe Konstante. Die Summe aller N speziellen Lösungen liefert die allgemeine Lösung, gegeben durch

$$q_k = \Re \left[\sum_{\alpha=1}^N \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t} \right] = \sum_{\alpha} \Delta_{k\alpha} \Theta_\alpha \quad (5.19)$$

mit

$$\dot{\Theta}_\alpha \equiv \Re [C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}] \quad (5.20)$$

Die zeitliche Änderung jeder Koordinate des Systems ist eine Überlagerung von N einfachen periodischen Schwingungen $\Theta_1, \dots, \Theta_N$ mit beliebigen Amplituden und Phasen aber festgelegten Frequenzen.

Frage: Können wir die verallgemeinerten Koordinaten so wählen, dass jede von ihnen eine einfache Schwingung ausführt? Das würde die Darstellung des Problems erheblich vereinfachen.

Antwort: Ja! Wir erhalten aus unserer Rechnung N Gleichungen für N Unbekannte Θ_α . Wenn wir das Gleichungssystem invertieren, erhalten wir die Θ_α als Funktion der q_k . Die Θ_α sind die gesuchten neuen verallgemeinerten Koordinaten. Sie heißen **Normalkoordinaten** oder **Hauptkoordinaten**. Ihre einfachen Schwingungen (jeweils mit der Frequenz ω_α) heißen **Normalschwingungen** des Systems. Die Θ_α erfüllen die Gleichungen

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0. \quad (5.21)$$

In Normalkoordinaten entkoppeln die Bewegungsgleichungen in N voneinander unabhängige Gleichungen. Die Normalkoordinaten sind auch unabhängig voneinander.

Wenn wir Potential und kinetische Energie gleichzeitig diagonalisieren, gilt für die Lagrangefunktion

$$L = \sum_{\alpha} \frac{m_\alpha}{2} \left(\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2 \right). \quad (5.22)$$

Zur weiteren Vereinfachung definieren wir $\Phi_\alpha \equiv \sqrt{m_\alpha} \Theta_\alpha$. L ist jetzt $L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left(\dot{\Phi}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Phi_\alpha^2 \right)$. Sind einige der Eigenfrequenzen gleich, so gibt es zu jeder derartigen Eigenfrequenz

5.4 Schwingungen von Systemen mehrerer Freiheitsgrade

mehrere Normalkoordinaten.

Nach so viel Theorie wollen wir ein kleines Beispiel rechnen. Betrachten wir dazu zwei gekoppelte Oszillatoren (insert graphic). Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die beiden Massen gleich groß sind. Für kinetische Energie und Potential ergeben sich

$$T = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) , \quad (5.23)$$

$$V = \frac{1}{2} [(\kappa + \kappa')q_1^2 - \kappa'q_1q_2 - \kappa'q_2q_1 + (\kappa + \kappa')q_2^2] \quad (5.24)$$

Die Massen- und die Federkonstantenmetrizen lauten

$$m_{ik} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} , \quad k_{ik} = \begin{pmatrix} \kappa + \kappa' & -\kappa' \\ -\kappa' & \kappa + \kappa' - m\omega^2 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

Die verallgemeinerte Eigenwertgleichung lautet

$$\begin{pmatrix} \kappa + \kappa' & -\kappa' \\ -\kappa' & \kappa + \kappa' - m\omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 . \quad (5.26)$$

Wir berechnen daraus die normierten Eigenvektoren A_1 und A_2 .

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Mit ω_1 und ω_2

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\kappa + 2\kappa'}{m}} \quad (5.28)$$

lauten dann die Normalschwingungen

$$\vec{q}_1 = \frac{C_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) , \quad \vec{q}_2 = \frac{C_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) . \quad (5.29)$$

Die beiden Massen schwingen bei der ersten Normalschwingung in Phase und bei der zweiten gegenphasig.

6 Hamiltonsche Mechanik

6.1 Das Hamiltonsche Prinzip

Im Vorhergehenden Kapitel haben wir die Lagrange-Funktion aus dem d'Alembert'schen Prinzip hergeleitet. Dort haben wir momentane Zustände und infinitesimale virtuelle Verrückungen betrachtet. Nun wollen wir aber einen anderen Ansatz wählen, indem wir uns mögliche Wege (bzw. Trajektorien im Konfigurationsraum) anschauen und denjenigen herausuchen, welche der Günstigste ist. Das 1834 von William Hamilton (* 04.08.1805; † 02.09.1865) formulierte Prinzip besagt, dass die Bewegung eines Systems derart verläuft, sodass die Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L[q(t), \dot{q}, t] dt \quad (6.1)$$

stationär ist, also $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$ ist. Dies ist äquivalent zu den Lagrangegleichungen 2. Art, es gilt also für holonome Zwangsbedingungen.

$$\delta S = \sum_{i=1}^{3N-p} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i dt = \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \quad (6.2)$$

Mit dem „Prinzip der stationären Wirkung“ können wir auf die Bewegung eines mechanischen Systems von einem gegebenen Anfangspunkt P_1 zur Zeit t_1 zu einem gegebenen Endpunkt P_2 zur Zeit t_2 schließen. Den Begriff „stationär“ für das Integral, kann man zur Veranschaulichung mit den verschwindenden ersten Ableitungen einer Funktion vergleichen. Doch wie finden wir die Funktion, die die Wirkung stationär macht? Dies ist die Aufgabe der Variationsrechnung.

6.1.1 Variationsrechnung

Ziel der Variationsrechnung ist es, die Kurve $y(x)$ zu finden, die das Integral

$$I(f) := \int_{x_1}^{x_2} F[y(x), y'(x), x] dx \quad (6.3)$$

extremal macht. I ist ein Funktional, das heißt eine Funktion aus einem Funktionenraum \mathbb{V} , die in den dem Funktionenraum zugrundeliegenden Körper (\mathbb{R} oder \mathbb{C}) abbildet. Ein Funktional ist also quasi eine Funktion auf Funktionen, die jeder Funktion eine Zahl zuordnet.

Def: Funktional

Sei \mathbb{V} ein Vektorraum mit $\mathbb{K} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Ein Funktional F ist eine Abbildung $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$.

Die Verbindungskurve der beiden Punkte ist $f(x)$. Diese kann man jedoch beliebig mit der infinitesimalen linearen Verschiebung $\delta y(x)$ oder auch $\varepsilon \eta(x)$ verschieben. Wichtig ist hierbei, dass Anfangs- und Endpunkt gleich bleiben. Die Menge aller Kurven, die man mit dieser virtuellen Verschiebung aus unserer Kurve erhalten hat, bildet die **Konkurrenzchar**.

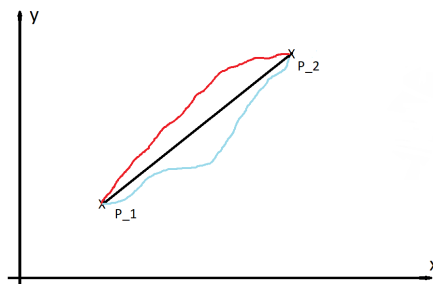


Abbildung 6.1: Zwei beispielhafte Kurven von P_1 nach P_2

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F[y(x), y'(x), x] dx$$

Betrachte alle Kurven $\hat{y}(x)$ die in der Nachbarschaft der gesuchten Kurve $y(x)$ liegen und schreibe sie in der Form

$$\hat{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x).$$

Die $\eta(x)$ sind beliebig differenzierbare Funktionen mit den Randbedingungen $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Wir betrachten das Funktional I

$$I_\eta(\varepsilon) = \int_{x_2}^{x_1} F[y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x] dx.$$

Die gesuchte Kurve $y(x)$ erteilt I genau dann ein Extremum, wenn die Integrale $I_\eta(\varepsilon)$ bei $\varepsilon = 0$ ein Extremum haben, d.h.,

$$\left. \frac{dI_\eta(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\eta \frac{\partial F}{\partial y} + \eta' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx = 0$$

und mit partieller Integration erhält man schließlich

$$\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \eta(x) + \left[\eta(x) \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2} = 0.$$

Aufgrund der Randbedingungen (der Anfangs- und Endpunkt muss gleich sein) ist der letzte Term gleich null, was für alle $\eta(x)$ gilt.

Wir wollen uns dies an einem Beispiel verdeutlichen.

KÜRZESTER WEG IN DER EBENE

Gesucht ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten in der Ebene. Für die Bogenlänge gilt

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

und die Länge einer Kurve, die zwischen P_1 und P_2 verläuft liefert

$$I = \underbrace{\int_{P_1}^{P_2} ds}_{\text{Def. Abstand}} = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

$$F(y, y', x) = \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Man erhält also

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \quad ; \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) = 0$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}} = \text{const.}$$

6 Hamiltonsche Mechanik

Daraus erhält man durch umstellen

$$y' = c\sqrt{1 + y'^2} \quad \rightarrow \quad y'^2 = c^2(1 + y'^2),$$
$$c^2 = (1 - c^2)y'^2.$$

Man erhält für y'^2 also folgenden Ausdruck. Aus der Stetigkeit von y' folgt jedoch, dass y' konstant ist, da für

$$|y'| = \sqrt{\frac{c^2}{1 - c^2}}$$

die positive und negative Lösung in Frage kommen, nämlich

$$y' = \sqrt{\frac{c^2}{1 - c^2}} \quad \text{oder} \quad y' = -\sqrt{\frac{c^2}{1 - c^2}} \quad .$$

Die Steigung y' der gesuchten Funktion ist also konstant. Es muss sich also um eine Gerade handeln,

$$\rightarrow y(x) = ax + b.$$

6.2 Der Hamilton-Formalismus

Bisher haben wir im ersten Semester die Newton'sche Mechanik und vor kurzem neu den Lagrange-Formalismus kennengelernt. Diese sind zueinander äquivalent, das wurde auch an entsprechender Stelle gezeigt. Der Lagrange-Formalismus ist aufgrund der Forminvarianz der Bewegungsgleichungen sehr leistungsfähig. Allerdings hat der hier neu einzuführende Hamilton-Formalismus, der nach seinem Erfinder William Rowan Hamilton (1834) benannt ist, einige Vorzüge.

1. Der Hamilton-Formalismus ist rechentechnisch vorteilhaft bei zyklischen Koordinaten.
2. Er zeigt eine noch größere Symmetrie, nämlich zwischen verallgemeinerten Koordinaten und Impuls
3. Für konservativ-skleronome Systeme ist der Hamilton-Formalismus gerade die Gesamtenergie.

Der Hamilton-Formalismus wird gerne in der Quantenmechanik und in der statistischen Mechanik benutzt, der Lagrange-Formalismus genießt Vorzüge in der Relativistischen Physik, der Elektrodynamik und Feldtheorien.

Zur Definition des Hamilton-Formalismus' müssen wir uns die Lagrangefunktion nochmal in Erinnerung rufen. Sie ist von den verallgemeinerten Koordinaten, den verallgemeinerten Geschwindigkeiten und (nicht immer explizit) von der Zeit abhängig,

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t). \quad (6.4)$$

In der Hamilton-Mechanik verwendet man anstatt der verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}_i die konjugierten Impulse p_i als Variable.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \vec{p} = (p_1, \dots, p_s)^T \quad (6.5)$$

Der von den zugelassenen Werten von \vec{q}_i und \vec{p}_i gebildete 2-S-dimensionale Raum heißt **Phasenraum**. Wir suchen nun eine Funktion der Variablen q_i, p_i, t , die dieselbe Information trägt wie die Lagrange-Funktion. Dazu muss es eine bijektive Abbildung zwischen \mathcal{L} und der gesuchten Funktion (\mathcal{H}) geben. Diese erhalten wir aus der **Legendre-Transformation**, benannt nach dem französischen Mathematiker Adrien-Marie Legendre (1752-1833).

6.2.1 Legendre-Transformation

Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion zweier Variablen

$$f : x, y \rightarrow f(x, y). \quad (6.6)$$

Das totale Differential von f lautet

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \equiv u dx + v dy. \quad (6.7)$$

Wir suchen nun eine bijektive Abbildung der Funktion f auf eine Funktion g , sodass g von den Variablen $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ und y abhängt. Eine Möglichkeit einer solchen Abbildung ist

$$f \rightarrow g \equiv f - u \cdot x, \quad (6.8)$$

sofern $u = u(x, y)$ für alle y nach x auflösbar ist. Um dies zu zeigen, bilden wir das totale Differential

$$dg = df - d(u \cdot x) = u dx + v dy - du x - u dx = -x du + v dy. \quad (6.9)$$

6 Hamiltonsche Mechanik

g ist zunächst eine Funktion von x und y .

$$g = f(x, y) - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot x \quad (6.10)$$

Um g als Funktion von (u, y) zu schreiben, muss $x \rightarrow u = \frac{\partial f}{\partial x}$ für jedes feste y umkehrbar sein. Dann können wir x eindeutig durch u, y ausdrücken, wie vorausgesetzt. Damit existiert zu jeder Funktion $f(x, y)$ eine Funktion $g(u, y)$. Aus $g = g(u, y)$ erhalten wir

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial y} dy = -x du + v dy. \quad (6.11)$$

Die Abbildung ist also umkehrbar. Die Abbildung $f \rightarrow g$ hat die gewünschten Eigenschaften.

Wir wenden nun die Legendre-Transformation für alle Geschwindigkeiten \dot{q}_i auf die Lagrange-Funktion an,

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \rightarrow H = \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L. \quad (6.12)$$

6.2.2 Die Hamilton-Funktion

Die rechte Seite der obigen Gleichung ist die Hamilton-Funktion

$$H = H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L. \quad (6.13)$$

Wir wollen zur Anwendung der Hamilton-Funktion zwei Beispiele rechnen.

HARMONISCHER OSZILLATOR

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \kappa q^2$$

Wir berechnen jetzt den verallgemeinerten Impuls

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m},$$

welchen wir in die Hamilton-Funktion einsetzen und erhalten

$$H = p \dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa q^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa q^2}{2},$$

die Hamilton-Funktion gleicht in diesem Beispiel also der Gesamtenergie,

$$\boxed{H = E = T + V.} \quad (6.14)$$

TEILCHEN IM ELEKTRISCHEN FELD

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{\vec{r}})^2 - \underbrace{q}_{\text{Ladung}} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - q \Phi \quad (6.15)$$

Dabei ist Φ, \vec{A} das elektromagnetische Potential. Aus der Elektrodynamik wissen wir, dass

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (6.16)$$

Der generalisierte Impuls ist dann

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}. \quad (6.17)$$

Dieser ist verschieden vom kinetischen Impuls $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi \quad (6.18)$$

und somit erhalten wir einen Impuls, der um $-q\vec{A}$ verschoben ist.

Herleitung der Bewegungsgleichungen Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen berechnen wir das totale Differential der Hamilton-Funktion,

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i dp_i \dot{q}_i + \sum_i p_i dq_i - dL \\ &= \sum_i \left(dp_i \cdot \dot{q}_i + p_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \left(dp_i \cdot \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Andererseits gilt mit $H = H(q_i, p_i, t)$

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (6.20)$$

ein Vergleich der beiden obigen Gleichungen ergibt

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{p}_i \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (6.23)$$

6 Hamiltonsche Mechanik

Für Systeme, in denen L und damit auch H nicht explizit von der Zeit abhängen, gelten die **Hamilton'schen Gleichungen**

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.} \quad (6.24)$$

Diese 2S Differentialgleichungen 1. Ordnung enthalten die gleiche Information wie die S Lagrangegleichungen. Zur Lösung benötigen wir 2S Anfangsbedingungen, zum Beispiel Koordinaten und Impulse zu einer Anfangszeit $\vec{q}(t_0), \vec{p}(t_0)$.

Wir wollen in einer expliziten Rechnung zeigen, dass die partielle zeitliche Ableitung der Lagrangegleichung bis auf ein Vorzeichen mit der Ableitung der Hamiltongleichung übereinstimmt,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dL}{dt} &= \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \left(L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(L - \sum_j p_j \dot{q}_j \right) = -\frac{dH}{dt}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Es folgt, wie wir oben zeigen wollten, aus

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dH}{dt} = 0. \quad (6.26)$$

Die partielle Zeitableitung der Hamiltonfunktion ist äquivalent zur totalen Zeitableitung der Hamiltonfunktion.

Mit $\frac{\partial H}{\partial L} = -\frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$ kann die Hamiltonfunktion höchstens explizit von der Zeit abhängen. Die implizite Zeitabhängigkeit (durch Koordinaten und Impulse) muss sich herausheben.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad H = \text{const.} \quad (6.27)$$

Wir wollen dazu noch ein kleines Beispiel rechnen. Betrachten wir einen harmonischen Oszillator.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \kappa q^2. \quad (6.28)$$

Die kanonischen Gleichungen lauten dann

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (6.29)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\kappa q. \quad (6.30)$$

$$\Rightarrow \ddot{q} = \frac{\dot{q}}{m} = \frac{\kappa}{m} q \quad (6.31)$$

Wir erhalten die gleiche Differentialgleichung wie aus dem Lagrangeformalismus.

6.2.3 Forminvarianz unter einer Punkttransformation

Wie wir bereits gesehen haben, ist die Lagrangefunktion unter einer Punkttransformation invariant:

$$q_i = q'_i(q_j, t); \quad L'(q'_i, \dot{q}'_i, t) = L(q_i(q'_i, t), \dot{q}_i(q'_i, \dot{q}'_i, t)); \quad (6.32)$$

Wie aber transformiert sich die Hamiltonfunktion?

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad p'_i = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_i}}_{=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_i} = \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_i} \quad (6.33)$$

$$H' = \sum_i p'_i \dot{q}'_i - L' = \sum_{ij} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_i} - L' = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \quad (6.34)$$

q' hängt nicht von \dot{q} ab. Später lernen wir eine noch größere Symmetrieklasse kennen, die kanonischen Transformationen. Diese hängen von q und p ab.

6.2.4 Der Phasenraum

Die 2S Variablen q_i, p_i spannen den **Phasenraum** auf. Der Phasenraumvektor heißt $\vec{\Pi} = (\vec{q}, \vec{p})$. Dieser Vektor enthält die vollständige Information über ein mechanisches System. Gleichzeitig ist $\vec{\Pi}$ die minimal notwendige Angabe, um das System eindeutig zu charakterisieren. $\vec{\Pi}$ wird als **Zustand** des Systems bezeichnet. Als Funktion der Zeit t bewegt sich der Punkt des Systems $\vec{\Pi}$ im Phasenraum und beschreibt dabei eine Kurve, die **Phasenraumbahn**. Als Beispiel wollen wir uns wiederum den harmonischen Oszillator ansehen,

$$E = H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa q^2 = \text{const.} \quad (6.35)$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2\frac{E}{\kappa}}. \quad (6.36)$$

Was wir vor uns haben, ist eine Ellipse mit den Halbachsen $\sqrt{2\frac{E}{\kappa}}$ und $\sqrt{2mE}$. [insert graphic]. Da $\dot{q} = \frac{p}{m}$ und $m > 0$ bewegt sich $\vec{\Pi}(q, p)$ im Uhrzeigersinn. Die Schwingungsperiode T für alle Bahnen ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\kappa}}. \quad (6.37)$$

6.2.5 Zyklische Koordinaten

Wir wollen hier nochmal einen Blick auf zyklische Koordinaten werfen. Die Hamilton'schen Gleichungen sind per definitionem schon von den zyklischen Koordinaten p_i abhängig.

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_j = 0. \quad (6.38)$$

Für die Hamilton'sche Funktion gilt

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{q}_j = 0. \quad (6.39)$$

H ist unabhängig von q_j und $p_j = \text{const.}$. Damit ist p_j keine dynamische Variable mehr. Jetzt ist die Anzahl der Variablen, von denen H abhängig ist, um 2 reduziert. Als kleines Beispiel betrachten wir ein dreidimensionales Pendel [ins. graph.]:

DREIDIMENSIONALES PENDEL

$$T = \frac{m}{2} \left(l^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right), \quad (6.40)$$

$$V = -mgl \cos \theta, \quad (6.41)$$

$$L = \frac{m}{2} \left(l^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) + mgl \cos \theta. \quad (6.42)$$

Für die Hamilton'schen Gleichungen berechnen wir die zyklischen Impulse

$$p_\theta = ml^2 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad (6.43)$$

$$H = p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} - L = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta. \quad (6.44)$$

Aus der Zyklizität von φ ist $p_\varphi = L_Z$ erhalten. Dieser wird aus den Anfangsamplituden bestimmt. Damit können wir unsere Hamiltonfunktion nur in Abhängigkeit von θ schreiben,

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{L_Z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta. \quad (6.45)$$

Die Hamilton'schen Gleichungen lauten dann

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \quad (6.46)$$

und

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{L_Z^2}{m^2 l^4} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} - mgl \sin \theta. \quad (6.47)$$

Wir erhalten eine Bewegungsgleichung in θ ,

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{p}_\theta}{2ml^2} = \frac{L_Z^2}{m^2 l^4} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} - mgl \sin \theta. \quad (6.48)$$

Diese Differentialgleichung ist numerisch zu lösen und abhängig von den Anfangsbedingungen. Für $L_Z = 0$ erhalten wir das ebene Pendel.

Wir wollen zum Hamiltonformalismus nocheinmal ein ausführlicheres Beispiel rechnen.

SCHWERER KREISEL

Wir betrachten einen kugelsymmetrischen Kreisel der Masse m und dem Trägheitsmoment I , der im Abstand l vom Schwerpunkt im Schwerfeld der Erde aufgehängt ist. Die Lagrangeleichung des Systems ist uns gegeben durch

$$L = \frac{I}{2} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2 \cos \theta \dot{\varphi} \dot{\psi}) - mgl \cos \theta. \quad (6.49)$$

Der Winkel θ ist der Winkel zwischen den z -Achsen des körperfesten und raumfesten Systems. Wir bestimmen nun die konjugierten Impulse

$$p_\varphi = I(\dot{\varphi} + \cos \theta \dot{\psi}), \quad (6.50)$$

$$p_\theta = I\dot{\theta}, \quad (6.51)$$

$$p_\psi = I(\dot{\psi} + \cos \theta \dot{\varphi}). \quad (6.52)$$

Die Hamiltongleichungen können wir durch die Legendretransformation herleiten,

$$H = p_\varphi \dot{\varphi} + p_\theta \dot{\theta} + p_\psi \dot{\psi} - L. \quad (6.53)$$

Wir drücken die Ableitungen nach den Euler-Winkeln durch die konjugierten Impulse aus,

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \theta}{I \sin^2 \theta}, \quad (6.54)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - \cos \theta p_\psi}{I \sin^2 \theta}, \quad (6.55)$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{I}. \quad (6.56)$$

6 Hamiltonsche Mechanik

Dann ist H nach einer längeren Umformung

$$H = \frac{p_\theta^2}{2I} + \frac{1}{2I \sin^2 \theta} (p_\varphi^2 + p_\psi^2 - 2 \cos \theta p_\psi p_\varphi) + mgl \cos \theta. \quad (6.57)$$

Die kanonischen Gleichungen lauten jetzt

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\varphi - \cos \theta p_\psi}{I \sin^2 \theta}, \quad (6.58)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial p_\psi} = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \theta}{I \sin^2 \theta}, \quad (6.59)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{I}. \quad (6.60)$$

Das sind die kanonischen Gleichungen, die wir schon als konjugierte Impulse kennen. Wir haben uns also nicht verrechnet. Man kann die Hamiltonfunktion auch über die Gesamtenergie berechnen, wenn man vorher gezeigt hat, dass die wirkende Kraft im System konservativ ist. Wir haben drei Größen, die erhalten sind. H ist erhalten, das spiegelt die Erhaltung der Gesamtenergie des Systems wider. p_φ ist erhalten, das ist die Erhaltung der Drehimpulskomponente in Richtung \vec{F}_G . p_ψ ist die Erhaltung der Drehimpulskomponente entlang der Figurenachse, die körperfeste Achse.

6.3 Die Poisson-Klammern

Wir wollen uns in diesem Kapitel noch mehr über die Theorie der klassischen Mechanik und ihre Symmetrien informieren.

Der Phasenraumvektor $\vec{\Pi} = (\vec{q}, \vec{p})$ beschreibt den Zustand eines mechanischen Systems vollständig. Jede Messgröße (Observable) lässt sich also als Funktion von $\vec{\Pi}$ und t schreiben.

Betrachte die totale Zeitableitung einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion $f = f(q_i, p_i, t)$. Diese Funktion wird auch **Phasenfunktion** genannt.

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (6.61)$$

Benutzen wir die Hamilton-Gleichungen, erhalten wir äquivalent

$$\frac{df}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (6.62)$$

Die Symmetrie, die wir erhalten, ist höchst bemerkenswert. $q_j \Leftrightarrow p_j$! Wir definieren uns aufgrund dieser Symmetrie die **Poisson-Klammern**.

$$\boxed{\{f, g\} \equiv \{f, g\}_{q_i, p_i} \equiv \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right)} \quad (6.63)$$

Die totale Zeitableitung lässt sich jetzt viel kürzer schreiben als

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (6.64)$$

Wir können analog Bewegungsgleichungen für beliebige Variablen aufstellen, nicht nur für q_i, p_i . Eine nicht explizit von der Zeit abhängige Phasenfunktion ist genau dann eine **Erhaltungsgröße**, wenn $\{f, H\} = 0$. Mit den Poisson-Klammern kann man sehr schön zeigen, dass die partielle Ableitung nach der Zeit der Hamiltongleichung der totalen entspricht,

$$\dot{q}_j = \{q_j, H\} \quad \dot{p}_j = \{p_j, H\}. \quad (6.65)$$

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (6.66)$$

Wir wollen einige Rechenregeln für die Poisson-Klammern aufnotieren. Die Definition der Poisson-Klammern ergibt die **fundamentalen Poisson-Klammern**

$$\{q_i, q_i\} = 0 \quad (6.67)$$

$$\{p_i, p_i\} = 0 \quad (6.68)$$

$$\{q_i, p_i\} = \delta_{ij}. \quad (6.69)$$

Zur letzten Gleichung gibt es eine Analogie aus der Quantenmechanik. Der Kommutator aus

$$[q_i, p_i] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (6.70)$$

Ort und Impuls sind also nicht gleichzeitig messbar. Die Poisson-Klammern erfüllen darüber hinaus die Produktregel

$$\{f \cdot g, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g, \quad (6.71)$$

zweitens die Jacobi-Identität

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (6.72)$$

und drittens

$$\{f, f\} = 0, \quad \{f, g\} = -\{g, f\}, \quad \{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\} \quad (6.73)$$

6.4 Kanonische Transformation

Sei (q_i, p_i) ein Satz kanonischer Variablen, d.h. generalisierte Koordinaten und zugehörige Impulse, und (Q_i, P_i) ein anderer Satz. Dann gilt $\{f, g\}_{q_i, p_i} = \{f, g\}_{Q_i, P_i}$. Für solche beliebigen Phasenfunktionen f, g gilt, dass die Poisson-Klammern unabhängig von der Wahl der generalisierten Koordinaten.

Wir hatten gesehen, dass die Lagrange-Gleichungen und auch die Hamiltonschen Gleichungen forminvariant unter Punkttransformationen sind,

$$q_i \rightarrow q'_i(q_i, t). \quad (6.74)$$

Sie sind also nicht von den \dot{q}_j abhängig. Die Hamiltonschen Gleichungen sind jedoch auch - wie schon angesprochen - unter einer viel größeren Klasse von Symmetrietransformationen invariant. Diese sind **Phasenraumtransformationen**,

$$\vec{q} \rightarrow \vec{Q} = \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}, t), \quad \vec{p} \rightarrow \vec{P} = \vec{P}(\vec{q}, \vec{p}, t), \quad (6.75)$$

d.h. eine Punkttransformation im Phasenraum. Eine solche Phasenraumtransformation $(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{Q}, \vec{P})$ heißt **kanonisch im weiteren Sinne**, wenn zu jeder Hamiltonfunktion $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ eine Hamilton-Funktion $K(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ existiert, sodass für $j = 1, \dots, S$ gilt

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j}. \quad (6.76)$$

Es folgt: Zu jedem H existiert ein K , sodass \vec{Q}, \vec{P} mit K ebenfalls die Hamilton'schen Gleichungen erfüllen. Die Hamiltonschen Gleichungen sind dann invariant unter

$$\vec{q} \rightarrow \vec{Q}, \quad \vec{p} \rightarrow \vec{P}, \quad H \rightarrow K. \quad (6.77)$$

Sind f und g Erhaltungsgrößen, so ist es auch $\{f, g\}$.

Beweis: Für Erhaltungsgrößen ist

$$0 = \frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (6.78)$$

$$0 = \frac{dg}{dt} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (6.79)$$

Mit der Jacobi-Identität folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f, g\} &= \{\{f, g\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \\ &= -\{\{g, H\}, f\} - \{\{H, f\}, g\} + \left\{\left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} \\ &= \left\{\frac{\partial g}{\partial t}, f\right\} - \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} - \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} = 0. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Dies führt aber nicht immer zu neuen und interessanten Erhaltungsgrößen.

6.4.1 Erzeugende Funktionen

Wir wollen ein Beispiel für kanonische Transformationen im weiteren Sinne durchspielen. Dazu betrachten wir die Vertauschung von Koordinaten und Impulsen,

$$\vec{Q} = \vec{p}, \quad \vec{P} = \vec{q} : \quad (6.81)$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (6.82)$$

$$\Leftrightarrow \dot{P}_j = \frac{\partial H}{\partial Q_j}, \quad \dot{Q}_j = -\frac{\partial H}{\partial P_j}. \quad (6.83)$$

Um die Kanonizität der Gleichungen wiederherzustellen, wählen wir $H = -K$. Allgemein gilt, dass die Phasentransformation von $(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{Q}, \vec{P})$ ist kanonisch im weiteren Sinne, wenn zu jedem H ein K existiert, sodass

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - H = c \left(\sum_j p_j \dot{Q}_j - K \right) + \frac{dF_1}{dt}, \quad (6.84)$$

wobei $c = \text{const.}$ und $F_1 = F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$ eine Funktion der alten und neuen Koordinaten und zumindest implizit von der Zeit. F_1 ist eine **erzeugende Funktion** oder **Erzeugende**. Diese Aussage ist insofern plausibel, als dass wir wissen, dass die Bewegungsgleichungen invariant sind unter Transformationen der Lagrange-Funktion der Form

$$L \rightarrow \underbrace{c}_{\text{Skalierung}} \cdot L + \underbrace{\frac{dF}{dt}}_{\text{Eichtransformation}}. \quad (6.85)$$

Dies ist jedoch kein Beweis, da die Funktionen von unterschiedlichen Variablen abhängen. Die Erzeugende $F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$ und c legen die Phasentransformation $(\vec{p}, \vec{q}) \rightarrow (\vec{Q}, \vec{P})$ und die neue Hamilton-Funktion K eindeutig fest. Die Konstante c kann durch eine weitere Phasenraumtransformation eliminiert werden, nämlich durch

$$\vec{Q} \rightarrow \vec{Q}' = c\vec{Q}, \quad \vec{P} \rightarrow \vec{P}' = P, \quad H \rightarrow K = cK. \quad (6.86)$$

Die Transformationen mit $c = 1$ heißen **kanonisch** (im engeren Sinne).

Eine Transformation ist genau dann im weiteren Sinne kanonisch, wenn für alle t_1, t_2 aus

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j p_j \dot{q}_j - H(q, p, t) \right] = 0 \quad (6.87)$$

folgt

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j P_j \dot{Q}_j - K(Q, P, t) \right] dt = 0 \quad (6.88)$$

Die Integranden unterscheiden sich um einen konstanten Faktor $c \neq 0$ und um eine totale Zeitableitung $\frac{d}{dt}F(q, p, Q, P, t)$. Für kanonische Transformationen gilt mit $c = 1$

$$\left[\sum_j p_j \dot{q}_j - H(q, p, t) \right] - \left[\sum_j P_j \dot{Q}_j - K(Q, P, t) \right] = \frac{d}{dt}F(q, p, Q, P, t). \quad (6.89)$$

Da $Q_j = Q(q_j, p_j, t)$ und $P_j = P(q_j, p_j, t)$, das sind insgesamt 2S Gleichungen, kann F neben der Zeit nur 2S unabhängige Größen enthalten. Es gibt demnach sechs Möglichkeiten, wie die Erzeugende von den alten und neuen Koordinaten abhängen kann. Diese lauten

$$F_1 = F_1(q, Q, t), \quad (6.90)$$

$$F_2 = F_2(q, P, t), \quad (6.91)$$

$$F_3 = F_3(p, Q, t), \quad (6.92)$$

$$F_4 = F_4(p, P, t), \quad (6.93)$$

$$F_5 = F_5(q, p, t), \quad (6.94)$$

$$F_6 = F_6(Q, P, t). \quad (6.95)$$

Man kann jede der verschiedenen Formen der Erzeugenden ineinander überführen. Betrachten wir für eine Rechnung F_1 . Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{dt} &= \sum_j \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ &\Leftrightarrow \sum_j p_j \dot{q}_j - H = \sum_j \left(P_j \dot{Q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right) - K + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.96)$$

q_j, p_j, Q_j, P_j sind jeweils voneinander unabhängig. Daher müssen die Koeffizienten einzeln verschwinden:

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_j}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_j}, \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (6.97)$$

6.4.2 Herleitung der Hamiltonschen Gleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip

Für kanonische Transformationen ($c = 1$) haben wir die eben notierten Beziehungen zwischen den alten und neuen Größen kennengelernt. Wir können hieraus

zeigen, dass die Hamiltonschen Gleichungen äquivalent zum Hamiltonschen Prinzip, dem Prinzip der kleinsten Wirkungen, ist. Zur Erinnerung:

$$\delta S = 0 \quad S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt. \quad (6.98)$$

Dies ist äquivalent zu den Lagrangegleichungen, da

$$0 = \delta S = \sum_j \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = \sum_j \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)}_{=0} \delta \dot{q}_j dt.$$

Da δq_j beliebig ist, muss die in der Klammer auftretende Lagrange-Gleichung 0 sein. Nun erkennen wir

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j \dot{q}_j p_j - H(q, p, t) \right] dt. \quad (6.99)$$

Wir nehmen an, dass

$$\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = \delta p_j(t_1) = \delta p_j(t_2) = 0, \quad (6.100)$$

also

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\dot{q}_j \delta p_j + p_j \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right] dt = 0. \quad (6.101)$$

Mit partieller Integration folgt

$$\delta S = \sum_j \left(\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right) dt. \quad (6.102)$$

Wir erkennen, dass die Hamilton'schen Gleichungen folgen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkungen. Eine Transformation von 2S unabhängigen Variablen q_i, Q_i ist genau dann kanonisch, wenn diese Gleichungen für eine Erzeugende $F_1(q, Q, t)$ erfüllt sind.

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (6.103)$$

definiert die neue Hamiltonfunktion

$$K(Q, P, t) = H[q(Q, P, t), p(Q, P, t), t] + \frac{\partial}{\partial t} F_1(q, Q, t)|_{q=q(Q, P, t)}. \quad (6.104)$$

Gleiches kann für alle oben genannten Funktionen F_i gezeigt werden.

Satz: Eine Transformation ist genau dann kanonisch, wenn die fundamentalen Poisson-Klammern erhalten bleiben, also invariant sind. Die fundamentalen Poisson-Klammern wollen wir hier nochmals aufzählen, den Beweis des Satzes haben wir schon geliefert.

$$\{q_i, q_i\} = 0 \quad (6.105)$$

$$\{p_i, p_i\} = 0 \quad (6.106)$$

$$\{q_i, p_i\} = \delta_{ij} \quad (6.107)$$

Wir wollen zum besseren Verständnis das Gelernte über die kanonischen Transformationen anhand zweier Beispiele anwenden.

Zuerst stellen wir uns die Frage, wie wir überprüfen können, ob eine gegebene Transformation kanonisch ist. Dazu müssen wir sicherstellen, dass die fundamentalen Poisson-Klammern unter der gewünschten Transformationen erhalten sind. Wir fordern also $\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}$. Welche der folgenden drei Transformationen sind also kanonisch, wenn $\beta \neq 0$, $|\beta| \neq 1$?

$$(q, p)^1 \rightarrow \left(\frac{\beta}{q}, \frac{-p}{\beta} \right) \quad (6.108)$$

$$(q, p)^2 \rightarrow (\beta q, \beta p) \quad (6.109)$$

$$(q, p)^3 \rightarrow \left(\beta p, \frac{-q}{\beta} \right) \quad (6.110)$$

$$(6.111)$$

Wir berechnen also die Poissonklammern und erwarten ein Ergebnis von +1,

$$\{Q, P\}_{q,p}^1 = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = \beta \cdot \left(-\frac{1}{\beta} \right) = -1 \neq +1, \quad (6.112)$$

$$\{Q, P\}_{q,p}^2 = \beta^2 \neq +1, \quad (6.113)$$

$$\{Q, P\}_{q,p}^3 = \frac{-\beta}{-\beta} = +1. \quad (6.114)$$

Von den drei Transformationen ist also nur die dritte kanonisch.

Betrachten wir ferner ein Teilchen der Masse m und der Ladung q , das sich in einem homogenen, konstanten elektromagnetischen Feld bewege. Das Feld sei durch die Potentiale

$$\Phi(\vec{x}) = -\vec{x} \cdot \vec{E}; \quad \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{x}; \quad \vec{E} \parallel \vec{B}; \quad |\vec{B}| = \frac{\omega m}{q} \quad (6.115)$$

gegeben. Die Hamiltonfunktion des Teilchens sei

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \vec{A}(\vec{x}) + q\Phi(\vec{x})). \quad (6.116)$$

Wir wollen $H(\vec{x}, \vec{p})$ so schreiben, dass \vec{E} und \vec{B} entlang von \vec{x}_3 verlaufen. Dann können wir unsere Potentiale schreiben als

$$\Phi(\vec{x}) = -x_3 \cdot E, \quad \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{\omega m}{2q} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.117)$$

Dann ist unsere neue Hamiltonfunktion

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} \left[\left(p_1 + \frac{\omega m}{2} x_2 \right)^2 + \left(p_2 - \frac{\omega m}{2} x_1 \right)^2 + p_3^2 \right] - q x_3 E. \quad (6.118)$$

Zeigen wir nun, dass die Transformation $(\vec{x}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{Q}, \vec{P})$ kanonisch ist, wenn

$$Q_1 = \frac{x_1}{2} - \frac{p_2}{\omega m}; \quad Q_2 = \frac{x_2}{2} - \frac{p_1}{\omega m}; \quad Q_3 = x_3 \quad (6.119)$$

$$P_1 = p_1 + \frac{\omega m x_2}{2}; \quad P_2 = p_2 + \frac{\omega m x_1}{2}; \quad P_3 = x_3. \quad (6.120)$$

Wir müssen jetzt jede Kombination der neuen Koordinaten als Poisson-Klammer überprüfen. Wir können uns einen Teil der Arbeit sparen, wenn wir erkennen, dass alle Kombinationen $\{Q_3, Q_i\} = \{Q_3, P_i\} = \{P_3, Q_i\} = \{P_3, P_i\} = 0$ sein müssen, da für $i = 1, 2$ in Q_i, P_i keine Abhängigkeit von x_3 gegeben ist. Nach wenigen Rechenschritten erhält man gleiches Ergebnis auch für $\{Q_1, P_2\}$ und $\{Q_2, P_1\}$. Die Rechnung für $\{Q_1, Q_2\}$ soll exemplarisch gezeigt werden,

$$\begin{aligned} \{Q_1, Q_2\} &= \left\{ \frac{x_1}{2} - \frac{p_2}{\omega m}, \frac{x_2}{2} - \frac{p_1}{\omega m} \right\} \\ &= \left\{ \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2} \right\} - \left\{ \frac{x_1}{2}, \frac{p_1}{\omega m} \right\} - \left\{ \frac{p_2}{\omega m}, \frac{x_2}{2} \right\} + \left\{ \frac{p_2}{\omega m}, \frac{p_1}{\omega m} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (6.121)$$

Die Aufspaltung in vier Poisson-Klammern funktioniert analog mit gleichem Ergebnis mit $\{P_1, p_2\}$. Man überzeuge sich, dass die Poisson-Klammern $\{Q_1, P_1\}, \{Q_2, P_2\}, \{Q_3, P_3\}$ jeweils 1 ergeben. Damit ist gezeigt, dass die Transformation kanonisch ist.

6.5 Satz von Liouville

Betrachte ein thermodynamisches System (z.B. ein Gas oder eine Flüssigkeit) mit $N \approx 10^{23}$ Teilchen. Die Lösung der Hamilton'schen Gleichungen ist weder noch möglich noch sinnvoll. Selbst wenn man die 10^{23} gekoppelte Differentialgleichungen löst, sind die Lösungen experimentell nicht mehr überprüfbar. Die genaue Kenntnis des **Mikrozustandes** des Systems, gegeben durch $6N$ Freiheitsgrade (3 Dimensionen, p, q für N Teilchen) ist nicht erforderlich.

Thermodynamische Systeme werden durch **makroskopische Zustandsgrößen** wie Druck, Volumen, Temperatur, Energie,... beschrieben. Eine genügende Anzahl dieser Zustandsgrößen bestimmt den Makrozustand des Systems.

Thermodynamik ist die Theorie der Makrozustände. Ein einzelner Makrozustand wird durch viele verschiedene Mikrozustände realisiert. Makroskopisch identische Systeme nehmen daher in der Regel verschiedene Mikrozustände an. Für beispielsweise eine Tasse Tee der Temperatur 80 Grad ist es irrelevant ob manche Moleküle in ihrer Position oder ihrem Impuls vertauscht oder verändert werden, diese Veränderung ist nicht signifikant genug. Die Systeme sind dennoch nicht unterscheidbar. Eine Menge von makroskopisch identischen, mikroskopisch unterschiedlichen Systemen heißt **Ensemble**. Die Mengenelemente werden durch Punkte im Phasenraum beschrieben. Wenn ein Ensemble sehr viele Elemente G hat und die Dichte der G Phasenraumpunkte hoch genug ist, kann eine Verteilungsdichte $g(q, p, t)$ im Phasenraum eingeführt werden. Dann ist

$$g(q_i, p_i, t) dq_1 \dots dq_{3N} dp_1 \dots dp_{3N} \quad (6.122)$$

die Anzahl der Systeme des Ensembles, die sich zum Zeitpunkt t im Volumenelement um den Punkt (q_i, p_i) im Phasenraum befinden,

$$\int g(q_i, p_i, t) dq_1 \dots dq_{3N} dp_1 \dots dp_{3N} = G \quad (6.123)$$

Verteilungsfunktion Die Verteilungsfunktion

$$\varrho(q, p, t) \equiv \frac{g(q, p, t)}{G} \quad (6.124)$$

gibt nun die Wahrscheinlichkeit an, ein System in einem gegebenen Volumenelement im Phasenraum zu finden. Dieses wird für gewöhnlich auf 1 normiert. Die Aufgabe der **statistischen Mechanik** ist es, ϱ zu bestimmen.

Dazu bezeichnen wir ein Phasenraumelement mit $d\Gamma$. So folgt, dass

$$g = \frac{dG}{d\Gamma}, \quad (6.125)$$

dG ist die Anzahl der Phasenraumpunkte in $d\Gamma$. Bestimmen wir die Hamilton'schen Gleichungen, stellen wir fest, dass die zeitliche Entwicklung von g eine kanonische Transformation ist. Das Volumen ist konstant.

Kanonische Invarianz des Phasenraums: Das Volumen des Phasenraums

$$V = \int \dots \int dq_i \dots dq_n dp_1 \dots dp_n \quad (6.126)$$

ist invariant unter kanonischen Transformationen, d.h. die Integrationsgrenzen ändern sich, das Volumen bleibt aber konstant. Wir können für diese Fälle dieses beweisen, dass die Funktionaldeterminante gleich Eins ist, also

$$D = \frac{\partial(Q_1 \dots Q_n P_1 \dots P_n)}{\partial(q_1 \dots q_n p_1 \dots p_n)} = 1. \quad (6.127)$$

Dann ist

$$\int dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n = \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n D = \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n. \quad (6.128)$$

Damit ist g eine Erhaltungsgröße und es gilt der **Satz von Liouville**,

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\varrho}{dt} = \{\varrho, H\} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0} \quad (6.129)$$

Man kann sich die Bewegung der Phasenraumpunkte analog zu einem Flüssigkeitsstrom vorstellen.

6.6 Hamilton-Jacobi-Theorie

6.6.1 Die Hamilton-Jacobi-Gleichung

Wir haben die Hamiltonsche Mechanik über eine Legendre-Transformation aus der Lagrangeschen Mechanik gewonnen. Da in der Hamiltonschen Formulierung der klassischen Mechanik Ort und Impuls gleichwertig sind, können wir mehr Transformationen durchführen unter denen die Bewegungsgleichungen invariant bleiben. Im letzten Abschnitt wurden die Phasentransformationen und Kanonizität behandelt.

Die in der Hamiltonschen Mechanik vorhandene starke Symmetrie zwischen Q und P wollen wir nun verwenden, um die Handhabung physikalischer Probleme zu erleichtern. Man kann zum Beispiel verschiedene Problemstellungen auf bereits behandelte Fragen zurückführen oder durch die neuen Variablen Q_i und P_i die Bewegungsgleichungen immens vereinfachen, z.B. wenn die Hamiltonfunktion nur von Q_i , aber nicht von P_i abhängt (1.). Ist dies genau umgekehrt der Fall, also die Hamiltonfunktion nur von P_i , aber nicht von Q_i abhängt, liegen zyklische Koordinaten Q_i vor (2.). In diesen Fällen ist

$$1. \dot{Q}_i = \frac{\partial K(Q_i, t)}{\partial P_i} = 0 \rightarrow Q_i = \mathbf{const.} \text{ und}$$

$$2. \dot{P}_i = \frac{\partial K(P_i, t)}{\partial Q_i} = 0 \rightarrow P_i = \mathbf{const.}$$

Wenn alle Koordinaten zyklisch gewählt wären, würde uns dies die Integration der Bewegungsgleichungen sehr erleichtern. Dies ist möglich, wenn eine **zeitabhängige** kanonische Transformation existiert, sodass die neue Hamiltonfunktion null wird, wie wir später sehen werden. Es wird zusätzlich angenommen, dass

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{6.130}$$

gilt. Nun ist das Problem bereits über die Anfangsbedingungen c_i und d_i gelöst, da aus

$$\dot{p}_i = \dot{q}_i = 0 \quad \forall i \rightarrow p_i = \mathbf{const.} = c_i \text{ und } q_i = \mathbf{const.} = d_i \tag{6.131}$$

folgt. Dies wirft die Frage auf, ob und wenn, unter welchen Bedingungen ein System unendlich viele Erhaltungsgrößen hat? Im Rahmen des Noethertheorems haben wir uns schon etwas mit Erhaltungsgrößen und Symmetrien befasst, ein System mit unendlich Erhaltungsgrößen muss also unendlich viele Symmetrien haben. In unseren neuen Koordinaten sollen also **sowohl** die Q_i als auch die P_i zeitlich konstant sein. Wir suchen also eine kanonische Transformation

$$q_i(t) \rightarrow Q_i[q_i(t), p_i(t), t] = \mathbf{const.} \tag{6.132}$$

$$p_i(t) \rightarrow P_i[q_i(t), p_i(t), t] = \mathbf{const.} \tag{6.133}$$

Diese ist gefunden, wenn die neue Hamiltonfunktion K verschwindet, also $K = 0$. Um $K = 0$ zu erhalten, müssen wir eine dementsprechende Erzeugende F finden. Wir benötigen also

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (6.134)$$

Dafür wählen wir $F_2 = F_2(q, P, t) \rightarrow H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(q, P, t) = 0$, wobei die Wahl von F_2 geschickt, aber nicht zwingend ist. Wir wissen das gilt

$$p_i = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P_i}.$$

Schließlich erhalten wir also die Hamilton-Jacobi-Gleichung-Gleichung

$$\boxed{H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0,} \quad (6.135)$$

welche eine nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung in der $n + 1$ -ten Variable q_1, \dots, q_n, t ist. Die Variablen $q_i(t)$ und $p_i(t)$ ergeben sich wie oben, aus den Transformationsgleichungen der Erzeugenden.

Das vollständige Integral der Hamilton-Jacobi-Gleichung heißt **Hamiltonsche Wirkungsfunktion S** oder auch **Prinzipalfunktion**. In der Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung treten $n + 1$ Ableitungen von S auf, also erhält man auch $n + 1$ Integrationskonstanten. Da aber S nur in Form von Ableitungen nach q_i und t enthält, ist $S + C$ auch eine Lösung und eine der Integrationskonstanten somit trivial. Man berechnet S in folgenden Schritten:

6.6.2 How to: Hamilton-Jacobi-Gleichung

1. Stelle die Hamiltonfunktion $H(q, p, t)$ auf.
2. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung wird $H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t}$ aufgestellt.
3. Wenn alle Variablen separierbar sind, erhält man aus n eindimensionalen Integrationen die Lösung $S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$.

Zur Berechnung von $q_i(t)$ und $p_i(t)$ wählen wir die Integrationskonstanten als neue Koordinaten

$$\alpha_i = Q_i \quad \text{oder} \quad \alpha_i = P_i,$$

in beiden Fällen gilt

$$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i}. \quad (6.136)$$

6 Hamiltonsche Mechanik

Im ersten Fall (Typ F_1) haben wir

$$p_i = \frac{S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}, \quad (6.137)$$

für den zweiten Fall (Typ F_2) gilt

$$Q_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\alpha_i}. \quad (6.138)$$

Wir wollen uns dies einmal am Beispiel des harmonischen Oszillators verdeutlichen.

HARMONISCHER OSZILLATOR

Die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2, \quad (6.139)$$

somit ergibt sich für die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{k}{2}q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (6.140)$$

Wir wählen einen Separationsansatz, um die Hamilton-Jacobi-Gleichung in eine allein von q und eine allein von t abhängige Seite zu unterteilen. Somit haben wir zwei konstante gewöhnliche Differentialgleichungen. Mit einem solchen Ansatz

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t \quad (6.141)$$

erhalten wir

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = \alpha_1 = E. \quad (6.142)$$

Dies ist die Gesamtenergie (die linke Seite der Gleichung entspricht der Hamiltonfunktion) und zeitunabhängig. Damit erhalten wir

$$S = W - Et = \sqrt{mt} \int \sqrt{\frac{2E}{K} - q^2} dq - Et, \quad (6.143)$$

was wir nur noch integrieren müssen. So kommen wir zu

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial S}{\partial t} = \sqrt{mt} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2E}{K} - q^2}} - t = \beta, \quad (6.144)$$

was mit $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$$t + \beta = \sqrt{mt} \arcsin \left[\sqrt{\frac{2K}{E}} q \right] \rightarrow q(t) = \sqrt{\frac{2E}{K} - q^2} \sin(\omega(t + \beta)) \quad (6.145)$$

ergibt. Für solch ein einfaches Problem ist die Hamilton-Jacobi-Theorie recht unhandlich, bei komplizierteren Problemen zeigt sie jedoch ihren großen Mehrwert. Leider ist es jedoch nicht immer möglich, eine Erzeugende S zu finden, die uns die Problemstellung vereinfacht.

Wir rekapitulieren nocheinmal: im Lagrange-Formalismus sind n gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu lösen, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten. Im Hamilton-Formalismus sind es hingegen $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung und unter Verwendung der Hamilton-Jacobi-Theorie ist genau eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zu lösen. Dies wollen wir uns im Hinterkopf behalten.

Die Wirkungsfunktion $S(q, P, t)$ erzeugt eine konstante Transformation mit $K = 0$. Dies setzt voraus, dass die neuen Impulse die fundamentalen Poisson-Klammern erfüllen, dass also

$$\{P_i, P_j\}_{q_i, p_j} = 0 \quad (6.146)$$

gilt. Es gibt also n Konstanten der Bewegung $P_j(q_i, p_i)$.

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sum_j \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial P_j} \dot{P}_j \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_j p_j \dot{q}_j + \underbrace{K}_{=0} - H = L \quad (6.147)$$

Wenn wir die partielle Zeitableitung bilden erkennen wir, dass die Prinzipalfunktion S mit der Hamiltonschen Wirkung übereinstimmt.

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L \rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} dt L \quad (6.148)$$

Wenn die Lösung der Bewegungsgleichung eines mechanischen Systemes auf die Berechnung eindimensionaler Integrale zurückgeführt werden kann, nennt man dieses System **integrabel**. Integrabilität ist also gegeben, wenn die Hamilton-Jacobi-Gleichung vollständig separiert werden kann. In Feldtheorien werden die endlich vielen q_i durch unendlich viele Freiheitsgrade ersetzt. Eine integrale Feldtheorie hat unendlich viele Erhaltungsgrößen.

7 Literaturverzeichnis

Folgende Bücher wurden für die Ausarbeitung des Skriptes verwendet und sollen auch als Literatur empfohlen werden:

- Kuypers, Friedhelm: Klassische Mechanik, 10. Auflage (20.04.2016), Wiley-VCH Verlag GmbH und Co. KGaA
- Goldstein, Herbert; Poole Jr., Charles P.; Safko Sr., John L. (20.07.2006): Klassische Mechanik, 3. Auflage (20.07.2006), Wiley-VCH Verlag GmbH und Co. KGaA
- Landau, Lew D.; Lifschitz, Jewgeni M.: Mechanik, 14. Auflage (01.01.1997), Europa-Lehrmittel

Des Weiteren wurden verwendet:

- Nolting, Wolfgang: Grundkurs Theoretische Physik 1 Klassische Mechanik, 10. Auflage (5. September 2012), Springer Spektrum
- Nolting, Wolfgang: Grundkurs Theoretische Physik 2 Analytische Mechanik, 9. Auflage (12. Mai 2014), Springer Spektrum