Prof. Dr. Johanna Erdmenger Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Übungen zur theoretischen Mechanik

Übungsblatt X

Besprechung in den Übungen am 8. und 10. Januar 2018

I. **Poisson-Klammern und kanonische Transformationen**

a) In einem dreidimensionalen System treten die Drehimpulskomponenten L_x und L_y als Erhaltungsgrößen auf. Bestimmen Sie weitere Erhaltungsgrößen durch Anwendung der Poisson-Klammern.

b) Nehmen Sie zusätzlich an, dass auch die Impulskomponent p_z in dem System erhalten ist. Welche weitere Erhaltungsgrößen folgen daraus?

c) Eine kanonische Transformation kann durch eine erzeugende Funktion $F(p, Q)$ angegeben werden, wobei p der alte Impuls und Q die neue Koordinate ist. Betrachten Sie die beiden unten angegebenen Beispiele für erzeugende Funktionen. Welches davon führt auf eine kanonische Transformationen $(p, q) \to (P, Q)$? Wie sieht die entsprechende kanonische Transformation explizit aus?

- $F(p, Q) = p^2 + Q^2 \quad ,$
- $F(p, Q) = -(e^Q - 1)^2 \tan p \quad .$

II. **Wiederholung starrer Körper**

Beweisen Sie folgende Aussage: Bei einem starren Körper sind die Drehungen um die Achsen mit dem größten und dem kleinsten Hauptträgheitsmoment stabile Bewegungen, während Drehungen um die Achse, die dem mittleren Hauptträgheitsmoment entspricht, instabil sind.

Anleitung: Gehen Sie von den Eulerschen Gleichungen aus und schreiben Sie für die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \delta\vec{\omega}$, wobei der konstante Vektor $\vec{\omega}_0$ in einer Hauptachse liegt, während die kleine Abweichung $\delta\vec{\omega}$ senkrecht dazu liegt. Setzt man für die kleine Störung $\delta\vec{\omega} = \vec{\delta} \cdot \exp(\lambda t)$ an, lässt sich eine quadratische Gleichung für λ ableiten. Die Diskussion der beiden Lösungen dieser Gleichung gestattet es, die obige Aussage herzuleiten.