Prof. Dr. Johanna Erdmenger Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Übungen zur theoretischen Mechanik

Übungsblatt XII

Besprechung in den Übungen am 22. und 24. Januar 2018

I. **Hamilton-Jacobi-Theorie**

Betrachten Sie einen Massenpunkt m im Schwerefeld, $V(z) = mgz$. Wir können uns auf die (x, z)-Ebene beschränken.

a) Stellen Sie die Hamiltonfunktion für diesen Massenpunkt auf.

b) Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung für diesen Massenpunkt auf.

c) Zeigen Sie: Die Hamilton-Jacobi-Gleichung ist durch den Ansatz $S(x, z) = S_1(x) + S_2(z)$ für die Wirkungsfunktion lösbar. Führen Sie zwei Integrationskonstanten ein. Eine davon kann gleich der Energie gesetzt werden. Berechnen Sie $S(x, z)$.

d) Berechnen Sie nun $z(t)$. Erläutern Sie Ihr Ergebnis.

(bitte wenden)

II. **Wiederholung: Lagrangeformalismus 2. Art**

Atwoodsche Fallmaschine

Ein Hohlwalze (Radius R, Masse m_h, Länge L_h, die Masse sei homogen in der Schale zwischen $0.9R$ und R verteilt) und eine Vollwalze (Radius R, Masse m_v, Länge L_v, die Masse homogen zwischen 0 und R verteilt) seien mittels eines über eine masselose Rolle laufendes Seil der Länge ℓ miteinander gekoppelt. Beide Walzen befinden sich auf schiefen Ebenen mit Neigungswinkeln $0 \leq \alpha_h \leq \pi/2$ und $0 \leq \alpha_v \leq \pi/2$ im Schwerefeld der Erde (siehe Abbildung).

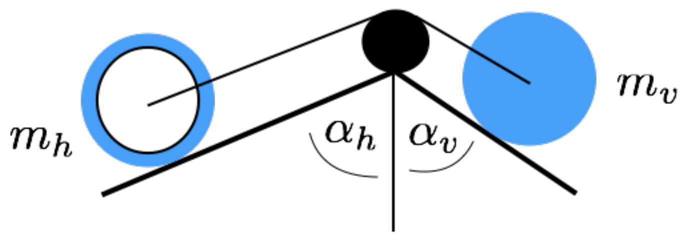

Abbildung: Hohlwalze und Vollwalze auf einer schiefen Ebene.

a) Berechnen Sie die Trägheitsmomente der beiden Walzen und verwenden Sie diese für die weitere Aufgabe.

b) Geben Sie die Zwangsbedingungen und geeignete generalisierte Koordinaten an. Bemerkung: Für die Berechnung der Trägheitsmomente wurde oben die Länge der Walzen angegeben. Hier reicht es nun, das zweidimensionale Problem zu betrachten.

c) Geben Sie die Lagrangefunktion an und berechnen Sie die Lagrange-Gleichungen.

d) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für den Spezialfall, dass $L_h = L_v$, $m_h = m_v$, $\alpha_h = \pi/2$,$\alpha_v = \pi/4$, mit den Anfangsbedingungen

$$\dot{\ell}_h(t=0) = \dot{\ell}_v(t=0) = 0\,, \qquad \ell_h(t=0) = \ell_v(t=0) = \ell/2$$

.

e) Berechnen Sie die potentielle und die kinetische Energie beider Walzen als Funktion der Zeit.