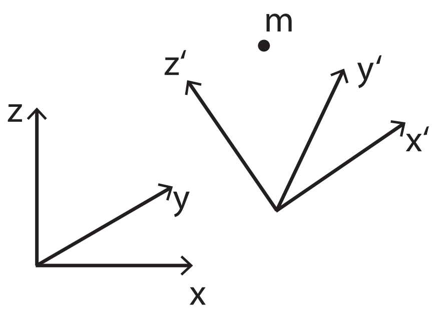
Betrachten Sie zwei Bezugssysteme: ein Inertialsystem Σ und ein beschleunigtes Bezugssystem Σ', das relativ zu Σ rotiert und beschleunigt.
Der Ortsvektor einer Masse m kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'\,.$$

Zeichnen Sie die drei Vektoren in die Skizze auf der rechten Seite ein.



Im Inertialsystem werden die Bewegungsgleichungen mit Hilfe von $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ berechnet. Um die Bewegungsgleichung im beschleunigten System zu bestimmen, benötigen wir $\ddot{\vec{r}}$ als Funktion der Größen in Σ'. Leiten Sie dazu zunächst $\vec{r}$ nach der Zeit ab mit $\vec{r}' = \sum_i r_i'\vec{e}_i'$.

Ordnen Sie die folgenden vier Aussagen den passenden Termen zu:
A Geschwindigkeit im Inertialsystem
B Relativgeschwindigkeit der beiden Ursprünge
C Geschwindigkeit im beschleunigten System
D Geschwindigkeit eines festen Punktes im beschleunigten System gemessen in Σ (nur Rotation)

Es wird die zeitliche Ableitung des Einheitsvektors $\vec{e}_i'$ benötigt. Eine allgemeine Drehung um eine Achse $\vec{n}$ um den Winkel θ wird durch folgende Matrix beschrieben ($c_\theta = \cos\theta$, $s_\theta = \sin\theta$):

$$R = \begin{pmatrix} n_1^2(1-c_\theta)+c_\theta & n_1n_2(1-c_\theta)-n_3s_\theta & n_1n_3(1-c_\theta)+n_2s_\theta \\ n_1n_2(1-c_\theta)+n_3s_\theta & n_2^2(1-c_\theta)+c_\theta & n_2n_3(1-c_\theta)-n_1s_\theta \\ n_1n_3(1-c_\theta)-n_2s_\theta & n_2n_3(1-c_\theta)+n_1s_\theta & n_3^2(1-c_\theta)+c_\theta \end{pmatrix}$$

oder in Komponenten

$$R_{ij} = n_in_j(1-c_\theta) - \epsilon_{ijk}n_ks_\theta + \delta_{ij}c_\theta\,.$$

Die zeitliche Ableitung des Einheitsvektors in einem rotierenden System, wobei die Drehung bezogen auf das Inertialsystem mit der Drehmatrix R(t) beschrieben wird, kann folgendermaßen bestimmt werden:

$$\frac{d}{dt}\vec{e}_i' = \frac{\vec{e}_i'(t+dt)-\vec{e}_i'(t)}{dt} = \frac{R(t+dt)\vec{e}_i - R(t)\vec{e}_i}{dt} = \dot{R}\vec{e}_i = \dot{R}\underbrace{R^TR}_{=1}\vec{e}_i = \dot{R}R^T\vec{e}_i'$$

Mit Hilfe der allgmeinen Drehmatrix, kann $\dot{R}R^T$ berechnet werden. Entweder man leitet die Drehmatrix ab, multipliziert sie mit ihrer Transponierten und vereinfacht (relativ aufwändig mit hoher Fehleranfälligkeit) oder man verwendet die Komponentenschreibweise. Berechnen Sie die Zeitableitung des Einheitsvektors im rotierenden System

Setzen Sie Ihr Ergebnis in die Gleichung für die Geschwindigkeit $\left(\dot{\vec{r}}\right)_\Sigma$ ein.

Bestimmen Sie nun die zweite Ableitung $\left(\ddot{\vec{r}}\right)_\Sigma$

Setzen Sie ihr Ergebnis in $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ ein und lösen Sie nach $m\left(\ddot{\vec{r}}'\right)_{\Sigma'}$ auf. Sie erhalten die Bewegungsgleichung im beschleunigten Bezugssystem mit den vier Scheinkräften: Corioliskraft, Zentrifugalkraft und die Kräfte auf Grund der Beschleunigung des Ursprungs und nichtgleichförmiger Rotation.

Eine Spinne läuft auf einer rotierenden Scheibe $\vec{\omega} = \omega\vec{e}'_z =$ konst. mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}' = v'_0\vec{e}'_x$. Skizzieren Sie die Drehrichtung und die Scheinkräfte. Wie groß ist die Kraft, die verhindert, dass die Spinne wegrutscht? Was ist das für eine Kraft?