Kanonische Transformation

Betrachten Sie ein eindimensionales System, das durch die Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2q^4 + \frac{1}{2q^2}$$

beschrieben wird. Durch eine geschickte kanonische Transformation,

$$q = P^\alpha, \quad p = AQ^\beta P^\gamma$$

soll die Bewegung des Systems bestimmt werden. Finden Sie dazu zunächst die Bedingungen an die konstanten Parameter A, $\alpha \neq 0$, β und γ, unter denen die Transformation kanonisch ist. Fordern Sie dazu, dass die kanonischen Gleichungen auch für die neuen Koordinaten gelten.

Verwenden Sie nun die Invarianz der Poissonklammern, um die Bedingungen an die Parameter zu finden.

Bestimmen Sie die Erzeugende $F_1(q,Q)$ der kanonischen Transformation. Hinweis: Was wissen Sie über die partiellen Ableitungen der Erzeugenden?

Wie lautet die Hamiltonfunktion in den neuen Koordinaten unter Berücksichtigung der berechneten Bedingungen?

Für welche Wahl der Paramter nimmt die Hamiltonfunktion eine wohlbekannte Form an? Lösen Sie diese für die Anfangswerte $P(0) = P_0$ und $Q(0) = Q_0$.

Wie sieht die Lösung in den ursprünglichen Variablen aus?