

**Julius-Maximilians-Universität Würzburg**

**Vorlesung Theoretische Mechanik**

**Wintersemester 17/18**

**Prof. Dr. Johanna Erdmenger**

**Vorläufiges Skript - wird laufend aktualisiert**

# Einleitung

Aufgeschrieben von Florian Wirth, 20. 10. 2017

## Literaturempfehlung:

1. Nolting
2. Kuypers
3. Goldstein
4. Landau Lifschitz

**Theoretische Physik: Formulierung und Anwendungen** physikalischer Theorien.  
Was ist eine physikalische Theorie?

**Definition.** *Theorie ist die widerspruchsfreie Formulierung allgemeiner Gesetzmäßigkeiten, z.B. aus der Verallgemeinerung von in einzelnen Experimenten gewonnener Daten. Eine Theorie lässt sich nicht mathematisch beweisen, aber durch ein einziges Gegenbeispiel widerlegen (Falsifikation, Sir Karl Popper, Wissenschaftstheoretiker).*

## Mathematik

Die moderne theoretische Physik formuliert die grundlegenden Gesetzmäßigkeiten in der Sprache der Mathematik, der für eine überschaubare und für Berechnungen nützlich am besten geeigneten Sprache.

### Mathematische Methoden:

1. Lineare Algebra
2. Analysis (Differential- und Integralrechnung)
3. Differentialgleichungen
4. Variationsrechnung

## Kinematik

Die Bewegung eines Massenpunkts ist charakterisiert durch die Vektoren:

- Ort  $\vec{r}(t)$
- Geschwindigkeit  $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$
- Beschleunigung  $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Im allgemeinen ist daher  $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$  bekannt,  $\vec{v}$  und  $\vec{r}$  sind gesucht  $\Rightarrow$  zweifache Integration ist erforderlich. Bei jeder Integration tritt eine Integrationskonstante auf, also zwei Konstanten insgesamt. Diese müssen durch Anfangsbedingungen zu einem Zeitpunkt  $t = t_0$  festgelegt werden, also z.B.  $\vec{v}(t_0)$ ,  $\vec{r}(t_0)$ .

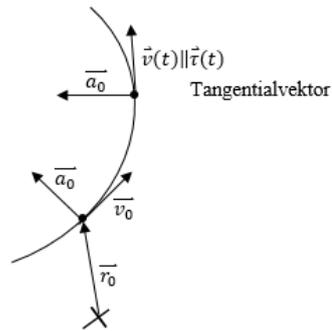


Abbildung 1: Bahnkurve in der (x,y)-Ebene

**Beispiele:**

**Gleichmäßig beschleunigte Bewegung eines Massenpunkts:**

$$\vec{a} = \text{const.} = \vec{a}_0$$

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^t dt' \vec{a}(t')$$

ebenso

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t - t_0)$$

hier

$$\vec{v}(t_0) + \vec{a}_0(t - t_0)$$

mit

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{1}{2} \vec{a}_0(t - t_0)^2 \text{ und } \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

$\vec{v}$  liegt für alle  $t$  in der von  $\vec{v}_0$  und  $\vec{a}_0$  aufgespannten Ebene.

Die Bahnkurve liegt in der Ebene durch den Punkt  $\vec{r}_0$ , aufgespannt durch  $\vec{v}_0$  und  $\vec{a}_0$ . Der Normaleneinheitsvektor  $\vec{b}$  ist konstant.

$$\vec{b} \equiv \frac{\vec{v}_0 \times \vec{a}_0}{|\vec{v}_0 \times \vec{a}_0|} \text{ Deutet auf eine Symmetrie hin!}$$

**Kreisbewegung in (x,y)-Ebene:**

Benutze Zylinderkoordinaten

$$x = r \cos \varphi$$

$$dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi$$

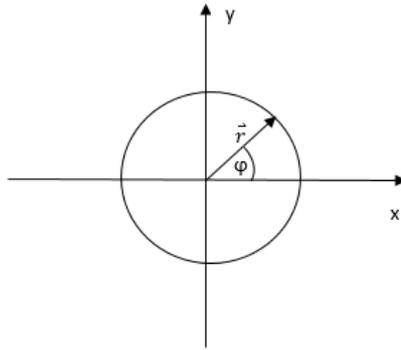


Abbildung 2: Kreisbewegung in der (x,y)-Ebene

$$dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi$$

Kartesisches Linienelement:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + rdz^2$$

$$\text{hier } ds^2 = dr^2 + rd\varphi^2 + dz^2$$

Basisvektoren:

$$\vec{h}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{h}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{h}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normierte Basisvektoren:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z$$

!Die Einheitsvektoren hängen auch von den Koordinaten ab!

Bewegung auf Kreis mit konstantem Radius R, in der Ebene mit  $\dot{z} = 0$ :

$$r = |\vec{r}| = R; \quad \vec{v} = R \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi; \quad \vec{a} = -R \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r + R \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi;$$

Wobei  $\vec{a}$  die Zentripetalbeschleunigung ist und  $\ddot{\varphi}$  die Tangentialbeschleunigung.

Winkelgeschwindigkeit:  $\omega = \dot{\varphi} \Rightarrow v = R\omega, dr = -R\omega, d\varphi = R\dot{\omega}$  gleichförmige Kreisbewegung

$\omega = \text{const.}$  Definiere:  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z, \vec{\omega} \times \vec{r}, \vec{v}$

# 1 Dynamik

Nach der Kinematik wollen wir jetzt die Dynamik (Lehre der Kräfte) betrachten. Diese hat Isaac Newton in den *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) begründet. Dazu definieren wir noch zwei Größen:

**Definition.** Die **träge Masse**  $m_t$  ist ein Maß für den Widerstand von Körpern gegen Bewegungsänderungen. Sie ist eine skalare Größe (keine Richtungsabhängigkeit).

**Definition.** Der **Impuls** ist das Produkt aus träger Masse und Geschwindigkeit:  $\vec{p} = m_t \vec{v}$

Ausgangspunkt für die Dynamik sind die **Newton'schen Axiome**:

(N1) In jedem Inertialsystem ist die Geschwindigkeit aller Körpern, auf die keine Kräfte ausgeübt werden, konstant.

(N2) In einem Inertialsystem ist die Änderung des Impulses pro Zeiteinheit gleich der angreifenden Kraft:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

(N3) Reaktionsprinzip: Die Kraft  $\vec{F}_{12}$ , die ein Körper 2 auf einen Körper 1 ausübt und die Kraft  $\vec{F}_{21}$  des Körpers 1 auf Körper 2 sind betragsmäßig gleich und entgegengesetzt, also *actio = reactio*:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Es gibt noch ein "viertes Axiom", das jedoch meistens nicht zu den Newton'schen Axiomen dazu gezählt wird, das *Superpositionsprinzip*: Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper, so ist die gesamte angreifende Kraft die vektorielle Summe:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \sum_i \vec{F}_i$$

Beispiele für Kräfte sind:

- Die Gewichtskraft  $\vec{F}_G = m_s \vec{g}$  mit der Erdbeschleunigung  $\vec{g}$  und der schweren Masse  $m_s$ . Da  $m_t \vec{a} = m_s \vec{g}$ , gilt

$$\frac{m_t}{m_s} = \frac{|\vec{g}|}{|\vec{a}|} = \frac{g}{a}$$

Die Allgemeine Relativitätstheorie sagt uns, dass  $m_s = m_t$ . Für einen Massenpunkt unter Einfluss der Schwerkraft gilt also  $\ddot{\vec{r}} = \vec{g}$ .

- Gravitationskraft: Für Massen weit entfernt von der Erdoberfläche gilt das Newton'sche Gravitationsgesetz:

$$\vec{F}_{grav} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$$

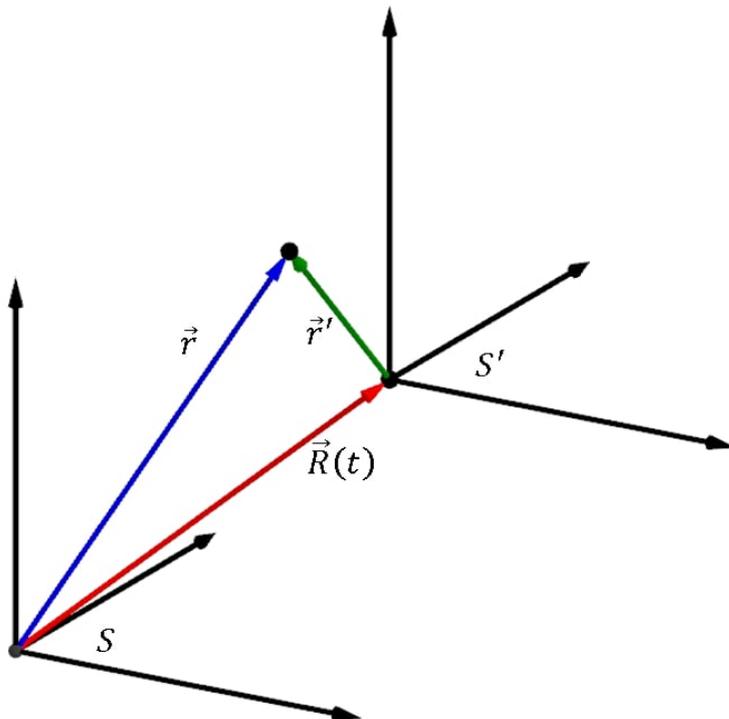
Dabei ist  $\gamma$  die Newton'sche Gravitationskonstante  $\gamma \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ .

- Stokes'sche Reibungskraft für langsame Bewegung (laminar, keine Turbulenzen) in einer Flüssigkeit oder einem Gas:  $\vec{F} = -\kappa \vec{v}$

## Wechsel des Bezugssystems und Scheinkräfte

**Definition.** Ein *Inertialsystem* ist ein Bezugssystem, in dem für kräftefreie Körper  $\vec{v} = \text{const}$  gilt.

Gibt es mehr als ein Inertialsystem? Und wenn ja, wie lassen sich alle Inertialsysteme finden? Oftmals sind auch Bezugssysteme nützlich, die keine Inertialsysteme sind (z.B. rotierende Bezugssysteme). In diesen gelten die Newton'schen Axiome zwar nicht, trotzdem lassen sich Bewegungsgleichungen aufstellen, wie wir an folgendem Beispiel demonstrieren.



Wir betrachten zwei Bezugssysteme  $S$  und  $S'$ , die zum Zeitpunkt  $t = 0$  zusammen fallen.  $S$  sei ein Inertialsystem, also ist  $m\ddot{\vec{r}} = 0$ , wenn keine äußeren Kräfte anliegen.  $S'$  gehe aus  $S$  durch eine zeitabhängige Translation  $\vec{R}(t)$  hervor, für die  $\vec{R}(0) = 0$  gilt.  $S'$  ist genau dann ein Inertialsystem, wenn für die Koordinaten  $\vec{r}'$  in  $S'$  ebenfalls  $m\ddot{\vec{r}}' = 0$  gilt.

Ein Blick auf die Skizze zeigt:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}}'$$

Multiplikation mit  $m$  liefert:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{R}} + m\ddot{\vec{r}}'$$

Da  $S$  ein Inertialsystem ist, muss die linke Seite verschwinden. Wenn  $S'$  auch ein Inertialsystem ist, ist  $m\ddot{\vec{r}}' = 0$  und wir erhalten folgende Bedingung an die Translation:

$$m\ddot{\vec{R}} = 0$$

Durch Lösung dieser Differentialgleichung finden wir alle möglichen Inertialsysteme:

$$\vec{R} = \vec{V}t \Rightarrow \vec{r} = \vec{V}t + \vec{r}'$$

Wir halten fest: Durch Translation erhält man genau dann wieder ein Inertialsystem, wenn sich  $S'$  mit konstanter Geschwindigkeit relativ zu  $S$  bewegt. Die Zeit haben wir dabei unverändert gelassen:  $t' = t$ . Man nennt eine solche Koordinatentransformation eine **Galilei-Transformation**. Sie ist die allgemeinste Transformation, die Inertialsysteme ineinander überführt und die Zeit invariant lässt. Am Ende des Semesters behandeln wir die spezielle Relativitätstheorie und werden dabei Koordinatentransformationen kennen lernen, die die Zeit nicht mehr invariant lassen.

Wir wollen jetzt eine beliebige Transformation (keine Galilei-Transformation) betrachten. Für sie gilt  $\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$  und damit  $m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{R}} + m\ddot{\vec{r}'}$ . Dabei definieren wir die Kraft  $\vec{F}'$  in  $S'$  so, dass auch in  $S'$  gilt:  $\vec{F}' = m\ddot{\vec{r}'}$ . Es folgt

$$\vec{F}' = m\ddot{\vec{r}'} = m\ddot{\vec{r}} - m\ddot{\vec{R}} = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}},$$

wobei wir den hinteren Summanden  $-m\ddot{\vec{R}}$  als Trägheitskraft oder Scheinkraft bezeichnen. Nach Addition dieser Scheinkraft gilt auch in Nicht-Inertialsystemen die Newton'sche Bewegungsgleichung. Scheinkräfte sind nicht fundamental, sondern beruhen auf der Wahl eines beschleunigten Bezugssystems.

Wir beschränken uns hier auf *rotierende Bezugssysteme*; eine allgemeine Transformation kann ja immer aus Translation und Rotation zusammengesetzt werden. Rotationen sind Koordinatentransformationen, für die gilt:

1. Die Norm (Länge) aller Vektoren bleibt invariant.
2. Die Winkel zwischen Vektoren bleiben erhalten.
3. Rechtshändige Systeme werden in rechtshändige überführt (keine Spiegelung).

Bei **Rotationen in 3 Dimensionen** ist noch zu beachten, dass die Rotationen nicht kommutieren. Man kann Drehungen im Raum daher mit orthogonalen  $3 \times 3$ -Matrizen  $R$  mit  $\det R = +1$  modellieren:

$$\vec{a}' = R\vec{a}, \quad R \cdot S \neq S \cdot R$$

Die Menge aller dieser Matrizen bildet die spezielle orthogonale Gruppe  $SO(3)$ .

Für infinitesimale Rotationen kann man die Drehungsmatrix als Identität plus eine Störung  $D$  schreiben:  $R = \mathbb{1} + D$ . Durch Nachrechnen verifiziert man schnell, dass aus der Orthogonalität von  $R$  die Antisymmetrie von  $D$  folgt:  $R^{-1} = R^T \Rightarrow D^T = -D$ . Wir können  $D$  also o.B.d.A. in folgender Weise schreiben:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -d\Omega_3 & d\Omega_2 \\ d\Omega_3 & 0 & -d\Omega_1 \\ -d\Omega_2 & d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $d\vec{\Omega} = (d\Omega_1, d\Omega_2, d\Omega_3)$ . Damit ergibt sich für die Drehung eines Vektors  $\vec{a}$

$$R\vec{a} = (\mathbb{1} + D)\vec{a} = \vec{a} + d\vec{\Omega} \times \vec{a}$$

und wir lesen für die infinitesimale Änderung von  $\vec{a}$  ab:  $d\vec{a} = d\vec{\Omega} \times \vec{a}$ . Aus der Zeichnung finden wir einen Ausdruck für den Drehwinkel  $d\varphi$  und berechnen

$$d\varphi = \frac{|d\vec{a}|}{\rho} = \frac{|d\vec{\Omega} \times \vec{a}|}{\rho} = \frac{d\Omega a \sin \theta}{a \sin \theta} = d\Omega.$$

Die infinitesimale Änderungsrate von  $\vec{a}$  ist

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{a},$$

wobei wir die *Winkelgeschwindigkeit*  $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$  definiert haben. Ihr Betrag ist  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ .  $\vec{\omega}$  ist allerdings kein Vektor: Unter Inversion des Raumes, also einer Punktspiegelung am Ursprung, ändern sowohl  $\vec{a}$  als auch  $d\vec{a}$  ihre Vorzeichen,  $\vec{\omega}$  jedoch nicht! Die Winkelgeschwindigkeit ist also ein Pseudovektor oder Axialvektor.

Bei der Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit treten als Scheinkräfte die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft auf.

Das eben betrachtete System ist offensichtlich *rotationssymmetrisch*: Alle Aussagen bleiben gültig, wenn man das gesamte System einen festen Winkel um  $\vec{\omega}$  dreht. Solche Symmetrien spielen eine wichtige Rolle in der theoretischen Physik. Wir werden sehen, dass sie auf fundamentale Weise mit Erhaltungsgrößen (Integrale der Bewegung) zusammenhängen.

**Definition.** Eine *Erhaltungsgröße*  $I(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$  hat die Eigenschaft

$$\frac{d}{dt} I(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) = 0.$$

Sie bietet eine experimentell überprüfbare Aussage und kann bei der Lösung der Bewegungsgleichungen helfen.

## Arbeit

Wie wir bereits gesehen haben, sind die Bewegungsgleichungen im Allgemeinen von der Form

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$$

mit zwei Anfangsbedingungen  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$  und  $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ . Die Trajektorie eines Massenpunkts ist bei bekannten Kräften und gegebenen Anfangswerten für Ort und Geschwindigkeit bei  $t = t_0$  durch die Newton'schen Gesetze für alle Zeiten festgelegt. Der Zustand eines Systems entspricht also einem Punkt  $(\vec{x}, \vec{v})$  im Phasenraum, einem mathematischen Raum, der durch die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren aufgespannt wird.

**Definition.** Um einen Massenpunkt in einem Kraftfeld  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$  von  $\vec{x}$  nach  $\vec{x} + d\vec{x}$  zu bewegen, muss die **Arbeit**

$$\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{x}$$

geleistet werden. Per Konvention gilt  $\delta W > 0 \Leftrightarrow \vec{F} \nparallel d\vec{x}$  ( $\vec{F}$  antiparallel zu  $d\vec{x}$ ) und  $\delta W < 0 \Leftrightarrow \vec{F} \parallel d\vec{x}$ . Für einen endlichen Weg vom Ort  $\vec{x}_1$  nach  $\vec{x}_2$  entlang einer Bahn  $C$  haben wir dann das Wegintegral

$$W_C = \int_C \delta W = - \int_C d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t).$$

Das Wegintegral wird berechnet, indem man  $\vec{x}$  entlang  $C$  durch einen skalaren Parameter parametrisiert (z.B. Zeit, Bogenlänge).

$\delta W$  ist im Allgemeinen kein totales Differential, sondern nur, wenn gilt:

$$\delta W \stackrel{!}{=} dW = \frac{\partial W}{\partial \vec{x}} \cdot d\vec{x} + \frac{\partial W}{\partial \dot{\vec{x}}} \cdot d\dot{\vec{x}} + \frac{\partial W}{\partial t} \cdot dt$$

Per Definition ist aber  $\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{x}$ , also ist  $\delta W$  nur dann ein totales Differential, wenn

$$\frac{\partial W}{\partial \vec{x}} \equiv \vec{\nabla} W = -\vec{F}, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial \dot{\vec{x}}} = 0,$$

oder in der vertrauten Form:  $\vec{F} = -\vec{\nabla} W(\vec{x})$ . Dann ist  $\vec{F}$  eine konservative Kraft und es gilt  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ .

## 2 Vorlesung vom 06.11.2017

Aufgeschrieben von Johannes Düreth

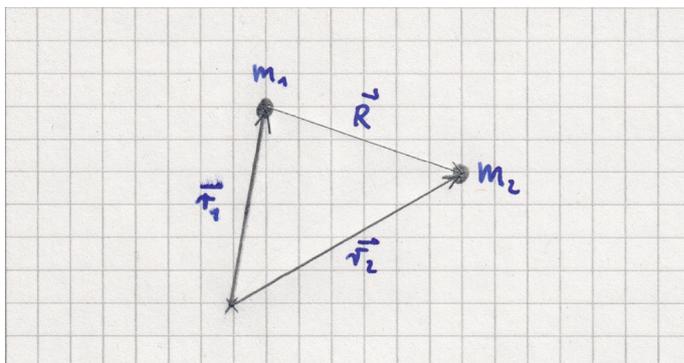
### 2.1 Generalisierte Koordinaten

Generalisierte Koordinaten sind nicht immer am besten zur Lösung eines physikalischen Problems geeignet.

1. Aufgrund einer vorhandenen Symmetrie (Kugel, Zylinder)
2. Da ein beschleunigtes Bezugssystem vorliegt
3. Weil die Koordinaten nicht unabhängig voneinander sind

Nummer 3) tritt bei Anwesenheit von Zwangsbedingungen auf.

#### Beispiel 1: Starre Hantel im $\mathbb{R}^3$



Der Abstand der beiden Massenpunkte ist durch eine Zwangsbedingung festgelegt:

$$\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| = \|\vec{R}\|$$

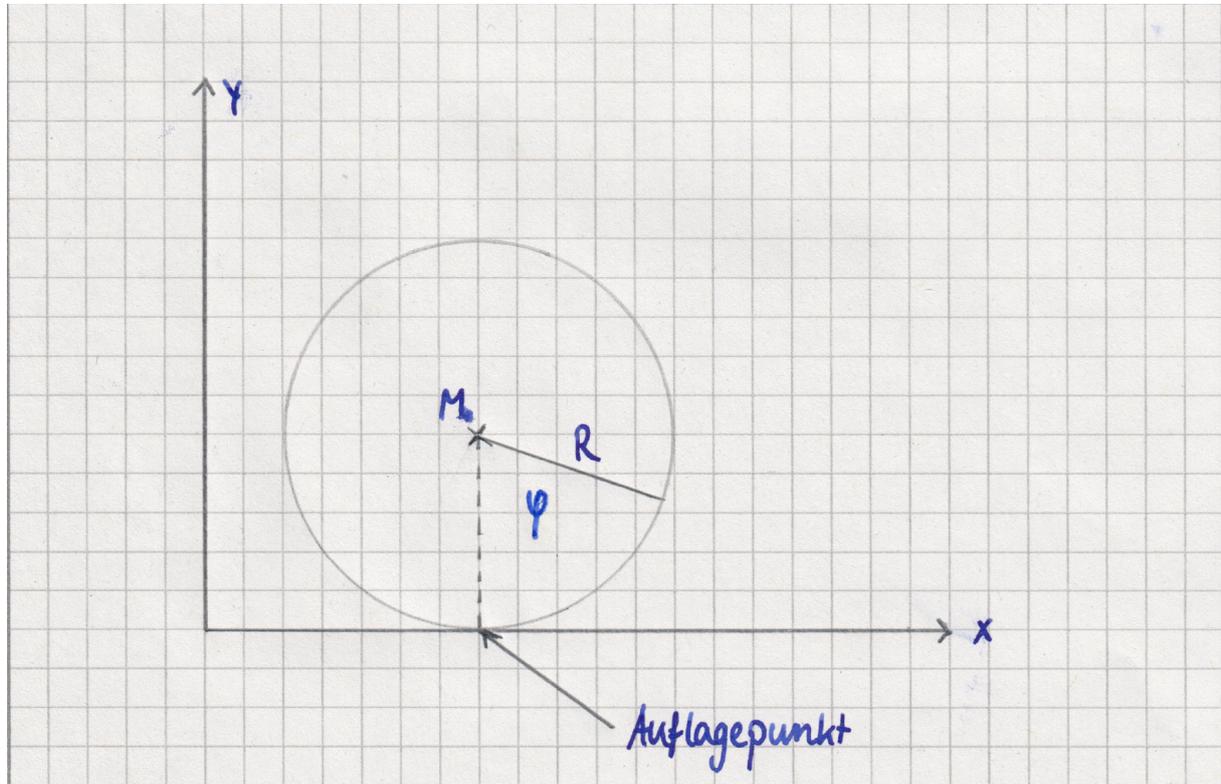
Von den sechs reellen Größen (Freiheitsgrade)  $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$

können wir eine durch die übrigen ausdrücken. Fünf davon reichen aus, um die Lage der

Hantel eindeutig zu bestimmen.

## Beispiel 2: Rollendes Rad

Der Mittelpunkt  $(x_m, y_m) = M$  hat immer den Abstand  $R$  zur Ebene. Die Zwangsbedingung ist:  $y = y_m = \text{const} \quad \forall t, x$



Der Auflagepunkt gleitet nicht, ist also momentan (bei  $t = t_0$ ) in Ruhe, daher gilt die Rollbedingung:  $\dot{x} = R\dot{\phi} \rightarrow x(t) = x_0 + R\phi(t)$   
x bzw. phi ist dabei eine unabhängige Koordinate (Wenn man y kennt kennt man x und umgekehrt, abhängige Koordinaten sind unpraktisch und für Lagrange sind unabhängige Koordinaten wichtig).

Lagrange-Mechanik beinhaltet das Schreiben der Bewegungsgleichung in der geeigneten Anzahl von geeigneten Koordinaten. Zwangsbedingungen sind geometrische Bedingungen, die die Bewegung einschränken. Zwangskräfte sind die Kräfte, die in der Bewegungsgleichung für die Einhaltung der Zwangsbedingungen sorgen.

Beispiele dafür sind: Auflagekraft beim Rad, Fadenspannung beim Pendel.

Zwangskräfte sind meist nicht explizit bekannt. Dies ist für Lagrange-Gleichungen 2. Art nicht von Bedeutung, da geeignete Koordinaten diese mit berücksichtigen.

## 2.2 Zwangsbedingungen

Holonome Zwangsbedingungen:  $f_\nu(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) = 0$

$\nu = 1, \dots, p$ ,  $p$ : Zahl der Zwangsbedingungen  $\rightarrow p$  Gleichungen

- holonom-skleronom: sind nicht explizit zeitabhängig  $\frac{\partial f_\nu}{\partial t} = 0$   
Beispiel Hantel:  $\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| = \|\vec{R}\| \rightarrow f_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| - \|\vec{R}\| = 0$
- holonom-rheonom: sind explizit zeitabhängig  $\frac{\partial f_\nu}{\partial t} \neq 0$   
Beispiel: Massenpunkt im Aufzug

Alle holonomen Zwangsbedingungen reduzieren die Anzahl der unabhängigen Koordinaten. Ein System in 3 Dimensionen hat (Mit  $N$  Teilchen und  $p$  Zwangsbedingungen)

$$S = 3N - p \quad (1)$$

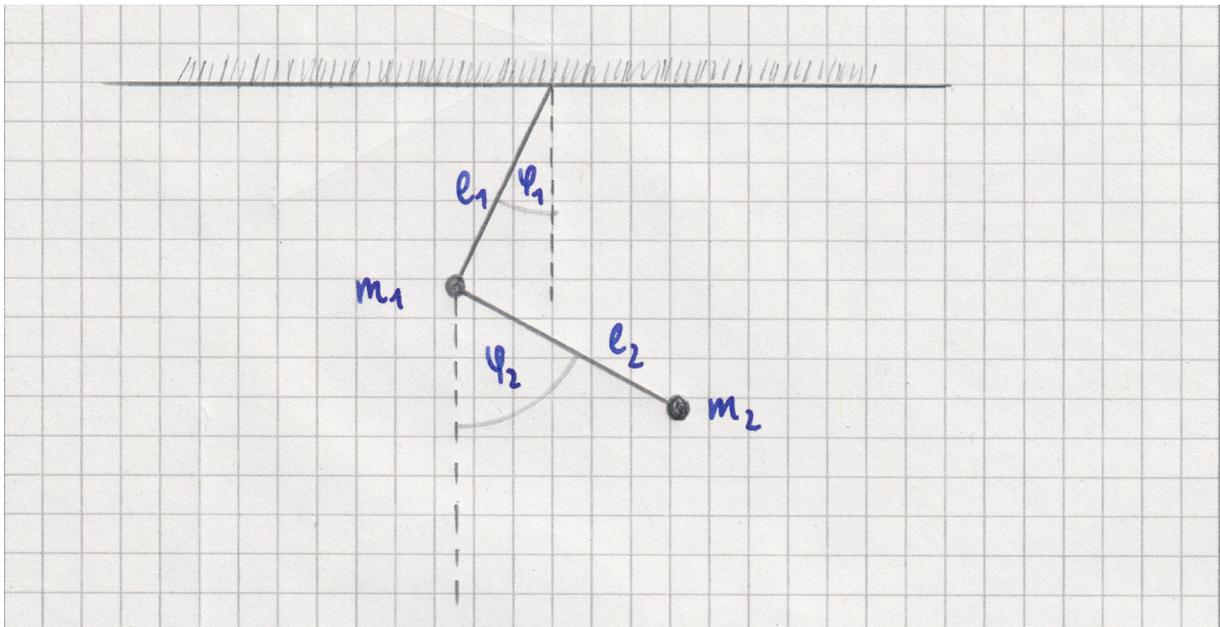
Freiheitsgrade (unabhängige Koordinaten).

Beispiel für nicht-holonome Zwangsbedingungen:

1. Ungleichung  $f_\nu(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t) \geq 0$
2. Differentielle Form, nicht integrierbar  $\partial f_\nu = a_{\nu_1}^\vec{r} d\vec{r}_1 + a_{\nu_2}^\vec{r} d\vec{r}_2 + \dots + b_\nu dt$   
mit  $\nu = 1, \dots, p$

Ab jetzt werden nur noch holonome Zwangsbedingungen verwendet. Es werden  $S$  generalisierte Koordinaten und  $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$  generalisierte Geschwindigkeiten eingeführt. Diese spannen den Konfigurationsraum auf. Der Konfigurationsraum ist eine Menge von Tupeln  $(q_1, q_2, \dots, q_s)$ , die die Konfigurationen eines Systems eindeutig (bijektiv) beschreiben.

### Beispiel 1: Ebenes Doppelpendel



Generalisierte Koordinaten sind  $\phi_1$  und  $\phi_2$

Konfigurationsraum:  $[0, 2\pi[ \otimes [0, 2\pi[$

## Beispiel 2: Hantel

Geeignete generalisierte Koordinaten sind: die kartesischen Koordinaten des Ursprungs, sowie 2 Winkel  $\theta$  und  $\phi$ , die die Orientierung des Relativvektors  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  beschreiben.

Konfigurationsraum:  $\mathbb{R}^3 \otimes S^2$

## 2.3 Lagrange-Funktion und Lagrange-Gleichungen 2.Art

(holonome ZB)

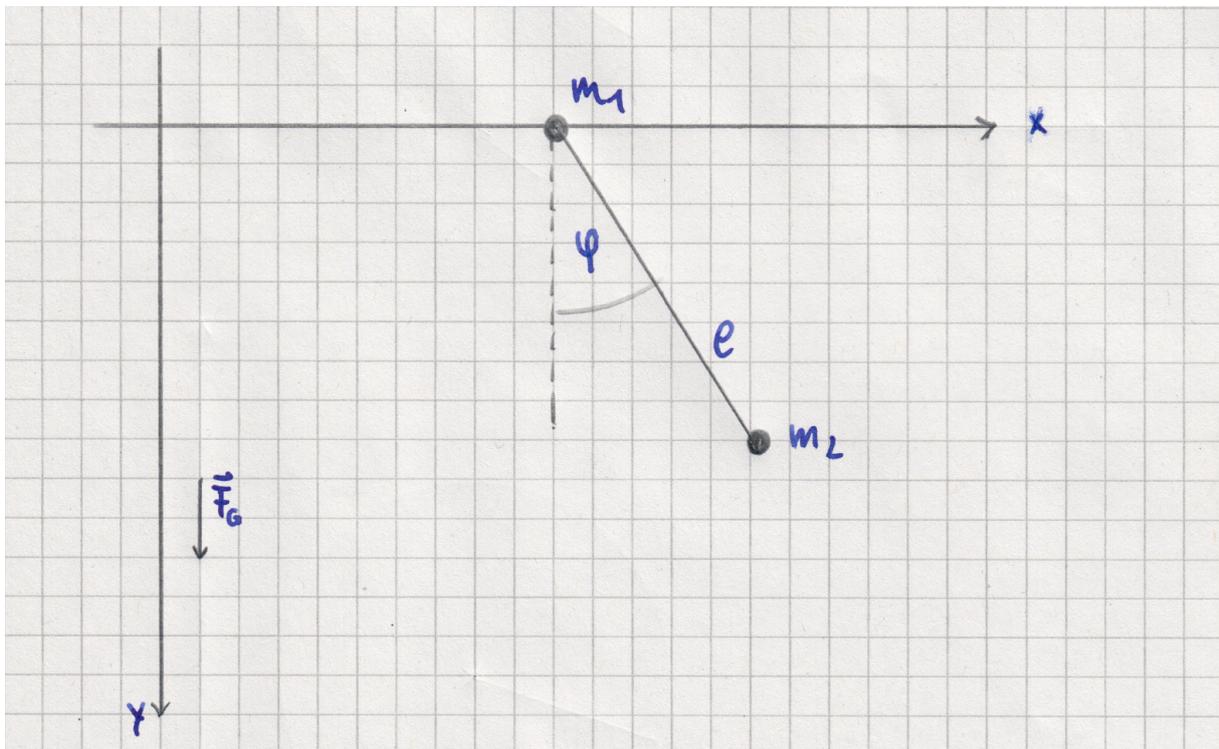
Definition: Lagrange-Funktion

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) = T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) - V(q_1, \dots, q_s) \quad (2)$$

Aus dem Hamilton-Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung) folgen die Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \text{ f\"ur } j = 1, \dots, s \quad (3)$$

Beispiel: Pendel mit gleitender Aufhangung



1. Zwangsbedingungen:

- $z_1 = z_2 = 0$
- $m_1$  fest auf x-Achse:  $y_1 = 0$

- Satz v. Pythagoras:  $(x_1 - x_2)^2 + y_2^2 - l^2 = 0$

$S = 3N - p = 6 - 4 = 2$  unabhängige Koordinaten

2. wir wählen:  $q_1 = x_1$  und  $q_2 = \phi$
3. Dann ist  $x_2 = q_1 + l \cdot \sin(q_2)$ ,  $y_2 = l \cdot \cos(q_2)$
4.  $L = T - V$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{q}_2^2 + 2l\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_2)) \end{aligned} \quad (4)$$

$$V = -m_2gl \cos(q_2) \quad (5)$$

$$\rightarrow L = T - V = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}l^2\dot{q}_2^2 + m_2l\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_2) + m_2gl \cos(q_2) \quad (6)$$

Lagrange-Gleichung für  $q_1$ : (L hängt nur von  $\dot{q}_1$  ab, aber nicht von  $q_1$ )

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \quad \text{da } \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ &= \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2)\dot{q}_1 + m_2l\dot{q}_2 \cos(q_2)] \\ &= (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + m_2l\ddot{q}_2 \cos(q_2) - m_2l\dot{q}_2^2 \sin(q_2) \end{aligned} \quad (7)$$

Lagrange-Gleichung für  $q_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= \frac{d}{dt} [m_2l^2\dot{q}_2 + m_2l\dot{q}_1 \cos(q_2)] - [-m_2l(\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(q_2) - g \sin(q_2))] \\ &= m_2l[l\ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 \cos(q_2) - \dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(q_2) + \dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(q_2) + g \sin(q_2)] \end{aligned} \quad (8)$$

Vereinfachung durch Linearisierung: Betrachte nur (infinitesimal) kleine  $q_2, \dot{q}_2$ :

$$\sin(q_2) \approx q_2 \quad \cos(q_2) \approx 1 \quad \dot{q}_2^2 \approx 0 \quad (9)$$

Damit ergibt sich für  $q_1$ :

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + m_2l\ddot{q}_2 = 0 \quad (10)$$

Und für  $q_2$ :

$$lm_2\ddot{q}_1 + m_2lgq_2 + m_2l^2\ddot{q}_2 = 0 \quad (11)$$

Lösung durch ineinander Einsetzen:

$$q_1(t) = -\frac{m_2l}{m_1 + m_2}\dot{q}_2 \cos(\omega(t - t_0)) + \alpha_1 t + \alpha_0 \quad (12)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0 \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{g(m_1 + m_2)}{lm_1} \quad (13)$$

### 3 Forminvarianz der Lagrange-Gleichung unter Koordinatentransformation - Vorlesung 10. November

Aufgeschrieben von Moritz Meinecke

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad ; i = 1, \dots, s \quad \boxed{S = 3N - P}$$

*Lagrange Gl. 2. Art*

Bijektive differenzierbare Punkttransformation:

$$q'_i = q'_i(q_1, \dots, q_s, t) \quad ; i = 1, \dots, s$$

Zu Zeigen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'(q'_i, \dot{q}'_i, t)}{\partial \dot{q}'_i} = \frac{\partial L'}{\partial q'_i} \quad ; i = 1, \dots, s$$

Beweis:

Bijektivität  $\Rightarrow \exists$  Umkehrfunktion  $q_i = q_i(q'_j, \dots, q'_s, t)$

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial q_i}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}'_j} = \frac{\partial q_i}{\partial q_j}}$$

$\dot{q}_i \leftarrow$  generalisierte Geschwindigkeit transformiert sich gemäß Kettenregel

Nun zeigen wir:

$$L'(q'_1, \dots, q'_s, \dot{q}'_1, \dots, \dot{q}'_s, t) = L(q_1(q'_1, \dots, q'_s), \dots, \dot{q}_1(q'_1, \dots, q'_s, \dot{q}'_1, \dots, \dot{q}'_s), t)$$

Es gilt:

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_i} = \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q'_i} \right)$$

sowie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} &= \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_i} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_j} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} &= \sum_{j=1}^s \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial q'_i}}_{(1)} \right] \quad ; (1) = \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q'_i} \end{aligned}$$

Einsetzen in:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} - \frac{\partial L'}{\partial q'_i} = \sum_{j=1}^s \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right)}_{(2)} \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} = 0$$

(2) = 0, da LG. in den ursprünglichen Koordinaten erfüllt ist

⇒ Die Lagrangegleichungen sind auch in den gestrichenen Koordinaten erfüllt.

Dies ist eine starke Symmetrie, weil die Bijektivität und die Differenzierbarkeit sind eingegangen.

*Definition:* Generalisierter Impuls:

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad ; j = 1, \dots, s$$

$$\rightarrow \text{Vgl.:} \quad \vec{p} = \vec{F} \quad (= -\vec{\nabla}V) \quad \left| \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right.$$

## 4 Lagrangegleichung 1.Art:

Bisher haben wir die Lagrange-Gleichung 2.Art mit  $S = 3N - P$  generalisierten Koordinaten betrachtet. Es gibt auch Lagrange-Gleichungen 1.Art, bei denen die Zeit die Zwangsbedingungen mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren implementiert werden. Die Lagrangefunktion hängt hier von allen  $3N$  Koordinaten ab. Die Lagrange-Gleichungen 1.Art sind auch bei differentiellen Zwangsbedingungen anwendbar (Bsp.: für nicht-holonome Zwangsbedingungen). Holonome und differentielle Zwangsbedingungen lassen sich schreiben als:

$$\sum_{j=1}^{3N} q_{ji} dq_j \quad ; i = 1, \dots, p \quad p: \text{Zahl der ZB}$$

Für holonome ZB gilt:

$$q_{ij} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad ; i = 1, \dots, p \quad ; j = 1, \dots, 3N$$

Die Lagrange-Gleichungen 1.Art lauten:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i \quad ; j = 1, \dots, 3N$$

Die unbekanntenen Koeffizienten  $\lambda_i$  heißen die Lagrange-Multiplikatoren. Die rechte Seite ist als generalisierte Zwangskraft aufzustellen:

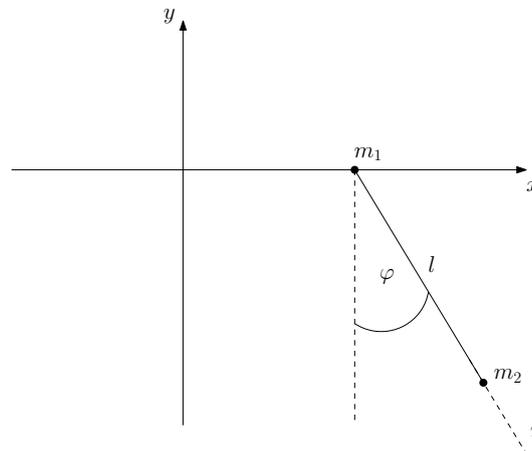
$$z_j = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{ij} \quad ; j = 1, \dots, 3N$$

Gebrauchsanweisung:

(für LG 1.Art)

- Nach Wahl von  $3N$  geeigneten Koordinaten werden die ZB in differentieller Form aufgestellt
- $L = T - V$  wird als Funktion der  $6N$  Variablen  $q_j$  und  $\dot{q}_j$  geschrieben
- Die  $3N$  Lagrange-Gleichungen werden berechnet und gelöst

Beispiel:



Koordinaten:  $x_1, y_1$  Koordinaten von  $m_1$  :  $r, \varphi$

a)

$$f_1(x_1, y_1, r, \varphi) = y_1 = 0 \quad , \quad f_2(x_1, y_1, r, \varphi) = r - l = 0$$

$$a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial r} = a_{23} = 1$$

$a_{12}$ : 1.ZB , 2.Koordinate

Alle anderen Ableitungen sind Null.

b)

$$L = T - V = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1 g y_1 - m_2 g y_2$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{wir haben: } x_2 &= x_1 + r \sin \varphi \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{x}_1 \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ &\Rightarrow \dot{y}_2 = \dot{y}_1 - \dot{r} \cos \varphi + r \dot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L &= \frac{m_1 + m_2}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{r}(\dot{x}_1 \sin \varphi + \dot{y}_1 \cos \varphi) \\ &\quad + 2r \dot{\varphi}(\dot{x}_1 \cos \varphi + \dot{y}_1 \sin \varphi)] \\ &\quad - m_1 g y_1 - m_2 g (y_1 - r \cos \varphi) \end{aligned}$$

Erst nach der Herleitung der Lagrange-Gleichung aus diesen Lagrangefunktionen dürfen die ZB in die Lagrange-Gleichungen eingesetzt werden (Lagrange-Gl. 1.Art).

c) Die Lagrange-Gleichungen sind:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &: (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \\ \varphi &: m_2l(\ddot{x}_1 \cos \varphi + l\ddot{\varphi} \cos \varphi = 0 \end{aligned} \right\} \text{Dieselben wie bei LG. 2.Art}$$

$$y_1 : m_2l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) + (m_1 + m_2)g = \lambda_1 = Z_{\text{Schiene}}$$

$$r : m_2(\ddot{x}_1 \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi) = \lambda_2 = -Z_{\text{Faden}}$$

wir finden:

$$Z_{\text{Schiene}} : (m_1 + m_2 \cos^2 \varphi)g + m_2(l\dot{\varphi}^2 - \ddot{x}_1 \sin \varphi) \cos \varphi = m_1g + Z_{\text{Faden}} \cos \varphi$$

## 5 Hamilton'sches Prinzip

W. R. Hamilton (1805-1865))

Die Bewegung eines mechanischen Systems verläuft von einem gegebenen Anfangspunkt  $P_1$  zur Zeit  $t_1$  zu einem gegebenen Endpunkt  $P_2$  zur Zeit  $t_2$  derart, dass die Wirkung  $S = \int_{t_1}^{t_2} L[q(t), \dot{q}(t), t]dt$  stationär ist, d.h.  $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} Ldt = 0$  ( $\delta$  Variation) Für holonome ZB ist dies äquivalent zu den Lagrange-Gleichungen 2.Art

$$\delta S = \sum_{i=1}^{3N-P} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i dt = 0 \quad ; \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$$

Aufgabenstellung zur Variationsrechnung: Suche die Kurve  $y(x)$ , die das Integral zu einem Extremum macht.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F[y(x), y'(x), x] dx$$

Leonhard Euler (1707-1783) führte dieses Problem auf das Lösen von Differentialgleichungen zurück.

Betrachte alle Kurven  $\hat{y}(x)$  die in der Nachbarschaft der gesuchten Kurve  $y(x)$  liegen und schrieb sie in der Form:

$$\hat{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x)$$

Die  $\eta(x)$  sind beliebig differenzierbare Funktionen mit den Randbedingungen  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

Wir betrachten:

$$I_\eta(\varepsilon) = \int_{x_2}^{x_1} F[y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta', x] dx$$

Die gesuchte Kurve  $y(x)$  erteilt  $I$  genau dann ein Extremum, wenn die Integrale  $I_\eta(\varepsilon)$  bei  $\varepsilon = 0$  ein Extremum haben, d.h.:

$$\left. \frac{dI_\eta(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \eta' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx = 0$$

Partielle Integration führt zu:

$$\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \eta(x) + \underbrace{\left[ \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2}}_{=0, \text{ wegen Randbed.}} = 0$$

Dies gilt für alle  $\eta(x)$  Beispiel: Gesucht ist der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten in der Ebene. Bogenlänge:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Länge einer Kurve, die zwischen  $P_1$  und  $P_2$  verläuft:

$$I = \underbrace{\int_{P_1}^{P_2} ds}_{\text{Def. Abstand}} = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$\Rightarrow F(y, y', x) = \sqrt{1 + (y')^2}$$

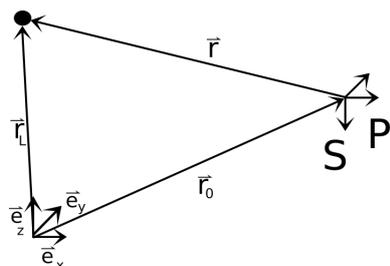
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \quad ; \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) = 0$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}} = \text{const.}$$

## 6 Starrer Körper - Vorlesung vom 24. November 2017

(Aufgeschieben von Simon Sanke)

Zwei Bezugssysteme: Laborsystem (Inertialsystem) und körperfestes System  $S$  mit Koordinatenursprung  $P$ .

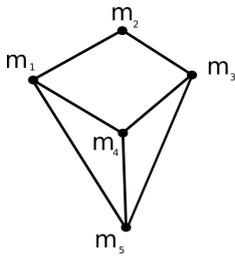


$$\vec{r}_L = \vec{r}_0 + \vec{r}_{inS}$$

Geschwindigkeit aus Sicht von  $S$ :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_L &= \left( \frac{d}{dt} \right) \vec{r}_L = \dot{\vec{r}}_0 + \left( \frac{d}{dt} \right)_L \vec{r} \\ \dot{\vec{r}}_L &= \dot{\vec{r}}_0 + \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\substack{=0 \text{ aus Sicht von } S, \text{ da } S \text{ starrer Körper}}} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \left( \frac{d}{dt} \right)_L \dots &= \underbrace{\frac{d}{dt}}_{\text{aus Sicht von } S} \dots + \vec{\omega} \times \dots \end{aligned}$$

## 6.1 Kinetische Energie



$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_L)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_0)^2 + \underbrace{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_0 (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)}_{= \dot{\vec{r}}_0 \left( \vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i}_{M \vec{R} \text{ Schwerpunkt}} \right) = M \dot{\vec{r}}_0 (\vec{\omega} \times \vec{R})} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_0)^2}_{= \text{Gesamtmasse } M} + M \dot{\vec{r}}_0 (\vec{\omega} \times \vec{R}) + \frac{1}{2} \sum_i m_i [(\omega \times r_i)]^2 \end{aligned}$$

Die Bedeutung des Punktes  $\vec{r}$  wird zerlegt in eine Translation von  $P$  (körperfester Punkt) und in eine Rotation um die momentane Drehachse  $\vec{\omega}$  durch  $P$ .

## 6.2 Kinetische Energie Fallunterscheidung:

1) Ein Punkt des Körpers ist raumfest (Kreisel). Wir wählen  $P$  als diesen Punkt.  $\Rightarrow \vec{r}_0 = \text{konstant} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_0 = 0$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \text{ (Rotationsenergie)}$$

2) Kein Punkt des Körpers ist raumfest. Wir wählen den Ursprung des Koordinatensystems  $P$  als den Schwerpunkt  $\Rightarrow \vec{R} = 0 \forall t \Rightarrow T = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_0^2}_{\text{Translations Energie}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2}_{\text{Rotationsenergie}}$

### 6.3 Trägheitstensor

Wir betrachten die Rotationsbewegung:

Für zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  mit Zwischenwinkel  $\alpha$  gilt:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 \sin^2 \alpha = a^2 b^2 (1 - \cos^2 \alpha) = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$\Rightarrow T_R = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega_i^2 - \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) r_i^2$$

mit Rotationsenergie:

$$-\frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega_1 x_{i1} + \omega_2 x_{i2} + \omega_3 x_{i3})^2$$

Wobei  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$  Komponenten von  $\vec{r}$  im körperfesten System S sind.

$T_R$  enthält nur Terme zweiter Ordnung in  $\omega_1, \omega_2$  und  $\omega_3$

$$\Rightarrow T_R = \frac{1}{2} \sum_{l,m}^3 I_{lm} \omega_l \omega_m, \quad I_{lm} = \sum_i m_i (\delta_{lm} r_i^2 - x_{il} x_{im})$$

Die Matrix  $I_{lm}$  heißt **Trägheitstensor**:

$$\overleftrightarrow{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

$$T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \overleftrightarrow{I} \vec{\omega} = \frac{1}{2} (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \overleftrightarrow{I} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Für eine kontinuierliche Massenverteilung, wird aus der Summe ein Integral.

Das Massenelement bei  $\vec{r}$  ist  $dm(\vec{r}) = d^3 r \rho(\vec{r})$ ,  $\rho(\vec{r})$  Dichte

Gesamtmasse  $M = \sum_i m_i \rightarrow M = \int_V d^3 r \rho(\vec{r})$  Für den Trägheitstensor haben wir dann:

$$I_{lm} = \int d^3 r \rho(\vec{r}) (\delta_{lm} r^2 - x_l x_m)$$

Rotiert der Körper um eine Achse, die durch den Einheitsvektor  $\vec{r}_i$  beschrieben ist, so ist

$$\vec{\omega} = \omega \vec{n} \quad \text{und}$$

$$T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \overleftrightarrow{I} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \omega^2 \vec{n}^T \overleftrightarrow{I} \vec{n} \equiv \frac{1}{2} I \omega^2, \quad I \equiv \vec{n}^T \overleftrightarrow{I} \vec{n}$$

ist das **Trägheitsmoment**<sup>1</sup> bezüglich der Drehachse  $\vec{n}$ .

---

<sup>1</sup>Trägheitsmoment engl. moment of inertia

Vergleich Translation/Rotation:

$$T_T = \frac{1}{2}mv^2 \quad T_R = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \quad \dot{\vec{L}} = \vec{M}$$

Das Trägheitsmoment spielt für die Rotation eine äquivalente Rolle wie die Masse für die Translation.

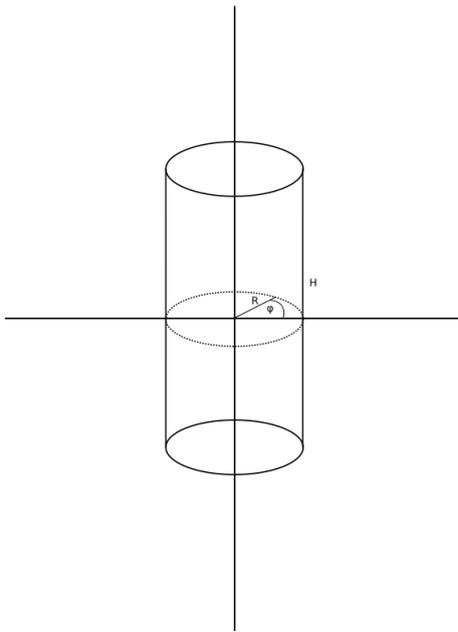
$\overleftrightarrow{I}$  ist symmetrisch und hat drei **reelle** Eigenwerte mit zueinander senkrechten Eigenvektoren.

Die Eigenwerte  $I_1, I_2, I_3$  heißen die **Hauptträgheitsmomente** und die durch die Eigenvektoren gegebenen Richtungen heißen die **Hauptträgheitsachsen**.

Wählen wir die Hauptträgheitsachsen als Koordinaten des körperfesten Systems  $S$ , so ist  $\overleftrightarrow{I}$  diagonal:

$$\overleftrightarrow{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Trägheitsmoment eines **homogenen**<sup>2</sup> Zylinders mit Radius  $R$  und Höhe  $H$ .



Die Achse des Zylinders ist eine der Hauptträgheitsachsen ( $\rightarrow I_3$ ). Die beiden anderen Trägheitsmomente gehören zu Achsen senkrecht dazu und

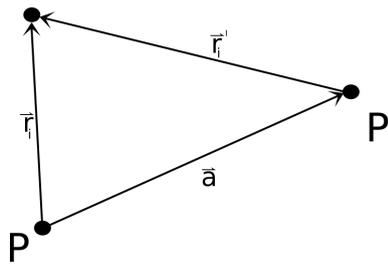
---

<sup>2</sup> $\rho(\vec{r}) = \text{konstant}$

sind gleich ( $I_2 = I_1$ ).

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r \cos \phi & x_2 &= r \sin \phi & x_3 &= z \\
 \text{Volumenelement} & \quad d^3x & &= r dr d\phi dz \\
 I_3 &= \int d^3x \rho (x_1^2 + x_2^2) = \rho \int d^3x (x_1^2 + x_2^2) \\
 I_{33} &= \int d^3x \rho (\vec{r})(x_{11}^2 + x_{22}^2 + x_{33}^2 - x_{33}^2) \\
 I_3 &= \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho H \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}, M = \rho V = \rho R^2 \pi H \\
 I_1 = I_2 &= \int d^3x \rho (x_1^2 + x_3^2) = \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R dr r (r^2 \cos^2 \phi + z^2) = \\
 & \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\phi \left( \frac{R \cos^2 \phi}{4} + R^2 \frac{z^2}{2} \right) = \\
 & \rho \pi R^4 \frac{H}{4} + \rho \pi R^2 \frac{H^3}{12} = \frac{M}{4} \left( R^2 + \frac{H^2}{3} \right)
 \end{aligned}$$

Der Trägheitstensor hängt von der Wahl des Ursprungpunkts  $P$  ab.



Sei  $\vec{P}$  der Schwerpunkt und  $P'$  ein anderer körperfester Punkt.

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{a}, \quad I'_R = \sum_i m_i (\delta_{lm} (\vec{r}'_i)^2 - x'_{il} x'_{im})$$

$$\text{Einsetzen von } \vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{a} \quad \text{und} \quad \sum_i m_i = M, \quad M \vec{R} = 0$$

Ist  $\vec{n}$  die Drehachse mit Trägheitsmoment  $I$ , so ist  $I' = I + Ma^2$  (Steiner'scher Satz<sup>3</sup>).

## 7 Kinematik und Dynamik des starren Körpers

(Aufgeschrieben von Petra Albertova)

### 7.1 Drehimpuls eines starren Körpers

Im Laborsystem gilt:  $\vec{L}_L = \sum_i m_i \vec{r}_{iL} \times \dot{\vec{r}}_{iL}$

Wir haben:  $\dot{\vec{r}}_L = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$

<sup>3</sup>Jakob Steiner, Schweizer Mathematiker.

Wir setzen in  $\vec{L}_L$  die Größen des körperfesten Systems ein:

$$\begin{aligned}\vec{L}_L &= \sum_i m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}_i) \times (\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\ &= M\vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 + \vec{r}_0 \times (\vec{\omega} \times M\vec{R}) + M\vec{R} \times \dot{\vec{r}}_0 + \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\end{aligned}$$

$\vec{R}$ : Schwerpunkt

1. Fall: P ist raumfest, P ist der Ursprungspunkt von S und  $S_L$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{r}_0 &\equiv 0 \\ \Rightarrow \vec{L}_L &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{L}\end{aligned}$$

$\vec{L}$ : im körperfesten System

2. Fall: P ist der Schwerpunkt  $\Rightarrow \vec{R} = 0$

$$\vec{L}_L = M\vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 + \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Der Gesamtdrehimpuls teilt sich in Bahndrehimpuls und Eigendrehimpuls.

$$\text{Körpereigener Drehimpuls: } \vec{L} = \sum_i m_i [(\vec{r}_i)^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \vec{\omega}) \vec{r}_i]$$

$$\text{x-Komponente: } L_1 = \sum_i m_i [(r_i)^2 \omega_1 - x_{i1} x_{i1} \omega_i - x_{i1} x_{i2} \omega_2 - x_{i1} x_{i3} \omega_3]$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \overset{\leftarrow}{I} \vec{\omega}$$

Der Drehimpuls ist das Matrixprodukt von Trägheitstensor und Winkelgeschwindigkeit

$$\text{Rotationsenergie: } T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \vec{L}$$

$$\text{Für eine Rotation um die Hauptachsen gilt: } T_R = \frac{1}{2} \overset{\leftarrow}{I} \omega^2$$

## 7.2 Dynamik des starren Körpers

Plan: Herleitung der Eulerschen Gleichungen

Zur Lösung dieser Gleichungen sind im Allgemeinen generalisierte Koordinaten erforderlich  $\Rightarrow$  drei Eulersche Winkel  $\Rightarrow$  Bewegungsgleichungen  $\Rightarrow$  Lösungen

Der Drehimpulssatz

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}}_{L,ges} &= \frac{d}{dt} (\sum_i^N m_i \vec{r}_{L,i} \times \dot{\vec{r}}_{L,i}) \\ &= \sum_i^N m_i \vec{r}_{L,i} \times \ddot{\vec{r}}_{L,i} \quad (\text{da } \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i = 0) \\ &= \sum_i^N \vec{r}_{L,i} \times \vec{F}_i^{ext}\end{aligned}$$

Der Betrag der inneren Kräfte zwischen den  $m_i$  hebt sich heraus

$$(3.\text{Newtonsches Axiom}) \quad \vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_{ij}$$

Definition: äußeres Drehmoment

$$\vec{M}^{ext} = \sum_i \vec{M}_i^{ext} \equiv \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}$$

$\Rightarrow$  Drehimpulssatz:  $\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{ext}$

( $\vec{L} = \text{const.} \Leftrightarrow \vec{M}^{ext} = 0$ )

Die Eulerschen Gleichungen

(Leonhard Euler: berühmter Schweizer Mathematiker im 18. Jhd.)

Im Laborsystem gilt:  $(\frac{d}{dt})_L \vec{L} = \vec{M}$

Wir setzen ein  $\vec{L} = \overset{\leftarrow}{I} \vec{\omega}$

$\overset{\leftarrow}{I}$  ist im Laborsystem zeitunabhängig, da die Hauptträgheitsachsen mit dem Körper mitrotieren

$$\Rightarrow \vec{M} = (\frac{d}{dt})_L \vec{L} = [(\frac{d}{dt})_L \overset{\leftarrow}{I}] \vec{\omega} + \overset{\leftarrow}{I} (\frac{d}{dt})_L \vec{\omega}$$

Wir haben  $(\frac{d}{dt})_L = \frac{d}{dt} + \vec{\omega} \times$

$$\Rightarrow \vec{M} (\frac{d}{dt})_L \vec{L} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \overset{\leftarrow}{I} \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\overset{\leftarrow}{I} \vec{\omega})$$

$\frac{d\vec{L}}{dt}$  im körperfesten System;  $\overset{\leftarrow}{I}$  zeitunabhängig

*Bemerkung:*

$$(\frac{d}{dt})_L \vec{\omega} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \text{ mit } \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\frac{d}{dt})_L \vec{\omega} = (\frac{d}{dt})_S \vec{\omega}$$

Wir wählen nun die Hauptträgheitsachsen als Koordinatenachsen des körperfesten Systems

$$\Rightarrow \overset{\leftarrow}{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Dies setzen wir in  $\vec{M} = \overset{\leftarrow}{I} \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\overset{\leftarrow}{I} \vec{\omega})$  ein

$$\Rightarrow \vec{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

Die Komponenten dieser Vektorgleichung nennt man die Euler-Gleichungen.

$$M_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3$$

$$M_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1$$

$$M_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2$$

Drei gekoppelte, nicht lineare Differentialgleichungen für  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  (selbst für  $\vec{M} = 0$ )

sind die Gleichungen komplizierter als  $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$  für die Translation.)

Zur Lösung dieser Gleichungen benötigen wir geeignete unabhängige generalisierte Koordinaten für Drehungen in drei Raumdimensionen  $\Rightarrow$  drei Euler-Winkel

### Definition der Euler-Winkel

Wir betrachten eine allgemeine Drehung im Raum

Es stellt sich die Frage: wie müssen wir  $(\vec{e}_1^L, \vec{e}_2^L, \vec{e}_3^L)$  drehen, damit das zugehörige Koordinatensystem mit  $(\vec{e}_1^S, \vec{e}_2^S, \vec{e}_3^S)$  übereinstimmt?

Wir haben  $\vec{r}_L = \vec{r}_0 + r_i \vec{e}_i^S$  mit  $\vec{e}_i^S = \vec{e}_i^S(t)$

(Einstein'sche Summenkonvention: über doppelt vorkommende Indizes wird summiert)

Wir drücken die  $\vec{e}_i^S$  durch die  $\vec{e}_i^L$  aus. Damit können wir die Lage des starren Körpers im Raum zu jedem Zeitpunkt bestimmen.

$i, j = 1, 2, 3$   $3\vec{e}_i^S = \overleftrightarrow{D}_{i,j}(t)\vec{e}_j^L$  mit  $\overleftrightarrow{D}$ : Drehmatrix

$$\vec{r} = r_i \vec{e}_i^S = r_i \overleftrightarrow{D}_{ij}(t)\vec{e}_j^L$$

Drehungen werden durch orthogonale Matrizen  $\overleftrightarrow{D}(t)$  beschrieben, also

$$D D^T = D^T D = E_3, \det(D) = 1$$

$$D_{ik}(t)D_{kj}^T(t) = D_{ik}^T(t)D_{kj}(t) = d_{ij}$$

In drei Dimensionen kommutieren diese Matrizen *nicht!* Die Reihenfolge ist entscheidend.

Die Euler-Winkel liefern eine Parametrisierung aller Drehungen.

a) Drehung um  $\vec{e}_3^L$  und den Winkel  $\varphi(0 \leq \varphi < 2\pi)$

Die zugehörige Matrix heiße  $R_3(\varphi)$ :

$$\vec{e}_i^{L'} = R_{ij}^3(\varphi)\vec{e}_j^L$$

$\Rightarrow$

$$\vec{e}_1^{L'} = \cos(\varphi)\vec{e}_1^L + \sin(\varphi)\vec{e}_2^L$$

$$\vec{e}_2^{L'} = -\sin(\varphi)\vec{e}_1^L + \cos(\varphi)\vec{e}_2^L$$

$$\vec{e}_3^{L'} = \vec{e}_3^L$$

$$R^3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R^3 R^{3T} = E_3, \det(R^3) = 1$  Die durch  $\vec{e}_1^{L'}$  gegebene Richtung heißt Knotenlinie

b) Drehung um die Achse  $\vec{e}_1^{L'}$  (Knotenlinie) um den Winkel  $\theta (0 \leq \theta < \pi)$

$$\vec{e}_k^{L''} = R_k^1(\theta) \vec{e}_r^{L'}$$

$$R^1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

c) Drehung um  $\vec{e}_3^{L''}$  um den Winkel  $\psi (0 \leq \psi < 2\pi)$

$$R^3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{D} = R^3(\psi) R^1(\theta) R^3(\varphi)$$

$\overleftrightarrow{D}$ : Drehmatrix

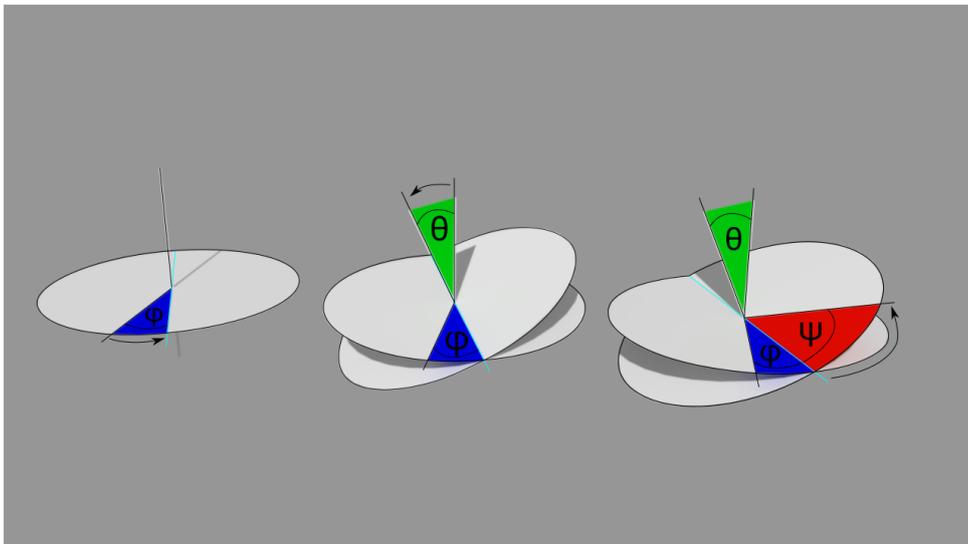


Abbildung 3: Definition der Euler-Winkel. Gezeichnet von Simon Sanke.

## 8 Vorlesung 1. 12.

(Aufgeschrieben von Krzysztof Radacki)

$$\vec{e}_i^S = \sum_j D_{ij} \vec{e}_j^L$$

$$\vec{r} = \sum_i r_i \vec{e}_i^S = \sum_i r_i \sum_j D_{ij} \vec{e}_j^L \text{ wobei } D(t) \text{ eine orthogonale Matrix ist.}$$

a) Drehung um  $\vec{e}_3^L$  um den Winkel  $\phi \in [0, 2\pi[$  :

$$\vec{e}_i^{L'} = \sum_j R_{ij}^3(\phi) \vec{e}_j^L$$

mit

$$R^3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) ]Drehung um  $\vec{e}_1^{\mathcal{L}'}$  (Knotenlinie) um den Winkel  $\theta \in [0, \pi[$  :  
 $\vec{e}_k^{\mathcal{L}''} = \sum_l R_{kl}^1(\theta) \vec{e}_l^{\mathcal{L}'}$

mit

$$R^1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

c) ]Drehung um  $\vec{e}_3^{\mathcal{L}''}$  um den Winkel  $\psi \in [0, 2\pi[$  :

$$\begin{aligned} \vec{e}_i^{\mathcal{S}} &= \sum_j R_{ij}^3(\psi) \vec{e}_j^{\mathcal{L}''} \\ \Rightarrow \vec{e}_i^{\mathcal{S}} &= \sum_j R_{ij}^3(\psi) \vec{e}_j^{\mathcal{L}''} \\ &= \sum_j R_{ij}^3(\psi) \sum_k R_{jk}^1(\theta) \vec{e}_k^{\mathcal{L}'} \\ &= \sum_j R_{ij}^3(\psi) \sum_k R_{jk}^1(\theta) \sum_l R_{kl}^3(\phi) \vec{e}_l^{\mathcal{L}} \\ &= \sum_j \sum_k \sum_l R_{ij}^3(\psi) R_{jk}^1(\theta) R_{kl}^3(\phi) \vec{e}_l^{\mathcal{L}} \\ &= \sum_l D_{il}(\psi, \theta, \phi) \vec{e}_l^{\mathcal{L}} \end{aligned}$$

Die Eulersche Winkel parametrisieren jede Drehung im  $\mathfrak{R}^3 \Rightarrow$  unabhängige verallgemeinerte Koordinaten.

Ziel: Lösung der Bewegungsgleichung des Kreisels  $\Rightarrow$  Zeitabhängige Orientierung des Kreisels im Laborsystem.

Dazu müssen wir die Euler-Winkel und die zugehörigen generalisierten Geschwindigkeiten mit den Körperfesten Komponenten  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  der Winkelgeschwindigkeit in Bezug setzen.

Wir betrachten eine infinitesimale Drehung:  $\vec{\omega} dt = (\omega_1 \vec{e}_1^{\mathcal{S}} + \omega_2 \vec{e}_2^{\mathcal{S}} + \omega_3 \vec{e}_3^{\mathcal{S}}) dt$

Diese läßt sich aus infinitesimalen Änderungen der Euler-Winkel zusammensetzen:

a)  $d\phi$  um  $\vec{e}_3^{\mathcal{L}}$

b)  $d\theta$  um  $\vec{e}_1^{\mathcal{L}'}$

c)  $d\psi$  um  $\vec{e}_3^{\mathcal{L}''} = \vec{e}_3^{\mathcal{S}}$

$$\Rightarrow \vec{\omega} dt = d\phi \vec{e}_3^{\mathcal{L}} + d\theta \vec{e}_1^{\mathcal{L}'} + d\psi \vec{e}_3^{\mathcal{S}}$$

Nun schreiben wir  $\vec{e}_3^{\mathcal{L}}$  und  $\vec{e}_1^{\mathcal{L}'}$  im Koordinatensystem der Hauptträgheitsachsen:

Man kommt zu dem Ergebnis:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} dt &= (d\phi \sin \theta \sin \psi + d\theta \cos \psi) \vec{e}_1^{\mathcal{S}} + (d\phi \sin \theta \cos \psi - d\theta \sin \psi) \vec{e}_2^{\mathcal{S}} + (d\phi \cos \theta + d\psi) \vec{e}_3^{\mathcal{S}} \\ \Leftrightarrow \omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned}$$

Eulergleichungen:

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}}; \vec{L} = I\vec{\omega}; \left(\frac{d}{dt}\right)_L = \left(\frac{d}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times$$

$$\Rightarrow M_1 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3$$

$$M_2 = I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3$$

$$M_3 = I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2$$

Für einen kräftefreien Kreisel gilt:  $\vec{M} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{0} = \dot{\vec{L}} = I\dot{\vec{\omega}} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$  Diese Beziehung gilt strenggenommen nur, falls  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  parallel sind.

$$\Rightarrow 0 = (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3$$

$$0 = (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3$$

$$0 = (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2$$

Bei einem unsymmetrischen Kreisel gilt:  $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1 \Rightarrow$  Zwei  $\omega_i$  müssen gleich Null sein.  $\Rightarrow \vec{\omega}$  ist parallel zu einer der Hauptträgheitsachsen.  $\Rightarrow \vec{\omega} \parallel \vec{L}$

Bei einem symmetrischen Kreisel gilt:  $I_1 = I_2 \neq I_3$  Die ausgezeichnete Symmetriachse heißt Figurenachse.

$$\Rightarrow 0 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1)\omega_2\omega_3 \quad (14)$$

$$0 = I_1\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 \quad (15)$$

$$0 = I_3\dot{\omega}_3 \Rightarrow \omega_3 = \text{const} \quad (16)$$

Teile (14) und (15) durch  $I_1$

$$\dot{\omega}_1 - \frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_3\omega_2 = \dot{\omega}_1 - \Omega\omega_2 = 0$$

$$\dot{\omega}_2 + \frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_3\omega_1 = \dot{\omega}_2 + \Omega\omega_1 = 0$$

$\Rightarrow$  harmonischer Oszillator

Lösungsansatz:  $\omega_1 = \alpha \sin(\Omega t + \beta) \Rightarrow \omega_2 = \alpha \cos(\Omega t + \beta)$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \alpha \sin(\Omega t + \beta) \\ \alpha \cos(\Omega t + \beta) \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

Im körperfesten System läuft  $\vec{\omega}$  auf einem Kegelmantel (Polkegel) um die Figurenachse. Diese Bewegung heißt freie Nutation

Der schwere Kreisel

In diesem Fall hängen die Komponenten des Drehmoments im körperfesten System von der Orientierung des Körpers im Raum ab. Die Eulergleichungen können nicht mehr unabhängig von den Lagrange-Gleichungen für  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  gelöst werden:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$$

$$V = MgZ_L = Mgl \cos \theta$$

Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrieachse des Kreisels. Der Abstand zwischen dem Ursprung des Körperfesten Systems und dem Schwerpunkt ist mit  $l$  bezeichnet.

Die Koordinaten  $\phi$  und  $\psi$  sind zyklisch:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta = \text{const}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = I_3 \omega_3 = \text{const}$$

$p_\psi$ : Drehimpulskomponente  $L_3$  entlang der Figurenachse  $\vec{e}_3^S$  im körperfesten System.

$p_\phi$ : Drehimpulskomponente  $(L_L)_3$  entlang der Senkrechten  $\vec{e}_3^L$  im Laborsystem.

Die Schwerkraft ist konservativ und die Zwangsbedingungen sind holonom, folglich ist Energie erhalten.

## 9 Vorlesung vom 4. 12. 2017

(Aufgeschrieben von Konstantin Weisenberger)

Die Lösung für die Bewegung des schweren, symmetrischen ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) Kreisels erfordert die Lagrangegleichung für die Eulerwinkel.

Es gibt zwei zyklische Koordinaten:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad , \quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}$$

$p_\phi$  : Drehimpulskomponente entlang der Senkrechten im Laborsystem.

$p_\psi$  : Drehimpulskomponente im körperfestem System entlang der Figurenachse.

Weiterhin ist die Energie erhalten (holonome Zwangsbedingungen und konservatives Kraftfeld)

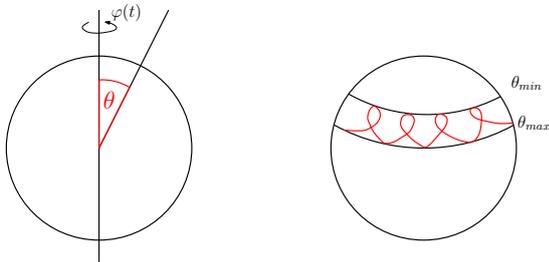
Im allgemeinen lassen sich trotz der Erhaltungsgrößen die Bewegungsgleichungen nur numerisch integrieren.

Ergebnis: Überlagerung von drei Bewegungen:

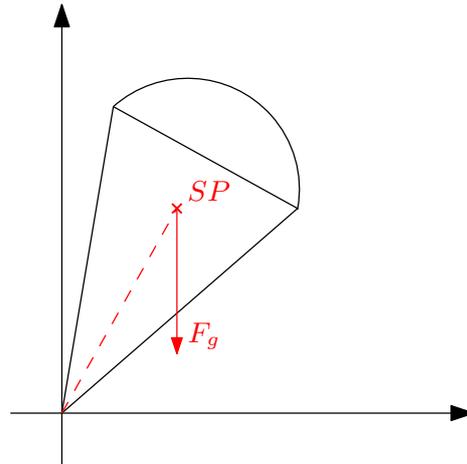
- 1) Rotation um die Figurenachse,  $\psi(t)$
- 2) Die Figurenachse bewegt sich um die Senkrechte im Laborsystem herum  $\rightarrow \varphi(t) \Rightarrow$   
Präzession

- 3) Der Winkel  $\Theta(t)$  zwischen Figurenachse und Senkrechte ändert sich periodisch  $\rightarrow$  Nutation

Laborsystem:



Präzession und Nutation.



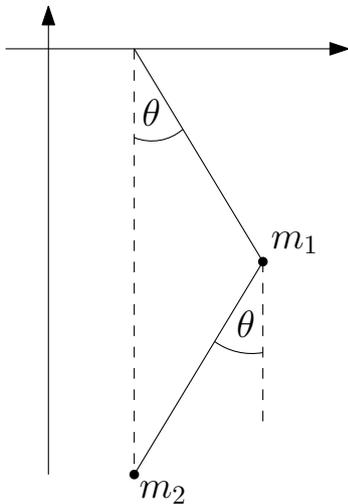
Schwerer Kreisel.

Nur Präzession:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$$

## 10 Kleine Schwingungen

### 10.1 Lineare Schwingungen



Doppelpendel.

$\rightarrow$  Es gilt das Hook'sche Gesetz:

Rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung:

$$\vec{F} = -k \vec{x} \quad ; \text{ k: Federkonstante}$$

Betrachte ein konservatives, holonom-skleronomes System mit einem Freiheitsgrad  $q$ .

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

Sei die Auslenkung  $(q - q_0)$  klein, mit  $q_0$  dem Potentialminimum. Dann können wir das Potential in einer Taylor-Reihe entwickeln:

$$V(q_0 + \frac{1}{2}V''(q - q_0)^2 + \mathcal{O}((q - q_0)^3)$$

→ kein linearer Term, da Entwicklung um  $q_0$  (Potentialminimum):  $V'(q_0) = 0$

Wir betrachten die quadratische Näherung für  $T$  und  $V \Rightarrow$  Die Bewegungsgleichungen sind in  $q$  und  $\dot{q}$  linear. Die kinetische Energie ist allgemein von der Form  $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$  ( $m$  muss im Allgemeinen nicht Masse sein).

Betrachte  $L(q, \dot{q})$  zur 2. Ordnung in den kleinen Größen  $q$  und  $\dot{q}$  (dabei wählen wir  $q_0 = 0$ ):

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \quad k : \text{verallg. Federkonstante}$$

Lagrangegleichung 2. Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = m\ddot{q} + kq = 0$$

linear in  $\dot{q}$  und  $q$

$$\ddot{q} = -\frac{k}{m}q$$

harmonischer Oszillator (wähle  $m > 0, k > 0$ ) allgemeine Lösung:

$$q = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t); \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Für mehrere Freiheitsgrade gibt es analoges Verhalten. Bei Auslenkung um ein Potentialminimum führt das System lineare Schwingungen aus.

Die allgemeine Lösung für  $q$  lässt sich umschreiben auf

$$q = a \cos(\omega t + \alpha), \quad a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \tan \alpha = \frac{c_1}{c_2}$$

Energie (ist erhalten):

$$E = T + V = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 = \text{const.}$$

Weitere Schreibweise:

$$q = \text{Re}\{A e^{i\omega t}\}, \quad A = a e^{i\alpha} \quad \text{komplexe Amplitude}$$

Erzwungene Schwingung: Lagrangefunktion:

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kq^2}{2} + qF(t)$$

Energie, die von der Wirkung eines äußeren veränderlichen Kraftfeldes herrührt: Euler-Lagrange:  $m\ddot{q} + kq = F(t)$

Gedämpfte Schwingung: Reibungskraft:

$$\vec{F} = -\kappa\dot{q}, \quad m\ddot{q} + \kappa\dot{q} + kq = 0$$

## 10.2 Lineare Schwingungen von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden

Für kleine Auslenkungen werden wiederum nur Beiträge zur potentiellen Energie betrachtet, die 2. Ordnung in den Auslenkungen sind. Für ein System von  $N$  verallgemeinerten Koordinaten haben wir:  $V = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N k_{ik} q_i q_k$ .  $k_{ik}$  ist eine  $N \times N$  Matrix, die positiv definit ist.  $k_{ik}, q_i, q_k > 0$  (Entwicklung um Minimum des Potentials).

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} = \sum_{i,k=1}^N m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

$m_{ik} = m_{ki}$  ist eine symmetrische Matrix.

Lagrangegleichung:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1} m_{i,k} \dot{q}_k, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \sum_{k=1} k_{i,k} q_k \quad (17)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_k m_{ik} \ddot{q}_k + k_{ik} q_k = 0} \quad (18)$$

System von  $N$  linearen homogenen DGLn mit konstanten Koeffizienten. Wir setzen den Lösungsansatz  $q_k = A_k e^{i\omega t}$ ;  $k = 1, \dots, n$  in Gleichung (18) ein und teilen durch  $e^{i\omega t}$ . Dies ergibt:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k = 0}$$

System von  $N$  linearen Gleichungen

Für nichttriviale Lösung muss die Determinante verschwinden.  $\det(k_{ik} - \omega^2 m_{ik}) = 0$   
 $\Rightarrow$  Charakteristische Gleichung.

(Vorlesung 8.12.17, aufgeschrieben von Oliver Schad)

Da  $m_{ik}$  und  $k_{ik}$  positiv definit sind, hat diese Gleichung im allgemeinen Fall  $N$  verschiedene positive Lösungen  $\omega_\alpha^2$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ .

Die hierdurch definierten  $\omega_\alpha$  heißen die Eigenfrequenzen des Systems. Die  $\omega_\alpha^2$  sind reell und positiv, da keine Dämpfung betrachtet wird. Ein Imaginärteil führt auf  $q_k \sim e^{\pm \omega_k t}$  d.h. keine Energieerhaltung.

Mathematisch:

Multipliziere (\*\*) mit  $A_i^*$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i,k} (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_i^* A_k &= 0 \\ \Rightarrow \omega^2 &= \frac{\sum_{i,k} (k_{ik} A_i^* A_k)}{\sum_{i,k} (m_{ik} A_i^* A_k)} \geq 0 \end{aligned}$$

Hat man die  $\omega_\alpha^2$  aus der charakteristischen Gleichung bestimmt, so kann man sie in (\*\*) einsetzen, um die  $A_k$  zu bestimmen. Aus der linearen Algebra folgt, dass wenn alle  $\omega_\alpha$  verschieden sind, die Koeffizienten  $A_k$  zu den Unterdeterminanten von Grad  $N - 1$  der ursprünglichen Determinante proportional sind.

Dabei ist in der jeweiligen Unterdeterminante  $\omega$  durch das jeweilige  $\omega_\alpha$  zu ersetzen. Die Unterdeterminanten werden mit  $A_{k\alpha}$  bezeichnet.

Spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems (\*) hat die Form

$q_k = A_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$ . Die Summe aller  $N$  speziellen Lösungen liefert die allgemeine Lösung:

$$q_k = \operatorname{Re} \left[ \sum_{\alpha=1}^N A_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t} \right] = \sum_{\alpha} A_{k\alpha} \Theta_\alpha \quad (***)$$

mit

$$\Theta_\alpha \equiv \operatorname{Re} [C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}]$$

Die zeitliche Änderung jeder Koordinate des Systems ist eine Überlagerung von  $N$  einfachen periodischen Schwingungen  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_N$  mit beliebigen Amplituden und Phasen, aber ohne festgelegten Frequenzen.

Frage:

Können wir die verallgemeinerten Koordinaten so wählen, dass jede von ihnen nur eine einfache (entkoppelte) Schwingung ausführt?

(\*\*\*) gibt uns  $N$  Gleichungen für  $N$  Unbekannte  $\Theta_\alpha$ . Wenn wir dieses Gleichungssystem invertieren, erhalten wir die  $\Theta_\alpha$  als Funktion der  $q_k$ . Die  $\Theta_\alpha$  sind die gesuchten neuen verallgemeinerten Koordinaten. Sie heißen Normalkoordinaten oder Hauptkoordinaten. Ihre einfachen Schwingungen -jeweils mit Frequenz  $\omega_\alpha$ - heißen Normalschwingungen des Systems.

Die  $\Theta_\alpha$  erfüllen die Gleichungen  $\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0$ .

In Normalkoordinaten entkoppeln die Bewegungsgleichungen in  $N$  voneinander unabhängige Gleichungen. Die Normalkoordinaten sind unabhängig voneinander.

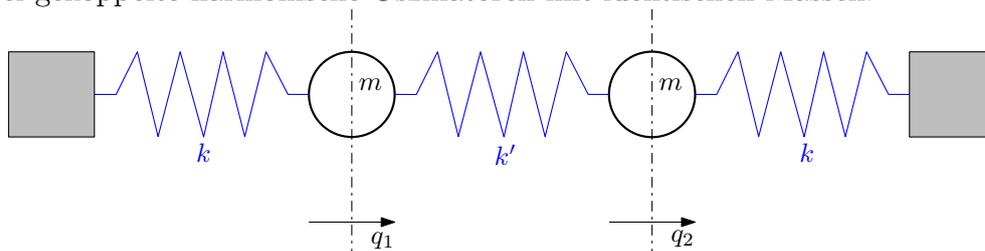
Lagrangefunktion für die Normalkoordinaten:

$$L = \sum_{\alpha}^N \frac{m_\alpha}{2} (\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2), \quad m_\alpha \geq 0$$

Die kinetische und die potentielle Energie wurden gleichzeitig diagonalisiert. Sind einige der Eigenfrequenzen gleich, so gibt es zu jeder derartigen Eigenfrequenz mehrere Normalkoordinaten.

Beispiel:

Zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren mit identischen Massen.



Kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{q}_2^2$$

Potentielle Energie:

$$\begin{aligned} V &= \frac{k}{2}q_1^2 + \frac{k}{2}q_2^2 + \frac{k'}{2}(q_2 - q_1)^2 \\ &= \frac{1}{2}((k + k')q_1^2 - k'q_1q_2 - k'q_2q_1 + (k + k')q_2^2) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_{ik} &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \\ \Rightarrow k_{ik} &= \begin{pmatrix} k + k' & -k' \\ -k' & k + k' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Verallgemeinerte Eigenwertgleichung (\*\*):

$$\begin{pmatrix} k + k' - m\omega^2 & -k' \\ -k' & k + k' - m\omega^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} k + k' - \omega^2 & -k' \\ -k' & k + k' - \omega^2 \end{pmatrix} &= 0 \\ (k + k' - \omega^2)^2 - k'^2 &= 0 \\ \Rightarrow \omega^4 - \frac{2(k' + k)}{m}\omega^2 + \frac{k(k + 2k')}{m^2} &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Lösungen:

$$\begin{aligned} \omega_{1/2}^2 &= \frac{k + k'}{m} \pm \frac{k'}{m} \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{m}} & \omega_2 &= \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}} \end{aligned}$$

Außerdem erhält man durch Einsetzen von  $\omega_{1/2}$  in (\*\*) die Eigenvektoren:

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normalschwingungen:

$$\begin{aligned} \vec{q}_1 &= \frac{C_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \vec{q}_2 &= \frac{C_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

Die beiden Massen schwingen bei der ersten Normalschwingung in Phase und bei der zweiten gegenphasig.

# 11 Der Hamilton-Formalismus

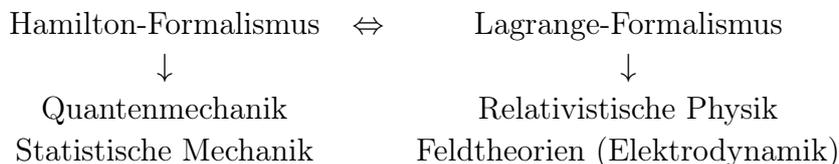
(Vorlesung vom 11.12.17, aufgeschrieben von Kaja Jurak)

Bisher: Newton'sche Mechanik, Lagrange-Formalismus (zueinander äquivalent) Lagrange-Formalismus leistungsfähig wegen der Forminvarianz der Bewegungsgleichungen ( $\vec{q} \rightarrow \vec{q}'$ )

Hamilton-Formalismus:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

- rechentechnisch vorteilhaft bei zyklischen Koordinaten
- noch höhere Symmetrie
- für konservative holonom-skleronome Systeme ist die Hamilton-Funktion  $H$  gleich der Gesamtenergie



Erinnerung: Lagrangefunktion  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$

In der Hamilton-Mechanik verwendet man anstatt der verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  die konjugierten Impulse  $p_i, \vec{p} = (p_1, \dots, p_s), p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  als Variable.

Der von den zugelassenen Werten von  $q_i$  und  $p_i$  gebildete  $2s$ -dimensionale Raum heißt Phasenraum. Wir suchen eine Funktion der Variablen  $q_i, p_i, t$ , die dieselbe Information beinhaltet wie die Lagrange-Funktion.

Dazu muss es eine umkehrbare Abbildung zwischen  $L$  und der gesuchten Funktion geben.

Die gesuchte Abbildung heißt die Legendre-Transformation.

(Adrien-Marie Legendre, 1752-1833, französischer Mathematiker)

Legendre-Transformation:

Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion zweier Variabler  $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$ .

Totales Differential:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= u dx + v dy \end{aligned}$$

Gesucht: bijektive Abbildung der Funktion  $f$  auf eine Funktion  $g$ , so dass  $g$  von den Variablen  $u = \frac{\partial f}{\partial x}$  und  $v = \frac{\partial f}{\partial y}$  abhängt.

Beispiel: Eine solche Abbildung ist:

$f \rightarrow g \equiv f - u \cdot x$ , sofern  $u \equiv u(x, y)$  für alle  $y$  nach  $x$  auflösbar ist. Um dies zu zeigen

bilden wir das totale Differential.

$$\begin{aligned} dg &= df - d(u \cdot x) \\ &= udx + vdy - dux - udx \\ &= -xdu + vdy(*) \end{aligned}$$

$g$  ist zunächst eine Funktion von  $x$  und  $y$ :

$$g = f(x, y) - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot x$$

Um  $g$  als Funktion von  $u$  und  $v$  zu schreiben, muss  $x \rightarrow u = \frac{\partial f}{\partial x}$  für jedes feste  $y$  umkehrbar sein.

Dann können wir  $x$  eindeutig durch  $u$  und  $y$  ausdrücken (wie vorausgesetzt). Damit existiert zu jeder Funktion  $f = f(x, y)$  eine Funktion  $g(u, y)$ :

$$\begin{aligned} dg &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot dy \\ &\stackrel{(*)}{=} -xdu + vdy \end{aligned}$$

Die Abbildung  $f \rightarrow g$  ist umkehrbar:  $f = g + x \cdot u$ ,  $u = u(x, y)$  existiert nach Voraussetzung  $\Rightarrow$  die Abbildung  $f \rightarrow g$  mit  $g = f - x \cdot u$  hat die gewünschten Eigenschaften. Wir wenden nun die Legendre-Transformation für alle Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i, i = 1, \dots, s$  auf die Lagrangefunktion  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  an.

$$\begin{aligned} L(q_i, \dot{q}_i, t) &\rightarrow \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \equiv H = H(q_i, p_i, t) \\ (f \rightarrow g &= -(f - ux)) \end{aligned}$$

Hamilton-Funktion:

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - L$$

Beispiel 1: harmonischer Oszillator (ein Freiheitsgrad)

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}_i^2 - \frac{1}{2}kq^2 \\ p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} m = m\dot{q} \rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m} \\ H &= p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \\ H &= H(q, p) \\ H &= E = T + V(\text{Gesamtenergie}) \end{aligned}$$

## Beispiel 2: Teilchen im elektromagnetischen Feld

Lagrange-Funktion:  $L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}})^2 + q\dot{\vec{r}}\vec{A} - q\Phi$

$q$ =elektrische Ladung

$(\Phi, \vec{A})$  = elektromagnetisches Potential,  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ ,  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Generalisierter Impuls:  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} - q\vec{A}$

Bemerkung: generalisierter Impuls  $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}$  unterscheidet sich jetzt vom kinetischen Impuls  $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$

$$\begin{aligned} H &= \vec{p}\dot{\vec{r}} - L \\ &= \vec{p}\left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m}\right) - \frac{m}{2}\left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m}\right)^2 - q\left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m}\right)\vec{A} + q\Phi \\ &= \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi \end{aligned}$$

### Herleitung der Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i dp_i \dot{q}_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - dL \\ &= \sum_i \left( dp_i \dot{q}_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \left( dp_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Andererseits gilt mit  $H = H(q_i, p_i, t)$ :

$$dH = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{q}_i \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

Für Systeme, in denen  $L$  und damit auch  $H$  nicht explizit von der Zeit abhängen:

Hamilton'schen Gleichungen:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

2s DGL'n 1.Ordnung, äquivalent zu den  $s$  Lagrange-Gleichungen. Wir benötigen 2s Anfangsbedingungen, z.B. Koordinaten  $q_i$  und Impulse  $p_i$  zu einer festen Anfangszeit  $(q_i(t_0), p_i(t_0))$ .

## 11.1 Zeitabhängigkeit der Hamilton-Funktion

(aufgeschrieben von Henri Scheppach)

Aus der Hamilton'schen Bewegungsgleichung erhält man ein System aus  $2S$  Differentialgleichungen erster Ordnung, wobei  $S$  die Anzahl der generalisierten Koordinaten bezeichnet.

Wegen

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dL}{dt} - \sum_j \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \ddot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \left( L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \left( L - \sum_j p_j \cdot \dot{q}_j \right) = -\frac{dH}{dt}$$

folgt:  $\frac{dH}{dt} = 0$ , falls  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ . In Worten: Wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, ist die Hamilton-Funktion eine Erhaltungsgröße. Da gleichzeitig gilt:  $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$  folgt:  $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$ . Die Hamilton-Funktion kann also höchstens explizit von der Zeit abhängen. Die impliziten Zeitabhängigkeiten durch generalisierte Koordinaten und Impulse müssen sich herausheben.  $\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = E = const.$

**Beispiel:** Für einen harmonischen Oszillator ist die Hamilton-Funktion gegeben durch:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2$$

Daraus folgen mit der Hamilton-Gleichung:

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}q$$

Die mit dem Hamilton-Formalismus erhaltene Schwingungsgleichung ist diesselbe, die man mit dem Lagrange-Formalismus erhält.

## 11.2 Forminvarianz der Hamilton-Funktion unter Parametertransformation

Sei eine Parametertransformation gegeben durch:

$$q_i \rightarrow q'_i(q_i, t)$$

Somit transformiert sich die Lagrange-funktion zu

$$L'(q'_i, \dot{q}'_i, t) = L(q_i(q'_i, t), \dot{q}_i(q'_i, \dot{q}'_i, t), t)$$

Wie transformiert sich die Hamilton-Funktion?

$$p'_i = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} = \sum_j \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial \dot{q}'_i}}_{=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_i}}_{=p_j} \right) = \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_i} = \sum_j p_j \frac{\partial q_j}{\partial q'_i}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus folgender Rechnung:

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt}q_i = \sum_k \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial q_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial q_i}{\partial q_j}$$

Die transformierte Hamilton-Funktion erhält man mit

$$H' = \sum_i p'_i \dot{q}'_i - L' = \sum_{i,j} p'_i \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \dot{q}'_j - L' = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \Rightarrow H' = H$$

## 12 Der Phasenraum

Die 2S Variablen  $q_i, p_i$  spannen den Phasenraum auf.

Der Phasenraumvektor  $\vec{\pi} = (\vec{q}, \vec{p})$  enthält die vollständige Information über ein mechanisches System. Gleichzeitig ist  $\vec{\pi}$  die minimal notwendige Angabe, um ein System eindeutig zu charakterisieren.  $\vec{\pi}$  wird auch als Zustand des Systems bezeichnet.

$\vec{\pi} = \vec{\pi}(t) \Rightarrow$  Als Funktion der Zeit  $t$  bewegt sich der Punkt  $\vec{\pi}(t)$  im Phasenraum und beschreibt eine Kurve, die Phasenbahn.

**Beispiel:** Harmonischer Oszillator: Die Gesamtenergie im System ist gegeben durch

$$E = H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 = \text{const.} \Leftrightarrow 1 = \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2\frac{E}{k}}$$

Die Phasenbahn muss deshalb eine Ellipse mit den Halbachsen  $\sqrt{2\frac{E}{k}}$  und  $\sqrt{2mE}$  sein. Da  $\dot{q} = \frac{p}{m}$  und  $m > 0$  bewegt sich  $\vec{\pi}$  im Uhrzeigersinn. Ebenfalls erkennt man, dass die Schwingungsperiode unabhängig von der Energie durch  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  beschrieben wird.

Zyklische Koordinaten und die Hamilton-Funktion:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \dot{p}_j = 0$$

Hamilton'sche Gleichungen werden zu:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j = 0$$

$\Rightarrow$  Die Hamilton-Funktion ist unabhängig von  $q_i$ , falls  $p_j = \text{const.}$  Für eine zyklische Koordinate  $q_i$  ist die Hamilton-Funktion unabhängig von  $q_i$  und  $p_i = \text{const.}$  Die Anzahl der Variablen ist somit um 2 reduziert.

## 13 Vorlesung vom 20.12.

(Aufgeschrieben von Florian Faaber)

Eine Phasentransformation  $(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{Q}, \vec{P})$  heißt kanonisch im weiteren Sinne, wenn zu jeder Hamiltonfunktion  $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$  eine Hamiltonfunktion  $K(\vec{Q}, \vec{P}, t)$  existiert, so dass für  $j = 1, \dots, s$  gilt  $\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \dot{p}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j}$

Der Poisson'sche Satz: Sind  $f$  und  $g$  Erhaltungsgrößen, so ist es auch  $\{f, g\}$ .

Beweis: Für Erhaltungsgrößen ist  $0 = \frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, 0 = \frac{dg}{dt} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f, g\} &= \{\{f, g\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \\ &= -\{\{g, H\}, f\} - \{\{H, f\}, g\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} \\ &= \left\{\frac{\partial g}{\partial t}, f\right\} - \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} = 0 \end{aligned}$$

Dies führt jedoch nicht immer zu einer neuen und interessanten Erhaltungsgröße.

Beispiel für eine kanonische Transformation im weiteren Sinne: Vertauschen der Koordinaten und Impulse

$$\vec{Q} = \vec{p}, \vec{P} = \vec{q}, \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial q_j}, \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial Q_j}, \dot{Q}_j = -\frac{\partial H}{\partial p_j}$$

Wähle  $K = -H$ , dann sind die Hamilton'schen Gleichungen wieder erfüllt.

$$\rightarrow \dot{p}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j}, \dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial p_j}$$

Allgemein gilt: Die Phasenraumtransformation  $(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{Q}, \vec{P})$  ist kanonisch im weiteren Sinne, wenn zu jedem  $H$  ein  $K$  existiert, so dass:

$\sum p_j \dot{q}_j - H = c(\sum P_j \dot{Q}_j - K) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$ , wobei  $c = const$  und  $F_1 = F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$  eine Funktion der alten und der neuen Koordinaten  $\vec{q}$  und  $\vec{Q}$  und eventuell der Zeit.  $F_1 = F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$  ist eine erzeugende Funktion oder Erzeugende.

Dies folgt aus der Äquivalenz der Hamilton'schen Gleichungen mit dem Hamilton'schen Prinzip. Weiterhin kann man sich diese Relation dadurch plausibel machen, dass die Bewegungsgleichungen invariant sind unter der Transformation der Lagrange-Funktion der Form  $L \rightarrow cL + \frac{dF}{dt}$ .

Lagrange-Gleichung  $\longleftrightarrow$  Hamilton'sche Gleichungen  $\longleftrightarrow \delta S = 0$

Die Erzeugende  $F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$  und  $c$  legen die Transformation  $(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{Q}, \vec{P})$  und die neue Hamiltonfunktion  $K$  eindeutig fest.

Generell kann im Hamilton'schen Prinzip  $F$  von  $\vec{q}, \vec{p}, \vec{Q}, \vec{P}, t$  abhängen. Bei den Hamilton'schen Gleichungen sind nur  $2s$  davon unabhängig.  $F(\vec{q}, \vec{Q}, \vec{P}, \vec{p}, t)$  kann also folgende Formen annehmen:

$$F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t), F_2(\vec{q}, \vec{p}, t), F_3(\vec{p}, \vec{Q}, t), F_4(\vec{P}, \vec{p}, t), F_5(\vec{q}, \vec{p}, t), F_6(\vec{Q}, \vec{p}, t).$$

Die Konstante  $c$  kann durch eine weitere Transformation eliminiert werden  $\vec{Q} \rightarrow \vec{Q}' = c\vec{Q}, \vec{P} \rightarrow \vec{P}' = c\vec{P}, H \rightarrow K = cH$

Die Transformationen mit  $c = 1$  heißen kanonisch im engeren Sinne.

Beispiel: Die Transformation  $\vec{Q} = \vec{p}, \vec{P} = \vec{q}$  ist kanonisch im weiteren Sinne, aber nicht im engeren Sinne, da  $c = -1$ . Hingegen ist  $\vec{Q} = \vec{p}, \vec{P} = -\vec{q}$  kanonisch im engeren Sinne.

Für die kanonischen Transformationen zwischen den alten und den neuen Koordinaten ( $F_1 = F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$ ) haben wir die folgende Beziehung zwischen den alten und den neuen Größen:

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}, K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Dies folgt wiederum aus der Äquivalenz von Hamilton'schen Gleichungen und Hamilton'schen Prinzip.

Für die kanonische Transformation mit  $c=1$  gilt:

$$(\sum p_j \dot{q}_j - H) - (\sum P_j \dot{Q}_j - K) = \frac{d}{dt} F(q, p, P, Q, t) (*)$$

da  $Q_j = Q_j(q_j, p_j, t), P_j = P_j(q_j, p_j, t)$  reicht es, die  $F_1, \dots, F_6$  zu betrachten. Betrachte  $F_1 =$

$F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$

Es gilt:  $\frac{dF_1}{dt} = \sum \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$

mit (\*)  $\rightarrow \sum p_j \dot{q}_j - H = \sum (P_j \dot{Q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j) - K + \frac{\partial F_1}{\partial t}$

$(q_j, Q_j)$  und  $(\dot{q}_j, \dot{Q}_j)$  sind jeweils voneinander unabhängig. Vergleich der beiden Koeffizienten auf beiden Seiten zeigt:

$$p_j = \frac{\partial F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)}{\partial q_j}, P_j = -\frac{\partial F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)}{\partial Q_j}, K = H + \frac{F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)}{\partial t}$$

## 14 Vorlesung vom 8.1.

(Vorlesung vom 8.1. 18, aufgeschrieben von Lennart Königer)

Wiederholung: Poisson-Klammern, kanonische Transformationen

Definition: Poisson-Klammern:

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

n: Zahl der verallgemeinerten Koordinaten

f, g: Phasenraumfunktionen -  $f(q, p, t); g(q, p, t)$

totale Zeitableitung der Phasenraumfunktion  $f$ :

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Jede nicht explizit zeitabhängige Größe ist eine Erhaltungsgröße, wenn ihre Poisson-Klammer mit der Hamiltonfunktion ( $H$ ) verschwindet.

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \text{ und } \{f, H\} = 0 \rightarrow \frac{df}{dt} = 0 \right]$$

Erweiterte Transformationen der Koordinaten und der Impulse.

$q_i \rightarrow Q_i(q_i, p_i, t); p_i \rightarrow P_i(q_i, p_i, t)$  Punkttransformation im Phasenraum.

NEU: Abhängigkeit von  $p_i$  der neuen Koordinaten. Sofern für  $q_i, p_i$  die Hamiltonischen Gleichungen  $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$   $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$  gelten, soll für die neuen Koordinaten  $\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}$   $\dot{P}_i = \frac{\partial K}{\partial Q_i}$  mit einer geeigneten Hamiltonfunktion  $K$  gelten.

Die Transformation heißt kanonisch im weiteren Sinne, falls es für alle  $H$  ein  $K = K(Q_i, P_i, t)$  gibt.

Aus dem Hamilton'schen Prinzip (Prinzip der stationären Wirkung)

$0 = \delta S = \delta \int L dt$  folgt, dass für kanonische Transformationen im weiteren Sinne gilt:

$$\sum_{i=1}^n (p_i \dot{q}_i - H) = c \left[ \sum_{i=1}^n (P_i \dot{Q}_i - K) \right] + \frac{d}{dt} F(q, p, Q, P, t) \quad (*)$$

$c = \text{const.}; F(q, p, Q, P, t)$ : Eichfunktion

Unter dieser Bedingung erfüllen  $(Q_i, P_i, K)$  das Prinzip der stationären Wirkung, wenn

auch  $(q_i, p_i, H)$  dieses Prinzip erfüllen.

Für kanonische Transformationen im engeren Sinne gilt  $c=1$ .

Da es nur  $2n$  unabhängige Variablen im Phasenraum gibt, kann die Funktion  $F(q, p, Q, P, t)$  nur von den folgenden Typen sein: (bzw. Mischungen davon)

$$F_1(q, Q, t); F_2(q, P, t); F_3(p, Q, t); F_4(p, P, t); F_5(q, p, t); F_6(Q, P, t)$$

wobei  $F_5$  und  $F_6$  vernachlässigt werden, da diese die Transformation nicht eindeutig beschreiben.

Diese Funktionen heißen Erzeugende der kanonischen Transformation.

Die Erzeugende  $F_1(q, Q, t)$

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Aus (\*) folgt mit  $c=1$

$$\sum_{i=1}^n (p_i \dot{q}_i - H) = \sum_{i=1}^n \left( P_i \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (**)$$

$q_i$  und  $Q_i$ , sind voneinander unabhängig, wie auch  $\dot{q}_i$  und  $\dot{Q}_i$ . Daher ist (\*\*) erfüllt, wenn die Koeffizienten von  $\dot{q}_i$  und  $\dot{Q}_i$  einzeln verschwinden:

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_i} \quad P_i = -\frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_i} \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Die Transformation ist genau dann kanonisch, wenn es eine Erzeugende  $F_1$  gibt, die diese drei Gleichungen erfüllt.

Die Gleichung für  $K$  definiert die neue Hamiltonfunktion.

Bei gegebenem  $F_1$  können die Transformationen  $q_i \rightarrow Q_i$   $p_i \rightarrow P_i$  eindeutig aus den obigen Gleichungen für  $p_i$  und  $P_i$  berechnet werden.

Die Erzeugende  $F_2(q, P, t)$

Wir betrachten zunächst eine erzeugende Funktion  $\hat{F}_2(q, P, t)$

Dann haben wir aus (\*\*)

$$\sum_{i=1}^n (p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i) - H + K = \frac{d}{dt} \hat{F}_2(q, P, t)$$

Wir schreiben nun auch die linke Seite als Funktion von  $q_i, P_i, t$ . Mit  $Q_i = Q_i(p_i, P_i, t)$  folgt:

$$\rightarrow \sum_{i=1}^n \left( p_i \dot{q}_i - P_i \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{Q_i}{P_j} \dot{P}_j \right) - P_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} \right) - H + K = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) + \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial t}$$

( $\dot{Q}_i$  mit Kettenregel berechnet und eingesetzt)

Vergleich der Koeffizienten:

$$p_i = \sum_{j=1}^n \left( P_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \hat{F}_2 + \sum_{j=1}^n (P_j Q_j) \right)$$

$$0 = \sum_{j=1}^n \left( P_j \frac{\partial Q_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial P_i} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial P_i} F_2 \right) - Q_i$$

$$K = \frac{\partial F_2}{\partial t} + H$$

aus dem Koeffizientenvergleich folgt:

$$p_i = \frac{\partial F_2(q_i, P_i, t)}{\partial q_i} \quad Q_i = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P_i} \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Der Zusammenhang zwischen  $F_2 = F_2(q, P, t)$  und den Transformationen

$q_i \rightarrow Q_i(q, p, t) \quad p_i \rightarrow P_i(q, p, t)$  ist wiederum eindeutig.

Erinnerung: Satz: Eine Transformation ist genau dann kanonisch, wenn die fundamentalen Poisson-Klammern erhalten bleiben, also invariant sind.

Die fundamentalen Poisson-Klammern sind:

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0 \quad \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0 \quad \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}$$

### Kanonische Invarianz des Phasenraumvolumens

$$V = \int \dots \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$$

ist invariant unter kanonischen Transformationen, d.h. die Integrationsgrenzen ändern sich, aber das Volumen bleibt konstant.

Beweisidee: Es wird gezeigt, dass die Funktionaldeterminante gleich Eins ist, also:

$$D = \frac{\partial(Q_1 \dots Q_n, P_1 \dots P_n)}{\partial(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)} = 1$$

Dann ist

$$\int dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n = \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n D = \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$$

## 15 Kanonische Invarianz des Phasenraumvolumens

(Aufgeschrieben von Torsten Umlauf)

$$V = \int \dots \int \dots dq_1 dq_n \dots dp_1 dp_n = \int \dots \int dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n$$

**Der Satz von Liouville** Betrachte ein thermodynamisches System (z.B. Gas oder Flüssigkeit) mit  $N \sim 10^{23}$  Teilchen. Die Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichung ist nicht mehr möglich und auch nicht sinnvoll, da nicht experimentell überprüfbar. Die genaue Kenntnis des Mikrozustands des Systems, das gegeben ist durch  $6N$  Freiheitsgrade (3 Dimensionen,  $q, p$  Anfangsbed. für  $N$  Teilchen) ist nicht erforderlich.

Thermodynamische Systeme werden durch makroskopische Zustandsgrößen wie Druck, Volumen, Temperatur, Gesamtenergie, ... beschrieben. Eine genügende Anzahl dieser Zustandsgrößen bestimmt den Makrozustand des Systems. Ein einzelner Makrozustand wird durch viele verschiedene Mikrozustände realisiert.

Makroskopisch identische Systeme nehmen daher in der Regel verschiedene Mikrozustände ein, sind aber dennoch nicht unterscheidbar. Eine Menge von makroskopisch identischen, aber mikroskopisch unterschiedlichen Systemen heißt Ensemble. Die Elemente dieser Menge werden durch Punkte im Phasenraum beschrieben.

Wenn ein Ensemble sehr viele Elemente hat (Anzahl  $G$ ) und die Dichte der Phasenraumpunkte hoch genug ist, kann eine Verteilungsdichte  $g(q_i, p_i, t)$  im Phasenraum eingeführt werden.  $g(q_i, p_i, t) dq_1 \dots dq_{3N} dp_1 \dots dp_{3N}$  ist die Anzahl der Systeme des Ensembles, die sich zum Zeitpunkt  $t$  im Volumenelement um den Punkt  $dq_1 \dots dq_{3N} dp_1 \dots dp_{3N}$  im Phasenraum befindet.

$$\int_{\text{ges. Phasenraum}} g(q_i, p_i, t) dq_1 \dots dq_{3N} dp_1 \dots dp_{3N} = G$$

Die Verteilungsfunktion  $\rho(q_i, p_i, t) \equiv \frac{g(q, p, t)}{G}$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein System in einem gegebenen Volumen im Phasenraum zu finden. Auf 1 normiert.

Aufgabe der statistischen Mechanik: Bestimmung von  $\rho$ .

### Definition

$d\Gamma \equiv dq_1 \dots dq_N dp_1 \dots dp_N$ ,  $g = \frac{dG}{d\Gamma}$ ,  $dG$ : Anzahl der Phasenpunkte in  $d\Gamma$ .

Folgt das System den Hamiltonschen Gleichungen, so ist die zeitliche Entwicklung von  $g$  eine kanonische Transformation.

Wie schon gesehen, ist das Volumen konstant. Wir zeigen gleich:  $g$  ist eine Erhaltungsgröße:

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\rho}{dt} = \{\rho, H\} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \text{ Satz von Liouville}$$

Phasenraumpunkte strömen wie inkompressible Flüssigkeiten durch den Phasenraum. Erhaltung der Wahrscheinlichkeitsdichte in Phasenraum.

### Beweis

$g = \frac{dG}{d\Gamma}$ , Volumen  $d\Gamma$  ist invariant. Anzahl  $dG$  der Systeme in diesem Volumen ist ebenfalls invariant: Da die Hamiltonschen Gleichungen ein lineares Differentialgleichungssystem sind, können sich Kurven im Phasenraum nicht schneiden. Würde ein Phasenpunkt

aus  $d\Gamma$  abwandern oder hinzukommen, so müsste er die Begrenzungsfläche und damit eine andere Phasenkurve schneiden. Folglich ist  $\frac{dg}{dt} = 0$ .

Wird der Querschnitt eines Teilchenstrahls verkleinert, so wird die Impulsverteilung breiter.

**Hamilton-Jacobi-Theorie:** Wir wollen kanonische Transformationen benutzen, um neue Variablen  $Q_i, P_i$  einzuführen, für die die Bewegungsgleichungen stark vereinfacht sind. Beispiel: Transformationen, bei denen die neue Hamiltonfunktion  $K$  entweder

- 1) nur noch von den  $Q_i$ , aber nicht von den  $P_i$  abhängt,
- 2) nur noch von den  $P_i$ , aber nicht von den  $Q_i$  abhängt.  $\Rightarrow Q_i$  zyklische Koordinaten.

In diesen Fällen ist

- 1)  $\dot{Q} = \frac{\partial K(Q_i, t)}{\partial P_i} = 0 \Rightarrow Q_i = \text{const.}$
- 2)  $\dot{P} = -\frac{\partial K(P_i, t)}{\partial Q_i} = 0 \Rightarrow P_i = \text{const.}$  (Erhaltungsgrößen)

Hier wollen wir den Fall untersuchen, dass in den neuen Koordinaten sowohl  $Q_i$  als auch die  $P_i$  konstant sind, d.h. wir suchen eine kanonische Transformation, sodass

$$q_i(t) \rightarrow Q_i[q_i(t), p_i(t), t] = \text{const}, \quad p_i(t) \rightarrow P_i[q_i(t), p_i(t), t] = \text{const.}$$

Diese ist gefunden, wenn die Hamiltonfunktion gleich Null ist:  $\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0, \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0$ .

Um  $K = 0$  zu erhalten, müssen wir eine geeignete Erzeugende  $F$  finden. Wir müssen  $K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$ , d.h. wir brauchen  $H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$ .

Dafür wählt man am besten  $F_2 = F_2(q_i, P_i, t) \Rightarrow H(q, p, t) + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t} = 0$ .  
 $P_i$  nicht unabhängig, wir haben  $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ .

$$H(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \quad (\text{nicht linear, da } p \text{ im allg. als } p^2 \text{ in } H \text{ auftritt})$$

## 16 Hamilton-Jacobi-Gleichung

1. Ordnung in den  $n$  Variablen  $q_1, \dots, q_n, t$ .

Die Variablen  $q_i(t)$  und  $p_i(t)$  ergeben sich nach der Berechnung von  $F_2$  aus den Transformationsgleichungen

$$P_i = \frac{\partial F_2(q_i, p_i, t)}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2(q_i, p_i, t)}{\partial p_i}.$$

Das vollständige Integral der Hamilton-Jacobi-Gleichung heißt Hamiltonsche Wirkungsfunktion oder Prinzipalfunktion  $S$ .  $S$  hängt von  $q_1, \dots, q_n$ , den Integrationskonstanten  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  und  $t$  ab.

(Vorlesung vom 15.01.2018, aufgeschrieben von Dietmar Herdt)

Berechnung von  $S$  in folgenden Schritten:

- a) Stellen Sie die Hamilton-Funktion auf:  $H(q_i, p_i, t)$ .
- b) Leiten Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung her:  $H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$ .
- c) Wenn alle Variablen separierbar sind, liefern  $n$  eindimensionale Integrationen die Lösung  $S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$ .  
(Das System ist integrabel, Stichwort: Integrabilität!)

Zur Berechnung von  $q_i(t)$  und  $p_i(t)$  wählen wir die Integrationskonstanten entweder als die  $n$  neuen Koordinaten oder die  $n$  neuen Impulse:

- 1)  $\alpha_i = Q_i$  ,  
2)  $\alpha_i = P_i$  .

In beiden Fällen ist  $p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i}$ .

Für 1) haben wir:

$$P_i = -\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i},$$

für 2):

$$Q_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}.$$

Beispiel: Harmonischer Oszillator

- a)  $H = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} k q^2$
- b)  $\frac{1}{2m} (\frac{\partial S}{\partial q})^2 + \frac{1}{2} k q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- c) Ansatz:  $S(q, \alpha, t) \equiv W(q, \alpha) - \alpha t$   
Einsetzen:  $\frac{1}{2m} (\frac{\partial W}{\partial q})^2 + \frac{1}{2} k q^2 = \alpha = E$  (=  $H$ , da  $\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = p$ )

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2E}{k} - q^2}} - t \equiv \beta$$

$$t + \beta = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{k}{2E}} q \right)$$

$$\Rightarrow q(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega(t + \beta)), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Bemerkung:

- Es ist nicht immer möglich eine Erzeugende  $S$  zu finden, die eine kanonische Transformation auf ein triviales Problem erzeugt.

- Die Wirkungsfunktion  $S(q, p, t)$  erzeugt eine kanonische Transformation mit  $K = 0$ . Dies setzt voraus, dass die neuen Impulse die fundamentalen Poisson-Klammern  $\{P_i, P_j\}_{\vec{q}, \vec{p}}$  erfüllen, d.h. dass es  $n$  Konstante der Bewegung  $P_j(q_i, p_i)$  gibt.
- Physikalische Interpretation der Wirkungsfunktion:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \sum_j \left( \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_j}}_{=p_j} \dot{q}_j + \frac{\partial S}{\partial P_j} \underbrace{\dot{P}_j}_{=0} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} \\ &= \sum_j p_j \dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{K-H=-H} = \sum_j p_j \dot{q}_j - H = L \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} &= L, \quad S = \int_{t_1}^{t_2} dt L \end{aligned}$$

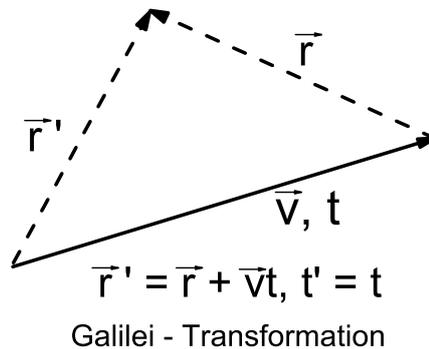
Hamilton-Jacobi-Gleichung ist äquivalent zum Hamiltonschen Prinzip mit  $S = \int L dt$ .

## 17 Relativistische Mechanik

Bisher haben wir Koordinatentransformationen betrachtet, die nur auf die Raumkoordinaten wirken. Die Zeit war bisher eine absolute Größe, d.h. in allen Inertialsystemen gleich. Dies ändert sich in der relativistischen Mechanik (spezielle Relativitätstheorie).

Inertialsystem: Bezugssystem, in dem sich kräftefreie Körper gleichförmig geradlinig bewegen (oder ruhen).

Newton'sche/ Lagrange'sche/ Hamilton'sche Mechanik: Invariant unter Existenz einer absoluten Zeit, deren Ablauf nicht vom verwendeten Bezugssystem abhängt.



Hingegen Einstein:

- 1) Relativitätspostulat: Es ist nicht möglich absolute Geschwindigkeiten zu messen. (Verallgemeinerung des Relativitätspostulat der Mechanik auf die ganze Physik - insbesondere Licht)

- 2) Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Bezugssystemen gleich groß:  $c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . (Hängt nicht von der Bewegung der Quelle ab)

→ Widerspruch zur Galilei-Transformation

Definition:Ereignis: Physikalischer Vorgang, dem drei Ortskoordinaten und eine Zeitkoordinate zugerechnet werden (Raum-Zeit-Koordinaten).

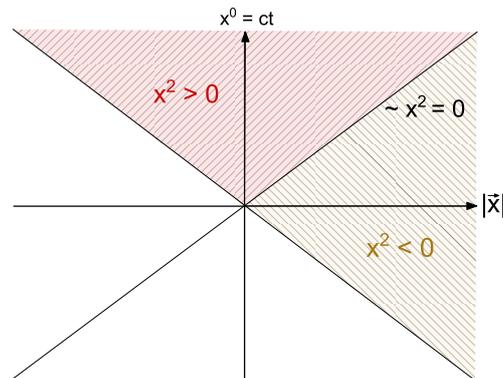
Die von einem Ereignis bei  $t = 0$  und  $\vec{x} = 0$  ausgesandten Lichtwellenfronten liegen in jedem Inertialsystem auf der Kugel  $|\vec{x}| = ct \equiv x^0 \Rightarrow t = \frac{x^0}{c}$ . Zeit wird durch eine äquivalente Länge ausgedrückt.

Einlaufende Welle:  $|\vec{x}| = ct = -x^0$

Ereignisse können durch ihren Zeitpunkt und Ort in einem Vierervektor

$x = (x^0, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (\frac{t}{c}, \vec{x})$  charakterisiert werden.

Ein Lichtstrahl kann zwei Ereignisse  $x$  und  $y$  genau dann verbinden, wenn  $0 = (x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2 = c^2(t_x - t_y)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2$ , d.h. wenn ihr Abstand auf dem Lichtkegel liegt,  $x^2 = 0$ .



Bemerkung: Entsprechendes gilt für die gegenüberliegenden Quadranten, s. Abbildung weiter unten.

Eine von der Wahl des Betrachter unabhängige Definition der Länge eines Vierervektors  $x$  ist  $x^2 = (x^0)^2 - \vec{x} \vec{x} = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (x^i)^2$ .

Skalarprodukt:

$$xy = x^0 y^0 - \vec{x} \vec{y} = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^3 x^i y^i$$

Vierdimensionaler Raum mit Metrik  $g$ : Minkowski-Raum

$$g(x, y) = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu, \nu} x^\mu x^\nu,$$

$$g_{\mu, \nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Vorlesung vom 19.1., aufgeschrieben von L. Königer)

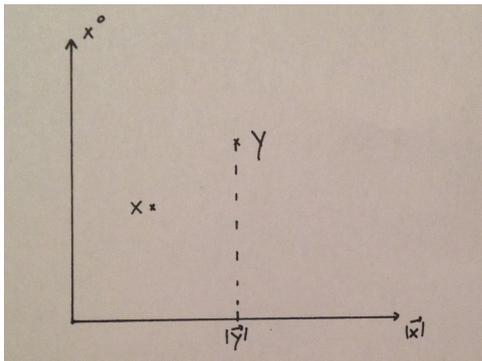
Postulat: Die Lichtgeschwindigkeit  $c \approx 2,9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$  ist in jedem Inertialsystem gleich.

$\Rightarrow$  Die Zeit ist nicht mehr absolut. Die Galilei-Transformationen sind keine Symmetrien der Inertialsysteme.

$\Rightarrow$  Bei  $t = 0$  und  $\vec{x} = 0$  auslaufende Lichtwellenfronten liegen in jedem Inertialsystem auf der Kugel  $|\vec{x}| = ct \equiv x^0$

### Minkowski-Raum

#### Ereignis/Vierervektor



Ein Ereignis wird durch seinen Zeitpunkt und Ort in einem Vierervektor charakterisiert:

$$x = (x^0, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x})$$

Betrachte zwei Ereignisse  $x, y$ , wenn

$$|\vec{x} - \vec{y}| = |x^0, y^0| = c|t_x - t_y| \rightarrow 0 = (x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2 = c^2(t_x - t_y)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2$$

kann ein Lichtstrahl die beiden Ereignisse verbinden.

Definiere:  $x^2 = (x^0)^2 - (\vec{x})^2$  (\*)

Wir wollen  $x^2$  als beobachterunabhängige Definition von Längen wählen. Die Vierervektoren zerfallen in drei Klassen:

- zeitartig:  $x^2 > 0$
- lichtartig:  $x^2 = 0$
- raumartig:  $x^2 < 0$  (negative Längen möglich!)

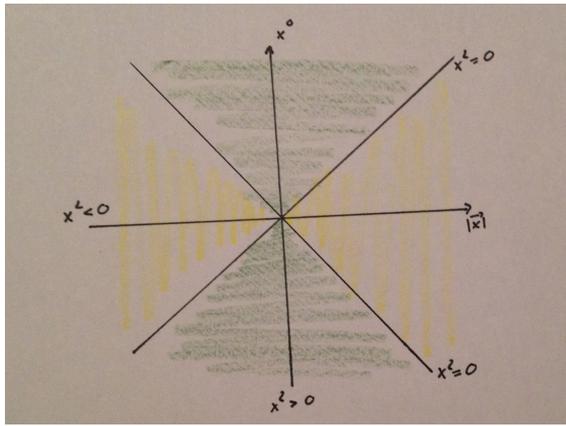
Diese Unterteilung ist für alle Beobachter gleich (da  $c = \text{const.}$ ). Für zeit- und lichtartige  $x$  lassen sich Zukunft  $x^0 > 0$  und Vergangenheit  $x^0 < 0$  unterscheiden. Für raumartige  $x$  hängt das Vorzeichen vom Beobachter ab.

Da  $x^2, y^2$  und  $(x + y)^2$  unabhängig vom Inertialsystem sind ist es auch das Skalarprodukt:

$$x * y \equiv \frac{1}{2}((x + y)^2 - x^2 - y^2)$$

$\rightarrow$  wir können eine Metrik einführen

der Minkowski-Raum  $R^{3,1}$  ist ein vierdimensionaler Vektorraum mit Metrik  $g(x, y) =$



$$\sum_{\mu,\nu}^3 g_{\mu,\nu} x^\mu y^\nu, \text{ mit } [g_{\mu,\nu}] = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Achtung: Der Viererabstand  $x^2$  ist in jedem Inertialsystem gleich, aber weder  $|\vec{x}|$  (räumlicher Abstand) noch  $x^0 = ct$  (zeitlicher Abstand).

Eigenzeit: Für zeitartige Abstände gibt es ein ausgezeichnetes Inertialsystem, das Ruhesystem, in dem  $\vec{x} = \vec{0}$ . Die in diesem System verstreichende Zeit  $\tau$  nennt man Eigenzeit. Sie entspricht der Zeit, die ein in diesem Raum ruhender Beobachter misst.

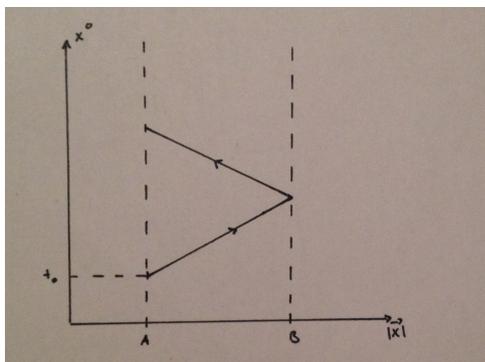
Im Ruhesystem gilt

$$x = \begin{pmatrix} \tau c \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Rightarrow x^2 = (\tau)^2 c^2 \Leftrightarrow \tau = \frac{\sqrt{x^2}}{c}$$

### Synchrone Uhren, Gleichzeitigkeit, Zeitdilatation

Betrachte zwei Raumpunkte  $A, B$  in einem Inertialsystem. Die Zeit die ein Lichtsignal von  $A$  nach  $B$  braucht ist  $t_{AB} = \frac{|\vec{A}-\vec{B}|}{c}$

Experiment: Wir stellen bei  $B$  einen Spiegel auf. Senden wir bei  $A$  zum Zeitpunkt  $t_0$  das



Signal aus, so kehrt es zur Zeit  $t_0 + t_{AB}$  wieder zu  $A$  zurück.

Synchrone Uhren: Zwei Uhren bei  $A$  und  $B$  sind synchron, wenn zum Zeitpunkt der Reflexion die Uhr bei  $B$  ebenfalls  $t_0 + t_{AB}$  anzeigt.