

# Bestimmung der $R$ -paritätsverletzenden Parameter im MSSM mit bilinear gebrochener $R$ -Parität

Diplomarbeit

von

Frank S. Thomas



vorgelegt bei

Prof. Dr. Werner Porod

Juli 2010

---

LEHRSTUHL FÜR THEORETISCHE PHYSIK II  
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK UND ASTROPHYSIK  
JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG



---

# Vorwort

Mit den ersten Proton-Proton-Kollisionen Ende 2009 hat der Large Hadron Collider (LHC) am CERN, der Europäischen Organisation für Kernforschung, seinen Betrieb aufgenommen. Bei einer geplanten Protonen-Schwerpunktenergie von bis zu 14 TeV wird der LHC in Bereiche „neuer Physik“ vordringen und Erkenntnisse über noch unbeantwortete Fragen des Standardmodells, wie z. B. die Existenz des Higgs-Bosons und den damit verbundenen Mechanismus, der für die elektroschwache Symmetriebrechung sowie für die Massen der Elementarteilchen verantwortlich ist, liefern. Außerdem erhofft man sich Hinweise auf Physik jenseits des Standardmodells, um bisher noch ungeklärte Phänomene der Teilchen- und Astrophysik, wie z. B. das Hierarchieproblem, die Zusammensetzung der Dunklen Materie, die Vereinheitlichung der Eichkopplungen oder den Ursprung von Neutrinomassen, erklären zu können. Die Suche nach Teilchen, die von Erweiterungen des Standardmodells vorhergesagt werden, ist dabei ein zentraler Punkt des experimentellen Programms. Viel diskutierte Theorien sind in diesem Zusammenhang supersymmetrische Theorien, in denen jedem Teilchen des Standardmodells ein Superpartner zugeordnet wird. Die minimal mögliche supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells, die mit bisherigen Erkenntnissen vereinbar ist, ist das Minimale Supersymmetrische Standardmodell (MSSM), das z. B. mit dem leichtesten supersymmetrischen Teilchen (LSP), welches bei erhaltener  $R$ -Parität absolut stabil ist, einen möglichen Kandidaten für Dunkle Materie hat. Daneben besitzen supersymmetrische Modelle einen intrinsischen Mechanismus, um die Kleinheit von Neutrinomassen zu erklären, nämlich die Brechung der  $R$ -Parität mit Hilfe von Leptonzahl-verletzenden Operatoren. Die einfachste Variante dieses Mechanismus ist das MSSM mit bilinear gebrochener  $R$ -Parität (BRpV). Dieselben Parameter, die für die Generierung der Neutrinomassen verantwortlich sind, führen auch zum Zerfall des LSP. Dies impliziert, dass es Korrelationen zwischen dessen Zerfalleigenschaften und den Neutrinodaten gibt und Erstere als Funktionen der Zweiten vorhergesagt werden. Unter der Annahme, dass z. B. das LSP das leichteste Neutralino ist, zerfällt dieses innerhalb eines typischen Detektors und eröffnet damit die Möglichkeit, Neutrinophysik direkt an Teilchenbeschleunigern zu testen.

Falls Supersymmetrie (SUSY) bei niedriger Energie realisiert ist, werden der LHC sowie zukünftige Linearbeschleuniger eine Fülle von Daten supersymmetrischer Prozesse bzw. Observablen liefern. Eine der zentralen Aufgaben ist es dann die Parameter der Lagrangedichte und deren Unsicherheiten aus diesen Daten zu extrahieren. Ziel dieser Arbeit war es daher herauszufinden, mit welcher Genauigkeit die  $R$ -paritätsverletzenden

Parameter des MSSM mit BRpV aus Beschleunigerobservablen mit deren zu erwartenden experimentellen Unsicherheiten bestimmt werden können. Außerdem wurde untersucht, welchen Einfluss Neutrinophysik auf die Bestimmung dieser Parameter hat. Zusätzlich wurden diejenigen Zerfallskanäle des LSP identifiziert, die besonders sensitiv auf die  $R$ -paritätsverletzenden Parameter sind und damit interessant für Tests der Neutrinophysik sind. Zur Bestimmung der  $R$ -paritätsverletzenden Parameter wurde das generische Fit-Programm Kaimini entwickelt, das unter Verwendung verschiedener deterministischer und stochastischer Optimierungsalgorithmen beliebige Kombinationen von Parametern an Observablen anpassen kann. Zur Berechnung der theoretischen Vorhersagen von SUSY-Observablen wurde SPheno verwendet, jedoch kann Kaimini mit jedem Programm kombiniert werden, das den SUSY Les Houches Accord (SLHA) als Schnittstelle für die Ein- und Ausgabe verwendet. Das Ergebnis eines Fits sind dann Parameterpunkte hoher Anpassungsgüte, die Konfidenzintervalle der Parameter und die Beiträge die jede Observable zur Anpassungsgüte liefert.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Kapitel 1 gibt eine kurze Einführung in das Standardmodell und den Higgs-Mechanismus, der den Elementarteilchen mit Ausnahme der Neutrinos ihre Massen gibt. Dass Neutrinos dennoch Masse besitzen, folgt aus den beobachteten Neutrinooszillationen, die am Ende dieses Kapitels dargestellt werden. In Kapitel 2 erfolgt dann eine etwas ausführlichere Einführung in die Supersymmetrie. Schwerpunkte sind dabei der Feldinhalt des MSSM, die Konstruktion einer supersymmetrischen Lagrangedichte und die Parametrisierung der Supersymmetriebrechung. Außerdem wird die für diese Arbeit wichtige  $R$ -Parität eingeführt und das Massenspektrum des MSSM angegeben. Danach folgt in Kapitel 3 die Beschreibung des MSSM mit bilinear gebrochener  $R$ -Parität, welches die theoretische Grundlage für die in dieser Arbeit durchgeführten Fits darstellt. Besonders interessant ist dabei die Mischung der neutralen Fermionen, die auf Born- und Einschleifenniveau zu Neutrinomassen führt. In Kapitel 4 werden die Grundlagen des Fittens dargestellt und das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Fit-Programm Kaimini sowie die darin implementierten Optimierungsalgorithmen vorgestellt. Die mit Kaimini durchgeführten Fits der  $R$ -paritätsverletzenden Parameter und deren Ergebnisse werden dann in Kapitel 5 dargestellt und diskutiert, bevor diese Arbeit mit der Zusammenfassung in Kapitel 6 endet.

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Standardmodell und Neutrino-physik</b>	<b>1</b>
1.1. Standardmodell der Teilchenphysik . . . . .	1
1.2. Higgs-Mechanismus . . . . .	2
1.3. Neutrino-massen und -mischung . . . . .	5
<b>2. Supersymmetrie</b>	<b>11</b>
2.1. Supermultipletts im MSSM . . . . .	13
2.2. Supersymmetrische Lagrangedichte . . . . .	14
2.3. Superpotential des MSSM . . . . .	16
2.4. Schwache Supersymmetriebrechung . . . . .	17
2.5. $R$ -Parität . . . . .	18
2.6. Massenspektrum des MSSM . . . . .	20
<b>3. MSSM mit bilinear gebrochener <math>R</math>-Parität</b>	<b>23</b>
3.1. Superpotential und schwach brechende Terme . . . . .	23
3.2. Mischung der neutralen Fermionen . . . . .	24
3.3. Massenmatrix auf Einschleifenniveau . . . . .	27
3.4. Neutralino-Zerfälle . . . . .	29
<b>4. Das Fit-Programm Kaimini</b>	<b>31</b>
4.1. Grundlagen . . . . .	31
4.1.1. Anpassungsgüte . . . . .	32
4.1.2. Konfidenzintervalle . . . . .	35
4.2. Optimierungsalgorithmen . . . . .	37
4.2.1. Deterministische Algorithmen . . . . .	38
4.2.2. Stochastische Algorithmen . . . . .	40
4.3. Funktionalität und Anwendung . . . . .	42
4.3.1. Eingabedatei . . . . .	43
4.3.2. Ausgabedatei . . . . .	47
<b>5. Bestimmung der BRpV-Parameter</b>	<b>51</b>
5.1. Ideale Neutrino-daten . . . . .	51
5.1.1. Finden der Minima . . . . .	52
5.1.2. Resultate . . . . .	53

*Inhaltsverzeichnis*

5.2. Experimentelle Neutrinodaten . . . . .	61
5.3. Zerfallseigenschaften des Neutralinos . . . . .	69
5.4. Neutrinodaten und Zerfallseigenschaften des Neutralinos . . . . .	77
<b>6. Zusammenfassung</b>	<b>81</b>
<b>A. Kaimini Ein- und Ausgabedatei</b>	<b>83</b>
<b>B. SPS 1a' Ein- und Ausgabedatei</b>	<b>89</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>95</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>101</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>103</b>

---

---

# KAPITEL 1

---

## Standardmodell und Neutrino-Physik

Dieses Kapitel beginnt mit einer kurzen Darstellung des Standardmodells der Teilchenphysik und dessen Teilchengehalts. Wegen der Bedeutung des Higgs-Mechanismus für die Erzeugung der Massen der Eichbosonen und der Fermionen, wird dieser im darauffolgenden Abschnitt näher erläutert und es wird dargestellt warum Neutrinos im Standardmodell masselos sind. Detailliertere Einführungen in die Theorie des Standardmodells findet man z. B. in [1] oder [2]. Dass Neutrinos dennoch Masse besitzen, folgt aus den beobachteten Neutrinooszillationen, die im letzten Abschnitt betrachtet werden.

### 1.1. Standardmodell der Teilchenphysik

Das Standardmodell der Teilchenphysik ist eine Eichtheorie, die drei der vier bekannten fundamentalen Wechselwirkungen, die starke, die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung, beschreibt. Die Eichgruppe des Standardmodells ist  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , wobei  $SU(3)_C$  die Eichgruppe der starken Wechselwirkung und  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  die Eichgruppe der elektroschwachen Wechselwirkung ist. Die Indizes  $C$ ,  $L$ , und  $Y$  stehen dabei für Farbladung (color), Linkshändigkeit und schwache Hyperladung. Vermittelt werden die Wechselwirkungen über Spin-1-Eichbosonen, die mit den Generatoren der entsprechenden Eichgruppen assoziiert sind. Im einzelnen sind das acht Gluonen  $g_\mu^a$  ( $SU(3)_C$ ), drei  $W_\mu^i$ -Bosonen ( $SU(2)_L$ ) und ein  $B_\mu$ -Boson ( $U(1)_Y$ ). Neben den Eichbosonen beinhaltet das Standardmodell noch Fermionen mit Spin  $\frac{1}{2}$ , die in drei Generationen vorliegen. Das sind zum einen sechs Quarks (Up  $u$  und Down  $d$ , Charm  $c$  und Strange  $s$ , Top  $t$  und Bottom  $b$ ), die der starken Wechselwirkung unterliegen, und zum anderen sechs Leptonen (Elektron  $e$  und Elektron-Neutrino  $\nu_e$ , Myon  $\mu$  und Myon-Neutrino  $\nu_\mu$ , Tauon  $\tau$  und Tauon-Neutrino  $\nu_\tau$ ). Zu jedem dieser Fermionen gibt es außerdem ein zugehöriges Antiteilchen.

Wie der Index  $L$  der Eichgruppe  $SU(2)_L$  andeutet, ist die elektroschwache Theorie eine chirale Theorie, d. h. es existiert ein prinzipieller Unterschied zwischen links- und rechtshändigen Fermionen. Genauer gesagt koppeln nur linkshändige Fermionen an die Eichbosonen der  $SU(2)_L$ . Im Standardmodell wird dies realisiert, indem linkshändige

## 1. Standardmodell und Neutrinophysik

Fermionen Dubletts unter der  $SU(2)_L$  sind, während rechtshändige Fermionen Singulett sind. Die Neutrinos kommen im Standardmodell nur als linkshändige Teilchen bzw. rechtshändige Antiteilchen vor. Damit ergibt sich die Anordnung der Fermionen der ersten Generation in  $SU(2)_L$ -Multipletts zu

$$\left\{ \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, e_R, \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, u_R, d_R \right\}, \quad (1.1)$$

wobei die Indizes  $L$  und  $R$  für links- bzw. rechtshändige Felder stehen. Eine Übersicht der zugehörigen Quantenzahlen gibt Tabelle 2.1 auf Seite 14. Die Fermionen der zweiten und dritten Generation sind in derselben Struktur angeordnet und tragen dieselben Quantenzahlen, unterscheiden sich jedoch in ihrer Masse, die mit jeder Generation zunimmt. Eine Ausnahme bilden hierbei die Neutrinos, die im Standardmodell masselos sind und nur durch Zuordnung zu den Generationen unterschieden werden.

Ein weiterer zentraler Bestandteil des Standardmodells ist der Higgs-Mechanismus [3], der die Massen der Eichbosonen erzeugt. Dieser Mechanismus ist notwendig, da explizite Massenterme in der Lagrangedichte zur Verletzung der Eichinvarianz führen. Der Higgs-Mechanismus erzeugt dabei die Massen der Eichbosonen über die spontane Symmetriebrechung der elektroschwachen Eichgruppe. Zusätzlich können auch die Massen der Fermionen durch Yukawa-Wechselwirkungen mit dem Higgs-Feld erklärt werden. Aufgrund seiner Bedeutung soll der Higgs-Mechanismus im folgenden Abschnitt näher betrachtet werden.

## 1.2. Higgs-Mechanismus

Wie bereits erwähnt, werden die Massen der Eichbosonen durch spontane Symmetriebrechung der  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  erzeugt. Dazu wird das Higgs-Dublett

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

mit den komplexen skalaren Feldern  $\phi_1$  und  $\phi_2$  eingeführt. Die zugehörige Lagrangedichte ist

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = |D_\mu \phi|^2 - V(\phi^\dagger \phi), \quad (1.3)$$

wobei die kovariante Ableitung  $D_\mu$ , die das Higgs-Feld an die Eichbosonen der  $SU(2)_L$  und  $U(1)_Y$  koppelt, gegeben ist durch

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\sigma^i}{2} W_\mu^i - ig' \frac{1}{2} B_\mu. \quad (1.4)$$

Dabei sind  $g$  und  $g'$  die Kopplungskonstanten der  $SU(2)_L$  bzw.  $U(1)_Y$  und  $\sigma^i$  die Pauli-Matrizen. Das Higgs-Potential  $V$  ist gegeben durch

$$V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (1.5)$$

mit  $\lambda > 0$ .

Die Lagrangedichte (1.3) ist invariant unter lokalen  $SU(2)_L$ - und  $U(1)_Y$ -Eichtransformationen. Betrachtet man nun den Grundzustand des Systems, stellt sich die Frage, ob dieser auch invariant unter den o. g. Transformationen ist. Der Grundzustand ergibt sich dabei aus dem Minimum des Potentials  $V$ , wobei zwei Fälle zu unterscheiden sind. Für  $\mu^2 > 0$  hat das Potential ein Minimum bei  $\phi_0 = 0$  und der Grundzustand ist invariant unter den Eichtransformationen. Für  $\mu^2 < 0$  hingegen hat das Potential ein Kontinuum von äquivalenten Minima, die durch

$$|\phi_0| = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}} =: \frac{1}{\sqrt{2}}v \quad (1.6)$$

charakterisiert sind. Das Higgs-Feld nimmt unter diesen Bedingungen also einen Vakuumerwartungswert (VEV) an, der aufgrund der  $SU(2)_L$ -Eichfreiheit in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Dieser Zustand ist nun nicht mehr invariant unter linearen  $SU(2)_L$ -Transformationen. Daher stammt auch die Bezeichnung *spontane Symmetriebrechung*, da die ursprüngliche Lagrangedichte invariant unter den Symmetrietransformationen ist, der Grundzustand hingegen nicht.

### Massen der Eichbosonen

Die Massenterme für die Eichbosonen erhält man nun, indem man in den kinetischen Term der Lagrangedichte (1.3) den Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes (1.7) einsetzt und auswertet:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}_{\text{Higgs}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g\frac{\sigma^i}{2}W_\mu^i + g'\frac{1}{2}B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g\frac{\sigma^j}{2}W^{j\mu} + g'\frac{1}{2}B^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} \left( g^2(W_\mu^1)^2 + g^2(W_\mu^2)^2 + (-gW_\mu^3 + g'B_\mu)^2 \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Die ursprünglichen Eichbosonen  $W_\mu^i$  und  $B_\mu$  der  $SU(2)_L$  bzw.  $U(1)_Y$  mischen dabei zu den geladenen, massiven Eichbosonen  $W_\mu^\pm$ , zum neutralen, massiven Eichboson  $Z_\mu^0$  und zum weiterhin neutralen und masselosen Photon  $A_\mu$ :

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( W_\mu^1 \mp iW_\mu^2 \right) \quad \text{mit der Masse} \quad m_W = g\frac{v}{2}, \quad (1.9a)$$

$$Z_\mu^0 = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \left( gW_\mu^3 - g'B_\mu \right) \quad \text{mit der Masse} \quad m_Z = \sqrt{g^2 + g'^2} \frac{v}{2}, \quad (1.9b)$$

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \left( g'W_\mu^3 + gB_\mu \right) \quad \text{mit der Masse} \quad m_A = 0. \quad (1.9c)$$

## 1. Standardmodell und Neutrinophysik

Drückt man die kovariante Ableitung in diesen Masseneigenzuständen aus, so ergibt sich für die Kopplungskonstante des elektromagnetischen Feldes  $e$ , also die elektrische Ladung, die Relation

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (1.10)$$

Weiterhin erkennt man an den Gl. (1.9), dass die neutralen Felder  $Z_\mu^0$  und  $A_\mu$  aus einer Rotation der Felder  $W_\mu^3$  und  $B_\mu$  hervorgehen:

$$\begin{pmatrix} Z_\mu^0 \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

wobei für  $\theta_w$ , der als Weinbergwinkel oder elektroschwacher Mischungswinkel bezeichnet wird, gilt

$$\cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \text{und} \quad \sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (1.12)$$

Der hier beschriebene Vorgang wird auch als elektroschwache Symmetriebrechung bezeichnet, die die Eichgruppe  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  zur Untergruppe  $U(1)_Q$ , der Eichgruppe der elektromagnetischen Wechselwirkung, bricht. Dass die  $U(1)_Q$  weiterhin eine Symmetrie der Theorie ist, korrespondiert mit der Erhaltung der elektrischen Ladung und der Tatsache, dass der zugehörige Generator, das Photon, masselos ist.

### Massen der Fermionen

Mit dem Higgs-Mechanismus können auch die Massen der Quarks und Leptonen erzeugt werden, da auch für Fermionen explizite Massenterme aufgrund der Verletzung der Eichinvarianz verboten sind. Beispielsweise kann ein hypothetischer Massenterm für das Elektron

$$\Delta \mathcal{L}_e = -m_e \bar{e}e = -m_e (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \quad (1.13)$$

nicht direkt in die Lagrangedichte geschrieben werden, da die Felder  $e_L$  und  $e_R$  zu unterschiedlichen  $SU(2)_L$ -Multipletts gehören und eine unterschiedliche schwache Hyperladung haben. Um dieses Problem zu umgehen und Fermionen dennoch eine Masse geben zu können, fordert man Yukawa-Wechselwirkungen zwischen den Fermionfeldern und dem Higgs-Feld. Der entsprechende Term für die Leptonen der ersten Generation ist

$$\Delta \mathcal{L}_e = -\lambda_e \bar{L}_1 \phi e_R + \text{h.c.}, \quad (1.14)$$

wobei  $\lambda_e$  die Yukawa-Kopplung des Elektrons an das Higgs-Feld ist und  $L_1$  das  $SU(2)_L$ -Dublett der Leptonen der ersten Generation bezeichnet. Wird in diesem Ausdruck  $\phi$  durch seinen Vakuumerwartungswert (1.7) ersetzt, so erhält man

$$\Delta \mathcal{L}_e = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_e v \bar{e}_L e_R + \text{h.c.}, \quad (1.15)$$

was einem Massenterm für das Elektron mit der Masse

$$m_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_e v \quad (1.16)$$

entspricht. Auf dieselbe Art und Weise können auch Massenterme für die Quarks erzeugt werden (hier exemplarisch nur für eine Generation):

$$\Delta\mathcal{L}_q = -\lambda_d\bar{Q}_1\phi d_R - \lambda_u\epsilon^{ab}\bar{Q}_{1a}\phi_b^\dagger u_R + \text{h.c.} \quad (1.17)$$

Nach Ersetzung von  $\phi$  durch seinen Vakuumerwartungswert (1.7) ergeben sich Massenterme für die Up- und Down-Quarks:

$$\Delta\mathcal{L}_q = -\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_d v \bar{d}_L d_R - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_u v \bar{u}_L u_R + \text{h.c.} \quad (1.18)$$

$$\text{mit } m_d = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_d v \quad \text{und} \quad m_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_u v. \quad (1.19)$$

Aus der obigen Betrachtung wird auch ersichtlich, warum die Neutrinos im Standardmodell masselos sind. Um Massenterme für Neutrinos über den Higgs-Mechanismus erzeugen zu können, müsste man rechtshändige Neutrinos einführen, die analog zu Gl. (1.17) eine Kopplung der Neutrinos an das Higgs-Feld ermöglichen würden:

$$\Delta\mathcal{L}_\nu = -\lambda_\nu\epsilon^{ab}\bar{L}_{1a}\phi_b^\dagger\nu_{eR} + \text{h.c.} \quad (1.20)$$

### 1.3. Neutrinomassen und -mischung

Heutzutage gilt als gesichert, dass sich Neutrinos einer Generation in Neutrinos einer anderen Generation umwandeln können [4, 5]. Genauer gesagt ändert sich die Wahrscheinlichkeit, Neutrinos einer bestimmten Generation zu messen periodisch mit ihrer Ausbreitung, was als Neutrinooszillation bezeichnet wird. Dieses Phänomen impliziert, dass Neutrinos von Null verschiedene Massen besitzen und sich Leptonen untereinander mischen.

Der erste Neutrinodetektor, der einen Hinweis auf Neutrinooszillation gab, war der von 1970 bis 1994 betriebene radiochemische Homestake-Detektor [6], der über die Reaktion  $\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$  den solaren Neutrinofluss indirekt messen konnte. Der dabei gemessene Fluss entsprach aber nur etwa einem Drittel des aufgrund des Standard-Sonnenmodells erwarteten Neutrinoflusses. Ein bedeutender Fortschritt in der Detektortechnologie war die Entwicklung von Wasser-Tscherenkow-Detektoren, die Neutrinos zeit- und winkelaufgelöst nachweisen konnten. So bestätigte das Kamiokande-Experiment [7] das solare Neutrinodefizit, da nur etwa die Hälfte des von der Sonne erwarteten Flusses gemessen wurde, und es konnte zum ersten Mal direkt beweisen, dass die Sonne eine Neutrinoquelle ist. Den ersten direkten Beleg für Neutrinooszillation erbrachte dann 2001 das Sudbury Neutrino Observatory (SNO) [8], das sowohl den Gesamt-Neutrinofluss wie auch den  $\nu_e$ -Fluss separat messen konnte. Dadurch konnte gezeigt werden, dass etwa 35 % der in der Sonne erzeugten Neutrinos als Elektron-Neutrinos detektiert wurden während die Übrigen als Myon- oder Tauon-Neutrinos

## 1. Standardmodell und Neutrinoophysik

detektiert wurden. Außerdem stimmte der Gesamtfluss gut mit den Vorhersagen des Standard-Sonnenmodells überein.

Auch Messungen von atmosphärischen Neutrinos, die als Zerfallsprodukte in hadronischen Teilchenschauern in der Erdatmosphäre erzeugt werden, deuten auf Neutrinooszillationen hin [9]. Atmosphärische Neutrinos entstehen in einer Höhe von ca. 15 km, so dass nahe der Erdoberfläche detektierte Neutrinos je nach Einfallrichtung eine Distanz zwischen ca. 15 und 12.800 km vom Ort ihrer Entstehung bis zum Detektor zurückgelegt haben. Durch winkelaufgelöste Messungen wurde eine Abhängigkeit des Neutrinoflusses vom Zenitwinkel festgestellt, die sich gut durch Neutrinooszillationen erklären lässt.

### Neutrinooszillation

Wenn Neutrinos Massen besitzen, existieren analog zu den Masseneigenzuständen der geladenen Leptonen ( $e$ ,  $\mu$ ,  $\tau$ ) mindestens drei Neutrino-Masseneigenzustände ( $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$ ) mit eindeutigen Massen  $m_i$  [4]. Die zentrale Idee von Neutrinooszillationen ist nun, dass Neutrinos als Flavour-Eigenzustände ( $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$ ) erzeugt und detektiert werden, aber als Überlagerung von Masseneigenzuständen propagieren. Ein Neutrino, das z. B. in dem Zerfallsprozess  $W^+ \rightarrow \alpha^+ + \nu$  (wobei  $\alpha = e, \mu, \tau$ ) entsteht, hat den eindeutigen Flavour  $\alpha$  und kann geschrieben werden als

$$\nu_\alpha = \sum_i U_{\alpha i}^* \nu_i, \quad (1.21)$$

wobei  $U$  die unitäre leptoniche Mischungsmatrix oder auch Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata-Matrix (kurz PMNS-Matrix) [10] ist. Unter Annahme von CPT-Invarianz garantiert die Unitarität von  $U$ , dass die durch ein Neutrino  $\nu_\alpha$  erzeugten geladenen Leptonen den gleichen Flavour  $\alpha$  besitzen.

Um den Prozess der Neutrinooszillation zu veranschaulichen, werden die Mischung von zwei Masseneigenzuständen zu zwei Flavour-Eigenzuständen (oder zwei Linearkombinationen von Flavour-Eigenzuständen) betrachtet. In diesem Fall ergibt sich die Mischungsmatrix  $U$  zu

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

wobei  $\theta$  als Mischungswinkel bezeichnet wird. Diese Mischung führt zu der Wahrscheinlichkeit  $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}$ , dass ein  $\nu_\alpha$  nach einer von der Quelle zurückgelegten Distanz  $L$  als  $\nu_\beta$  detektiert wird: [4]

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L/E) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{(m_2^2 - m_1^2) L}{4E} \right), \quad (1.23)$$

wobei  $E$  die Strahlenergie im ultrarelativistischen Grenzfall  $E \gg m_{1,2}$  ist. An diesem Ausdruck erkennt man, dass  $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}$  mit  $L/E$  oszilliert und dass Neutrinooszillationen nur dann auftreten, wenn die Massendifferenz  $\Delta m_{21}^2 := m_2^2 - m_1^2$  ungleich Null ist bzw. wenn  $m_1$  und  $m_2$  verschieden und ungleich Null sind. Es zeigt sich, dass diese

Zwei-Neutrinooszillation als Näherung verwendet werden kann, wenn nur zwei Masseneigenzustände einen signifikanten Beitrag zur Oszillation liefern oder wenn eine Massendifferenz viel größer ist als die andere [4]. So können auf diese Weise solare Neutrinooszillationen beschrieben werden, bei denen Oszillationen zwischen  $\nu_e$  und dem effektiven Flavour-Zustand  $\nu_x$ , einer Linearkombination aus  $\nu_\mu$  und  $\nu_\tau$ , stattfinden. Auch atmosphärische Neutrinooszillationen können sehr gut als reine Oszillationen zwischen  $\nu_\mu$  und  $\nu_\tau$  beschrieben werden.

### PMNS-Matrix

Wenn man von drei Neutrino-Masseneigenzuständen und drei Neutrino-Flavour-Eigenzuständen ausgeht, kann die PMNS-Matrix wie folgt parametrisiert werden: [4]

$$\begin{aligned}
 U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\quad \cdot \text{diag}\left(e^{i\alpha_1/2}, e^{i\alpha_2/2}, 1\right) \\
 &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \\
 &\quad \cdot \text{diag}\left(e^{i\alpha_1/2}, e^{i\alpha_2/2}, 1\right) \tag{1.24}
 \end{aligned}$$

mit  $c_{ij} := \cos \theta_{ij}$  und  $s_{ij} := \sin \theta_{ij}$ , wobei die drei  $\theta_{ij}$  Mischungswinkel sind. Die Größen  $\delta$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sind CP-verletzende Phasen, von denen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  als Majorana-Phasen bezeichnet werden und nur dann physikalisch relevant sind, falls Neutrinos Majorana-Teilchen sind. In diesem Fall haben diese Phasen Auswirkungen auf den neutrinolosen doppelten  $\beta$ -Zerfall und andere Prozesse [11]. Für Neutrinooszillationen sind die Majorana-Phasen aber irrelevant, unabhängig davon, ob Neutrinos Majorana-Teilchen sind oder nicht. Die für Neutrinooszillationen einzig relevante Phase ist  $\delta$ , die in (1.24) nur in Kombination mit  $s_{13}$  auftritt, so dass  $s_{13}$  in Kombination mit  $s_{12}$  und  $s_{23}$  ein Maß für die Größe der CP-Verletzung in Neutrinooszillationen ist.

### Massenspektrum und Experimentelle Ergebnisse

Bevor die experimentellen Ergebnisse dargestellt werden, soll hier kurz auf die Hierarchie der Masseneigenzustände eingegangen werden. Bisherige Oszillationsexperimente sind nur sensitiv auf die Massendifferenzen  $\Delta m_{ij}^2$  und nicht auf die Absolutwerte  $m_i$ , so dass keine Aussage über die absolute Massenskala getroffen werden kann. Aus den solaren und atmosphärischen Experimenten folgen die zwei Massendifferenzen  $\Delta m_\odot^2$  und  $\Delta m_{\text{atm}}^2$ , mit  $\Delta m_\odot^2 \ll \Delta m_{\text{atm}}^2$ , und die zugehörigen Mischungswinkel. Bisher unbeantwortet ist jedoch die Frage, ob die Masseneigenzustände, die durch  $\Delta m_\odot^2$  getrennt sind, sich am unteren oder oberen Ende des Massenspektrums befinden. Eine in der Literatur verbreitete Konvention, um diese Parameter den Masseneigenzuständen zuzuordnen, ist

$$m_1 < m_2 \text{ (bzw. } \Delta m_{21}^2 > 0) \quad \text{und} \quad \Delta m_{21}^2 < |\Delta m_{31}^2|$$

## 1. Standardmodell und Neutrino-physik

**Tab. 1.1.:** Best-fit-Werte mit  $1\sigma$ -Fehlern und  $2\sigma$ - und  $3\sigma$ -Konfidenzintervallen (1 Freiheitsgrad) der Drei-Flavour-Oszillationsparameter aus Daten von solaren, atmosphärischen, Reaktor- (KamLAND und CHOOZ) und Beschleunigerexperimenten (K2K und MINOS). Entnommen aus [5, Table A1].

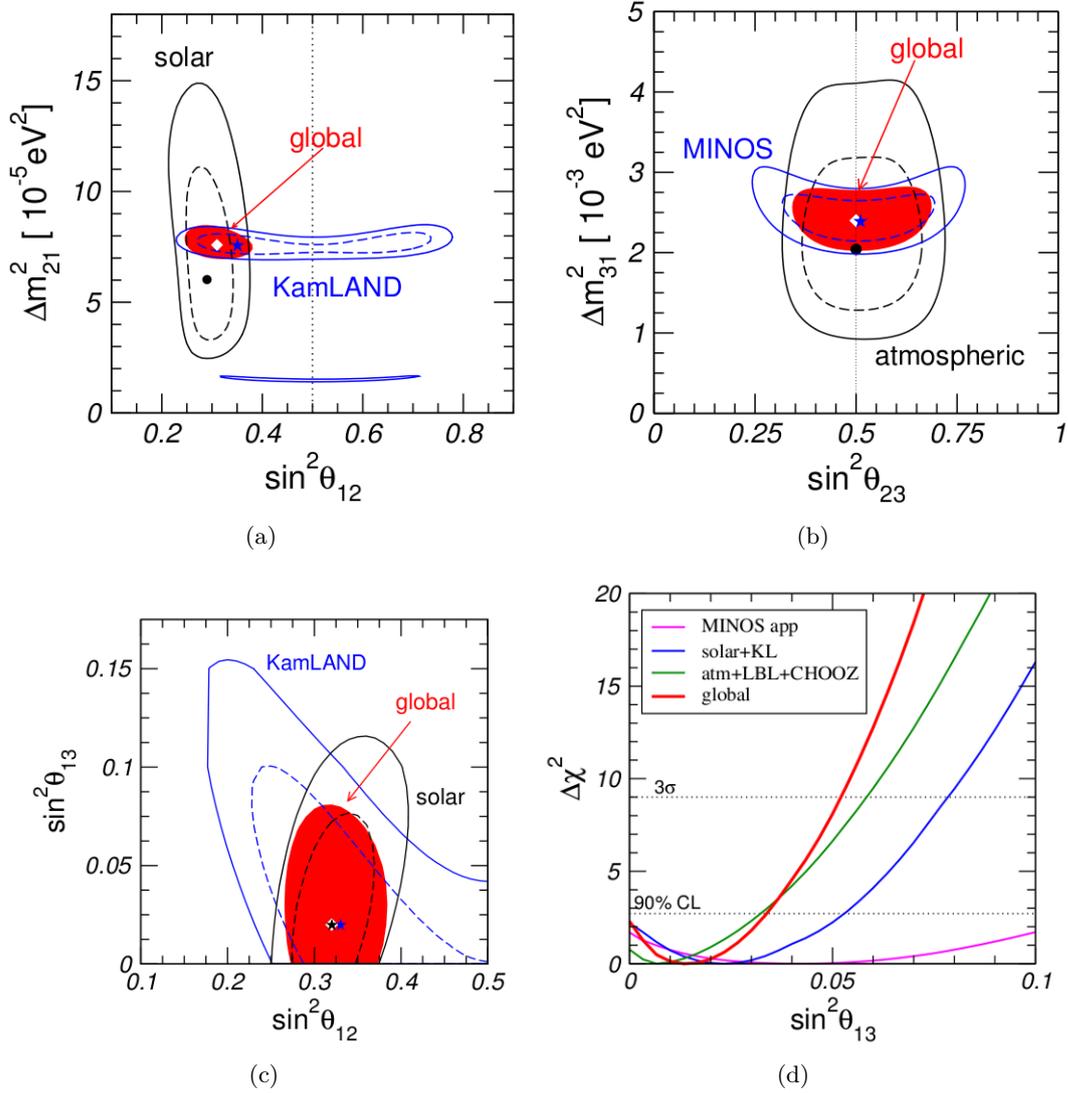
Parameter	Best-fit-Wert	$2\sigma$	$3\sigma$
$\Delta m_{21}^2$ [ $10^{-5}$ eV <sup>2</sup> ]	$7,59_{-0,18}^{+0,23}$	7,22 - 8,03	7,03 - 8,27
$ \Delta m_{31}^2 $ [ $10^{-3}$ eV <sup>2</sup> ]	$2,40_{-0,11}^{+0,12}$	2,18 - 2,64	2,07 - 2,75
$\sin^2 \theta_{12}$	$0,318_{-0,016}^{+0,019}$	0,29 - 0,36	0,27 - 0,38
$\sin^2 \theta_{23}$	$0,50_{-0,06}^{+0,07}$	0,39 - 0,63	0,36 - 0,67
$\sin^2 \theta_{13}$	$0,013_{-0,009}^{+0,013}$	$\leq 0,039$	$\leq 0,053$

zu fordern. Abhängig vom Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  ergeben sich aus dieser Konvention zwei mögliche Massenspektren, das *normale* Spektrum ( $m_1 < m_2 < m_3$ ) und das *invertierte* Spektrum ( $m_3 < m_1 < m_2$ ). Die Zuordnung der solaren und atmosphärischen Oszillationsparameter ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned} \theta_{\odot} &= \theta_{12}, & \Delta m_{\odot}^2 &= \Delta m_{21}^2, \\ \theta_{\text{atm}} &= \theta_{23}, & \Delta m_{\text{atm}}^2 &= \begin{cases} |\Delta m_{31}^2| & \text{für das normale Spektrum,} \\ |\Delta m_{32}^2| & \text{für das invertierte Spektrum.} \end{cases} \end{aligned}$$

Eine Übersicht der Best-fit-Werte der Drei-Flavour-Oszillationsparameter aus einem Fit an globale Neutrino-daten (Stand Februar 2010) ist in [5] zu finden. Die Best-fit-Werte und die zugehörigen Fehler der Neutrino-Parameter sind in Tab. 1.1 wiedergegeben und die zugehörigen Konfidenzbereiche sind in Abb. 1.1 dargestellt.

Noch vollkommen ungeklärt ist die Frage nach dem Ursprung von Neutrinomassen und warum diese im Vergleich zu den Massen der anderen Fermionen so klein sind. Neben dem intrinsisch supersymmetrischen Mechanismus, der in Kapitel 3 ausführlich dargestellt wird, nämlich die Brechung der  $R$ -Parität, soll hier kurz der sehr beliebte Seesaw-Mechanismus [12] erwähnt werden, bei dem mit einem rechtshändigen Neutrino sowohl Dirac- als auch Majorana-Massenterme in die Lagrangedichte eingeführt werden, so dass Neutrinos folglich Majorana-Teilchen sind. Der Seesaw-Mechanismus generiert dann ein leichtes linkshändiges Neutrino und ein schweres rechtshändiges Neutrino, wobei die Masse  $m_1$  des leichten Neutrinos durch die Masse  $m_2$  des schweren Neutrinos unterdrückt wird. Die Bezeichnung *seesaw* rührt daher, dass  $m_1$  umso leichter ist, je schwerer  $m_2$  ist.



**Abb. 1.1.:** Konfidenzbereiche der solaren (a) und atmosphärischen Oszillationsparameter (b) und in der  $\sin^2 \theta_{12}$ - $\sin^2 \theta_{13}$ -Ebene (c) aus Daten von solaren, atmosphärischen, Reaktor- (KamLAND) und Beschleunigerexperimenten (MINOS) mit 90 % und 99,73 % Konfidenzniveau (2 Freiheitsgrade) sowie jeweils der 99,73 %-Konfidenzbereich aus der Kombination aller Neutrinodaten. In (d) ist  $\Delta \chi^2$  in Abhängigkeit von  $\sin^2 \theta_{13}$  für verschiedene Experimente und die kombinierte Auswertung dargestellt. Entnommen aus [5, Figure 2, 4, A2, und A3].



---

---

## KAPITEL 2

---

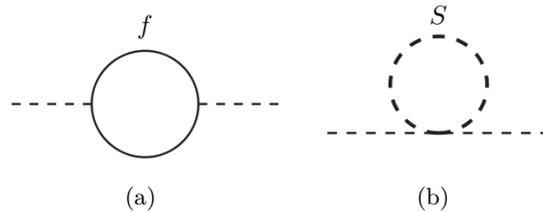
# Supersymmetrie

Das Standardmodell der Teilchenphysik (SM), ergänzt um Neutrinomassen, ist eine der erfolgreichsten physikalischen Theorien, die durch eine Vielzahl von Präzisionsexperimenten eindrucksvoll bestätigt ist. Dennoch legen theoretische Überlegungen und Probleme nahe, dass das SM bei höheren Energien erweitert werden muss. Ein offensichtliches Problem ist, dass das SM nur drei der vier fundamentalen Kräfte beschreibt. Das heißt, in Energiebereichen, in denen Quantengravitationseffekte eine wichtige Rolle spielen, wird das SM keine zuverlässige Beschreibung der Natur mehr liefern.

Eine weitere Tatsache, die auf Physik jenseits des Standardmodells hinweist, ist das sog. Hierarchieproblem [13]. Der Kern dieses Problems ist, dass die Masse des Higgs-Bosons  $m_H$  sehr große additive Strahlungskorrekturen durch die Fermionen des SM erfährt. Für ein Fermion  $f$  mit der Masse  $m_f$  z. B., dass über den Term  $\Delta\mathcal{L}_f = -\lambda_f \bar{f}\phi f$  an das Higgs-Feld koppelt, führt das Einschleifendiagramm in Abb. 2.1(a) zu der Korrektur [14]

$$\Delta m_H^2 = -2 \frac{|\lambda_f|^2}{16\pi^2} \Lambda_{\text{UV}}^2 + \mathcal{O}(\ln(\Lambda_{\text{UV}}/m_f)), \quad (2.1)$$

wobei  $\Lambda_{\text{UV}}$  ein Impuls-Cutoff ist, der das Schleifenintegral regularisiert. Wenn das SM als effektive Theorie betrachtet wird, stellt  $\Lambda_{\text{UV}}$  die Energie-Skala dar, bis zu der die Theorie noch gültig ist. Aus Untersuchungen der elektroschwachen Wechselwirkung



**Abb. 2.1.:** Quantenkorrekturen zum quadrierten Higgs-Massenparameter  $m_H^2$  auf Einschleifenniveau durch ein Fermion  $f$  (a) und ein Skalar  $S$  (b). Entnommen aus [14, Figure 1.1].

## 2. Supersymmetrie

weiß man nun, dass die Higgs-Masse von der Größenordnung 100 GeV sein sollte. Unter der Annahme, dass das SM bis zur Planck-Skala gültig ist, also  $\Lambda_{\text{UV}} \sim 10^{19}$  GeV, sind die Quantekorrekturen (2.1) etwa um 30 Größenordnungen größer als der erforderliche Wert von  $m_H^2$ . Zwischen der nackten Higgs-Masse und den Quantenkorrekturen müsste daher eine enorm präzise Auslöschung stattfinden.

Eine elegante Möglichkeit, diese Feinabstimmung zu umgehen, ergibt sich aus der Tatsache, dass die Schleifenintegrale, die zur Higgs-Masse beitragen, für Fermionen und Bosonen unterschiedliche Vorzeichen haben. Angenommen es existiert ein skalares Teilchen  $S$  mit der Masse  $m_S = m_f$ , dass an das Higgs-Feld über den Term  $\Delta\mathcal{L}_S = -\lambda_S|\phi|^2|S|^2$  koppelt, dann führt das Schleifendiagramm in Abb. 2.1(b) zu der Korrektur

$$\Delta m_H^2 = \frac{\lambda_S}{16\pi^2} \Lambda_{\text{UV}}^2 - \mathcal{O}(\ln(\Lambda_{\text{UV}}/m_S)). \quad (2.2)$$

Mit zwei solchen Teilchen und  $\lambda_S = |\lambda_f|^2$  heben sich die Korrekturen (2.1) und (2.2) exakt auf. Aber selbst wenn  $m_S \neq m_f$ , verschwindet die quadratische Divergenz in  $\Delta m_H^2$  solange die Beziehung zwischen den Kopplungskonstanten erhalten bleibt.

Die Supersymmetrie (SUSY), eine der theoretisch am besten untersuchten Erweiterungen des Standardmodells, erweitert das Teilchenspektrum genau in diesem Sinne. Der Name Supersymmetrie bezieht sich dabei auf eine Symmetrie, die Fermionen und Bosonen miteinander in Beziehung setzt, indem die Raumzeitsymmetrie (d. h. die Poincaré-Gruppe) durch eine innere Symmetrie erweitert wird. Dabei schränkt das Coleman-Mandula-Theorem [15] erweitert durch das Haag-Lopuszanski-Sohnius-Theorem [16] mögliche Symmetrien stark ein. Es zeigt sich, dass eine nichttriviale Erweiterung der Poincaré-Gruppe nur mit spinoriellen Generatoren möglich ist. Die Generatoren beider Symmetriegruppen müssen dabei die folgenden schematischen Antikommutator- und Kommutatorrelationen erfüllen [14]

$$\{Q, Q^\dagger\} = P^\mu, \quad (2.3a)$$

$$\{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0, \quad (2.3b)$$

$$[P^\mu, Q] = [P^\mu, Q^\dagger] = 0, \quad (2.3c)$$

wobei  $P^\mu$  der Generator der Raum-Zeit-Translationen und  $Q$  der Generator der Supersymmetrie-Transformation ist, der Bosonen in Fermionen und Fermionen in Bosonen umwandelt:

$$Q|\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle, \quad Q|\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle. \quad (2.4)$$

Das heißt, in der SUSY existiert zu jedem Boson ein fermionischer und zu jedem Fermion ein bosonischer Partner. Diese Teilchen werden Superpartner genannt und unterscheiden sich nur im Spin um den Wert  $\frac{1}{2}$ . Außerdem gilt wegen Gl. (2.3c)  $[P^2, Q] = [P^2, Q^\dagger] = 0$  und mit  $P^2 = m^2$  folgt daraus sofort, dass Teilchen im selben Supermultiplett die gleiche Masse haben müssen. Da bisher kein Superpartner eines bekannten Teilchens experimentell nachgewiesen wurde (z. B. existiert kein skalares Teilchen mit der Masse des Elektrons) muss SUSY eine gebrochene Symmetrie sein.

Durch die Symmetriebrechung erhalten dann u. a. die SUSY-Teilchen Massen, die sich von denen ihrer Partner unterscheiden.

Neben der Lösung des Hierarchieproblems hat die Supersymmetrie das Potential, weitere offene Fragen der Teilchen- und Astrophysik zu beantworten. So existiert z. B. mit dem leichtesten supersymmetrischen Teilchen (LSP) bei erhaltener  $R$ -Parität ein möglicher Kandidat für kalte Dunkle Materie [17]. Außerdem führen diese Modelle zur Vereinigung der Eichkopplungen bei einer sehr hohen Energieskala von ca.  $10^{16}$  GeV, die im SM nicht gegeben ist und die als Hinweis auf eine große vereinheitlichte Theorie (GUT) interpretiert wird. Das für diese Arbeit interessanteste Merkmal ist die Erzeugung von Neutrinomassen in Modellen mit bilinear gebrochener  $R$ -Parität, auf die in Kapitel 3 näher eingegangen wird.

Dieses Kapitel soll einen kurzen Überblick über die Supersymmetrie und das Minimale Supersymmetrische Standardmodell (MSSM) geben, wobei ein wichtiger Aspekt die Motivation und Definition der bereits erwähnten  $R$ -Parität ist. Eine ausführliche Einführung in die Supersymmetrie und das MSSM gibt z. B. der *Supersymmetry Primer* [14], an dem sich auch dieses Kapitel orientiert. Weitere Einführungen in die Supersymmetrie sind z. B. [18], [19] oder [20].

## 2.1. Supermultipletts im MSSM

Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell (MSSM) ist - wie der Name bereits andeutet - die minimal phänomenologische mögliche Erweiterung des Standardmodells zu einer supersymmetrischen Theorie. In diesem Abschnitt sollen der Feldinhalt des MSSM, die Anordnung der Felder in Supermultipletts sowie die Bezeichnungen der Superpartner angegeben werden.

Wie einleitend bereits erwähnt wurde, werden jedem Fermion und jedem Eichboson des Standardmodells ein Superpartner zugeordnet, der sich im Spin um den Wert  $\frac{1}{2}$  unterscheidet. Die Superpartner der Fermionen sind komplexe Spin-0-Skalare, die als *Sfermionen* (für skalare Fermionen) bezeichnet werden. Analog dazu gibt es die Bezeichnungen *Squarks*, *Sleptonen*, *Stop*, *Selektron*, usw. Die Namen der Superpartner der Eichbosonen, die Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermionen sind, werden wiederum über die Namen der SM-Teilchen gebildet, indem an diese die Endung *-ino* angehängt wird: *Gluino*, *Winos* und *Bino*. Die Superpartner der Eichbosonen werden zusammenfassend auch als *Gauginos* bezeichnet. Die Symbole der Superpartner entsprechen den Symbolen der SM-Felder, ergänzt um eine Tilde.

Eine Ausnahme in diesem Schema der supersymmetrischen Erweiterung ist der Higgs-Sektor. Das SM mit nur einem Higgs-Dublett kann nicht supersymmetrisch erweitert werden, da sonst sog. Dreiecksanomalien auftreten die zu einer inkonsistenten Quantentheorie führen. Dieses Problem kann durch Einführung eines zweiten Higgs-Dubletts umgangen werden, das außerdem benötigt wird, um im MSSM sowohl den Up-Quarks als auch den Down-Quarks Masse geben zu können. Die beiden  $SU(2)_L$ -Dubletts werden dabei als  $H_u$  und  $H_d$  bezeichnet, wobei sich der Index auf die Quarks bezieht, denen der entsprechende Higgs-VEV Massen gibt. Da die Superpartner der

## 2. Supersymmetrie

**Tab. 2.1.:** Chirale Supermultipletts im MSSM.

Chirale Supermultipletts	Spin 0	Spin $\frac{1}{2}$	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$	
Squarks, Quarks ( $\times 3$ Generationen)	$Q$	$(\tilde{u}_L \tilde{d}_L)$	$(u_L d_L)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
	$\bar{u}$	$\tilde{u}_R^*$	$u_R^\dagger$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$
	$\bar{d}$	$\tilde{d}_R^*$	$d_R^\dagger$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$
Sleptonen, Leptonen ( $\times 3$ Generationen)	$L$	$(\tilde{\nu} \tilde{e}_L)$	$(\nu e_L)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
	$\bar{e}$	$\tilde{e}_R^*$	$e_R^\dagger$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \frac{1}{1})$
Higgs, Higgsinos	$H_u$	$(H_u^+ H_u^0)$	$(\tilde{H}_u^+ \tilde{H}_u^0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2})$
	$H_d$	$(H_d^0 H_d^-)$	$(\tilde{H}_d^0 \tilde{H}_d^-)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$

**Tab. 2.2.:** Eichsupermultipletts im MSSM.

Eichsupermultipletts	Spin $\frac{1}{2}$	Spin 1	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
Gluino, Gluon	$\tilde{g}$	$g$	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
Winos, $W$ -Bosonen	$\tilde{W}^\pm, \tilde{W}$	$W^\pm, W$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
Bino, $B$ -Boson	$\tilde{B}$	$B$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

Higgs-Bosonen Fermionen mit Spin  $\frac{1}{2}$  sind, werden diese analog zu den Gauginos als *Higgsinos* bezeichnet.

Die chiralen Supermultipletts sowie die Eichsupermultipletts und die entsprechenden Quantenzahlen unter der SM-Eichgruppe  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  sind in den Tab. 2.1 und 2.2 zusammengefasst. Hierbei ist anzumerken, dass die chiralen Supermultipletts aus linkshändigen Weyl-Spinoren bestehen, so dass für die rechtshändigen Felder die Ladungskonjugierten verwendet werden müssen. Außerdem beziehen sich die Indizes  $L$  und  $R$  bei den Spin-0-Teilchen natürlich nicht auf ihre Helizität, sondern geben nur an, dass sie Superpartner eines entsprechenden Fermions sind.

## 2.2. Supersymmetrische Lagrangedichte

In diesem Abschnitt soll die Lagrangedichte einer supersymmetrischen Theorie mit chiralen und Eichsupermultipletts und allen möglichen renormierbaren Wechselwirkungen, die konsistent mit supersymmetrischen Transformationen sind, angegeben werden. Zuerst wird die Lagrangedichte chiraler Supermultipletts, die durch den Index  $i$  gekennzeichnet sind, betrachtet. Die Komponenten eines Supermultipletts sind dabei

ein linkshändiger Weyl-Spinor  $\psi_i$  und ein komplexes skalares Feld  $\phi_i$ . Der freie Teil der Lagrangedichte ist

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i - i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + F^{*i} F_i, \quad (2.5)$$

wobei die komplexen skalaren Felder  $F_i$  Hilfsfelder sind, die benötigt werden, um die SUSY-Algebra „off-shell“ schließen zu können. Sie sorgen dafür, dass die Anzahl der bosonischen und fermionischen Freiheitsgrade auch „off-shell“ übereinstimmen. Im Eichsektor werden aus dem gleichen Grund die reellen skalaren Hilfsfelder  $D^a$  eingeführt. Die Hilfsfelder  $F_i$  und  $D^a$  spielen „on-shell“ aufgrund fehlender kinetischer Terme keine Rolle, führen jedoch zu neuen Wechselwirkungen.

Die möglichen Wechselwirkungen der Felder in (2.5) und Massenterme werden durch das sog. Superpotential

$$W = \frac{1}{2} M^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} y^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \quad (2.6)$$

beschrieben, das kein Skalarpotential im eigentlichen Sinne darstellt, sondern eine holomorphe Funktion der komplexen Felder  $\phi_i$  ist. Die Kopplungen  $M^{ij}$  und  $y^{ijk}$  sind dabei total symmetrisch in ihren Indizes. Mit dem Superpotential sind die Wechselwirkungen dann gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{WW}} = \left( -\frac{1}{2} W^{ij} \psi_i \psi_j + W^i F_i \right) + \text{h.c.}, \quad (2.7)$$

wobei

$$W^{ij} = \frac{\delta^2 W}{\delta \phi_i \delta \phi_j} \quad \text{und} \quad W^i = \frac{\delta W}{\delta \phi_i}. \quad (2.8)$$

Aus den Termen von  $\mathcal{L}_{\text{frei}} + \mathcal{L}_{\text{WW}}$ , die die Hilfsfelder  $F_i$  enthalten, ergeben sich die Bewegungsgleichungen  $F_i = W_i^*$  und  $F^{*i} = -W^i$ , so dass  $\mathcal{L}_{\text{frei}} + \mathcal{L}_{\text{WW}}$  komplett ohne Hilfsfelder ausgedrückt werden kann:

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i - i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{1}{2} \left( W^{ij} \psi_i \psi_j + W_{ij}^* \psi^\dagger \psi^\dagger \right) - W^i W_i^*. \quad (2.9)$$

### Eichsupermultipletts

Die Lagrangedichte für ein Eichsupermultiplett mit dem masselosen Eichboson  $A_\mu^a$  und dem zweikomponentigen Gaugino  $\lambda^a$  ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{eich}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - i\lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a + \frac{1}{2} D^a D^a, \quad (2.10)$$

wobei der Index  $a$  über die adjungierte Darstellung der zugehörigen Eichgruppe läuft.  $F_{\mu\nu}^a$  entspricht dabei dem üblichen Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.11)$$

mit der Eichkopplung  $g$  und den Strukturkonstanten  $f^{abc}$  (für abelsche Eichgruppen ist  $f^{abc} = 0$ ). Außerdem ist die kovariante Ableitung des Gauginos in (2.10) gegeben durch

$$D_\mu \lambda^a = \partial_\mu \lambda^a + g f^{abc} A_\mu^b \lambda^c. \quad (2.12)$$

### Vollständige Lagrangedichte

Um die Eichinvarianz der Lagrangedichte herzustellen und die Felder der chiralen Supermultipletts an die Eichbosonen zu koppeln, müssen die gewöhnlichen Ableitungen in (2.9) durch kovariante Ableitungen ersetzt werden:

$$\begin{aligned} D_\mu \phi_i &= \partial_\mu \phi_i - ig A_\mu^a (T^a \phi)_i, \\ D_\mu \phi^{*i} &= \partial_\mu \phi^{*i} + ig A_\mu^a (\phi^* T^a)^i, \\ D_\mu \psi_i &= \partial_\mu \psi_i - ig A_\mu^a (T^a \psi)_i, \end{aligned} \quad (2.13)$$

wobei  $T^a$  die Generatoren der entsprechenden Eichgruppe sind. Die vollständige Lagrangedichte mit chiralen und Eichsupermultipletts und deren Wechselwirkungen ergibt sich dann aus (2.9) und (2.10) plus zusätzlicher eichinvarianter Wechselwirkungen zwischen den Gauginos und  $D^a$ -Feldern und den  $\phi_i$  und  $\psi_i$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= - D^\mu \phi^{*i} D_\mu \phi_i - i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_i - \frac{1}{2} \left( W^{ij} \psi_i \psi_j + W_{ij}^* \psi^\dagger_i \psi^\dagger_j \right) - W^i W_i^* \\ &\quad - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - i \lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a + \frac{1}{2} D^a D^a \\ &\quad - \sqrt{2} g (\phi^* T^a \psi) \lambda^a - \sqrt{2} g \lambda^\dagger (\psi^\dagger T^a \phi) + g (\phi^* T^a \phi) D^a, \end{aligned} \quad (2.14)$$

woraus wiederum Bewegungsgleichungen für die Hilfsfelder  $D^a$  folgen, so dass diese komplett durch die skalaren Felder ausgedrückt werden können. Mit diesen Bewegungsgleichungen folgt aus (2.14) dann das zugehörige Skalarpotential

$$V(\phi, \phi^*) = F^{*i} F_i + \frac{1}{2} \sum_a D^a D^a = W_i^* W^i + \frac{1}{2} \sum_a g_a^2 (\phi^* T^a \phi)^2, \quad (2.15)$$

das als Summe von Quadraten immer größer oder gleich null ist.

### 2.3. Superpotential des MSSM

In diesem Abschnitt wird das Superpotential des MSSM in Superfeldern angegeben. Superfelder sind Felder, die von den gewöhnlichen Raumzeit-Koordinaten  $x_\mu$  und von vier zusätzlichen fermionischen (d. h. antivertauschenden) Koordinaten  $\theta$  und  $\theta^*$ <sup>1</sup> abhängen, wobei diese Koordinaten durch Grassmann-Zahlen ausgedrückt werden. Der so erweiterte Raum wird auch als Superraum bezeichnet. Eine Einführung in den Superfeldformalismus gibt [19], während [21] oder [18] ausführlichere Werke zu diesem Thema sind. Superfelder enthalten als Komponenten die bosonischen und fermionischen Felder und Hilfsfelder eines Supermultipletts und werden in dieser Arbeit durch ein Dach über dem Symbol des entsprechenden Supermultipletts gekennzeichnet.

Das Superpotential des MSSM ist gegeben durch

$$W_{\text{MSSM}} = \varepsilon_{ab} \left( (Y_u)_{ij} \widehat{H}_u^b \widehat{Q}_i^a \widehat{u}_j + (Y_d)_{ij} \widehat{H}_d^a \widehat{Q}_i^b \widehat{d}_j + (Y_e)_{ij} \widehat{H}_d^a \widehat{L}_i^b \widehat{e}_j - \mu \widehat{H}_d^a \widehat{H}_u^b \right), \quad (2.16)$$

<sup>1</sup>  $\theta$  und  $\theta^*$  sind zweikomponentige Spinoren.

wobei  $Y_u$ ,  $Y_d$  und  $Y_e$  diagonale  $3 \times 3$ -Matrizen mit den Yukawa-Kopplungen des Standardmodells sind, die Indizes  $i$  und  $j$  über die drei Generationen summieren und die  $SU(2)_L$ -Dubletts mit den Indizes  $a, b = 1, 2$  über den totalen antisymmetrischen Tensor  $\varepsilon_{ab}$  (mit  $\varepsilon_{12} = 1$ ) eichinvariant kontrahiert werden. Außerdem sind in diesen Termen die Farbindices der  $SU(3)_C$  unterdrückt, d. h.  $\widehat{Q}_i^a \widehat{u}_j \equiv \widehat{Q}_i^{a\alpha} \widehat{u}_{j\alpha}$  mit  $\alpha = 1, 2, 3$ . Die komplette Lagrangedichte des MSSM kann z. B. [22] entnommen werden.

## 2.4. Schwache Supersymmetriebrechung

Wie bereits einleitend erwähnt wurde, muss die Supersymmetrie eine gebrochene Symmetrie sein, da Superpartner offensichtlich nicht die gleiche Masse haben wie die Teilchen des Standardmodells. Die Symmetriebrechung führt dann dazu, dass die supersymmetrischen Teilchen Massen erhalten, die sich von denen ihrer Partner unterscheiden. Analog zum Higgs-Mechanismus soll auch die Supersymmetrie spontan gebrochen sein, d. h. die Lagrangedichte soll invariant unter supersymmetrischen Transformationen sein, das Vakuum hingegen nicht.

Da der Mechanismus zur Brechung der Supersymmetrie nicht bekannt ist, wird diese im MSSM nicht spontan, sondern explizit durch Einführung von schwach brechenden (*soft breaking*) Termen in die Lagrangedichte gebrochen: [19]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{soft}}^{\text{MSSM}} = & -\frac{1}{2} \left( M_1 \widetilde{B} \widetilde{B} + M_2 \widetilde{W}^\alpha \widetilde{W}^\alpha + M_3 \widetilde{g}^\alpha \widetilde{g}^\alpha + \text{h.c.} \right) \\ & - \left( m_Q^2 \right)_{ij} \widetilde{Q}_i^{a\dagger} \widetilde{Q}_j^a - \left( m_{\widetilde{u}}^2 \right)_{ij} \widetilde{u}_i^\dagger \widetilde{u}_j - \left( m_{\widetilde{d}}^2 \right)_{ij} \widetilde{d}_i^\dagger \widetilde{d}_j \\ & - m_{\widetilde{L}}^2 \widetilde{L}_i^{a\dagger} \widetilde{L}_j^a - m_{\widetilde{e}}^2 \widetilde{e}_i^\dagger \widetilde{e}_j \\ & - m_{H_u}^2 H_u^{a\dagger} H_u^a - m_{H_d}^2 H_d^{a\dagger} H_d^a - \varepsilon_{ab} (B_\mu H_u^b H_d^a + \text{h.c.}) \\ & - \varepsilon_{ab} \left( (T_u)_{ij} \widetilde{u}_i \widetilde{Q}_j^a H_u^b + (T_d)_{ij} \widetilde{d}_i \widetilde{Q}_j^b H_d^a + (T_e)_{ij} \widetilde{e}_i \widetilde{L}_j^b H_d^a + \text{h.c.} \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei  $\alpha$  beim Wino-Term für die drei Eichbosonen der  $SU(2)_L$  und beim Gluino-Term für die acht Eichbosonen der  $SU(3)_C$  steht.  $\mathcal{L}_{\text{soft}}^{\text{MSSM}}$  enthält Massenterme für die Gauginos, Sfermionen und Higgs-Bosonen sowie bilineare und trilineare Kopplungen der Sfermionen und Higgs-Bosonen, die dem  $\mu$ -Term und den Yukawa-Kopplungen des Superpotentials (2.16) entsprechen.  $\mathcal{L}_{\text{soft}}^{\text{MSSM}}$  stellt damit die allgemeinste Möglichkeit dar, Supersymmetrie schwach zu brechen. Diese Terme werden als schwach bezeichnet, da sie nur positive Massendimension besitzen. Außerdem garantieren sie, dass keine neuen quadratischen Divergenzen in die Korrekturen der Higgs-Masse eingeführt werden [23] und somit das Hierarchieproblem auch bei gebrochener Supersymmetrie gelöst ist.

Diese explizite Brechung führt zu vielen neuen Parametern, die zwar unbestimmt aber durch Experimente stark eingeschränkt sind, da sie Flavour- und CP-verletzende Prozesse implizieren. Insgesamt hat das MSSM damit 105 Massen, Phasen und Mischungswinkel [24], die nicht wegrotiert werden können. Durch verschiedene Modelle, die die Ursache der Symmetriebrechung erklären, kann die Anzahl der Parameter wesentlich verringert werden. In diesen Modellen findet die Symmetriebrechung in

## 2. Supersymmetrie

einem „versteckten Sektor“ statt und über schwache, Flavour-blinde Wechselwirkungen wird diese in den „sichtbaren Sektor“ des MSSM übermittelt. Die bekanntesten dieser Modelle sind *minimal supergravity* (mSUGRA) [25], *gauge-mediated supersymmetry breaking* (GMSB) [26] und *anomaly-mediated supersymmetry breaking* (AMSB) [27]. In dem für diese Arbeit relevanten mSUGRA-Modell sind die schwach brechenden Parameter an der GUT-Skala durch die drei Parameter  $m_{1/2}$ ,  $m_0^2$  und  $A_0$  bestimmt:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 = M_3 = m_{1/2}, \\ m_Q^2 &= m_u^2 = m_d^2 = m_L^2 = m_e^2 = m_0^2 \mathbf{1}_3, \quad m_{H_u}^2 = m_{H_d}^2 = m_0^2, \\ T_u &= A_0 Y_u, \quad T_d = A_0 Y_d, \quad T_e = A_0 Y_e, \\ B_\mu &= B_0 \mu = (A_0 - 1) \mu. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Zur Spezifikation eines mSUGRA-Szenarios werden die fünf Parameter  $m_0$ ,  $m_{1/2}$ ,  $A_0$ ,  $\tan \beta = v_u/v_d$  (wobei  $v_u$  und  $v_d$  die VEVs der Higgs-Bosonen  $H_u^0$  und  $H_d^0$  sind) sowie das Vorzeichen des Higgsino-Massenparameters  $\mu$  benötigt. Diese Reduktion der Parameter vereinfacht die Durchführung von Parameterstudien erheblich. Um diese Studien vergleichen zu können, hat man sich auf die sog. SPS Benchmarkpunkte [28] geeinigt, die zu unterschiedlichen phänomenologischen Ausprägungen führen. Für die Fits in dieser Arbeit wird der Punkt SPS 1a' [29] verwendet, der durch folgende Wahl der Parameter spezifiziert ist:

$$\begin{aligned} m_0 &= 70 \text{ GeV}, \quad m_{1/2} = 250 \text{ GeV}, \quad A_0 = -300 \text{ GeV}, \\ \tan \beta &= 10, \quad \text{sgn}(\mu) = +1. \end{aligned} \tag{2.19}$$

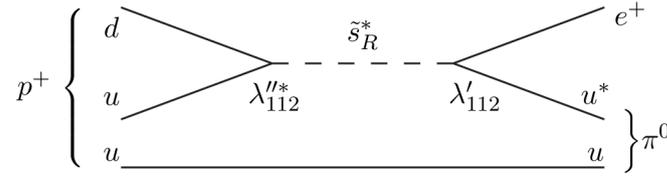
## 2.5. $R$ -Parität

Das MSSM ist spezifiziert durch die Wahl des Superpotentials (2.16), welches ausreichend ist, um ein phänomenologisch sinnvolles Modell, d. h. ein Modell, dass mit den bisherigen experimentellen Ergebnisse übereinstimmt, zu konstruieren. Jedoch existieren weitere eichinvariante und renormierbare Terme, die nicht im Superpotential des MSSM auftauchen, da sie entweder die Baryonzahl  $B$  oder die Leptonzahl  $L$  verletzen. Diese Terme sind [14]

$$W_{\Delta L=1} = \varepsilon_{ab} \left( \frac{1}{2} \lambda_{ijk} \hat{L}_i^a \hat{L}_j^b \hat{e}_k + \lambda'_{ijk} \hat{L}_i^a \hat{Q}_j^b \hat{d}_k + \epsilon_i \hat{L}_i^a \hat{H}_u^b \right), \tag{2.20a}$$

$$W_{\Delta B=1} = \frac{1}{2} \lambda''_{ijk} \hat{u}_i \hat{d}_j \hat{d}_k. \tag{2.20b}$$

Dabei kann zwar der bilineare Term (der  $\epsilon_i$ -Term) in (2.20a) durch eine Rotation von  $\hat{H}_d$  und  $\hat{L}_i$  von den trilinearen Kopplungen absorbiert werden, jedoch taucht ein entsprechender bilinearer Term in den schwach SUSY-brechenden Termen zwangsläufig wieder auf [30]. Die Zuordnung der Baryonzahl für die Superfelder ist  $B = +1/3$  für  $\hat{Q}_i$ ,  $B = -1/3$  für  $\hat{u}_i$  und  $\hat{d}_i$  und  $B = 0$  für alle restlichen Felder. Für die Leptonzahl gilt die Zuordnung  $L = +1$  für  $\hat{L}_i$ ,  $L = -1$  für  $\hat{e}_i$  und  $L = 0$  für alle anderen. Daher verletzen die



**Abb. 2.2.:** Protonzerfall  $p^+ \rightarrow e^+ \pi^0$  vermittelt durch ein Strange-Squark bei verletzter Baryon- und Leptonzahlerhaltung. Entnommen aus [14, Figure 5.5].

Terme in (2.20a) die Leptonzahlerhaltung um eine Einheit, während der Term in (2.20b) die Baryonzahlerhaltung um eine Einheit verletzt. Die Kopplungen  $\lambda'$  und  $\lambda''$  würden z. B. zum Zerfall des Protons über Kanäle wie  $p^+ \rightarrow e^+ \pi^0$  (siehe Abb. 2.2),  $e^+ K^0$ ,  $\mu^+ \pi^0$ ,  $\nu \pi^+$ , etc. führen. Falls die Kopplungen  $\lambda'$  und  $\lambda''$  von der Größenordnung eins wären und die Massen der Squarks von der Größenordnung 1 TeV, würde dies zu einer Lebensdauer des Protons von einem winzigen Bruchteil einer Sekunde führen [14], was im krassen Widerspruch zu der beobachteten Lebensdauer des Protons von mindestens  $10^{32}$  Jahren steht. Auch aus anderen Prozessen folgen strenge Einschränkungen was die Verletzung von Baryon- und Leptonzahl betrifft.

Im Standardmodell ist die Erhaltung der Baryon- und Leptonzahl dadurch garantiert, dass es keine möglichen renormierbaren Terme gibt, die  $B$  oder  $L$  verletzen. Da  $B$  und  $L$  durch nicht-perturbative elektroschwache Effekte verletzt sind [31], wird, anstatt  $B$ - und  $L$ -Erhaltung zu postulieren, eine neue Symmetrie in supersymmetrischen Modellen eingeführt, die die Terme in (2.20) verbietet. Diese Symmetrie wird  $R$ -Parität [32] genannt und ist definiert durch

$$R_p = (-1)^{3(B-L)+2s}, \quad (2.21)$$

wobei  $s$  der Spin eines Teilchens ist.  $R_p$  ist eine multiplikative Quantenzahl, die wegen des Faktors  $(-1)^{2s}$  für alle Teilchen des Standardmodells und die Higgs-Bosonen  $+1$  und für deren Superpartner  $-1$  ist. Falls  $R$ -Parität exakt erhalten ist, können Teilchen mit gerader ( $R_p = +1$ ) und ungerader  $R$ -Parität ( $R_p = -1$ ) nicht untereinander mischen und an jeder Wechselwirkung müssen eine gerade Anzahl an Teilchen mit  $R_p = -1$  beteiligt sein, was weitreichende phänomenologische Konsequenzen hat:

- Das LSP mit  $R_p = -1$  ist absolut stabil und falls es elektrisch neutral ist, ist es ein Kandidat für nicht-baryonische Dunkle Materie.
- Die Zerfallsprodukte aller supersymmetrischen Teilchen müssen eine ungerade Anzahl von LSPs beinhalten.
- In Beschleunigerexperimenten können supersymmetrische Teilchen nur paarweise produziert werden.

Das MSSM ist so definiert, dass  $R$ -Parität eine Erhaltungsgröße darstellt. Dies kann zwar aus phänomenologischer Sicht über die Lebensdauer des Protons motiviert

werden, ist theoretisch aber keineswegs zwingend. Außerdem sollte hinterfragt werden warum  $R$ -Parität exakt erhalten sein sollte, wenn andere diskrete Symmetrien des Standardmodells (wie Ladungskonjugation  $C$ , Parität  $P$ , Zeitumkehr  $T$ , etc.) keine exakten Symmetrien sind. Die Konsequenzen, die sich aus (bilinear) gebrochener  $R$ -Parität ergeben, werden in Kapitel 3 dargestellt.

## 2.6. Massenspektrum des MSSM

In diesem letzten Abschnitt soll das Massenspektrum des MSSM dargestellt werden. Die Eigeigenzustände der Lagrangedichte mischen, sofern sie die gleichen Quantenzahl haben, zu den im Experiment beobachtbaren Masseneigenzuständen [14]:

- **Higgs-Bosonen:** Die zwei komplexen Higgs-Doublets entsprechen acht reellen Freiheitsgraden. Nach der elektroschwachen Symmetriebrechung werden drei davon zu den Goldstone-Bosonen  $G^0$  und  $G^\pm$ , die den longitudinalen Komponenten des  $Z^0$  und  $W^\pm$  entsprechen. Die übrigen Higgs-Felder mischen zu den fünf Higgs-Bosonen  $h^0$ ,  $H^0$ ,  $A^0$ ,  $H^+$  und  $H^-$ , wobei die ersten beiden neutralen Higgs-Bosonen CP-gerade und  $A^0$  CP-ungerade sind und per Konvention  $h^0$  leichter ist als  $H^0$ .
- **Neutralinos und Charginos:** Die neutralen Higgsinos ( $\tilde{H}_u^0, \tilde{H}_d^0$ ) und die neutralen elektroschwachen Gauginos ( $\tilde{B}, \tilde{W}$ ) mischen zu den vier Neutralinos  $\tilde{\chi}_1^0, \tilde{\chi}_2^0, \tilde{\chi}_3^0, \tilde{\chi}_4^0$ . Ebenso mischen die geladenen Higgsinos ( $\tilde{H}_u^\pm, \tilde{H}_d^\pm$ ) und die Winos ( $\tilde{W}^\pm$ ) zu den Charginos  $\tilde{\chi}_1^\pm, \tilde{\chi}_2^\pm$ . Per Konvention sind die Neutralinos und Charginos nach aufsteigender Masse nummeriert.
- **Gluino:** Das Gluino als fermionisches Farb-Oktett mischt mit keinem anderen Teilchen.
- **Squarks und Sleptonen:** Im Prinzip können alle Skalare mit den gleichen Quantenzahlen untereinander mischen. In guter Näherung kann jedoch angenommen werden, dass nur die dritte Generation in Paaren ( $\tilde{t}_L, \tilde{t}_R$ ), ( $\tilde{b}_L, \tilde{b}_R$ ) und ( $\tilde{\tau}_L, \tilde{\tau}_R$ ) mischt, was zu den Masseneigenzuständen ( $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2$ ), ( $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ ) und ( $\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_1$ ) führt.

Der Übersichtlichkeit halber sind die Eigeigenzustände und die daraus resultierenden Masseneigenzustände des MSSM in Tab. 2.3 zusammengefasst. Für die genauen Mischungen und Mischungsmatrizen sei wiederum auf [14] verwiesen.

**Tab. 2.3.:** Eich- und Masseneigenzustände im MSSM, wobei die Mischung der Sfermionen der ersten und zweiten Generation als vernachlässigbar angenommen ist.

	Eicheigenzustände				Masseneigenzustände			
Higgs-Bosonen	$H_u^0$	$H_d^0$	$H_u^+$	$H_d^-$	$h^0$	$H^0$	$A^0$	$H^\pm$
	$\tilde{u}_L$	$\tilde{u}_R$	$\tilde{d}_L$	$\tilde{d}_R$	(gleich)			
Squarks	$\tilde{s}_L$	$\tilde{s}_R$	$\tilde{c}_L$	$\tilde{c}_R$	(gleich)			
	$\tilde{t}_L$	$\tilde{t}_R$	$\tilde{b}_L$	$\tilde{b}_R$	$\tilde{t}_1$	$\tilde{t}_2$	$\tilde{b}_1$	$\tilde{b}_2$
	$\tilde{e}_L$	$\tilde{e}_R$	$\tilde{\nu}_e$		(gleich)			
Sleptonen	$\tilde{\mu}_L$	$\tilde{\mu}_R$	$\tilde{\nu}_\mu$		(gleich)			
	$\tilde{\tau}_L$	$\tilde{\tau}_R$	$\tilde{\nu}_\tau$		$\tilde{\tau}_1$	$\tilde{\tau}_2$	$\tilde{\nu}_\tau$	
Neutralinos	$\tilde{B}$	$\tilde{W}$	$\tilde{H}_u^0$	$\tilde{H}_d^0$	$\tilde{\chi}_1^0$	$\tilde{\chi}_2^0$	$\tilde{\chi}_3^0$	$\tilde{\chi}_4^0$
Charginos	$\tilde{W}^\pm$	$\tilde{H}_u^\pm$	$\tilde{H}_d^\pm$		$\tilde{\chi}_1^\pm$	$\tilde{\chi}_2^\pm$		
Gluino		$\tilde{g}$			(gleich)			



---

---

## KAPITEL 3

---

# MSSM mit bilinear gebrochener $R$ -Parität

Wie bereits erwähnt, existiert mit der Brechung der  $R$ -Parität ein intrinsischer supersymmetrischer Mechanismus, der Neutrinomassen erzeugen und die solaren und atmosphärischen Neutrinooszillationen erklären kann (siehe z. B. [33–35] und Verweise ebenda). Das einfachste Modell, in dem dieser Mechanismus realisiert ist, ist das MSSM mit bilinear gebrochener  $R$ -Parität (BRpV). In diesen Modellen wird auf Born-Niveau die Masse eines Neutrinos durch einen effektiven Seesaw-Mechanismus erzeugt, bei dem die Neutralinos die Rolle der rechtshändigen Neutrinos einnehmen. Dies ist zwar ausreichend, um atmosphärische Oszillationen erklären zu können, jedoch müssen für die solaren Oszillationen auch die Massen der beiden anderen Neutrinos, die in diesen Modellen allein aus Einschleifenkorrekturen folgen, betrachtet werden. Dabei führen die Parameter, die für die Erzeugung der Neutrinomassen verantwortlich sind, auch zum Zerfall des LSPs, woraus Korrelationen zwischen den Neutrinodaten, speziell den Mischungswinkeln, und den Zerfallseigenschaften des LSPs folgen [36]. Diese Tatsache eröffnet die Möglichkeit an Teilchenbeschleunigern BRpV als Ursache von Neutrinomassen zu identifizieren und dort gegebenenfalls auch Neutrinophysik zu testen.

### 3.1. Superpotential und schwach brechende Terme

Das MSSM mit BRpV ist spezifiziert durch das Superpotential [34]

$$W_{\text{BRpV}} = W_{\text{MSSM}} + \varepsilon_{ab} \epsilon_i \widehat{L}_i^a \widehat{H}_u^b, \quad (3.1)$$

wobei  $W_{\text{MSSM}}$  dem Superpotential (2.16) entspricht, der Index  $i$  über die drei Generationen summiert und  $a$  und  $b$  wieder  $SU(2)_L$ -Indizes sind, die mit dem total antisymmetrischen Tensor kontrahiert werden. Der letzte Term in  $W_{\text{BRpV}}$  entspricht dem bilinearen Term in Gl. (2.20a) und bricht daher sowohl  $R$ -Parität als auch Leptonzahl in allen drei Generationen. Da in diesem Modell nur Leptonzahl und nicht Baryonzahl verletzt ist, stellt die Stabilität des Protons (über die u. a.  $R$ -Parität motiviert wird) kein Problem dar.

### 3. MSSM mit bilinear gebrochener R-Parität

Die Brechung der Supersymmetrie wird auch im MSSM mit BRpV über schwach brechende Terme in der Lagrangedichte parametrisiert. Zusätzlich zu den Termen in Gl. (2.17) enthält die Lagrangedichte einen bilinearen Term:

$$\mathcal{L}_{\text{soft}}^{\text{BRpV}} = \mathcal{L}_{\text{soft}}^{\text{MSSM}} - \varepsilon_{ab} B_i \epsilon_i \tilde{L}_i^a H_u^b. \quad (3.2)$$

Die Parameter  $\epsilon_i$  und  $B_i$  haben jeweils Massendimension eins. Der letzte Term in (3.2) führt nun dazu, dass neben den Higgs-Bosonen auch die Sneutrinos Vakuumerwartungswerte erhalten:

$$v_u = \langle H_u^0 \rangle, \quad v_d = \langle H_d^0 \rangle, \quad v_1 = \langle \tilde{\nu}_e \rangle, \quad v_2 = \langle \tilde{\nu}_\mu \rangle, \quad v_3 = \langle \tilde{\nu}_\tau \rangle. \quad (3.3)$$

Für die Massen der  $W$ - und  $Z$ -Bosonen gelten dabei weiterhin die Relationen (1.9a) und (1.9b), also  $m_W^2 = \frac{1}{4}g^2 v^2$  und  $m_Z^2 = \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)v^2$ , wobei nun

$$v^2 \equiv v_u^2 + v_d^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \approx (246 \text{ GeV})^2. \quad (3.4)$$

Die fünf VEVs können daher in Kugelkoordinaten ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} v_d &= v \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \beta, \\ v_u &= v \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \beta, \\ v_3 &= v \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ v_2 &= v \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ v_1 &= v \cos \theta_1, \end{aligned} \quad (3.5)$$

so dass analog zum MSSM das Verhältnis der Higgs-VEVs als  $\tan \beta = v_u/v_d$  definiert ist. Zusätzlich zu den Parametern des MSSM, hat dieses Modell neun neue Parameter:  $\epsilon_i$ ,  $v_i$  und  $B_i$ . Die Sneutrino-VEVs bzw. die  $B_i$  sind durch das Minimum des effektiven Potentials (dem Skalarpotential auf Einschleifenniveau) bestimmt, wobei man aus den Tadpole-Gleichungen entweder die  $v_i$  aus den  $B_i$  ableiten kann oder umgekehrt [37]. Insgesamt hat dieses Modell damit also sechs zusätzliche freie Parameter. Wird das MSSM mit BRpV in ein Modell eingebettet, in dem die schwach brechenden Parameter an der GUT-Skala vereinheitlicht sind, lässt sich durch die Wahl  $B_i = B_0$  (vgl. Abschnitt 2.4) die Anzahl zusätzlicher freier Parameter auf drei reduzieren.

## 3.2. Mischung der neutralen Fermionen

Im Folgenden soll die Mischung der neutralen Fermionen (das sind  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{W}$ ,  $\tilde{H}_d^0$ ,  $\tilde{H}_u^0$  und die drei Neutrinos  $\nu_i$ ) auf Born-Niveau angegeben werden. Diese Mischung führt dazu, dass nur ein Neutrino Masse erhält. Die Mischungen der geladenen Fermionen und der Skalare in diesem Modell können z. B. [34] entnommen werden.

In der Basis der Eigeigenzustände

$$(\psi^0)^T = \left( \tilde{B}, \tilde{W}^0, \tilde{H}_d^0, \tilde{H}_u^0, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau \right) \quad (3.6)$$

können die Massenterme der neutralen Fermionen in der Lagrangedichte zusammengefasst werden zu

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\psi^0)^T \mathbf{M}_N \psi^0 + \text{h.c.}, \quad (3.7)$$

wobei die symmetrische  $7 \times 7$ -Massenmatrix durch

$$\mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\chi^0} & m^T \\ m & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

gegeben ist. Dabei ist

$$\mathcal{M}_{\chi^0} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -\frac{1}{2}g'v_d & \frac{1}{2}g'v_u \\ 0 & M_2 & \frac{1}{2}gv_d & -\frac{1}{2}gv_u \\ -\frac{1}{2}g'v_d & \frac{1}{2}gv_d & 0 & -\mu \\ \frac{1}{2}g'v_u & -\frac{1}{2}gv_u & -\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

die bekannte Neutralino-Massenmatrix des MSSM mit den Gaugino-Massenparametern  $M_1$  und  $M_2$  und dem Higgsino-Massenparameter  $\mu$ . Die Verletzung der  $R$ -Parität ist durch die  $3 \times 4$ -Matrix

$$m = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}g'v_1 & \frac{1}{2}gv_1 & 0 & \epsilon_1 \\ -\frac{1}{2}g'v_2 & \frac{1}{2}gv_2 & 0 & \epsilon_2 \\ -\frac{1}{2}g'v_3 & \frac{1}{2}gv_3 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

charakterisiert. Um nun die Massen der Neutralinos und Neutrinos zu ermitteln, wird die Massenmatrix  $\mathbf{M}_N$  durch die unitäre Matrix  $\mathcal{N}$  diagonalisiert:

$$\mathcal{N}^* \mathbf{M}_N \mathcal{N}^{-1} = \text{diag}(m_{\chi_i^0}, m_{\nu_j}), \quad (3.11)$$

wobei  $m_{\chi_i^0}$  mit  $i = 1, \dots, 4$  die Massen der Neutralinos und  $m_{\nu_j}$  mit  $j = 1, \dots, 3$  die Massen der Neutrinos sind. Wegen

$$-\frac{1}{2}(\psi^0)^T \mathbf{M}_N \psi^0 = -\frac{1}{2}(\psi^0)^T \mathcal{N}^T \mathcal{N}^* \mathbf{M}_N \mathcal{N}^{-1} \mathcal{N} \psi^0, \quad (3.12)$$

ergeben sich die Masseneigenzustände der neutralen Fermionen zu

$$F^0 = \mathcal{N} \psi^0. \quad (3.13)$$

Falls die  $R$ -paritätsverletzenden Parameter klein sind in dem Sinne, dass für alle Einträge der Matrix

$$\xi = m \mathcal{M}_{\chi^0}^{-1} \quad (3.14)$$

### 3. MSSM mit bilinear gebrochener R-Parität

$\xi_{ij} \ll 1$  gilt, kann  $\mathcal{N}$  näherungsweise in einer Reihe nach  $\xi$  entwickelt werden [38]. Die Einträge von  $\xi$  sind dabei explizit durch

$$\begin{aligned}\xi_{i1} &= \frac{g' M_2 \mu}{2 \det(\mathcal{M}_{\chi^0})} \Lambda_i, \\ \xi_{i2} &= -\frac{g M_1 \mu}{2 \det(\mathcal{M}_{\chi^0})} \Lambda_i, \\ \xi_{i3} &= -\frac{\epsilon_i}{\mu} + \frac{(g^2 M_1 + g'^2 M_2) v_u}{4 \det(\mathcal{M}_{\chi^0})} \Lambda_i, \\ \xi_{i4} &= -\frac{(g^2 M_1 + g'^2 M_2) v_d}{4 \det(\mathcal{M}_{\chi^0})} \Lambda_i,\end{aligned}\tag{3.15}$$

gegeben, wobei

$$\Lambda_i = \mu v_i + v_d \epsilon_i.\tag{3.16}$$

In führender Ordnung in  $\xi$  ist die Matrix  $\mathcal{N}$  dann gegeben durch

$$\mathcal{N}^* \approx \begin{pmatrix} N^* & 0 \\ 0 & V_\nu^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \xi^\dagger \xi & \xi^\dagger \\ -\xi & 1 - \frac{1}{2} \xi \xi^\dagger \end{pmatrix},\tag{3.17}$$

wobei die Untermatrizen  $N$  und  $V_\nu$  so gewählt sind, dass sie  $\mathcal{M}_{\chi^0}$  und  $m_{\text{eff}}$  diagonalisieren:

$$N^* \mathcal{M}_{\chi^0} N^\dagger = \text{diag}(m_{\chi^0}),\tag{3.18a}$$

$$V_\nu^T m_{\text{eff}} V_\nu = \text{diag}(0, 0, m_\nu),\tag{3.18b}$$

wobei

$$m_{\text{eff}} = -m \mathcal{M}_{\chi^0}^{-1} m^T = \frac{M_1 g^2 + M_2 g'^2}{4 \det(\mathcal{M}_{\chi^0})} \begin{pmatrix} \Lambda_e^2 & \Lambda_e \Lambda_\mu & \Lambda_e \Lambda_\tau \\ \Lambda_\mu \Lambda_e & \Lambda_\mu^2 & \Lambda_\mu \Lambda_\tau \\ \Lambda_\tau \Lambda_e & \Lambda_\tau \Lambda_\mu & \Lambda_\tau^2 \end{pmatrix}\tag{3.19}$$

und

$$m_\nu = \text{Tr } m_{\text{eff}} = \frac{M_1 g^2 + M_2 g'^2}{4 \det(\mathcal{M}_{\chi^0})} |\mathbf{\Lambda}|^2,\tag{3.20}$$

$$\text{mit } \mathbf{\Lambda}^T = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3).$$

Aufgrund der Definition von  $m_{\text{eff}}$  erhält daher nur ein Neutrino in diesem Modell auf Born-Niveau Masse. Die zwei entarteten Zustände führen dazu dass die Neutrino-Mischungsmatrix (vgl. (1.24)) real und ein Mischungswinkel unphysikalisch ist, so dass diese folgende Form annimmt: [39]

$$\begin{aligned}V_\nu &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} \\ 0 & -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & \sin \theta_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13} & 0 & \cos \theta_{13} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & \sin \theta_{13} \\ -\sin \theta_{13} \sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} & \cos \theta_{13} \sin \theta_{23} \\ -\sin \theta_{13} \cos \theta_{23} & -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{13} \cos \theta_{23} \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{3.21}$$

d. h. der solare Mischungswinkel  $\theta_{\odot} = \theta_{12}$  tritt hier nicht auf, jedoch können die anderen beiden Mischungswinkel über die Größen  $\Lambda_i$  ausgedrückt werden:

$$\tan^2 \theta_{13} = \frac{\Lambda_1^2}{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}, \quad (3.22a)$$

$$\tan^2 \theta_{23} = \frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_3^2}. \quad (3.22b)$$

Drückt man die Mischungsmatrix selbst durch die Größen  $\Lambda_i$  aus, erhält man [35]

$$V_{\nu}^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}}{|\Lambda|} & -\frac{\Lambda_1 \Lambda_2}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}} & -\frac{\Lambda_1 \Lambda_3}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}} \\ 0 & \frac{\Lambda_3}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}} & -\frac{\Lambda_2}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}} \\ \frac{\Lambda_1}{|\Lambda|} & \frac{\Lambda_2}{|\Lambda|} & \frac{\Lambda_3}{|\Lambda|} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

### 3.3. Massenmatrix auf Einschleifenniveau

Die Massenmatrix der Neutrinos auf Born-Niveau ist durch (3.19) gegeben und weist aufgrund ihrer Struktur  $(m_{\text{eff}})_{ij} = a\Lambda_i\Lambda_j$  nur einen Eigenwert auf. Außerdem sind die Mischungswinkel auf diesem Niveau nur einfache Funktionen von Verhältnissen von  $\Lambda_i/\Lambda_j$ . Um die Massen der beiden anderen Neutrinos zu erzeugen, müssen die Selbstenergien der neutralen Fermionen auf Einschleifenniveau berechnet werden, siehe [34]. Für die Massenmatrix der Neutrinos ergibt sich dann die Struktur

$$(m_{\text{eff,loop}})_{ij} = a\Lambda_i\Lambda_j + b(\Lambda_i\epsilon_j + \epsilon_i\Lambda_j) + c\epsilon_i\epsilon_j, \quad (3.24)$$

wobei  $a$ ,  $b$  und  $c$  komplizierte Funktionen der Kopplungen und SUSY-Parameter darstellen. Diese Struktur führt nun dazu, dass alle drei Neutrinos Masse erhalten, wobei deren Massenspektrum für nahezu jede Kombination der SUSY-Parameter hierarchisch ist [34]. Die Größe der Beiträge, die verschiedene Schleifen liefern, hängt dabei von den SUSY-Parametern ab. Scans über den mSUGRA-Parameterraum ergeben als Faustformel, dass Bottom-Sbottom-Schleifen den größten Einfluss auf die Massenmatrix haben, wenn das Neutralino das LSP ist. Falls aber das Stau das LSP ist, sind die Beiträge von Bottom-Sbottom-Schleifen und Schleifen mit geladenen Skalaren vergleichbar groß [35].

Die Form von (3.24) folgt aus den Beiträgen der Selbstenergie der neutralen Fermionen, die allgemein gegeben sind durch

$$(\Sigma_{ij}, \Pi_{ij}) \sim \sum (\mathcal{O}_{i,a}\mathcal{O}_{j,b} + \mathcal{O}_{i,c}\mathcal{O}_{j,d})(B_1, mB_0), \quad (3.25)$$

wobei die  $\mathcal{O}$  symbolisch für die verschiedenen Kopplungen stehen. Da die Einträge der Entwicklungsmatrix  $\xi$  (3.15) als  $\xi_{i\alpha} = f_{\alpha}\epsilon_i + g_{\alpha}\Lambda_i$  geschrieben werden können, ergibt sich für die Produkte der angegebenen Kopplungen die generelle Form

$$\mathcal{O}_{i,a}\mathcal{O}_{j,b} \sim (f_{\alpha}\epsilon_i + g_{\alpha}\Lambda_i)(f'_{\alpha}\epsilon_j + g'_{\alpha}\Lambda_j)F(\dots), \quad (3.26)$$

### 3. MSSM mit bilinear gebrochener R-Parität

wobei  $F(\dots)$  alle Abhängigkeiten von weiteren SUSY-Parametern enthält. Daraus folgt schließlich die Struktur der Neutrino-Massenmatrix  $m_{\text{eff,loop}}$  auf Einschleifenniveau.

Die Größe der Einschleifenkorrekturen zur Massenmatrix auf Born-Niveau ist dabei charakterisiert durch das Verhältnis  $|\epsilon^2|/|\Lambda|$  [34]. Für  $|\epsilon^2|/|\Lambda| \lesssim 1$  sind diese Korrekturen klein, was einer Unterdrückung der bilinearen Parameter  $\epsilon_i$  im Vergleich zu  $\mu$  entspricht [35]. Aus der Massenmatrix auf Einschleifenniveau kann außerdem die folgende Näherung für den solaren Mischungswinkel abgeleitet werden: [35]

$$\tan^2 \theta_{12} \simeq \frac{\tilde{\epsilon}_1^2}{\tilde{\epsilon}_2^2}, \quad (3.27)$$

wobei die Parameter  $\tilde{\epsilon}_i$  definiert sind durch  $\tilde{\epsilon}_i = (V_\nu^T)_{ij}\epsilon_j$  und explizit durch

$$\tilde{\epsilon}_1 = \frac{\epsilon_1(\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2) - \Lambda_1(\Lambda_2\epsilon_2 + \Lambda_3\epsilon_3)}{|\Lambda|\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}} \quad (3.28)$$

$$\tilde{\epsilon}_2 = \frac{\Lambda_3\epsilon_2 - \Lambda_2\epsilon_3}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}} \quad (3.29)$$

$$\tilde{\epsilon}_3 = \frac{\Lambda\epsilon}{|\Lambda|} \quad (3.30)$$

gegeben sind. Gl. (3.27) stellt genau dann eine sehr gute Näherung dar, wenn  $m_{\nu_3} \gg m_{\nu_2}$  und die Massenmatrix auf Einschleifenniveau die Struktur  $\epsilon_i\epsilon_j$  hat [35]. Für  $\Lambda_2 \equiv \Lambda_3$  und  $\epsilon_2 \equiv \epsilon_3$  bricht diese Näherung zusammen, da dann  $\tilde{\epsilon}_2^2 = 0$ , was direkt aus der Definition von  $\tilde{\epsilon}_2$  folgt.

Für die später dargestellten Fits ist außerdem die Vorzeichenbedingung

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} \frac{\Lambda_2}{\Lambda_3} < 0. \quad (3.31)$$

besonders interessant. Falls diese Bedingung erfüllt ist, kann die effektive Neutrino-Mischungsmatrix geschrieben werden als [40]

$$V_{\nu,\text{loop}} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot V_\nu, \quad (3.32)$$

wobei die Winkel  $\theta_{13}$  und  $\theta_{23}$  weiterhin durch Gl. (3.22) gegeben sind. Falls die Vorzeichenbedingung nicht erfüllt ist, erhalten diese beiden Winkel große Korrekturen. Das bedeutet also, dass das atmosphärische und solare Problem bei erfüllter Vorzeichenbedingung entkoppeln, da die Beiträge zur Mischungsmatrix auf Born- und Einschleifenniveau auf einfache Weise faktorisiert werden können.

### 3.4. Neutralino-Zerfälle

Abschließend sollen noch die Zerfälle des leichtesten Neutralinos in diesem Modell angegeben werden, wobei angenommen wird, dass das Neutralino das LSP ist. Da die Leptonzahl nicht erhalten ist, kann  $\tilde{\chi}_1^0$  folgendermaßen zerfallen:

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}_1^0 &\rightarrow \nu_i \nu_j \nu_k \\
&\rightarrow \nu_i q \bar{q} \\
&\rightarrow \nu_i l_j^+ l_k^- \\
&\rightarrow l_i^\pm q \bar{q}' \\
&\rightarrow \nu_i \gamma ,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

wobei z. B. zum Zerfall  $\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu_i l_j^+ l_k^-$  26 verschiedene Diagramme beitragen [40]. Die genauen Kopplungen, die zu den Zerfällen führen, können [34] und [40] entnommen werden. Dabei ist anzumerken, dass die  $R$ -paritätsverletzenden Parameter nur über  $\epsilon_i$  und  $\Lambda_i$  in diese Kopplungen eingehen.

Da beim Benchmarkpunkt SPS 1a', der für die späteren Fits verwendet wird, die Masse des Neutralinos etwa 98 GeV beträgt, kann dieses außerdem in reelle  $W$ - und  $Z$ -Bosonen zerfallen:

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}_1^0 &\rightarrow l_i^\mp W^\pm \\
&\rightarrow \nu_i Z^0 .
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Für den später betrachteten Bereich der BRpV-Parameter sind dann folgende Zerfälle von Bedeutung:

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}_1^0 &\rightarrow W^\pm l_i^\mp \\
&\rightarrow \nu_\tau Z^0 \\
&\rightarrow \nu_i b \bar{b} \\
&\rightarrow \nu_e \mu^- \mu^+ \\
&\rightarrow \nu_e \tau^- \tau^+ \\
&\rightarrow \nu_e l_i^\pm l_j^\mp \quad \text{mit } i \neq j ,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

wobei der Zerfall  $\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu_e \tau^- \tau^+$  mit ca. 45 % das größte Verzweungsverhältnis aufweist, gefolgt von  $\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu_e \mu^\pm \tau^\mp$  mit etwa 28 %. Die genauen Werte für einen spezifischen Parameterpunkt können Anhang B entnommen werden.



---

---

## KAPITEL 4

---

# Das Fit-Programm Kaimini

Zur Bestimmung der  $R$ -paritätsverletzenden Parameter des MSSM mit BRpV wurde im Rahmen dieser Diplomarbeit das Programm Kaimini<sup>1</sup> [41] entwickelt. Kaimini ist ein generisches Fit-Frontend für Programme (die Backends), die den SUSY Les Houches Accord (SLHA) [42] als Schnittstelle für die Ein- und Ausgabe benutzen. Im Wesentlichen versucht Kaimini bei Vorgabe von Parametern und Datenpunkten über die Methode gewichteter kleinster Quadrate einen Parameterpunkt zu finden, der die vom Backend berechneten Datenpunkte „bestmöglich“ an die vorgegebenen Datenpunkte anpasst. Um dies zu ermöglichen verwendet Kaimini verschiedene deterministische und stochastische Optimierungsalgorithmen, die von externen Bibliotheken zur Verfügung gestellt werden bzw. intern implementiert sind.

Der erste Abschnitt dieses Kapitels gibt eine Einführung in die Grundlagen des Fittens. Neben der verwendeten Bewertungsfunktion werden Methoden zur Bestimmung der Anpassungsgüte und der Konfidenzintervalle der Parameter vorgestellt. Im zweiten Abschnitt werden die von Kaimini zur Verfügung gestellten Optimierungsalgorithmen dargestellt, ihre Funktionsweise kurz umrissen und deren Vor- und Nachteile diskutiert. Der letzte Abschnitt dokumentiert die Funktionalität von Kaimini und erläutert die Syntax der Ein- und Ausgabedatei anhand kurzer Beispiele. Die in dieser Arbeit dargestellten Informationen beziehen sich dabei auf Kaimini Version 0.1.3.

An dieser Stelle soll außerdem nicht unerwähnt bleiben, dass mit SFITTER [43] und Fittino [44] zwei Programme existieren, die einen ähnlichen Fokus haben wie Kaimini.

### 4.1. Grundlagen

Kaimini basiert auf der Methode gewichteter kleinster Quadrate für die Anpassung von Parametern an Datenpunkte. Die Datenpunkte entsprechen dabei in der Regel Observablen, die durch ein parameterabhängiges Modell, welches durch das Backend repräsentiert wird, beschrieben werden. Diese Datenpunkte sind entweder fehlerbehaftete Messwerte oder vom Modell vorhergesagte Werte, die mit einer bestimmten Unsicherheit behaftet sind, z. B. mit der erwarteten Genauigkeit, mit der zukünftige

---

<sup>1</sup>„Kaimini“ ist eine phonetische Transkription vom englischen  $\chi^2$  **minimizer**.

#### 4. Das Fit-Programm Kaimini

Experimente diese Observablen bestimmen können. Die Ergebnisse eines Fits sind dann ein oder mehrere Parameterpunkte hoher Anpassungsgüte und die zugehörigen Konfidenzintervalle. Falls Modellvorhersagen als Datenpunkte verwendet werden, ist natürlich der Parameterpunkt, der zur Berechnung der Datenpunkte verwendet wurde, der Punkt bestmöglicher Anpassung. In diesem Fall sind primär die Konfidenzintervalle oder weitere Punkte, die eine für den Fit akzeptable Anpassungsgüte haben, von Interesse.

Als Maß der Übereinstimmung zwischen den vorgegebenen Datenpunkten und den vom Backend berechneten Datenpunkten bei einem bestimmten Parameterpunkt wird die Bewertungsfunktion  $\chi^2: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  verwendet, die in ihrer allgemeinsten Form gegeben ist durch [45]

$$\begin{aligned}\chi^2(\mathbf{a}) &= (\mathbf{y} - f(\mathbf{a}))^T V^{-1} (\mathbf{y} - f(\mathbf{a})) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (y_i - f_i(\mathbf{a})) V_{ij}^{-1} (y_j - f_j(\mathbf{a})),\end{aligned}\quad (4.1)$$

wobei  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_M) \in A$  die Parameter,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \in B$  die Datenpunkte,  $(V_{ij}) = (\text{cov}(y_i, y_j))$  die zugehörige Kovarianzmatrix und  $f_i$  die gefitteten Datenpunkte sind. Das Backend wird hierbei als vektorwertige Funktion  $f: A \rightarrow B$ , mit  $A \subseteq \mathbb{R}^M$  und  $B \subseteq \mathbb{R}^N$ , betrachtet, deren Definition nicht bekannt ist und die nur durch die Zuordnung  $\mathbf{a} \mapsto f(\mathbf{a})$  bestimmt ist. Falls die Datenpunkte stochastisch unabhängig sind, ist die Kovarianzmatrix diagonal und (4.1) vereinfacht sich zu

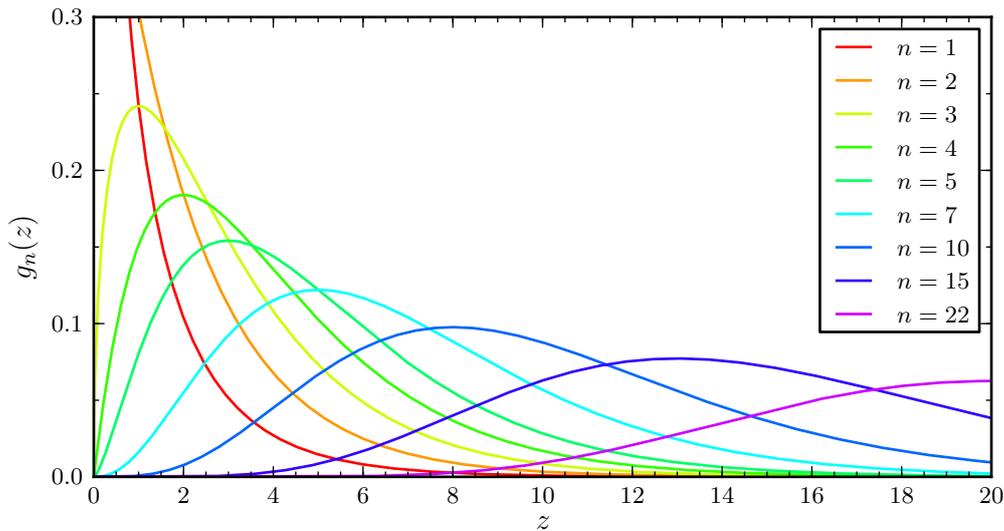
$$\chi^2(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - f_i(\mathbf{a}))^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.2)$$

wobei  $\sigma_i$  die Standardabweichungen der Datenpunkte sind und die Größen  $1/\sigma_i^2$  als Gewichte bezeichnet werden. Es ist offensichtlich, dass die Datenpunkte umso besser angepasst sind, je kleiner  $\chi^2$  ist. Eine der wesentlichen Aufgaben von Kaimini ist es daher durch Variation der Parameter einen Punkt  $\hat{\mathbf{a}} \in A$  zu finden, der  $\chi^2$  minimiert:

$$\chi^2(\hat{\mathbf{a}}) = \min \left\{ \chi^2(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in A \right\} =: \chi_{\min}^2. \quad (4.3)$$

##### 4.1.1. Anpassungsgüte

Ein Vorteil des Fittens durch Minimierung von  $\chi^2$  ist, dass das resultierende  $\chi^2$  ein direktes Maß der Anpassungsgüte darstellt, falls die Datenpunkte normalverteilt sind. Unter der Annahme, dass der Parameterpunkt  $\hat{\mathbf{a}}$  bekannt ist, ist  $\chi^2$  eine Summe von  $N$  Quadraten von standardnormalverteilten Zufallsvariablen und folgt daher einer Chi-Quadrat-Verteilung mit  $N$  Freiheitsgraden. Werden die Parameter hingegen über die Minimierung von  $\chi^2$  bestimmt, so sind die Quadrate in  $\chi^2$  nicht mehr stochastisch unabhängig. Es zeigt sich jedoch, dass das  $\chi^2$  dann einer Chi-Quadrat-Verteilung mit  $N - M$  Freiheitsgraden folgt, wenn  $f$  linear in den Parametern  $a_i$  ist [45]. Aber auch wenn  $f$  nicht strikt linear in den  $a_i$  ist, kann in guter Näherung die Chi-Quadrat-Verteilung angenommen werden [46].

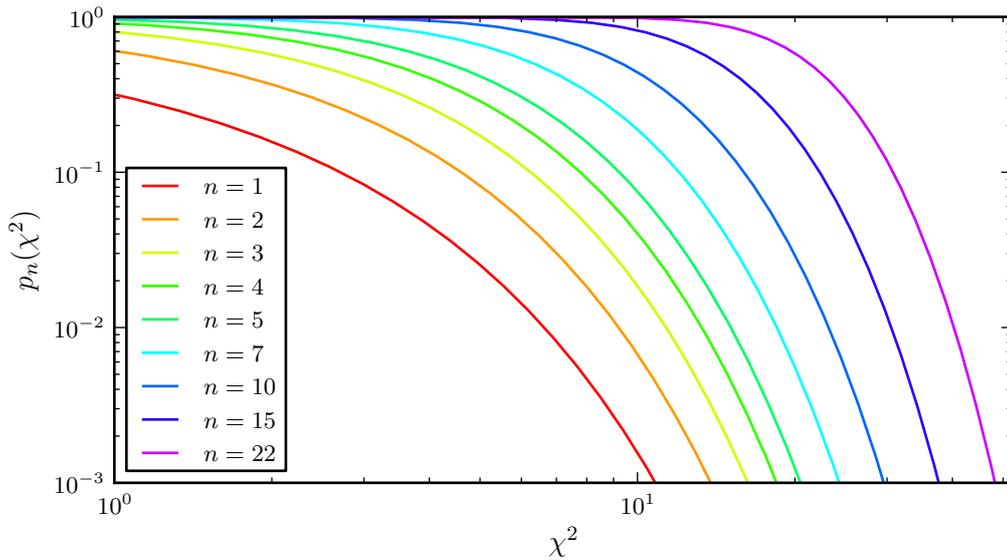


**Abb. 4.1.:** Dichtefunktion der Chi-Quadrat-Verteilung (4.4) für verschiedene Freiheitsgrade  $n$ . Die Chi-Quadrat-Verteilung hat den Erwartungswert  $n$  und die Standardabweichung  $\sqrt{2n}$ .

Die Dichtefunktion der Chi-Quadrat-Verteilung, die in Abb. 4.1 für verschiedene Freiheitsgrade  $n$  dargestellt ist, ist durch

$$g_n(z) = \frac{z^{n/2-1} e^{-z/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \quad \text{mit } z \geq 0 \quad (4.4)$$

gegeben und hat den Erwartungswert  $n$  und die Standardabweichung  $\sqrt{2n}$ . Bei vielen Wiederholungen eines Fits mit verschiedenen Datenpunkten, die Realisationen von  $(y_i, \sigma_i^2)$ -normalverteilten Zufallsvariablen sind (im Folgenden als hypothetische Datenpunkte bezeichnet) bzw. mit verschiedenen Datenpunkten, die Ergebnisse unabhängiger Messungen sind, erwartet man eine Verteilung der resultierenden  $\chi^2$  gemäß (4.4) mit  $N - M$  Freiheitsgraden. Eine Faustregel für den  $\chi^2$ -Wert eines guten Fits ist daher  $\chi^2/n \approx 1$ . Deutlich kleinere Werte weisen auf zu große (überschätzte) Fehler der Datenpunkte hin. Hingegen sind deutliche größere Werte ein Hinweis auf konzeptionelle oder praktische Probleme. Entweder ist die Funktion  $f$  ungeeignet zur Beschreibung der Datenpunkte oder die Fehler der Datenpunkte wurden unterschätzt, d. h. sie sind tatsächlich größer als angenommen. Da bei der Annahme, dass  $\chi^2$  einer Chi-Quadrat-Verteilung folgt, von einer Normalverteilung der Datenpunkte ausgegangen wird, kann ein zu hoher  $\chi^2$ -Wert auch ein Anzeichen für nicht-normalverteilte Datenpunkte sein [46]. Praktische Probleme können sich aus der Definition der Funktion  $f$  ergeben die dazu führen kann, dass  $\chi^2$  mehrere lokale Minima aufweist oder z. B. über große Bereiche des Parameterraums hinweg konstant ist. In diesen Fällen ist das von Kaimini gefundene Minimum sehr stark vom verwendeten Optimierungsalgorithmus und den Startwerten der Parameter abhängig. Es erweist sich dann als vorteilhaft, mehrere Algorithmen zu



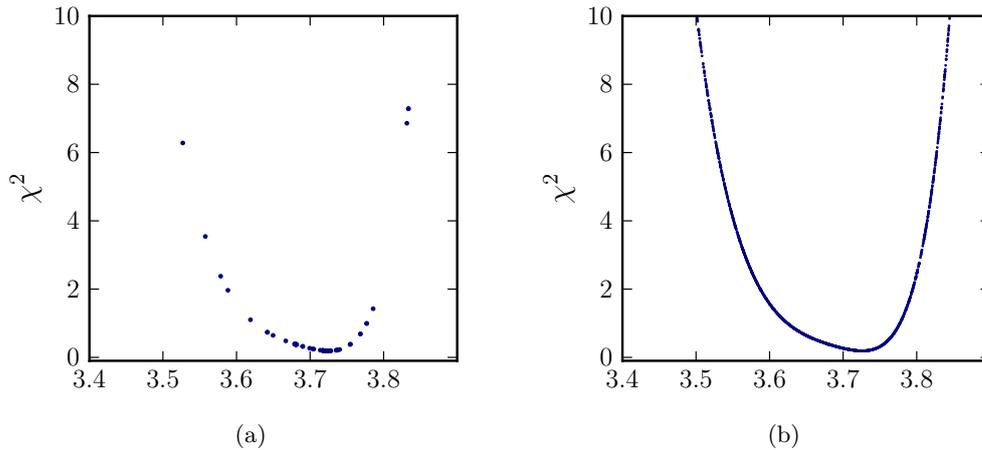
**Abb. 4.2.:** Komplementäre kumulative Verteilungsfunktion der Chi-Quadrat-Verteilung,  $1 - F_n(\chi^2)$ , für verschiedene Freiheitsgrade  $n$ . Dies entspricht den  $p$ -Werten von  $\chi^2$ -Fits (4.5).

verwenden bzw. zu kombinieren und zufällige Startwerte für die Parameter zu wählen, um die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen, in einer Teilmenge des Parameterraums die optimale Lösung zu finden.

Neben der qualitativen Abschätzung  $\chi^2/n$ , kann auch eine quantitative Aussage über die Anpassungsgüte eines Fits gemacht werden, nämlich über den  $p$ -Wert [46, 47], der durch

$$p_n(\chi^2) = \int_{\chi^2}^{\infty} g_n(z) dz = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_{\chi^2}^{\infty} z^{n/2-1} e^{-z/2} dz \quad (4.5)$$

gegeben ist und der komplementären kumulativen Verteilungsfunktion der Chi-Quadrat-Verteilung entspricht (also  $1 - F_n(\chi^2)$ , wobei  $F_n(\chi^2) = \int_0^{\chi^2} g_n(z) dz$  die kumulative Verteilungsfunktion ist). In Abb. 4.2 ist  $p_n(\chi^2)$  für verschiedene Freiheitsgrade dargestellt. Unter der Annahme, dass die Datenpunkte durch das Modell richtig beschrieben werden, ist der  $p$ -Wert die Wahrscheinlichkeit, bei Wiederholungen des Fits mit hypothetischen Datenpunkten  $\chi^2$ -Werte zu erhalten, die größer oder gleich dem ursprünglichen  $\chi^2$  sind. Der  $p$ -Wert gibt daher an wie extrem das ursprüngliche  $\chi^2$  ist, d. h. je kleiner der  $p$ -Wert ist, desto schlechter ist die Anpassungsgüte des Fits. Press et al. [46] geben drei grobe Grenzen für die  $p$ -Werte zur Einschätzung der Anpassungsgüte an. Bei  $p > 0,1$  kann man von einem glaubwürdigen Fit ausgehen, ist hingegen  $0,1 > p > 0,001$ , so ist der Fit möglicherweise noch akzeptabel, falls die Fehler der Datenpunkte unterschätzt wurden oder diese nicht normalverteilt sind. Bei kleineren  $p$ -Werten kann davon ausgegangen werden, dass entweder der verwendete Algorithmus kein optimales Minimum finden konnte oder das Modell ungeeignet zur Beschreibung der Daten ist.



**Abb. 4.3.:** Vergleich von  $\chi^2$  in Abhängigkeit eines Parameters bei Fits (1 Freiheitsgrad) mit niedriger (a) und hoher (b) Punktdichte im Bereich  $\chi^2 \leq 10$ . In beiden Fällen wurde das Minimum gefunden, jedoch können Konfidenzgrenzen aus den Daten von (b) viel genauer bestimmt werden. Außerdem erkennt man, dass  $\chi^2(\mathbf{a})$  nur annähernd parabolisch ist.

#### 4.1.2. Konfidenzintervalle

Neben der Bestimmung des Parameterpunkts, der die Datenpunkte bestmöglich anpasst, ist eine weitere wesentliche Aufgabe des Fittens die Angabe von Konfidenzintervallen, die den Grad der Unsicherheit bei der Bestimmung der Best-fit-Werte angeben. Dabei ist das Konfidenzintervall ein Bereich um den Best-fit-Wert  $\hat{a}_i$

$$a_{i,L} \leq \hat{a}_i \leq a_{i,U}, \quad (4.6)$$

der den wahren Wert des Parameters  $a_{i,\text{true}}$  mit der Wahrscheinlichkeit  $\beta$  (dem Konfidenzniveau) beinhaltet.<sup>2</sup> Eine natürliche Wahl für die Form des Konfidenzbereich bei der Minimierung von  $\chi^2$  ist

$$\chi^2(\mathbf{a}) \leq \chi_{\min}^2 + \Delta\chi^2 \quad (4.7)$$

für alle Parameterpunkte innerhalb des Bereichs zu fordern, wobei  $\Delta\chi^2$  eine vom Konfidenzniveau abhängige Konstante ist. Aus der Menge von Punkten, die Bedingung (4.7) erfüllen, lassen sich dann die Konfidenzintervalle der einzelnen Parameter bestimmen, indem für jeden Parameter jeweils der kleinste und größte Wert innerhalb dieser Menge ermittelt wird. Dabei ist natürlich zu beachten, dass die Punktdichte im Bereich  $\chi^2(\mathbf{a}) \simeq \chi_{\min}^2 + \Delta\chi^2$  relativ groß sein sollte, um die Konfidenzgrenzen ausreichend genau bestimmen zu können (vgl. Abb. 4.3). Gerade bei Fits mit vielen Freiheitsgraden ist diese Forderung üblicherweise mit großem Rechenaufwand verbunden.

<sup>2</sup> Anstatt des Intervalls (4.6) wird meistens der Best-fit-Wert zusammen mit den Unsicherheiten (oder auch Parameterfehlern)  $\Delta a_{i,U} := +a_{i,U} - \hat{a}_i$  und  $\Delta a_{i,L} := -\hat{a}_i + a_{i,L}$  angegeben.

#### 4. Das Fit-Programm Kaimini

**Tab. 4.1.:**  $\Delta\chi^2$  für gebräuchliche Konfidenzniveaus  $\beta$  und verschiedene Freiheitsgrade.

$\beta$ [%]	Freiheitsgrade							
	1	2	3	11	18	27	32	50
68,27	1,00	2,30	3,53	12,6	20,3	29,9	35,2	54,2
90	2,71	4,61	6,25	17,3	26,0	36,7	42,6	63,2
95,45	4,00	6,18	8,02	20,0	29,2	40,5	46,7	68,1
99	6,63	9,21	11,3	24,7	34,8	47,0	53,5	76,2
99,73	9,00	11,8	14,2	28,5	39,2	51,9	58,8	82,3
99,99	15,1	18,4	21,1	37,4	49,2	63,2	70,6	96,0

Da  $\chi^2$  einer Chi-Quadrat-Verteilung folgt, wird  $\Delta\chi^2$  so gewählt, dass die Wahrscheinlichkeit ein  $\chi^2$  zu erhalten, dass kleiner oder gleich  $\Delta\chi^2$  ist, dem Konfidenzniveau  $\beta$  entspricht, also [46]

$$\beta = P(\chi^2 \leq \Delta\chi^2) = F_n(\Delta\chi^2) = \int_0^{\Delta\chi^2} g_n(z) dz. \quad (4.8)$$

Einige  $\Delta\chi^2$ -Werte sind für gebräuchliche Konfidenzniveaus und verschiedene Freiheitsgrade in Tab. 4.1 zusammengetragen. Diese Wahl von  $\Delta\chi^2$  korrespondiert mit der Tatsache, dass bei linearer Abhängigkeit zwischen  $f$  und den Parametern  $a_i$ , das Integral der multivariaten Normalverteilung

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det(V)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (f(\mathbf{a}_{\text{true}}) - f(\mathbf{a}))^T V^{-1} (f(\mathbf{a}_{\text{true}}) - f(\mathbf{a}))\right] \quad (4.9)$$

über den Konfidenzbereich dem Konfidenzniveau  $\beta$  entspricht. Wie man an Abb. 4.3 bereits erkennt, ist die Annahme der Linearität von  $f$  in den Parametern für einige Fits nicht erfüllt, da die Punkte sonst eine Parabel beschreiben würden. Die über  $\Delta\chi^2$  bestimmten Konfidenzgrenzen sind dann nur Näherungen für die tatsächlichen Konfidenzgrenzen.

Falls die Verteilung der Parameter multimodal ist, d. h. falls  $\chi^2(\mathbf{a})$  mehrere „getrennte“ Parameterpunkte mit ähnlich guter Anpassungsgüte aufweist, oder  $f$  hoch nichtlinear in den Parametern ist, müssen die Konfidenzbereiche über eine andere Methode ermittelt werden. Die in dieser Arbeit dafür verwendete Methode beruht auf der Sortierung von Likelihood-Werten. Im ersten Schritt wird dazu für jeden Parameterpunkt, dessen  $\chi^2$  im Laufe eines Fits berechnet wurde, das entsprechende Likelihood  $L: A \rightarrow ]0, 1]$  berechnet, das durch

$$L(\mathbf{a}) = \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2(\mathbf{a})\right) \quad (4.10)$$

gegeben ist. Danach werden alle Parameterpunkte nach absteigendem  $L$  sortiert und mit einem Index versehen, so dass  $L_i \geq L_j$  für alle  $i < j$  gilt, wobei  $L_i := L(\mathbf{a}_i)$  und

$|\{L_i\}| = K$  ist. Die Punkte innerhalb eines Konfidenzintervalls mit dem Konfidenzniveau  $\beta$  sind dann die ersten  $k_\beta$  Parameterpunkte, wobei der Index  $k_\beta$  durch

$$k_\beta = \max \left\{ k \in \{1, \dots, K\} \mid \sum_{i=1}^k L_i \leq \beta \sum_{i=1}^K L_i \right\} \quad (4.11)$$

bestimmt ist. Das heißt, die ersten Punkte, deren  $L_i$  in der Summe kleiner oder gleich der um den Faktor  $\beta$  reduzierten Summe aller  $L_i$  sind, liegen in dem Konfidenzbereich mit dem Konfidenzniveau  $\beta$ .

Abschließend soll noch erwähnt werden, dass die Unsicherheiten der Parameter näherungsweise über die Hesse-Matrix berechnet werden können, wenn  $f$  in der Nähe von  $\hat{\mathbf{a}}$  annähernd linear in den Parametern ist [48]. Dies ist insbesondere bei denjenigen Optimierungsalgorithmen sinnvoll, die die Hesse-Matrix zum Finden eines Minimums verwenden. Entwickelt man  $\chi^2$  bis zur zweiten Ordnung um  $\hat{\mathbf{a}}$ , erhält man

$$\Delta\chi^2 = \chi^2(\mathbf{a}) - \chi_{\min}^2 = \sum_i \frac{\partial\chi^2}{\partial a_i} \Delta a_i + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2\chi^2}{\partial a_i \partial a_j} \Delta a_i \Delta a_j. \quad (4.12)$$

Da der lineare Term in (4.12) am Minimum verschwindet, ergibt sich die Kovarianzmatrix der Parameter  $V^{\mathbf{a}}$  zu

$$V_{ij}^{\mathbf{a}} = \Delta\chi^2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2\chi^2}{\partial a_i \partial a_j} \right)^{-1} = 2 \Delta\chi^2 H_{ij}^{-1}, \quad (4.13)$$

wobei  $H$  die Hesse-Matrix, also die Matrix aller partiellen zweiten Ableitungen ist. Bei geeigneter Wahl von  $\Delta\chi^2$  (siehe Tab. 4.1) ergeben sich dann die symmetrischen Unsicherheiten der Parameter mit dem entsprechenden Konfidenzniveau zu

$$\Delta a_i = \sqrt{V_{ii}^{\mathbf{a}}} = \sqrt{2 \Delta\chi^2 H_{ii}^{-1}}. \quad (4.14)$$

Da diese Methode zur Bestimmung der Unsicherheiten davon ausgeht, dass  $\chi^2(\mathbf{a})$  um das Minimum herum parabolisch ist, sollte sichergestellt sein, dass die Linearität von  $f$  in den Parametern tatsächlich in guter Näherung erfüllt ist. Falls diese Voraussetzung nicht gegeben ist, müssen die Unsicherheiten der Parameter über eine andere Methode bestimmt werden.

## 4.2. Optimierungsalgorithmen

Die in Kaimini verwendeten Optimierungsalgorithmen dienen dazu, eine möglichst gute Lösung für das Problem (4.3) zu finden, d. h. einen Parameterpunkt zu ermitteln für den  $\chi^2(\mathbf{a})$  in einem bestimmten Bereich minimal ist. Wie bereits in Abschnitt 4.1 angedeutet wurde, hängt die Komplexität des Optimierungsproblems bzw. der Aufwand eine Lösung zu finden entscheidend von der Topologie der Bewertungsfunktion und damit von der Topologie von  $f$  ab. So kann nur in den einfachsten Fällen, z. B. wenn  $\chi^2$  keine lokalen Minima und nur ein globales Minimum hat, überall glatt und nirgends

#### 4. Das Fit-Programm Kaimini

konstant ist, garantiert werden, dass die optimale Lösung gefunden wird. Das andere Extrem wäre beispielsweise ein  $\chi^2$ , das fast überall konstant ist und nur an einigen Stellen schmale Senken aufweist. In diesem Fall können die Minima nur durch Monte-Carlo-Methoden oder durch abstrastern des Parameterraums gefunden werden. Doch selbst dann kann nie garantiert werden, dass das globale oder überhaupt ein Minimum gefunden wird.

Neben der Topologie der Bewertungsfunktion und dem verwendeten Algorithmus sind zusätzlich die Startwerte der Parameter entscheidend, um mit geringem Aufwand ein gutes Minimum zu finden. Denn in vielen Fällen gilt, dass die Wahrscheinlichkeit das globale Minimum zu finden umso größer ist, je geringer der Abstand der Startwerte zum globalen Minimum ist. Dabei ist festzuhalten, dass stochastische Algorithmen im Allgemeinen weniger abhängig von den Startwerten sind, als deterministische Algorithmen, da sie lokale Minima wieder verlassen können. Die Fragestellung wie weit die Startwerte vom globalen Minimum noch entfernt sein können, um es (mit vertretbarem Aufwand) dennoch finden zu können, hängt dabei wiederum von der Topologie der Bewertungsfunktion ab und ist damit problemspezifisch.

Wie bereits erwähnt, benutzt Kaimini verschiedene deterministische und stochastische Optimierungsalgorithmen, die in beliebiger Reihenfolge und beliebig oft ausgeführt werden können. Ein Teil dieser Algorithmen werden durch die Bibliotheken Minuit [49, 50] und GSL [51] zur Verfügung gestellt, der andere Teil ist intern implementiert. In diesem Abschnitt sollen diese Algorithmen kurz beschrieben und deren Vor- und Nachteile diskutiert werden.

##### 4.2.1. Deterministische Algorithmen

###### Minuit Scan

Dieser Algorithmus variiert jeden Parameter einzeln mit fester Schrittweite innerhalb eines bestimmten Bereichs und hält den Wert fest, bei dem das  $\chi^2$  jeweils minimal ist. Wiederholt angewendet konvergiert dieses Verfahren zwar gegen ein lokales Minimum, ist dabei aber beliebig langsam, was gerade bei höherdimensionalen Problemen inakzeptabel ist [52]. Dieses Verfahren eignet sich daher in erster Linie dazu bessere Startwerte zu ermitteln und sollte immer in Kombination mit einem anderen Algorithmus verwendet werden.

###### Minuit Simplex

Dies ist das Downhill-Simplex-Verfahren nach Nelder und Mead [53]. Wie der Name bereits andeutet basiert dieser Algorithmus auf einem Simplex, dem einfachsten Polytop im  $M$ -dimensionalen Parameterraum, der durch  $M + 1$  Punkte aufgespannt ist, wobei  $M$  Punkte über die Startwerte der Parameter konstruiert werden. Für jeden dieser Punkte wird das  $\chi^2$  berechnet und die Punkte mit dem niedrigsten und höchsten Wert bestimmt. Der Punkt mit dem höchsten  $\chi^2$ -Wert wird dann durch einfache geometrische Operationen in einen neuen Punkt überführt, wodurch ein neues Simplex entsteht. Diese geometrischen Operationen sind Reflexion des Punktes am Mittelpunkt des

restlichen Simplex, Reflexion mit anschließender Entfernung vom restlichen Simplex oder Annäherung an den restlichen Simplex. Eine bestimmte Kombination dieser Operationen wird dann solange wiederholt, bis die neuen Punkte keine kleineren  $\chi^2$ -Werte mehr ergeben. Das Simplex wird dann um den Punkt mit dem kleinsten  $\chi^2$  komprimiert und der ganze Prozess wiederholt sich solange, bis ein Konvergenzkriterium erfüllt ist. Der Simplex bewegt sich auf diese Weise in Richtung Minimum und zieht sich schließlich um dieses herum zusammen.

Vorteil dieses Algorithmus ist, dass er relativ robust gegenüber kleinen lokalen Minima ist und dass keine Ableitungen benötigt werden, so dass er unempfindlich gegenüber numerischen Ungenauigkeiten bei deren Berechnung ist. Dafür konvergiert er aber im Allgemeinen langsamer als andere deterministische Algorithmen mit Ableitungen und kann zudem keine Aussagen über Parameterfehler machen [50].

### Minuit Migrad

Dies ist eine Variation des Quasi-Newton-Verfahrens nach Davidon, Fletcher und Powell [54]. Beim Quasi-Newton-Verfahren werden die Schritte in Richtung Minimum über Gradienten und iterative Approximationen der Hesse-Matrix berechnet. Generell gehen diese Verfahren folgendermaßen vor: Die Schritte in Richtung Minimum werden durch

$$\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k - H_k^{-1} \mathbf{g}_k \quad (4.15)$$

bestimmt, wobei  $H_k^{-1}$  die  $k$ -te iterative Approximation der inversen Hesse-Matrix und  $\mathbf{g}_k$  der Gradient an der Stelle  $\mathbf{a}_k$  ist. An dem Punkt  $\mathbf{a}_{k+1}$  wird dann der entsprechende Gradient  $\mathbf{g}_{k+1}$  berechnet und die Matrix  $H^{-1}$  durch Informationen an den Punkten  $\mathbf{a}_k$  und  $\mathbf{a}_{k+1}$  korrigiert:

$$H_{k+1}^{-1} = H_k^{-1} + G(H_k^{-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_{k+1}). \quad (4.16)$$

Diese beiden Schritte werden dann solange wiederholt, bis ein bestimmtes Konvergenzkriterium erfüllt ist. Die einzelnen Variationen dieses Verfahrens unterscheiden sich dabei hauptsächlich in der Korrekturfunktion  $G$  und in der Wahl von  $H_0^{-1}$ , die z. B. die Einheitsmatrix oder die tatsächliche Hesse-Matrix an der Position  $\mathbf{a}_0$  sein kann.

Vorteil dieses Algorithmus ist, dass er während seiner Laufzeit die Hesse-Matrix am Minimum annähert und damit gleichzeitig die Parameterfehler liefert. Außerdem konvergiert er im Allgemeinen schneller als andere deterministische Algorithmen, die keine Ableitungen verwenden. Dies bedeutet andererseits, dass dieser Algorithmus sehr sensitiv auf Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der Ableitungen ist.

### Minuit Minimize

Dies ist ein Meta-Algorithmus, der im ersten Schritt Minuit Migrad verwendet. Falls Migrad nicht konvergiert, wird Minuit Simplex aufgerufen und dessen Ergebnis anschließend als Startpunkt für einen erneuten Aufruf von Migrad verwendet.

## 4.2.2. Stochastische Algorithmen

### Stochastisches Bergsteigen mit zufälligen Startpunkten

Beim stochastischen Bergsteigen werden Schritte in Richtung Minimum zufällig<sup>3</sup> ausgewählt und nur dann durchgeführt, wenn das  $\chi^2$  bei der neuen Position kleiner ist als das  $\chi^2$  bei der aktuellen Position. Diese Prozedur wird solange wiederholt, bis eine bestimmte Anzahl von Schritten keinen besseren Punkt mehr ergibt. Dabei wird in Bereichen, in denen der Großteil der Schritte keine Verbesserung ergibt, also in der unmittelbaren Nähe von (lokalen) Minima oder in schmalen Tälern, die durchschnittliche Schrittweite verringert, um die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen sich dem Minimum zu nähern. Wenn kein besserer Punkt mehr in der Umgebung gefunden wird, wird zufällig mit großer Schrittweite ein neuer Punkt gewählt bei dem das „Bergsteigen“ wiederholt wird. Diese Wiederholung wird dabei beliebig oft ausgeführt, wobei der Punkt mit dem niedrigsten  $\chi^2$  gespeichert wird. Die genaue Funktionsweise dieses Algorithmus ist als Pseudocode in Algorithmus 1 dargestellt.

Ein Vorteil dieses Algorithmus ist, dass er große Bereiche des Parameterraums scannen kann und außerdem viele Punkte in der unmittelbaren Umgebung der Minima auswertet, was vorteilhaft ist, wenn neben dem absoluten Minimum auch dessen Umgebung von Interesse ist. Ein Nachteil hingegen ist, dass der Algorithmus sich sehr leicht in lokalen Minima verfängt und falls er in eine Senke gelangt, die breit ist gegenüber der Schrittweite beim Sprung zu einer neuen Startposition, diese nur sehr schwer wieder verlassen kann. Dies kann natürlich ausgeglichen werden, indem die Schrittweite dynamisch erhöht wird, wenn aufeinanderfolgend das gleiche Minimum gefunden wird.

### Metropolisalgorithmus und simulierte Abkühlung

Der Metropolisalgorithmus [55] und die darauf aufbauende simulierte Abkühlung (*simulated annealing*) [56] sind stochastische Algorithmen, die mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auch Schritte ausführen, die vom lokalen Minimum wegführen. Ähnlich wie beim stochastischen Bergsteigen werden die Schritte zufällig ausgewählt und durchgeführt, wenn das  $\chi^2$  bei der neuen Position kleiner ist als das  $\chi^2$  bei der aktuellen Position. Aber auch Schritte, die ein größeres  $\chi^2$  ergeben, werden mit der Wahrscheinlichkeit

$$p = \exp(-\delta\chi^2/T) \quad (4.17)$$

durchgeführt, wobei  $\delta\chi^2 := \chi^2(\mathbf{a}_{k+1}) - \chi^2(\mathbf{a}_k)$  und der Parameter  $T$  wegen der Analogie zur Boltzmann-Verteilung als Temperatur bezeichnet wird. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit einen Schritt vom Minimum weg durchzuführen hängt sowohl von der Differenz  $\delta\chi^2$  als auch von der Temperatur  $T$  ab, wobei für  $\delta\chi^2 > 0$  gilt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} p = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{T \rightarrow 0} p = 0. \quad (4.18)$$

---

<sup>3</sup>Die Komponenten des Zufallsvektors sind dabei normalverteilt.

---

**Algorithmus 1** : Stochastisches Bergsteigen mit zufälligen Startpunkten

---

```

Input : Startpunkt  $\mathbf{a}_0$ 
Output :  $\mathbf{a}_{\text{best}} = \arg(\min\{\chi^2(\mathbf{a}_i)\})$ 
 $\mathbf{a}_{\text{new}} \leftarrow \mathbf{a}_{\text{best}} \leftarrow \mathbf{a}_{\text{current}} \leftarrow \mathbf{a}_0$ 
 $\chi_{\text{new}}^2 \leftarrow \chi_{\text{best}}^2 \leftarrow \chi_{\text{current}}^2 \leftarrow \chi^2(\mathbf{a}_0)$ 
 $\text{penalty} \leftarrow 0$  ;  $\text{step\_size} \leftarrow 1$ 

for  $k \leftarrow 1$  to  $k_{\text{max}}$  do
   $\mathbf{a}_{\text{new}} \leftarrow$  zufälligen Punkt mit Schrittweite  $\text{step\_size}$  auswählen
   $\chi_{\text{new}}^2 \leftarrow \chi^2(\mathbf{a}_{\text{new}})$ 
  if  $\chi_{\text{new}}^2 < \chi_{\text{best}}^2$  then
    |  $\mathbf{a}_{\text{best}} \leftarrow \mathbf{a}_{\text{new}}$  ;  $\chi_{\text{best}}^2 \leftarrow \chi_{\text{new}}^2$ 
  end
  if  $\chi_{\text{new}}^2 < \chi_{\text{current}}^2$  then
    |  $\mathbf{a}_{\text{current}} \leftarrow \mathbf{a}_{\text{new}}$  ;  $\chi_{\text{current}}^2 \leftarrow \chi_{\text{new}}^2$ 
    |  $\text{penalty}$  verringern
  else
    |  $\mathbf{a}_{\text{new}} \leftarrow \mathbf{a}_{\text{current}}$ 
    |  $\text{penalty}$  erhöhen
    if  $t_{\text{lower}} < \text{penalty} < t_{\text{upper}}$  then
      |  $\text{step\_size}$  verringern
    else if  $\text{penalty} \geq t_{\text{upper}}$  then
      |  $\text{penalty} \leftarrow 0$  ;  $\text{step\_size} \leftarrow 1$ 
      |  $\mathbf{a}_{\text{current}} \leftarrow$  neuen zufälligen Startpunkt wählen
      |  $\chi_{\text{current}}^2 \leftarrow \chi^2(\mathbf{a}_{\text{current}})$ 
      |  $\mathbf{a}_{\text{new}} \leftarrow \mathbf{a}_{\text{current}}$ 
    end
  end
end

```

---

Für diese beiden Grenzwerte entspricht der Metropolisalgorithmus dann einem Random Walk bzw. dem stochastischen Bergsteigen. Der Unterschied zwischen dem Metropolisalgorithmus und der simulierten Abkühlung besteht nun darin, dass beim Ersten die Temperatur über die gesamte Laufzeit konstant ist, während bei der simulierten Abkühlung (wie der Name bereits vermuten lässt) die Temperatur langsam aber stetig verringert wird, so dass in der Endphase des Algorithmus Bereiche mit kleinen  $\chi^2$ -Werten präferiert werden. Der Pseudocode des Metropolisalgorithmus ist in Algorithmus 2 dargestellt.

Der große Vorteil beider Algorithmen ist natürlich, dass sie lokale Minima wieder verlassen und bessere finden können. Die Verringerung der Temperatur bei der simulierten Abkühlung führt außerdem zu einer natürlichen Abbruchbedingung, die beim Metropolisalgorithmus nicht gegeben ist. Ein Nachteil dieser Algorithmen ist hingegen ihre lange Laufzeit, die benötigt wird, um ein Minimum mit akzeptabler Anpassungsgüte zu finden.

**Algorithmus 2** : Metropolisalgorithmus

---

```

 $\mathbf{a}_{\text{new}} \leftarrow \mathbf{a}_{\text{best}} \leftarrow \mathbf{a}_{\text{current}} \leftarrow \mathbf{a}_0$ 
 $\chi_{\text{new}}^2 \leftarrow \chi_{\text{best}}^2 \leftarrow \chi_{\text{current}}^2 \leftarrow \chi^2(\mathbf{a}_0)$ 
 $step\_size \leftarrow 1$ 
 $T \leftarrow const$ 

for  $k \leftarrow 1$  to  $k_{\text{max}}$  do
   $\mathbf{a}_{\text{new}} \leftarrow$  zufälligen Punkt mit Schrittweite  $step\_size$  auswählen
   $\chi_{\text{new}}^2 \leftarrow \chi^2(\mathbf{a}_{\text{new}})$ 
  if  $\chi_{\text{new}}^2 < \chi_{\text{best}}^2$  then
     $\mathbf{a}_{\text{best}} \leftarrow \mathbf{a}_{\text{current}} \leftarrow \mathbf{a}_{\text{new}} ; \chi_{\text{best}}^2 \leftarrow \chi_{\text{current}}^2 \leftarrow \chi_{\text{new}}^2$ 
  else if  $\exp(-(\chi_{\text{new}}^2 - \chi_{\text{current}}^2)/T) > \text{UniformRandom}(0, 1)$  then
     $\mathbf{a}_{\text{current}} \leftarrow \mathbf{a}_{\text{new}} ; \chi_{\text{current}}^2 \leftarrow \chi_{\text{new}}^2$ 
  else  $\mathbf{a}_{\text{new}} \leftarrow \mathbf{a}_{\text{current}}$ 
end

```

---

Diese Algorithmen erlauben eine Vielzahl von Verbesserungen bzw. Variationen und erfordern die Anpassung einiger Parameter an das vorliegende Problem. So hängt die Wahl der Anfangstemperatur und die Schrittweite der Parameter sehr davon ab, welchen Parameterbereich der Algorithmus scannen kann oder soll. Außerdem ist es in den meisten Fällen sinnvoll, die Schrittweite der Parameter an die unmittelbare  $\chi^2$ -Landschaft anzupassen (siehe z. B. [44]). Außerdem könnte man analog zum stochastischen Bergsteigen die simulierte Abkühlung an zufälligen Startpunkten wiederholen oder die Temperatur stark erhöhen, wenn das  $\chi^2$  des Best-fit-Werts z. B. drei Standardabweichungen über dem Erwartungswert der entsprechenden Chi-Quadrat-Verteilung liegt.

**GSL Simplex und simulierte Abkühlung**

Diese Algorithmen entsprechen den o. g. Algorithmen Minuit Simplex und simulierte Abkühlung und wurden nur zu Vergleichszwecken integriert.

**4.3. Funktionalität und Anwendung**

Kaimini wird über eine Datei im SLHA-Format gesteuert, die gleichzeitig Eingabedatei für das verwendete Backend ist. Für die in dieser Arbeit durchgeführten Fits wurde SPheno [57] als Backend verwendet, jedoch können alle Programme, die den SLHA als Schnittstelle für die Ein- und Ausgabe verwenden, als Backend verwendet werden.<sup>4</sup> Um diese Flexibilität zu erreichen wurde die Bibliothek SLHAea [59] für die Ein-, Ausgabe und Manipulation von Daten im SLHA-Format entwickelt.

Die Namen der Ein- und Ausgabedatei können Kaimini als Argumente übergeben werden (siehe auch `kaimini --help`). Falls keine Dateinamen angegeben werden, wer-

<sup>4</sup>Siehe z. B. [58] für eine Übersicht von Programmen, die den SLHA implementieren.

den die voreingestellten Namen `kaimini.in` und `kaimini.out` verwendet. In beiden Dateien sind die für Kaimini relevanten Daten bzw. die von Kaimini ausgegebenen Daten in Blöcken mit dem Präfix `Kaimini` zusammengefasst. Beispiele für Ein- und Ausgabedateien sind in Anhang A zu finden.

### 4.3.1. Eingabedatei

Die Eingabedatei enthält alle für einen Fit benötigten Daten und muß eine für das verwendete Backend gültige Eingabedatei sein, die die Parameter mit ihren Startwerten beinhaltet. Die für den Fit relevanten Blöcke sind:

- **BLOCK KaiminiParameters:**  
Angabe der Parameter.
- **BLOCK KaiminiDataPoints:**  
Angabe der Datenpunkte.
- **BLOCK KaiminiControl:**  
Angabe der Optimierungsalgorithmen und Analysemethoden.
- **BLOCK KaiminiCalculator:**  
Angabe des Backends.

#### **BLOCK KaiminiParameters**

In diesem Block werden die Parameter spezifiziert. Für jeden Parameter müssen die folgenden Daten angegeben werden: eine Nummer, ein Name, die Position in der Eingabedatei, die dem numerischen Wert des Parameters entspricht ( $a_i$ ), ein Schalter mit dem der Parameter für den Fit aktiviert oder deaktiviert wird, die initiale Schrittweite und mögliche Grenzen für ein Intervall in dem der Parameter variiert werden darf. Beispiele für Einträge in diesem Block sind:

```

1  eps_1  RVKAPPAIN;1;1  1  0.1          :
2  eps_2  RVKAPPAIN;2;1  1  uniform:0.1  :
3  eps_3  RVKAPPAIN;3;1  0  normal:5%    :
4  v_L1   RVSNVEVIN;1;1  1  10%          -1:
5  v_L2   RVSNVEVIN;2;1  1  10%          :1
6  v_L3   RVSNVEVIN;3;1  0  10%          -1:2.3

```

Die dritten Felder geben die Positionen der Parameter in der Eingabedatei als sog. SLHA-Schlüssel an. Diese Schlüssel sind drei durch Semikolons getrennte Zeichenketten, die den Namen des Blocks, die Zeile innerhalb dieses Blocks und das entsprechende Feld in dieser Zeile angeben. Der Schlüssel `RVKAPPAIN;3;1` z. B. verweist innerhalb des Blocks `RVKAPPAIN` auf das zweite Feld der Zeile, die mit `3` beginnt.<sup>5</sup> Das vierte Feld ist ein Schalter, der den Parameter für den Fit aktiviert (1) oder deaktiviert (0). Das fünfte

<sup>5</sup>Eine ausführliche Dokumentation über SLHA-Schlüssel findet man unter:

[http://www.physik.uni-wuerzburg.de/~fthomas/slhaea/doc/structSLHAea\\_1\\_1SLHAKey.html](http://www.physik.uni-wuerzburg.de/~fthomas/slhaea/doc/structSLHAea_1_1SLHAKey.html)

#### 4. Das Fit-Programm Kaimini

Feld gibt die initiale Schrittweite des Parameters an und ist entweder ein absoluter oder relativer Wert. Durch die Präfixe `uniform:x` und `normal:x` wird die Schrittweite zufällig entsprechend einer stetigen Gleichverteilung auf dem Intervall  $[0, x]$  bzw. einer  $(0, x^2)$ -Normalverteilung gewählt. Das letzte Feld gibt ein Intervall an, innerhalb dessen der Parameter variiert werden darf. Das Intervall kann dabei beidseitig beschränkt, beidseitig unbeschränkt oder einseitig beschränkt sein.

#### **BLOCK KaiminiDataPoints**

In diesem Block werden die Datenpunkte spezifiziert. Für jeden Datenpunkt müssen die folgenden Daten angegeben werden: eine Nummer, ein Name, die Position in der Ausgabedatei des Backends, die dem numerischen Wert des gefitteten Datenpunkts entspricht ( $f_i$ ), ein Schalter, der angibt ob der Datenpunkt in die Berechnung der Bewertungsfunktion integriert werden soll, der Wert des Datenpunkts ( $y_i$ ) und dessen Fehler ( $\sigma_i$ ). Beispiele für Einträge in diesem Block sind:

```

1  m^2_atm      SPhenoRP;7;1    1      2.40E-03    0.12E-03
2  m^2_sol      SPhenoRP;8;1    1,1    7.59E-05    0.21E-05
3  tan^2_atm    SPhenoRP;9;1    0,1    1.000       0.270
4  tan^2_sol    SPhenoRP;10;1   1,0    0.466       0.038
5  U_e3^2       SPhenoRP;11;1   1,1,1   0.013       0.011
6  dw_chi_10    1000022;DECAY;2 1,1,2   3.71347122E-13 15%
7  BR_nu_-5_5  1000022;(any),3,12,-5,5;0 1 2.99e-02 8e-04
      + 1000022;(any),3,14,-5,5;0
      + 1000022;(any),3,16,-5,5;0

```

Die ersten drei Felder gleichen in Syntax und Semantik den ersten drei Feldern in den Einträgen im Block `KaiminiParameters`. Das vierte Feld gibt an, ob der Datenpunkt für die Berechnung des  $\chi^2$  berücksichtigt werden soll und wie bestimmte Ausnahmefälle behandelt werden sollen. Die Ausnahmefälle sind das Nichtvorhandensein des Datenpunkts in der Ausgabe des Backends<sup>6</sup> oder dass dessen Wert NaN<sup>7</sup> ist. Dieses Feld entspricht drei durch Komma getrennten Werten, von denen der erste angibt, ob der Datenpunkt bei der Berechnung des  $\chi^2$  berücksichtigt wird (1) oder nicht (0). In den erwähnten Ausnahmefällen kann der Fit abgebrochen (0), der zuletzt gespeicherte Wert des Datenpunkts verwendet (1) oder dessen Wert als null angenommen werden (2). Die letzten beiden Werte sind dabei optional und die Voreinstellung ist 0 und 1. Das fünfte Feld entspricht dem Wert des vorgegebenen Datenpunkts  $y_i$  und das letzte Feld dem Fehler  $\sigma_i$ . Analog zu der Schrittweite der Parameter kann der Fehler als absoluter oder relativer Wert angegeben oder zufällig ausgewählt werden.

Ein Datenpunkt kann auch der Summe mehrerer Werte in der Ausgabedatei des Backends entsprechen. Dazu müssen die zusätzlichen SLHA-Schlüssel wie oben dargestellt mit einem + an die Definition des Datenpunkts angehängt werden.

<sup>6</sup>Dies kann u. a. dann auftreten, wenn sich die Parameter in unphysikalischen Bereichen befinden.

<sup>7</sup>engl. Not a Number

**BLOCK KaiminiControl**

Über diesen Block wird Kaimini gesteuert, d. h. hier wird angegeben, welche Optimierungsalgorithmen oder welche Methoden (z. B. zur Fehleranalyse) verwendet werden sollen. Die Einträge in diesem Block entsprechen entweder Optionen und beginnen mit 0 oder Aktionen, die mit 1 beginnen. Die Reihenfolge der Optionen ist irrelevant, Aktionen hingegen werden entsprechend ihrer Reihenfolge abgearbeitet und können durch einen Schalter (on oder off) an- bzw. ausgeschaltet werden. Außerdem können Aktionen beliebig oft wiederholt werden. Die folgenden Einträge werden von Kaimini erkannt:

0	MinuitErrorDef	1.0	
0	BootstrapIter	1000	
1	StepRandom	off	
1	SaveAllPoints	off	
1	MinuitScan	off	0
1	MinuitSimplex	off	1
1	MinuitMigrad	off	2
1	MinuitMinimize	on	2
1	MinuitContours	off	2
1	MinuitMinos	on	2
1	RandomHillClimbing	off	
1	Metropolis	off	
1	SimulatedAnnealing	off	
1	BoundedRandomWalk	off	
1	Bootstrap	off	
1	ChiSquareContrib	on	
1	GSLSimplex	off	
1	GSLSimulatedAnnealing	off	

Bei Aktionen, die Methoden von Minuit aufrufen, kann zusätzlich eine Strategie angegeben werden, die die Genauigkeit mit der Minuit Minima findet beeinflusst. Erlaubte Werte sind hier 0 (gering), 1 (normal) und 2 (hoch) [50].

- **MinuitErrorDef:**  
Setzt den in Minuit verwendeten Wert von  $\Delta\chi^2$  (siehe Gl. (4.14)) [50].
- **BootstrapIter:**  
Setzt die Anzahl der Iterationen für die Bootstrap-Methode.
- **StepRandom:**  
Wählt jeden Parameter zufällig entsprechend einer  $(a_i, \Delta a_i^2)$ -Normalverteilung.
- **SaveAllPoints:**  
Speichert  $\mathbf{a}$ ,  $\chi^2(\mathbf{a})$  und  $f(\mathbf{a})$  für alle Punkte, die während eines Fits ausgewertet wurden in einzelnen Dateien.

#### 4. Das Fit-Programm Kaimini

- **MinuitContours:**  
Ruft Minuits Methode zur Erstellung zweidimensionaler Contour-Linien für alle Parameterkombinationen auf. Dies ist nur in Kombination mit `SaveAllPoints` sinnvoll, da Kaimini selbst keine Graphen erstellt.
- **MinuitMinos:**  
Ruft Minuits Methode zur Bestimmung asymmetrischer Parameterfehler auf. Anstatt von der Krümmung am Minimum auf die Parameterfehler zu schließen, sucht Minos die Stellen mit  $\chi^2(\mathbf{a}) \approx \chi_{\min}^2 + \Delta\chi^2$  [48]. Im Vergleich mit Minuits Minimierungsmethoden ist die Laufzeit dieser Methode wesentlich größer.
- **Bootstrap:**  
Bootstrap [46] ist eine Methode zur Fehleranalyse. Dabei werden aus den gefitteten Parametern  $\hat{\mathbf{a}}$  synthetische Datenpunkte  $\mathbf{y}_j^S$  erzeugt, indem zu den gefitteten Komponenten  $f_i(\hat{\mathbf{a}})$  ein gaußverteilter Fehler  $\epsilon_i$  mit  $\langle \epsilon_i \rangle = \sigma_i^2$  addiert wird. Mit diesen synthetischen Datenpunkten wird dann die Fitprozedur wiederholt, was zu den synthetischen Parametern  $\hat{\mathbf{a}}_j^S$  führt. Unter der Annahme, dass die Verteilung der  $\hat{\mathbf{a}}_j^S$  um  $\hat{\mathbf{a}}$  der Verteilung von  $\hat{\mathbf{a}}$  um  $\mathbf{a}_{\text{true}}$  gleicht, lassen sich aus der Breite der Verteilung der Komponenten der  $\hat{\mathbf{a}}_j^S$  die Konfidenzintervalle für  $\hat{\mathbf{a}}$  gewinnen.  
Durch die Option `BootstrapIter` wird die Anzahl der synthetischen Datenpunkte, für die die Fitprozedur wiederholt werden soll, festgelegt. Natürlich ist die Genauigkeit, mit der die Konfidenzgrenzen bestimmt werden, abhängig von der Anzahl der Iterationen und der Dimension  $M$  des Parameterraums. Bei 6 Parametern z. B. sind etwa 1000 Iterationen nötig, um zufriedenstellende Konfidenzgrenzen für verschiedene Konfidenzniveaus zu erhalten.
- **ChiSquareContrib:**  
Diese Methode ermittelt, wie sich Variationen der Parameter auf das  $\chi^2$  auswirken. Dazu wird jeder Parameter einzeln um  $\pm\Delta a_i$  variiert, mit diesen Werten das  $\chi^2$  berechnet und deren Mittelwert als Resultat angegeben.

#### BLOCK KaiminiCalculator

Dieser Block dient dazu das Backend zu spezifizieren. Hier muss der Pfad zur Programmdatei des Backends, die voreingestellten Namen für dessen Ein- und Ausgabedateien und mögliche Kommandozeilenargumente angegeben werden. Dies sind zwei Beispiele für SPheno und SOFTSUSY [60]:

```
0 Calculator  SPheno
0 Path        /usr/local/bin/SPheno
0 InputFile   LesHouches.in
0 OutputFile  SPheno.spc

0 Calculator  SOFTSUSY
0 Path        /home/john/softsusy/softpoint.x
0 InputFile   softsusy.in
```

```
0  OutputFile  softsusy.out
0  CmdLine    leshouches < softsusy.in > softsusy.out
```

### 4.3.2. Ausgabedatei

Die Ausgabedatei, die ebenfalls dem SLHA entspricht, enthält neben den Best-fit-Werten  $\hat{\mathbf{a}}$  und den gefitteten Datenpunkten  $f(\hat{\mathbf{a}})$  einige zusätzliche Informationen wie z. B. den Beitrag, den jeder einzelne Datenpunkt zum  $\chi^2$  liefert, oder die absolute und relative Differenz der Parameter zwischen den Startwerten und den Best-fit-Werten. Je nach verwendeten Optimierungsalgorithmen und Analysemethoden beinhaltet die Ausgabedatei zusätzliche Informationen, wie z. B. die Kovarianz- und Korrelationsmatrix der Parameter oder asymmetrische Parameterfehler. Am Ende der von Kaimini erzeugten Daten ist dann die Ausgabe des Backends bei den Best-fit-Werten angehängt. Die von Kaimini erstellten Ausgabeblöcke sind:

- **KaiminiInfo:**  
Informationen über Laufzeit und Resultat eines Fits.
- **KaiminiParametersOut:**  
Best-fit-Werte  $\hat{\mathbf{a}}$  mit symmetrischen Parameterfehlern.
- **KaiminiParameterDifferences:**  
Absolute und relative Differenz zwischen  $\hat{\mathbf{a}}$  und dem Startpunkt  $\mathbf{a}_0$ .
- **KaiminiCovarianceMatrix:**  
Durch Minuit berechnete Kovarianzmatrix der Parameter.
- **KaiminiCorrelationMatrix:**  
Aus der Kovarianzmatrix abgeleitete Korrelationsmatrix.
- **KaiminiDataPointsOut:**  
Gefitteten Datenpunkte  $f(\hat{\mathbf{a}})$ .
- **KaiminiChiSquare:**  
 $\chi_{\min}^2$  und die einzelnen Beiträge der Datenpunkte.
- **KaiminiMinosErrors:**  
Durch Minos gefundenen (möglicherweise asymmetrischen) Parameterfehler.
- **KaiminiBootstrap:**  
Durch die Bootstrap-Methode bestimmten (möglicherweise asymmetrischen) Parameterfehler.
- **KaiminiChiSquareContrib:**  
Einfluß der einzelnen Parameter auf das  $\chi^2$ .
- **KaiminiChiSquareContribSingle:**  
Einfluß der einzelnen Parameter auf jeden Datenpunkt.

#### 4. Das Fit-Programm Kaimini

##### **BLOCK KaiminiParametersOut**

Die Einträge in diesem Block haben folgende Form:

```
1 eps_1 1 3.68816084E-02 1.97566817E-03 :
2 eps_2 1 -5.29749835E-02 7.09377456E-04 :
3 eps_3 1 3.43510409E-02 1.98648183E-03 :
```

Das dritte Feld gibt an, ob der Parameter für den Fit benutzt wurde. Das vierte Feld ist der Best-fit-Wert  $\hat{a}_i$  und das fünfte Feld entspricht entweder der Schrittweite des Parameters oder, falls Minuit zum Finden des Minimums verwendet wurde, den aus der Hesse-Matrix bestimmten symmetrischen Parameterfehlern. Das letzte Feld gibt das Intervall an, innerhalb dessen der Parameter variiert werden durfte.

##### **BLOCK KaiminiParameterDifferences**

Die Einträge in diesem Block haben folgende Form:

```
1 eps_1 3.91855049E-02 -2.30389649E-03 -5.88E+00%
2 eps_2 -5.20808531E-02 -8.94130439E-04 1.72E+00%
3 eps_3 4.60864354E-02 -1.17353945E-02 -2.55E+01%
```

Das dritte Feld ist der Startwert  $a_{i,0}$  des Parameters, das vierte Feld ist die Differenz  $\hat{a}_i - a_{i,0}$  und das letzte Feld entspricht der relativen Abweichung

$$\frac{\hat{a}_i - a_{i,0}}{a_{i,0}} \cdot 100 \%. \quad (4.19)$$

##### **BLOCK KaiminiDataPointsOut**

Die Einträge in diesem Block haben folgende Form:

```
1 m^2_atm 1 2.40009037E-03 2.40000000E-03 3.40000000E-04
2 m^2_sol 1 7.59126734E-05 7.59000000E-05 6.20000000E-06
```

Das dritte Feld gibt an, ob der Datenpunkt in die Berechnung des  $\chi^2$  integriert wurde. Das vierte Feld entspricht dem gefitteten Datenpunkt  $f_i(\hat{\mathbf{a}})$  und die letzten beiden Felder entsprechen den Eingabewerten  $y_i$  und  $\sigma_i$ .

##### **BLOCK KaiminiChiSquare**

Die Einträge in diesem Block haben folgende Form:

```
0 chi^2 1 5.50824549E-06
1 m^2_atm 1 7.06465130E-08
2 m^2_sol 1 4.17833162E-06
[...]
```

Der erste Eintrag gibt das gesamte  $\chi_{\min}^2$  an, während die übrigen Einträge die Beiträge jedes Datenpunkts zum  $\chi_{\min}^2$  angeben, d. h. diese Werte entsprechen den einzelnen Summanden in (4.2). Das dritte Feld gibt wiederum an, ob der Datenpunkt in dem Fit berücksichtigt wurde, d. h. ob er in die Berechnung des  $\chi^2$  integriert wurde.

**BLOCK KaiminiMinosErrors**

Dieser Block wird nur ausgegeben, wenn `MinuitMinos` im Block `KaiminiControl` aktiviert war. Die Einträge in diesem Block haben dann folgende Form:

```

1  eps_1  0  1.97566817E-03  -5.76191169E-03
2  eps_2  1  1.04740420E-02  -8.11782508E-03
3  eps_3  1  1.34566975E-02  -1.56339246E-02

```

Die vierten und fünften Felder geben die Parameterfehler  $\Delta a_{i,U}$  und  $\Delta a_{i,L}$  an. Das dritte Feld gibt an, ob Minuit die Konfidenzgrenzen korrekt bestimmen konnte (1) oder nicht (0).

**BLOCK KaiminiBootstrap**

Dieser Block wird nur ausgegeben, wenn `Bootstrap` im Block `KaiminiControl` aktiviert war. Für jeden Parameter enthält dieser Block dann drei Einträge folgender Form:

```

1  1  eps_1  1.17066629E-02  8.03669799E-03  9.87168045E-03
1  2  eps_1  1.17066629E-02  1.00772816E-02  1.08919722E-02
1  3  eps_1  1.17066629E-02  1.21206240E-02  1.19136434E-02

```

Diese drei Einträge entsprechen den Konfidenzniveaus 68,27 %, 95,45 % und 99,73 %. Das vierte und fünfte Feld geben die Parameterfehler  $\Delta a_{i,U}$  und  $-\Delta a_{i,L}$  an, und das letzte Feld entspricht deren Mittelwert.

An den identischen oberen Fehlern für die verschiedenen Konfidenzniveaus erkennt man, dass bei diesem Aufruf der Bootstrap-Methode nicht genügend Iterationen durchgeführt wurden, um unterschiedliche Fehler zu erhalten.

**BLOCK KaiminiChiSquareContrib**

Dieser Block wird nur ausgegeben, wenn `ChiSquareContrib` im Block `KaiminiControl` aktiviert war. Für jeden Parameter gibt er an, welchen Wert  $\chi^2$  annimmt, wenn der Parameter um  $\pm\Delta a_i$  variiert wird. Beispiele für Einträge in diesem Block sind:

```

1      5.90450034E+01      # eps_1
2      1.84925061E+01      # eps_2
3      1.01508267E+03      # eps_3

```

Aus diesen Werten erhält man eine qualitative Abschätzung wie groß der Einfluß der Parameter auf die gefitteten Datenpunkte  $f_i$  im Mittel ist.

**BLOCK KaiminiChiSquareContribSingle**

Dieser Block ist analog zu Block `KaiminiChiSquareContrib`, nur dass hier die einzelnen Beiträge zum  $\chi^2$  separat aufgeführt sind. Beispiele für Einträge in diesem Block sind:

#### 4. Das Fit-Programm Kaimini

1	1	2.58489249E+01	# eps_1	m <sup>2</sup> _atm
1	2	9.05314511E+00	# eps_1	m <sup>2</sup> _sol
1	3	4.40301636E-02	# eps_1	tan <sup>2</sup> _atm
1	4	2.59151401E+00	# eps_1	tan <sup>2</sup> _sol
1	5	2.13972197E+01	# eps_1	U_e3 <sup>2</sup>
1	6	1.10169456E-01	# eps_1	dw_chi_10

Der Vergleich dieser Werte führt zu einer groben Abschätzung der Beiträge, die die einzelnen Datenpunkte auf die Bestimmung der Parameter haben. Dabei ist zu beachten, dass diese Abschätzung nur dann sinnvoll ist, wenn die Parameter nicht zu stark korreliert sind.

---

---

## KAPITEL 5

---

# Bestimmung der BRpV-Parameter

In diesem Kapitel sollen die Ergebnisse der mit Kaimini durchgeführten Fits dargestellt und diskutiert werden. Als Backend für sämtliche Fits wurde SPheno [57] in der Version 3.0.beta50 verwendet. SPheno steht für Supersymmetric Phenomenology und ist ein Programm, das ausgehend von einer Hochenergietheorie wie mSUGRA, GMSB oder AMSB (siehe Abschnitt 2.4) das SUSY-Spektrum berechnet. Aus den erhaltenen Massen und Mischungsmatrizen werden außerdem Zerfallsbreiten und Verzweigungsverhältnisse von supersymmetrischen Prozessen und andere Beschleunigerobservablen wie kinematische Kanten berechnet. Besonders wichtig für diese Arbeit ist dabei die Berechnung der Massendifferenzen und Mischungswinkel der Neutrinos bei bilinear gebrochener  $R$ -Parität unter Vorgabe der  $R$ -paritätsverletzenden Parameter an der elektroschwachen Skala.

Die für die Fits verwendeten Observablen des MSSM mit BRpV werden über das mSUGRA-Szenario SPS 1a' [29] bestimmt. Dieser Benchmarkpunkt ist dabei durch die Festlegung folgender Parameter an der GUT-Skala spezifiziert:

$$\begin{aligned} m_0 = 70 \text{ GeV}, \quad m_{1/2} = 250 \text{ GeV}, \quad A_0 = -300 \text{ GeV}, \\ \tan \beta = 10, \quad \text{sgn}(\mu) = +1. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Im SPS 1a' stellt das leichteste Neutralino  $\tilde{\chi}_1^0$  mit einer Masse von ca. 98 GeV das LSP dar, so dass dessen Zerfalleigenschaften mit den  $R$ -paritätsverletzenden Parametern korrelieren.

### 5.1. Ideale Neutrinodaten

Bei diesem Fit wurde untersucht, welchen Einfluss Neutrinophysik auf die Bestimmung der  $R$ -paritätsverletzenden Parameter hat. Dazu wurden die BRpV-Parameter an die idealen Neutrinodaten angepasst. Als ideal werden nachfolgend alle Parameter und Observablen bezeichnet, die SPheno über den Schalter 91 im Block SPhenoInput ohne Angabe der BRpV-Parameter berechnet (siehe auch Anhang B). Die Neutrinodaten bestehen dabei aus den zwei Massendifferenzen  $\Delta m_{\text{atm}}^2$  und  $\Delta m_{\odot}^2$  sowie den drei Mischungswinkeln, die durch  $\tan^2 \theta_{\text{atm}}$ ,  $\tan^2 \theta_{\odot}$  und  $\sin^2 \theta_{13} \equiv U_{e3}^2$  gegeben sind (vgl.

## 5. Bestimmung der BRpV-Parameter

**Tab. 5.1.:** Datenpunkte des Fits mit idealen Neutrinodaten und der Zerfallsbreite des  $\tilde{\chi}_1^0$ . Die Fehler der Neutrinodaten entsprechen den gemittelten  $1\sigma$ -Fehlern in Tab. 1.1.

Datenpunkt	Wert	Fehler
$\Delta m_{\odot}^2$ [ $10^{-5}$ eV <sup>2</sup> ]	7,69	0,21
$\Delta m_{\text{atm}}^2$ [ $10^{-3}$ eV <sup>2</sup> ]	2,17	0,12
$\tan^2 \theta_{\odot}$	0,412	0,038
$\tan^2 \theta_{\text{atm}}$	0,926	0,270
$U_{e3}^2$	0,001	0,011
$\Gamma(\tilde{\chi}_1^0)$ [GeV]	$3,71 \cdot 10^{-13}$	15 %

Abschnitt 1.3). Da als Parameter für diesen Fit die sechs BRpV-Parameter ( $\epsilon_i$  und  $v_i$ ) verwendet werden, wird die ideale Zerfallsbreite des leichtesten Neutralinos als zusätzlicher Datenpunkt verwendet, um die BRpV-Parameter zu fixieren. Andernfalls wäre der Fit unterbestimmt, weil die Anzahl der Parameter größer wäre als die Anzahl der Datenpunkte. Für den Parameterpunkt bester Anpassung erwartet man  $\chi^2 \simeq 0$ , da Modellvorhersagen als Datenpunkte verwendet werden. Außerdem werden andere mögliche Parameterpunkte mit akzeptabler Anpassungsgüte aufgrund der Anzahl der Freiheitsgrade (in diesem Fall null) ähnliche  $\chi^2$ -Werte aufweisen. Die für diesen Fit verwendeten Datenpunkte sind in Tab. 5.1 zusammengefasst.

### 5.1.1. Finden der Minima

Die Parameter dieser Fits sind die drei  $\epsilon_i$  sowie die drei Sneutrino-VEVs  $v_i$ . Um alle Minima in einem bestimmten Bereich des Parameterraums zu finden und um die Fehler der Parameter zu bestimmen, wurden verschiedene Algorithmen und Methoden kombiniert. Im ersten Schritt wurde an vielen verschiedenen Startpunkten Minuit Minimize ausgeführt. Die Startpunkte wurden dabei zufällig entsprechend von  $(a_i, a_i^2)$ -Normalverteilungen gewählt, wobei die  $a_i$  den idealen BRpV-Parametern entsprechen. Ist die Punktdichte der Startwerte in dem durch die Normalverteilungen abgedeckten Bereich groß genug, kann davon ausgegangen werden, dass alle Minima in diesem Bereich gefunden werden. Dies ist natürlich sehr stark von der Dimension des Parameterraums, der Anzahl der Minima und der Topologie von  $\chi^2(\mathbf{a})$  abhängig. In dem betrachteten Bereich genügten ungefähr 100 bis 200 Fits mit zufälligen Startpunkten, um alle Minima zu finden. Dabei benötigte Minuit Minize durchschnittlich ca. 600 Aufrufe von SPheno (d. h.  $\chi^2(\mathbf{a})$  wurde pro Fit so oft ausgewertet) bis der Algorithmus konvergierte. Zusätzlich wurden auch die Vorzeichen der Parameter geändert, um zu prüfen welche Auswirkungen Vorzeichenwechsel auf die Fits haben. Nachdem alle Minima bekannt waren, wurden für jedes Minimum die Methoden Minuit Minos und Minuit Contour aufgerufen. Um die Punktdichte in der Umgebung der Minima zu erhöhen, wurden

außerdem beschränkte Random Walks, die sich hauptsächlich in Bereichen mit kleinen  $\chi^2$ -Werten aufhalten, durchgeführt. Wie in Abschnitt 4.1.2 bereits dargelegt, erhöht dies die Genauigkeit mit der Fehler bestimmt werden können, und gleichzeitig wird auch die Auflösung der später dargestellten Likelihood-Karten verbessert.

Bei allen Aufrufen von Kaimini war `SaveAllPoints` eingeschaltet, so dass alle Parameterpunkte, für die  $\chi^2(\mathbf{a})$  berechnet wurde, gespeichert wurden und diese Zwischenschritte für die Auswertung zur Verfügung standen. Das Speichern der Zwischenschritte ist natürlich zwingend erforderlich, um Likelihood-Karten erstellen zu können. Insgesamt wurden für diesen Fit etwa fünfeinhalb Millionen Parameterpunkte ausgewertet, was einer Datenmenge von ca. 600 MB entspricht.

### 5.1.2. Resultate

Ein generelles Ergebnis, das auch für alle noch folgenden Fits gilt, ist, dass sowohl die Neutrinodaten als auch die Zerfallseigenschaften des  $\tilde{\chi}_1^0$  unabhängig vom Vorzeichen der  $\Lambda_i$  sind. Dies folgt aus der beobachteten Symmetrie von  $\chi^2(\mathbf{a})$  unter den Vorzeichenwechseln

$$\Lambda_i = \mu v_i + v_d \epsilon_i \quad \longrightarrow \quad -\Lambda_i = -\mu v_i - v_d \epsilon_i. \quad (5.2)$$

Mit drei  $\Lambda_i$  existieren  $2^3 = 8$  verschiedene Kombinationen für die Vorzeichen dieser Parameter. Das heißt, zu einem gegebenen Minimum gibt es sieben weitere Minima mit gleicher Anpassungsgüte, deren Parameter sich nur in den Vorzeichen unterscheiden. Da die idealen BRpV-Parameter folgende Vorzeichen haben

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\epsilon_1) &= +1, & \text{sgn}(v_1) &= -1, \\ \text{sgn}(\epsilon_2) &= -1, & \text{sgn}(v_2) &= +1, \\ \text{sgn}(\epsilon_3) &= +1, & \text{sgn}(v_3) &= -1, \end{aligned} \quad (5.3)$$

werden nachfolgend alle Minima mit dieser Vorzeichenkombination angegeben.

Die bei diesem Fit gefundenen Minima sind in Tab. 5.2 mit den zugehörigen  $\Lambda_i$  und dem Vorzeichen von  $\epsilon_2 \Lambda_2 / (\epsilon_3 \Lambda_3)$  zusammengefasst. Insgesamt wurden acht verschiedene Minima gefunden. Die in Klammern angegebenen Werte entsprechen dabei den von Minuit über die Hesse-Matrix bestimmten Fehlern. Größtenteils liegen diese Fehler unter einem Prozent, was bei Betrachtung der Fehler der Datenpunkte auf den ersten Blick nicht vertrauenswürdig erscheint. Eine genauere Analyse mittels Minuit Minos liefert z. B. für Minimum Nr. 7 deutlich größere Werte, siehe Tab. 5.3. Dies lässt darauf schließen, dass die Parameter entweder stark korreliert sind, oder  $\chi^2$  an den Minima nur annähernd parabolisch ist (worauf auch die Asymmetrie der Fehler hindeutet), oder beides. Jedoch war auch die Fehleranalyse mit Minos problematisch, da es für viele Minima nur einen Bruchteil der Parameterfehler korrekt bestimmen konnte. Das heißt, bei diesem Fit versagen Minuits Methoden zur Fehlerbestimmung komplett.

### Visualisierung des Parameterraums

Um herauszufinden wieso die Fehlerbestimmung nicht ohne Weiteres möglich ist, ist eine Visualisierung der  $\chi^2$ -Landschaft unumgänglich. Dazu findet eine orthogonale

5. Bestimmung der BRpV-Parameter

**Tab. 5.2.:** Minima beim Fit der BRpV-Parameter an die idealen Neutrino-daten und die Zerfallsbreite des  $\tilde{\chi}_1^0$ . In Klammern sind die von Minuit über die Hesse-Matrix bestimmten Fehler angegeben. Am  $\chi^2$ -Wert des Minimums Nr. 4 ist zu erkennen, dass dieser Punkt den idealen Parametern entspricht.

	1	2	3	4
$\epsilon_1$ [ $10^{-2}$ GeV]	2,698(17)	2,829(17)	3,860(29)	3,92(11)
$\epsilon_2$ [ $10^{-2}$ GeV]	-5,544(23)	-5,438(27)	-4,790(22)	-5,208(54)
$\epsilon_3$ [ $10^{-2}$ GeV]	14,643(26)	14,496(18)	14,063(28)	4,609(78)
$\nu_1$ [ $10^{-3}$ GeV]	-1,570(9)	-1,744(10)	-2,347(17)	-2,338(87)
$\nu_2$ [ $10^{-3}$ GeV]	3,480(14)	3,106(16)	2,712(13)	3,281(34)
$\nu_3$ [ $10^{-3}$ GeV]	-8,862(15)	-8,607(11)	-8,341(17)	-2,593(49)
$\Lambda_1$ [ $10^{-2}$ GeV <sup>2</sup> ]	1,75	-1,97	-1,43	0,29
$\Lambda_2$ [ $10^{-2}$ GeV <sup>2</sup> ]	6,31	-5,77	-6,00	6,41
$\Lambda_3$ [ $10^{-2}$ GeV <sup>2</sup> ]	-3,87	2,63	2,90	6,41
$\text{sgn}\left(\frac{\epsilon_2\Lambda_2}{\epsilon_3\Lambda_3}\right)$	+1	+1	+1	-1
$\chi^2$	$7,3 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$2,4 \cdot 10^{-13}$
	5	6	7	8
$\epsilon_1$ [ $10^{-2}$ GeV]	3,93(13)	3,925(17)	4,00(15)	4,00(13)
$\epsilon_2$ [ $10^{-2}$ GeV]	-5,150(77)	-4,743(16)	-5,084(56)	-5,144(78)
$\epsilon_3$ [ $10^{-2}$ GeV]	4,883(71)	14,123(28)	4,960(80)	4,681(47)
$\nu_1$ [ $10^{-3}$ GeV]	-2,367(61)	-2,324(10)	-2,396(69)	-2,405(92)
$\nu_2$ [ $10^{-3}$ GeV]	2,931(44)	3,006(10)	2,892(33)	3,243(51)
$\nu_3$ [ $10^{-3}$ GeV]	-3,097(41)	-8,559(17)	-3,144(46)	-2,636(29)
$\Lambda_1$ [ $10^{-2}$ GeV <sup>2</sup> ]	-0,69	0,99	-0,02	-0,39
$\Lambda_2$ [ $10^{-2}$ GeV <sup>2</sup> ]	-5,88	6,51	-5,85	6,37
$\Lambda_3$ [ $10^{-2}$ GeV <sup>2</sup> ]	-6,82	-4,17	-6,85	6,43
$\text{sgn}\left(\frac{\epsilon_2\Lambda_2}{\epsilon_3\Lambda_3}\right)$	-1	+1	-1	-1
$\chi^2$	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$5,8 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-8}$

**Tab. 5.3.:** Minimum Nr. 7 beim Fit mit idealen Neutrinodaten. Die asymmetrischen Parameterfehler wurden durch Minuit Minos ermittelt.

Parameter	Best-fit-Wert
$\epsilon_1$ [ $10^{-2}$ GeV]	$4,00^{+0,17}_{-0,29}$
$\epsilon_2$ [ $10^{-2}$ GeV]	$-5,08^{+0,78}_{-0,80}$
$\epsilon_3$ [ $10^{-2}$ GeV]	$5,0^{+1,1}_{-1,2}$
$v_1$ [ $10^{-3}$ GeV]	$-2,40^{+0,14}_{-0,09}$
$v_2$ [ $10^{-3}$ GeV]	$2,89 \pm 0,48$
$v_3$ [ $10^{-3}$ GeV]	$-3,14^{+0,70}_{-0,64}$

Parallelprojektion aller Punkte auf jeweils durch zwei Parameter aufgespannte Ebenen statt. Weisen mehrere Punkte denselben Bildpunkt auf, so wird nur der Punkt mit dem kleinsten  $\chi^2$  berücksichtigt. Dies kann u. a. dazu führen, dass Minima, die im sechsdimensionalen Parameterraum deutlich voneinander getrennt sind, sich in einigen Projektionsebenen überlappen.

Diese Projektionen werden dann auf zwei unterschiedliche Arten dargestellt, zum einen als Likelihood-Karten und zum anderen als Karten der Konfidenzbereiche mit 68 %, 95 % und 99,7 % Konfidenzniveau (kurz: Konfidenzkarten). Bei den Likelihood-Karten werden die Parameter gegen den durch Gl. (4.10) definierten Likelihood-Wert aufgetragen, wobei die verschiedenen Likelihood-Werte durch verschiedene Farben kodiert sind. Für die Konfidenzkarten werden die Konfidenzbereiche über die Sortierung der Likelihood-Werte bestimmt (vgl. Abschnitt 4.1.2). Die zu den verschiedenen Konfidenzbereichen zugehörigen Punkte werden dann durch drei Farben kodiert (schwarz  $\mapsto$  68 %, magenta  $\mapsto$  95 %, hellblau  $\mapsto$  99,7 %).

In den Abb. 5.1 bis 5.4 sind verschiedene Likelihood- und Konfidenzkarten für diesen Fit dargestellt. Besonders auffällig ist dabei der qualitative Unterschied zwischen den Minima mit unterschiedlicher Vorzeichenbedingung. Bei Minima mit  $\epsilon_2\Lambda_2/(\epsilon_3\Lambda_3) > 0$  ist die Punktdichte in deren unmittelbaren Umgebung deutlich geringer, als bei Minima für die die Vorzeichenbedingung erfüllt ist. Dies legt die Vermutung nahe, dass in diesen Bereichen eine sehr starke Korrelation zwischen mindestens zwei Parametern vorliegt, so dass eine kleine zufällige Variation der Parameter zu einer großen Änderung des  $\chi^2$  führt. Diese Vermutung wird durch den in Abschnitt 3.3 dargelegten Sachverhalt bestätigt, da auf Einschleifenniveau die Beiträge zu den Mischungswinkel nicht auf einfache Weise faktorisieren, wenn die Vorzeichenbedingung nicht erfüllt ist. Um dies genauer untersuchen zu können, müssten diese beiden Klassen von Minima getrennt betrachtet werden.

Weiterhin erkennt man an den Auftragungen von  $\epsilon_i$  gegen  $v_i$  die Korrelation zwischen diesen Parameterpaaren, die die funktionale Abhängigkeit der Neutrinodaten von den  $\Lambda_i$  bestätigt. Diese Korrelation kann auch aus der von Minuit bestimmten Korrelati-

## 5. Bestimmung der BRpV-Parameter

**Tab. 5.4.:** Korrelationsmatrix des Minimums Nr. 7 beim Fit mit idealen Neutrino-daten. Die Korrelationsmatrix wird über die von Minuit bestimmte Kovarianzmatrix berechnet und kann daher nur als grobe Näherung der tatsächlichen Korrelationsmatrix betrachtet werden.

Parameter	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$	$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_3$
$\epsilon_1$	1,000	0,165	-0,116	-0,959	-0,173	0,148
$\epsilon_2$	0,165	1,000	0,138	-0,187	-0,951	-0,192
$\epsilon_3$	-0,116	0,138	1,000	0,138	-0,240	-0,979
$\nu_1$	-0,959	-0,187	0,138	1,000	0,238	-0,195
$\nu_2$	-0,173	-0,951	-0,240	0,238	1,000	0,239
$\nu_3$	0,148	-0,192	-0,979	-0,195	0,239	1,000

onsmatrix eines Minimums abgelesen werden, siehe Tab. 5.4, wobei beachtet werden muss, dass die Korrelationsmatrix aus der Kovarianzmatrix  $V^a$  folgt (die proportional zur inversen Hesse-Matrix ist, siehe Gl. (4.13)) und daher aus den bereits dargelegten Gründen nur als sehr grobe Näherung der tatsächlichen Korrelationsmatrix betrachtet werden kann.

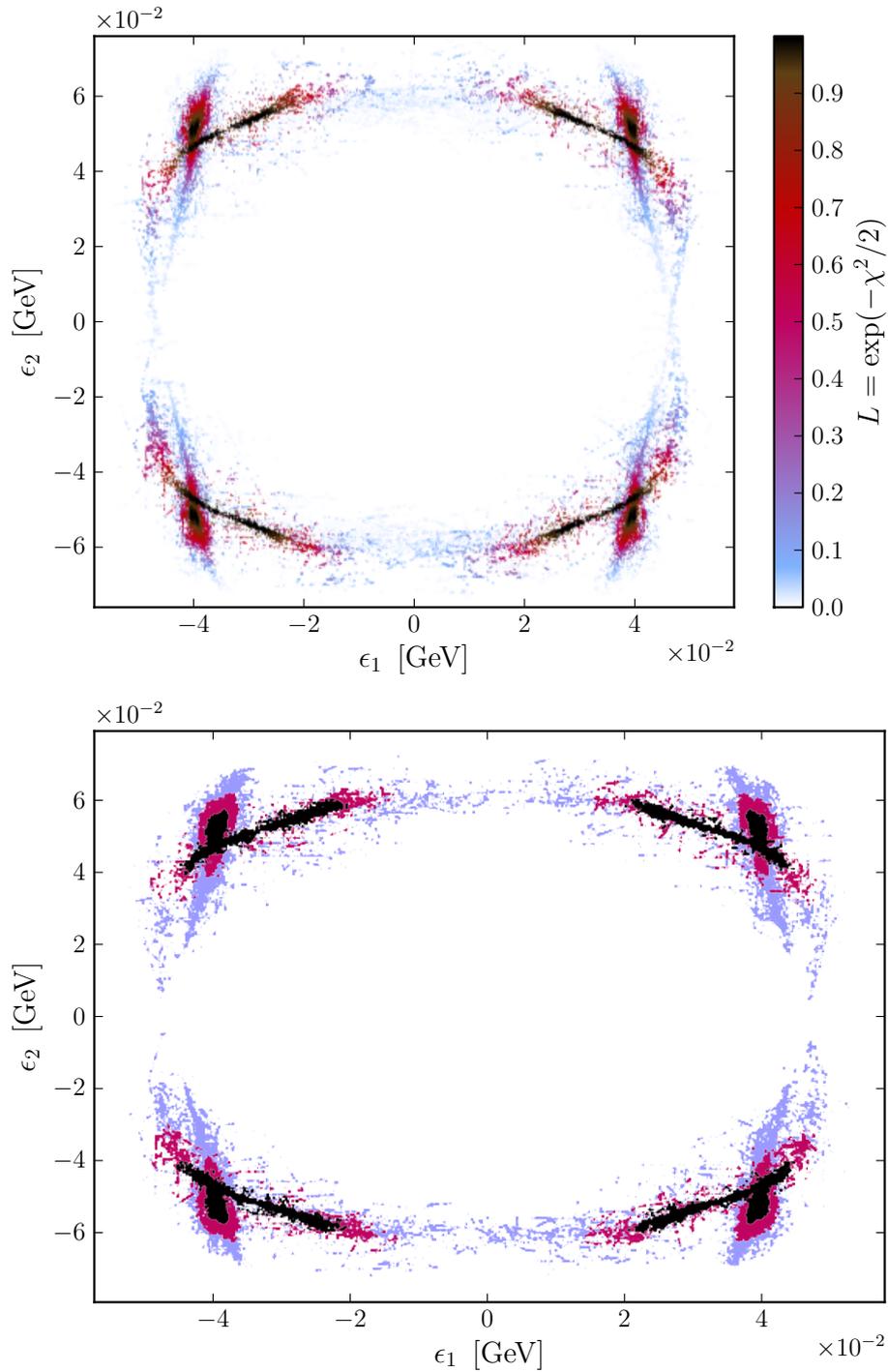
Abschließend soll noch erwähnt werden, dass bei den acht gefundenen Minima die größten Beiträge zum  $\chi^2$  von der Zerfallsbreite des Neutralinos und von  $U_{e3}^2$  stammen. Die Beiträge der anderen Observablen waren immer mindestens eine Größenordnung kleiner.

### Alternative Bestimmung der Parameterfehler

Wie bereits erwähnt, kann Minuit die Parameterfehler nicht korrekt bestimmen. Auch die Bootstrap-Methode wird aufgrund der Komplexität der  $\chi^2$ -Landschaft fehlschlagen, da Fits mit verschiedenen synthetischen Datenpunkten mit hoher Wahrscheinlichkeit zu unterschiedlichen Minima führen würden.

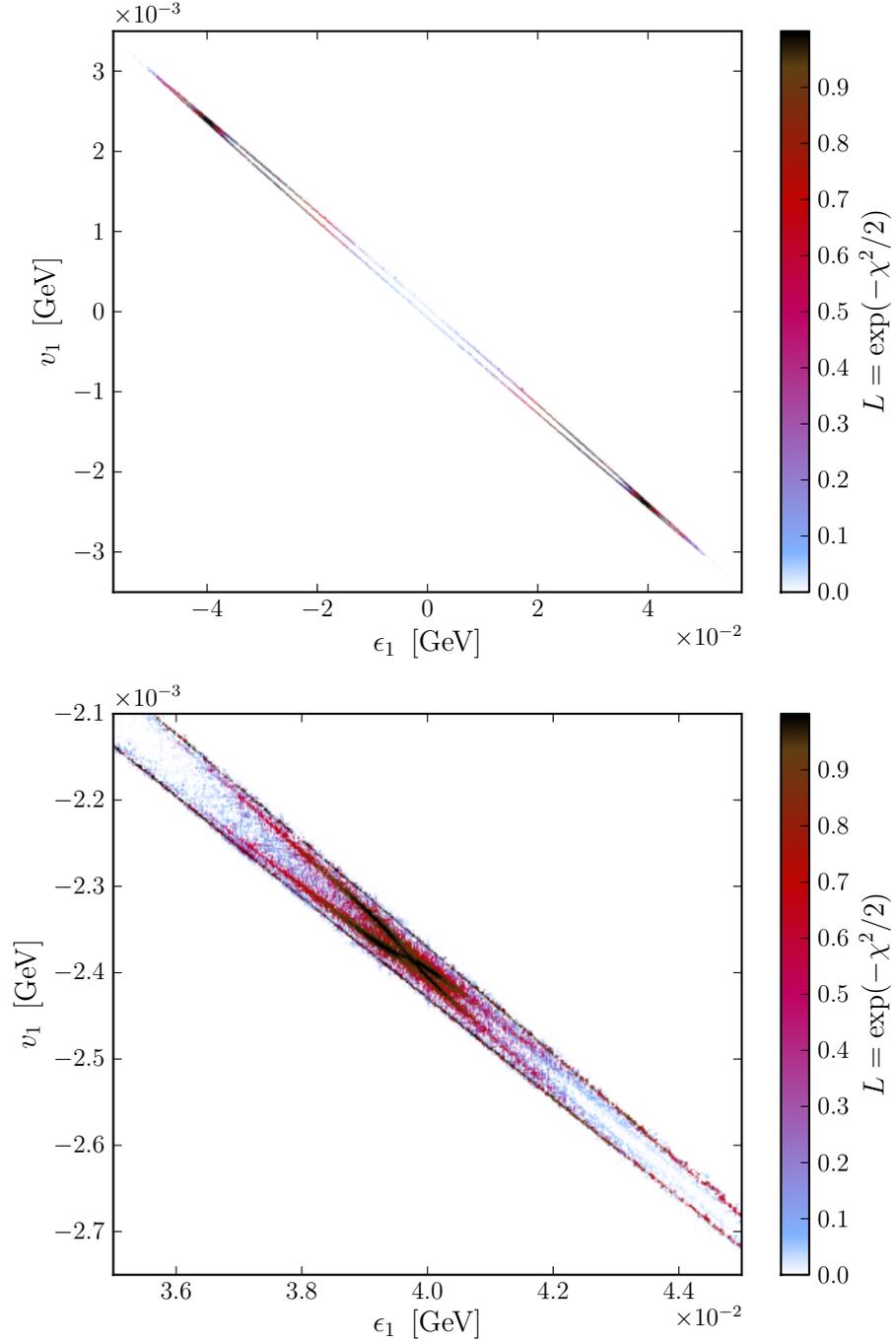
Eine robustere Methode zur Bestimmung der Parameterfehler besteht darin, die Parameterpunkte, für die  $\chi^2(\mathbf{a}) \leq \chi_{\min}^2 + \Delta\chi^2$  gerade noch gilt, direkt aus der Menge aller gespeicherten Punkte zu ermitteln. Um das zu ermöglichen, müssen die Punkte, die sich in der Nähe der einzelnen Minima befinden, separiert werden. Dies ist aber nur dann sinnvoll, wenn sich die Konfidenzbereiche mit einem Konfidenzniveau von mindestens 99,7 % nicht überlappen, da diese sonst nicht als getrennte Minima betrachtet werden sollten. Mögliche Kriterien, um einzelne Minima zu trennen, ergeben sich gegebenenfalls aus den Konfidenzkarten (die Vorzeichenbedingung ist z. B. ein solches Kriterium, siehe Abb. 5.3). Liegen die Parameterpunkte, die den einzelnen Minima zugeordnet werden können, separat vor, lassen sich die Fehler der Parameter dann sehr einfach bestimmen. Diese Methode ist zwar robust in dem Sinne, dass bei hoher Punktdichte die Fehler sehr genau bestimmt werden können, jedoch erfordert sie je nach Anzahl vorhandener Minima einen relativ hohen Aufwand, weshalb sie bei den meisten dieser Fits nicht angewendet werden konnte.

**Abb. 5.1.:** Likelihood- (oben) und Konfidenzkarte (unten) der  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$ -Ebene beim Fit mit idealen Neutrinodaten. Offensichtlich ist die Symmetrie von  $\chi^2(\mathbf{a})$  bezüglich der  $\epsilon_1$ - und  $\epsilon_2$ -Achse, jedoch erkennt man pro Quadrant nur zwei anstatt acht Minima. Weiterhin auffallend sind die ringförmige Struktur und die Übergänge zwischen Minima verschiedener Quadranten.

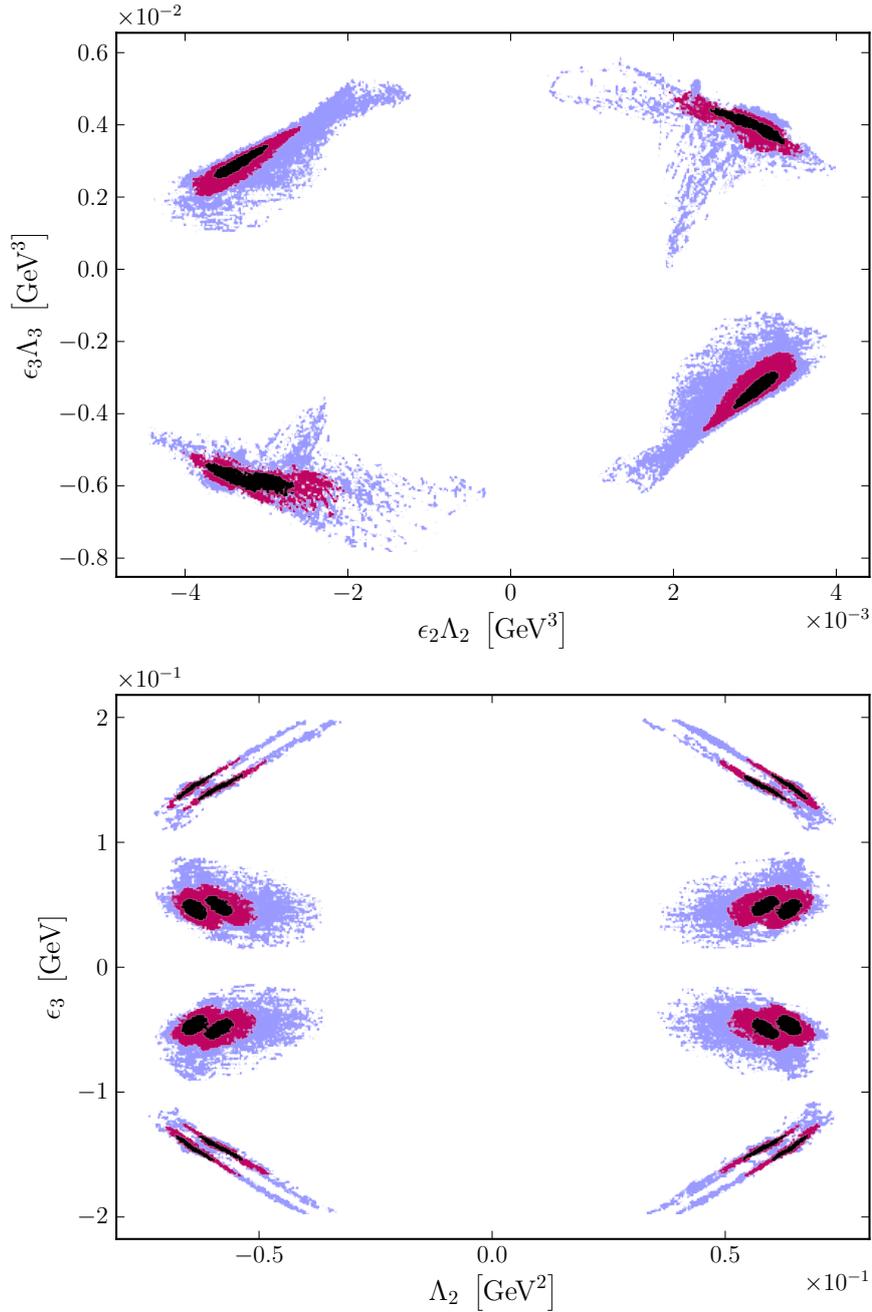


## 5. Bestimmung der BRpV-Parameter

**Abb. 5.2.:** Likelihood-Karten der  $\epsilon_1$ - $v_1$ -Ebene beim Fit mit idealen Neutrinodaten. An der oberen Karte erkennt man die starke Korrelation zwischen  $\epsilon_1$  und  $v_1$ , die die funktionale Abhängigkeit der Neutrinodaten von  $\Lambda_1$  bestätigt. Weiterhin ist  $\chi^2(\mathbf{a})$  nur unter gleichzeitigem Vorzeichenwechsel von  $\epsilon_1$  und  $v_1$  symmetrisch. Die untere Karte stellt einen Ausschnitt vergrößert dar, der eine Überkreuzung zweier Bereiche hoher Anpassungsgüte zeigt.

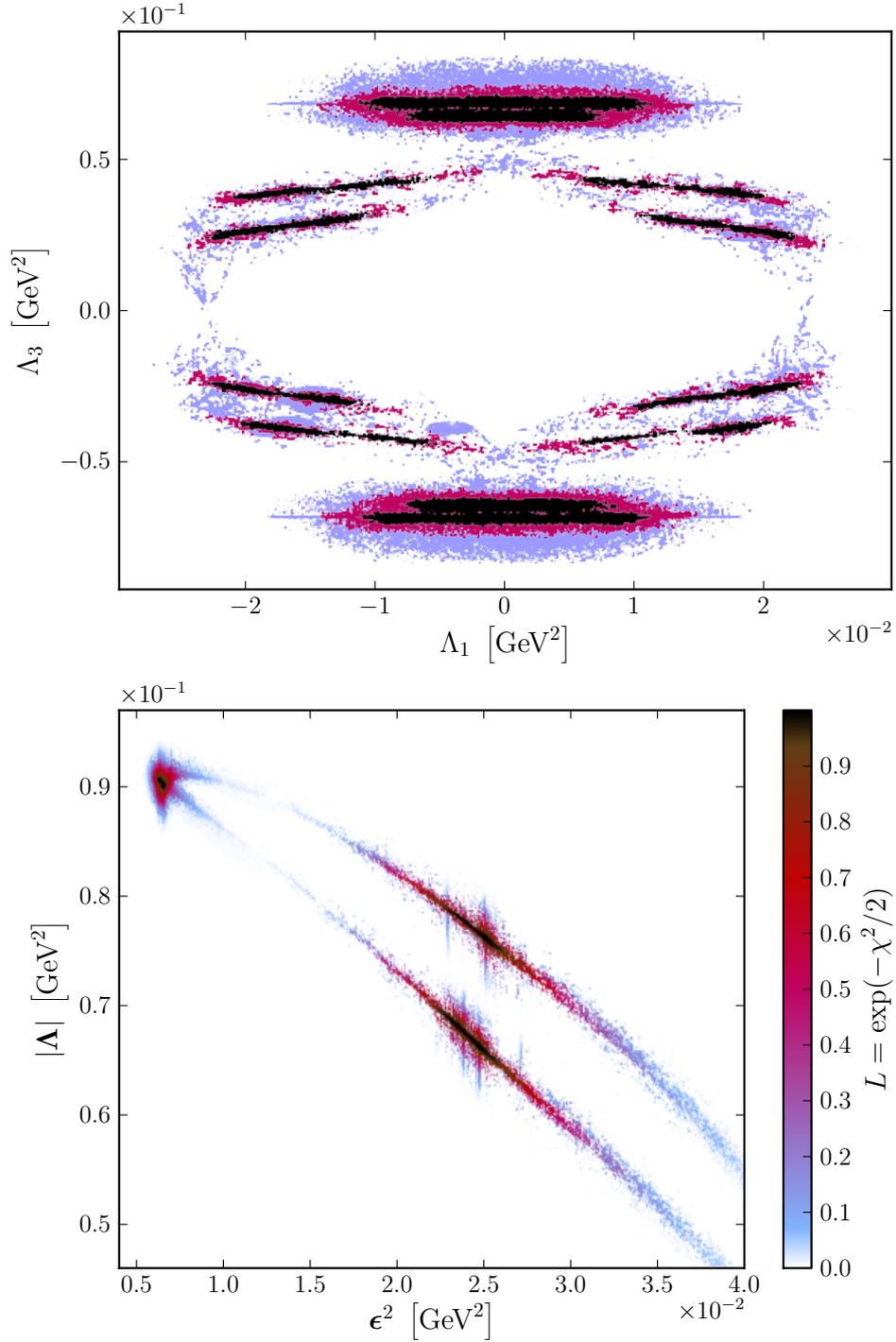


**Abb. 5.3.:** Konfidenzkarten der  $\epsilon_2\Lambda_2$ - $\epsilon_3\Lambda_3$ -Ebene (oben) und der  $\Lambda_2$ - $\epsilon_3$ -Ebene (unten) beim Fit mit idealen Neutrinodaten. Die obere Abbildung zeigt die Abgrenzung der Minima mit unterschiedlicher Vorzeichenbedingung. Außerdem erkennt man, dass die Konfidenzbereiche der Minima mit  $\epsilon_2\Lambda_2/(\epsilon_3\Lambda_3) > 0$  ungenauer bestimmt werden konnten. In der  $\Lambda_2$ - $\epsilon_3$ -Ebene sind die Konfidenzbereiche dieser Minima auch deutlich schmäler als die Konfidenzbereiche der Minima mit  $\epsilon_2\Lambda_2/(\epsilon_3\Lambda_3) < 0$ . Zusätzlich erkennt man in der unteren Abbildung vier getrennte Minima pro Quadrant.



## 5. Bestimmung der BRpV-Parameter

**Abb. 5.4.:** Konfidenzkarte der  $\Lambda_1$ - $\Lambda_3$ -Ebene (oben) und Likelihood-Karte der  $\epsilon^2$ - $|\Lambda|$ -Ebene (unten) beim Fit mit idealen Neutrino­daten. Oben erkennt man wieder den qualitativen Unterschied der Bereiche mit unterschiedlicher Vorzeichen­bedingung. An der unteren Abbildung erkennt man, dass  $\epsilon^2/|\Lambda|$  größer ist für Minima, die die Vorzeichen­bedingung nicht erfüllen.



## 5.2. Experimentelle Neutrinodaten

Bei diesem Fit werden die gleichen Parameter und Observablen verwendet, wie beim Fit mit den idealen Neutrinodaten, jedoch werden nun die experimentellen Neutrinodaten aus Tab. 1.1 verwendet. Die Werte der Datenpunkte mit ihren Fehlern sind in Tab. 5.5 nochmals zusammengefasst. Der größte Unterschied zwischen den idealen und

**Tab. 5.5.:** Datenpunkte des Fits mit experimentellen Neutrinodaten und der Zerfallsbreite des  $\tilde{\chi}_1^0$ . Die Neutrinodaten entsprechen den Werten in Tab. 1.1.

Datenpunkt	Wert	Fehler
$\Delta m_{\odot}^2$ [ $10^{-5}$ eV <sup>2</sup> ]	7,59	0,21
$\Delta m_{\text{atm}}^2$ [ $10^{-3}$ eV <sup>2</sup> ]	2,40	0,12
$\tan^2 \theta_{\odot}$	0,466	0,038
$\tan^2 \theta_{\text{atm}}$	1,000	0,270
$U_{e3}^2$	0,013	0,011
$\Gamma(\tilde{\chi}_1^0)$ [GeV]	$3,71 \cdot 10^{-13}$	15 %

experimentellen Neutrinodaten ist der Wert von  $U_{e3}^2$ , der bei den idealen Daten etwa 10 % des Fehlers entsprach und bei den experimentellen Daten etwas größer als der Fehler ist. Zum Finden der Minima wurde die gleiche Strategie angewendet wie beim vorherigen Fit. Aufgrund der Anzahl der Freiheitsgrade erwartet man wieder  $\chi^2 \simeq 0$  für die Parameterpunkte mit hoher Anpassungsgüte. Insgesamt wurden für diesen Fit über 15 Millionen Parameterpunkte ausgewertet, was einer Datenmenge von ca. 1,7 GB entspricht.

### Resultate

Wie auch beim Fit mit den idealen Neutrinodaten, wurden bei diesem Fit acht Parameterpunkte mit akzeptabler Anpassungsgüte gefunden. Für vier dieser Minima gilt wieder  $\epsilon_2 \Lambda_2 / (\epsilon_3 \Lambda_3) < 0$ , während für die anderen vier dieser Ausdruck positiv ist. Die Parameterpunkte der einzelnen Minima sind in Tab. 5.6 zusammengefasst, wobei die Werte in Klammern wieder die durch Minuit über die Hesse-Matrix ermittelten Fehler angeben. Auch die Fehlerbestimmung über Minuit Minos (siehe Tab. 5.7) ist wieder problematisch, da nur für einen Bruchteil der Minima die Parameterfehler korrekt bestimmt werden konnten. Das heißt, auch bei diesem Fit ist die Fehlerbestimmung nicht ohne Weiteres möglich.

Die Abb. 5.5 bis 5.8 zeigen verschiedene Likelihood- und Konfidenzkarten dieses Fits, die besonders im Vergleich zum Fit mit den idealen Neutrinodaten interessant sind. Der auffälligste Unterschied ist, dass sich einige Konfidenzbereiche nicht mehr überlappen und einzelne Minima deutlicher getrennt erscheinen. Außerdem werden

5. Bestimmung der BRpV-Parameter

**Tab. 5.6.:** Minima beim Fit der BRpV-Parameter an die experimentellen Neutrinodaten und die ideale Zerfallsbreite des  $\tilde{\chi}_1^0$ . In Klammern sind die von Minuit über die Hesse-Matrix bestimmten Fehler angegeben.

	1	2	3	4
$\epsilon_1$ [ $10^{-2}$ GeV]	2,091(28)	2,106(15)	4,001(97)	4,016(92)
$\epsilon_2$ [ $10^{-2}$ GeV]	-5,750(22)	-5,753(27)	-5,130(67)	-5,061(72)
$\epsilon_3$ [ $10^{-2}$ GeV]	14,446(19)	14,520(27)	4,514(63)	4,797(53)
$\nu_1$ [ $10^{-3}$ GeV]	-1,314(17)	-1,203(10)	-2,370(62)	-2,439(53)
$\nu_2$ [ $10^{-3}$ GeV]	3,291(13)	3,608(16)	3,242(43)	2,871(41)
$\nu_3$ [ $10^{-3}$ GeV]	-8,574(12)	-8,793(16)	-2,537(39)	-3,045(31)
$\Lambda_1$ [ $10^{-2}$ GeV <sup>2</sup> ]	-2,46	2,24	0,97	-1,38
$\Lambda_2$ [ $10^{-2}$ GeV <sup>2</sup> ]	-5,84	6,45	6,68	-6,16
$\Lambda_3$ [ $10^{-2}$ GeV <sup>2</sup> ]	2,74	-4,02	6,38	-6,78
$\text{sgn}\left(\frac{\epsilon_2\Lambda_2}{\epsilon_3\Lambda_3}\right)$	+1	+1	-1	-1
$\chi^2$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$6,0 \cdot 10^{-4}$	$5,6 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$
	5	6	7	8
$\epsilon_1$ [ $10^{-2}$ GeV]	4,248(74)	4,254(73)	4,916(31)	4,921(23)
$\epsilon_2$ [ $10^{-2}$ GeV]	-4,856(69)	-4,921(72)	-3,761(27)	-3,762(22)
$\epsilon_3$ [ $10^{-2}$ GeV]	5,027(65)	4,746(53)	13,075(23)	13,181(32)
$\nu_1$ [ $10^{-3}$ GeV]	-2,526(42)	-2,574(46)	-2,961(18)	-2,939(14)
$\nu_2$ [ $10^{-3}$ GeV]	2,750(40)	3,114(46)	2,084(16)	2,429(14)
$\nu_3$ [ $10^{-3}$ GeV]	-3,185(38)	-2,674(34)	-7,734(14)	-8,008(19)
$\Lambda_1$ [ $10^{-2}$ GeV <sup>2</sup> ]	0,64	-1,08	-0,74	0,23
$\Lambda_2$ [ $10^{-2}$ GeV <sup>2</sup> ]	-6,09	6,59	-6,50	6,89
$\Lambda_3$ [ $10^{-2}$ GeV <sup>2</sup> ]	-6,88	6,46	3,51	-4,67
$\text{sgn}\left(\frac{\epsilon_2\Lambda_2}{\epsilon_3\Lambda_3}\right)$	-1	-1	+1	+1
$\chi^2$	$6,2 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$3,8 \cdot 10^{-6}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$

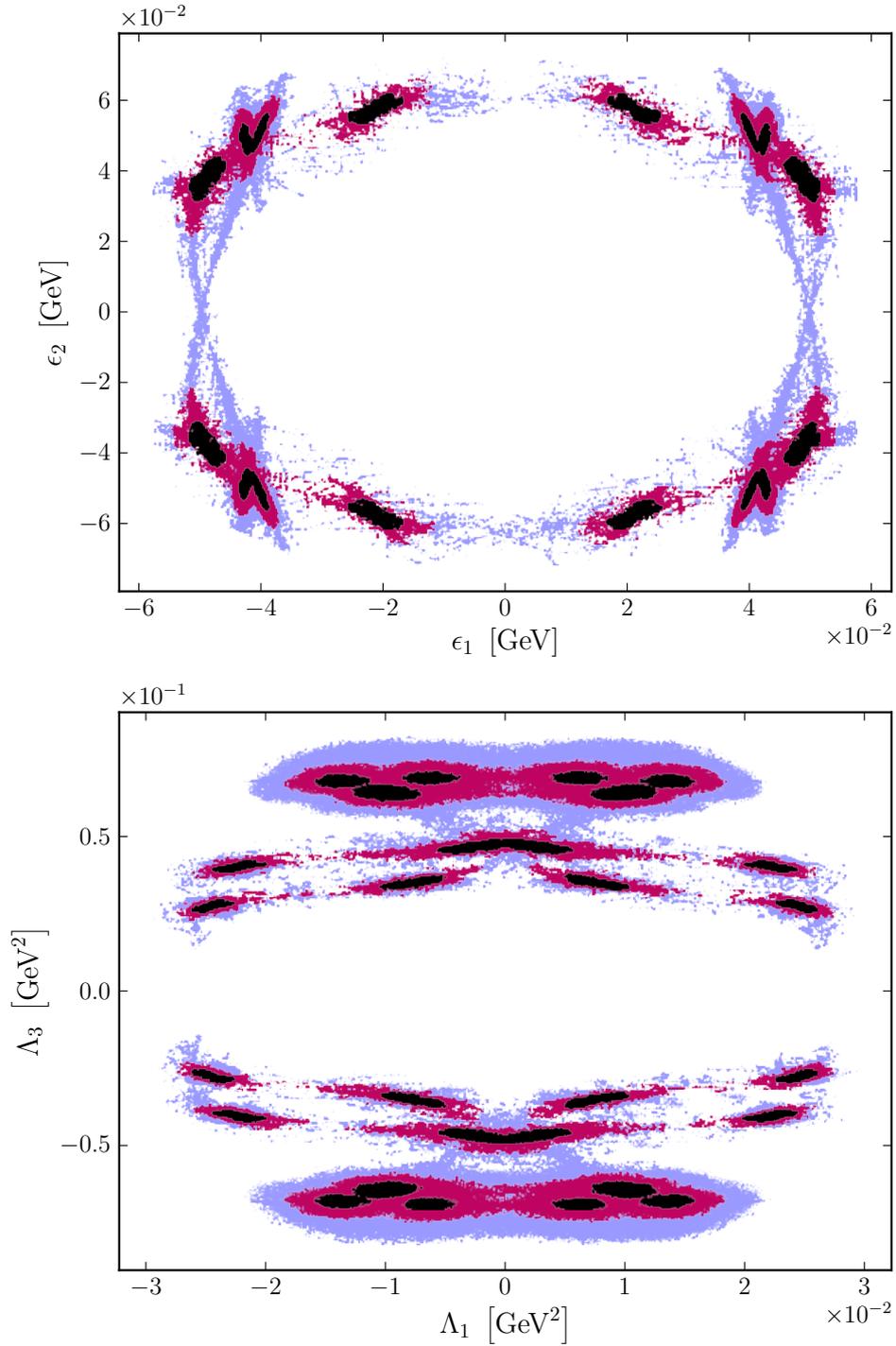
**Tab. 5.7.:** Minimum Nr. 4 beim Fit mit experimentellen Neutrinodaten. Die asymmetrischen Parameterfehler wurden durch die Methode Minuit Minos ermittelt.

Parameter	Best-fit-Wert
$\epsilon_1$ [ $10^{-2}$ GeV]	$4,02^{+0,38}_{-0,23}$
$\epsilon_2$ [ $10^{-2}$ GeV]	$-5,06^{+0,95}_{-0,80}$
$\epsilon_3$ [ $10^{-2}$ GeV]	$4,80^{+1,20}_{-0,72}$
$\nu_1$ [ $10^{-3}$ GeV]	$-2,44^{+0,13}_{-0,14}$
$\nu_2$ [ $10^{-3}$ GeV]	$2,87^{+0,48}_{-0,60}$
$\nu_3$ [ $10^{-3}$ GeV]	$-3,05^{+0,43}_{-0,76}$

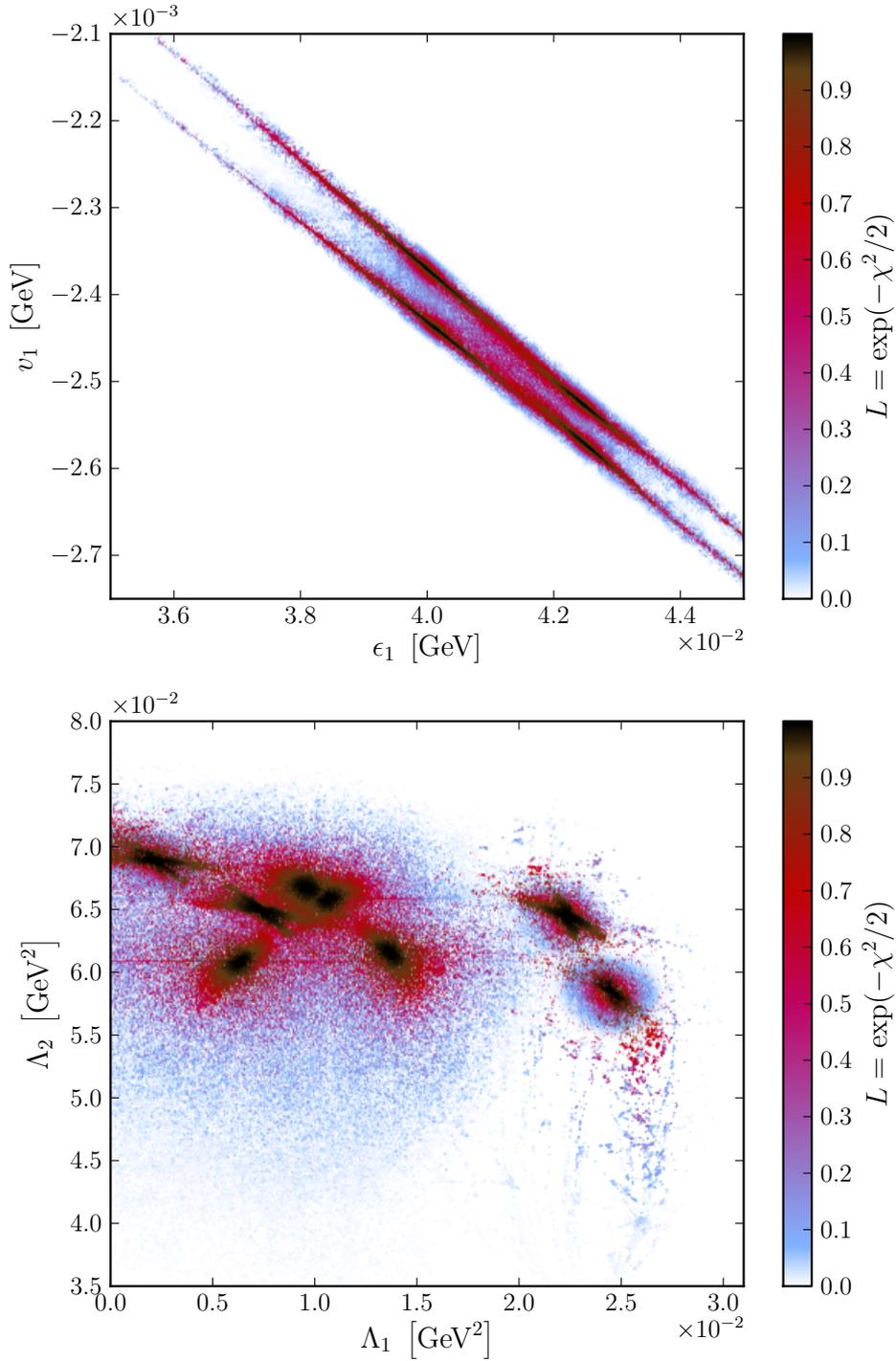
bestimmte Strukturen, wie die Überkreuzung in Abb. 5.2, durch die experimentellen Neutrinodaten aufgelöst. Die größten Beiträge zu den  $\chi^2$ -Werten der verschiedenen Minima, lieferten diesmal die Zerfallsbreite des Neutralinos,  $\tan^2 \theta_{\text{atm}}$  und  $U_{e3}^2$ .

## 5. Bestimmung der BRpV-Parameter

**Abb. 5.5.:** Konfidenzkarten der  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$ -Ebene (oben) und der  $\Lambda_1$ - $\Lambda_3$ -Ebene (unten) beim Fit mit experimentellen Neutrinodaten. Im Vergleich zu den Abb. 5.1 und 5.4 ist zu erkennen, dass die generelle Struktur der Konfidenzbereiche erhalten bleibt, die Minima sich aber verschieben und einige Konfidenzbereiche sich nicht mehr überlappen.

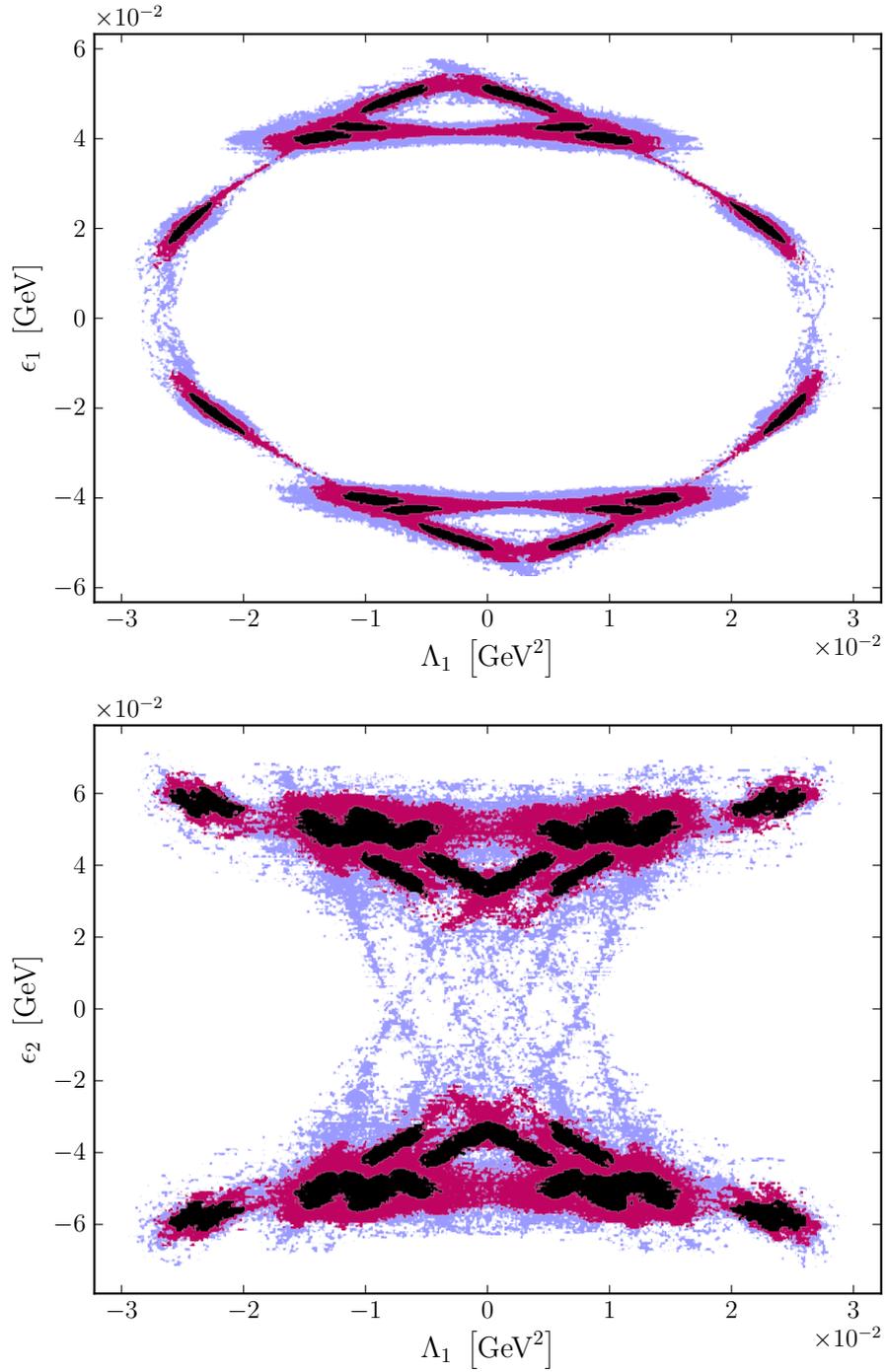


**Abb. 5.6.:** Likelihood-Karten der  $\epsilon_1$ - $v_1$ -Ebene (oben) und der  $\Lambda_1$ - $\Lambda_2$ -Ebene (unten) beim Fit mit experimentellen Neutrinodaten. Oben erkennt man vier Minima und dass die Überkreuzung, die in Abb. 5.2 zu sehen ist, bei diesem Fit aufgehoben wird. Die untere Abbildung zeigt alle acht Minima. Auffällig dabei ist die kreuzförmige Struktur der Minima mit  $\epsilon_2\Lambda_2/(\epsilon_3\Lambda_3) > 0$ .

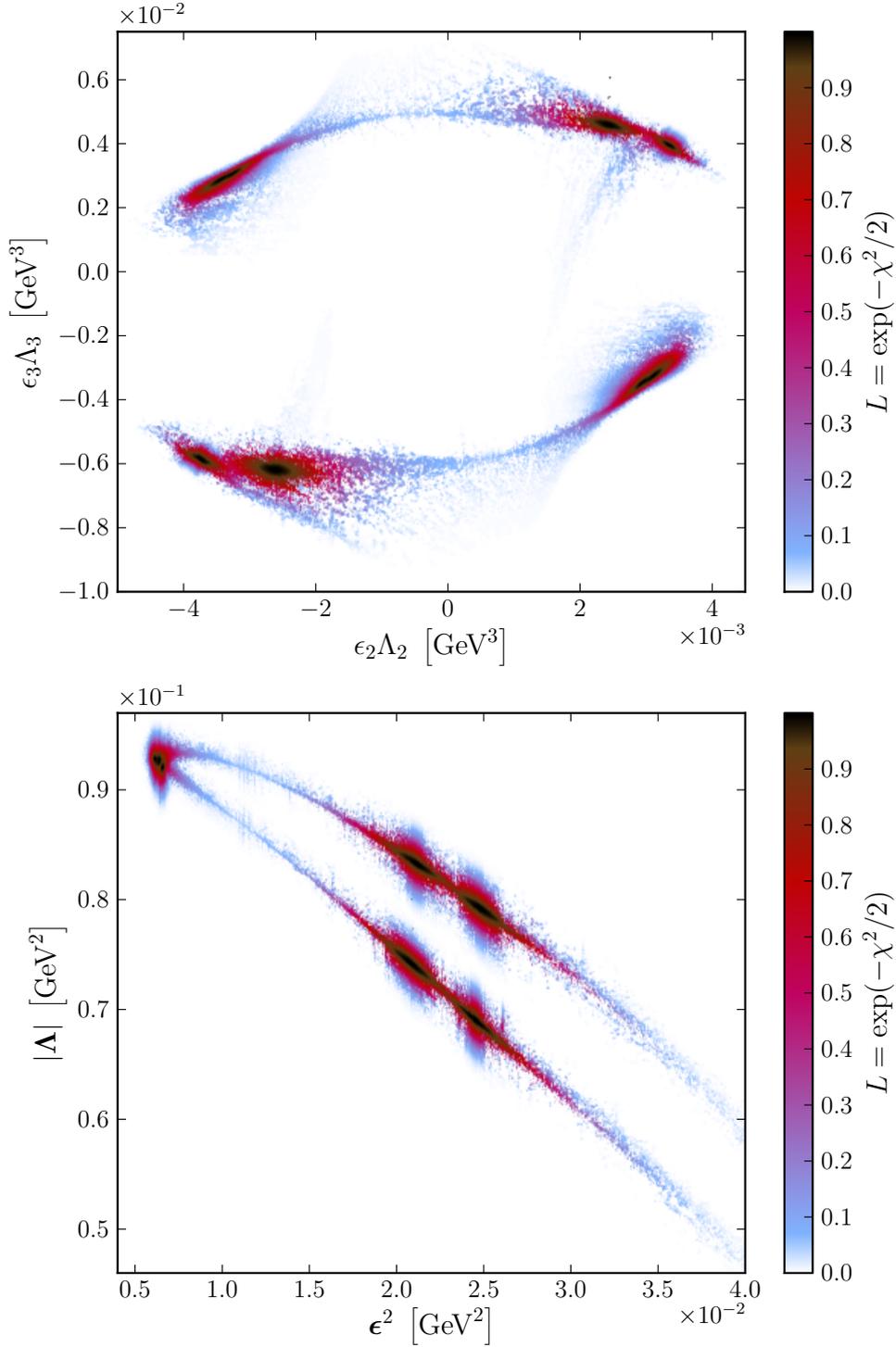


## 5. Bestimmung der BRpV-Parameter

**Abb. 5.7.:** Konfidenzkarten der  $\Lambda_1$ - $\epsilon_1$ -Ebene (oben) und der  $\Lambda_1$ - $\epsilon_2$ -Ebene (unten) beim Fit mit experimentellen Neutrino­daten. Dass die obere Abbildung nicht achsensymmetrisch ist, deutet auf die Abhängigkeit zwischen  $\Lambda_1$  und  $\epsilon_1$  hin. Zusätzlich zeigt sie, dass  $\epsilon_1$  auch unabhängig von  $\Lambda_1$  in die analytischen Ausdrücke der Neutrino­daten und der Zerfallsbreite des  $\tilde{\chi}_1^0$  eingeht.

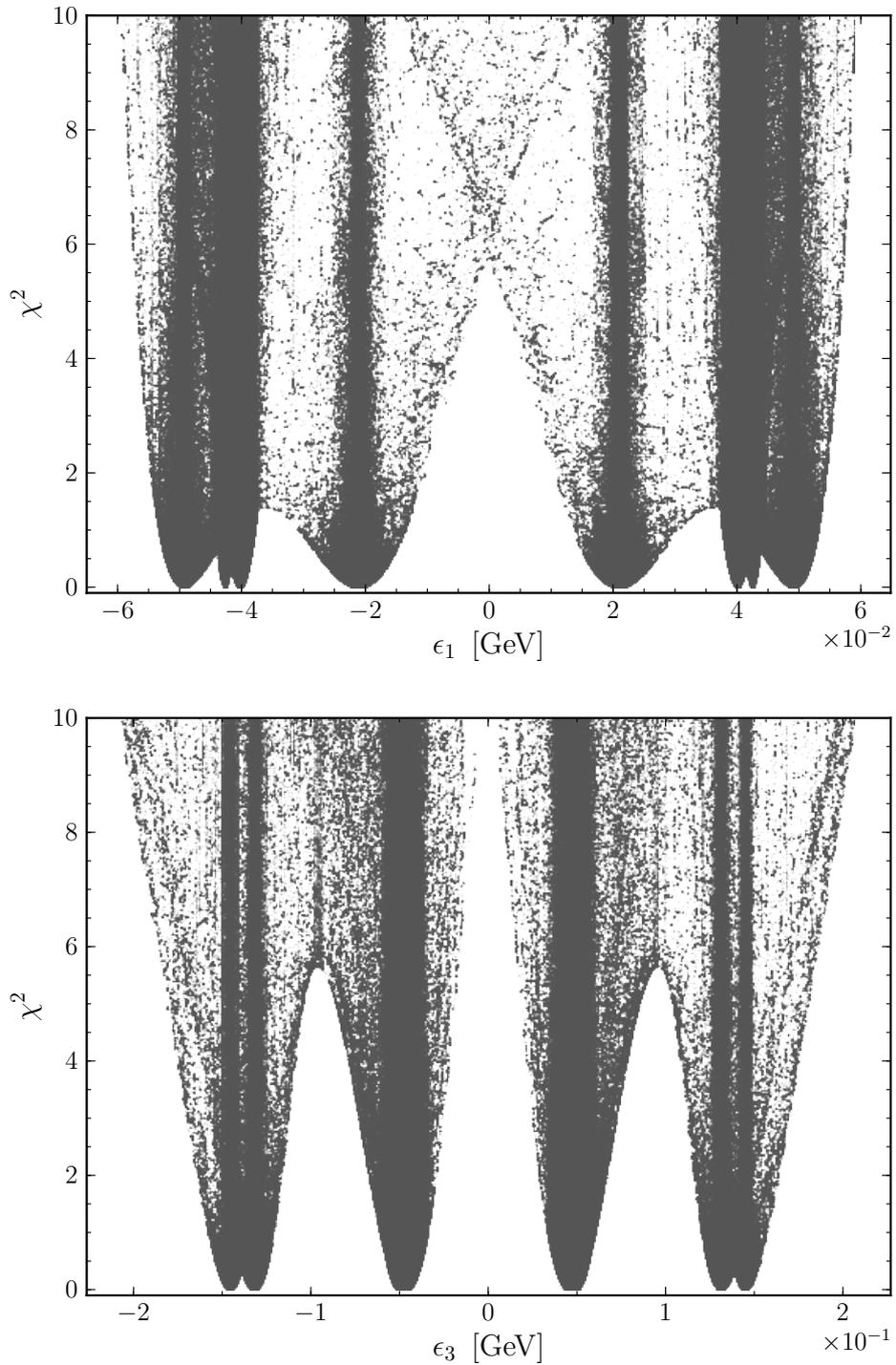


**Abb. 5.8.:** Likelihood-Karten der  $\epsilon_2\Lambda_2$ - $\epsilon_3\Lambda_3$ -Ebene (oben) und der  $\epsilon^2$ - $|\Lambda|$ -Ebene (unten) beim Fit mit experimentellen Neutrinodaten. In beiden Abbildungen erkennt man eine Aufspaltung der Minima mit  $\epsilon_2\Lambda_2/(\epsilon_3\Lambda_3) > 0$  im Vergleich zu den Abb. 5.3 und 5.4.



## 5. Bestimmung der BRpV-Parameter

**Abb. 5.9.:**  $\chi^2$  in Abhängigkeit von  $\epsilon_1$  (oben) und von  $\epsilon_3$  (unten) beim Fit mit experimentellen Neutrino­daten. Diese Abbildungen zeigen wie hoch die Punktdichte in Bereichen mit  $\chi^2 < 10$  ist und wie genau die Parameterfehler aus diesen Daten bestimmt werden können.



### 5.3. Zerfallseigenschaften des Neutralinos

Da die  $R$ -paritätsverletzenden Parameter auch zum Zerfall des LSP führen, werden bei diesem Fit die ideale Zerfallsbreite und die idealen Verzweigungsverhältnisse des leichtesten Neutralinos als Datenpunkte verwendet. In Tab. 5.8 sind diese mit den zugehörigen Fehlern zusammengefasst. Als Parameter werden wieder die drei  $\epsilon_i$  sowie die drei Sneutrino-VEVs  $v_i$  verwendet. Da sich Neutrinos in heutigen Beschleunigern

**Tab. 5.8.:** Datenpunkte des Fits mit der Zerfallsbreite und den Verzweigungsverhältnissen des  $\tilde{\chi}_1^0$ . Über Zerfälle, die sich nur durch die Neutrinosorte im Endzustand unterscheiden, wird bei diesem Fit summiert, d. h.  $\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu X) \equiv \sum_i \text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu_i X)$ .

Datenpunkt	Wert	Fehler
$\Gamma(\tilde{\chi}_1^0)$ [GeV]	$3,71 \cdot 10^{-13}$	15 %
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \mu^+ W^-)$	$1,588 \cdot 10^{-2}$	$0,018 \cdot 10^{-2}$
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \mu^- W^+)$	$1,588 \cdot 10^{-2}$	$0,018 \cdot 10^{-2}$
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \tau^+ W^-)$	$1,769 \cdot 10^{-2}$	$0,059 \cdot 10^{-2}$
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \tau^- W^+)$	$1,769 \cdot 10^{-2}$	$0,059 \cdot 10^{-2}$
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu Z^0)$	$7,83 \cdot 10^{-3}$	$0,13 \cdot 10^{-3}$
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu b\bar{b})$	$2,989 \cdot 10^{-2}$	$0,077 \cdot 10^{-2}$
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu \mu^- e^+)$	$1,37 \cdot 10^{-4}$	$0,17 \cdot 10^{-4}$
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu \mu^+ e^-)$	$1,37 \cdot 10^{-4}$	$0,17 \cdot 10^{-4}$
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu \mu^+ \mu^-)$	$6,66 \cdot 10^{-4}$	$0,37 \cdot 10^{-4}$
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu \tau^+ e^-)$	$7,95 \cdot 10^{-2}$	$0,13 \cdot 10^{-2}$
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu \tau^- e^+)$	$7,95 \cdot 10^{-2}$	$0,13 \cdot 10^{-2}$
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu \tau^+ \mu^-)$	0,1391	0,0017
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu \tau^- \mu^+)$	0,1391	0,0017
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu \tau^+ \tau^-)$	0,4566	0,0030

nur durch fehlende Energie bemerkbar machen, wird bei diesem Fit über Zerfälle, die sich nur durch die Neutrinosorte im Endzustand unterscheiden, summiert. Für den relativen Fehler der Verzweigungsverhältnisse wird dabei

$$\frac{\Delta \text{BR}_i}{\text{BR}_i} = \frac{2}{\sqrt{N_i}} \quad \text{mit} \quad N_i = 2 \cdot 10^6 \text{BR}_i \quad (5.4)$$

angesetzt. Aufgrund der erschwerten Rekonstruktion von Zerfällen, deren Zerfallsprodukte hadronisieren, wurde  $N_i$  für Zerfälle, die Quarks und Tauonen im Endzustand enthalten, auf 10 % gesenkt.

Zum Finden der Minima wurde wieder dieselbe Strategie wie in den zwei vorangegangenen Fits verwendet. Sehr interessant bei diesem Fit ist die Tatsache, dass nicht

## 5. Bestimmung der BRpV-Parameter

nur die Zerfallsbreite und die Verzweungsverhältnisse, sondern auch die Anzahl der Zerfallskanäle abhängig von den BRpV-Parametern sind. Dies bedeutet, dass  $\chi^2(\mathbf{a})$  Unstetigkeiten aufweist und damit keine glatte Funktion mehr ist. Die Konsequenzen, die sich daraus ergeben sind, dass mehrere lokale Minima mit großen  $\chi^2$ -Werten existieren und dass die Optimierungsalgorithmen leichter in diesen Minima „steckenbleiben“ können. Außerdem legt dies die Vermutung nahe, dass auch in diesem Fall die Fehlerbestimmung mit Minuit nicht möglich sein wird.

### Resultate

Die bei diesem Fit gefundenen Minima mit  $\chi^2 < 1$  sind in Tab. 5.9 dargestellt. Auf die Angabe der durch Minuit ermittelten Fehler wird hierbei verzichtet, da diese, wie auch bei den vorangegangenen Fits, deutlich zu klein sind, was bei Betrachtung der Konfidenzkarten offensichtlich wird. Auch die Fehleranalyse mit Minuit Minos schlägt aufgrund der Unstetigkeit von  $\chi^2(\mathbf{a})$  fehl.

Jedes der angegebenen Minima weist eine andere Kombination von offenen Zerfallskanälen auf. In Tab. 5.10 sind die Unterschiede zwischen den Zerfallskanälen der einzelnen Minima im Vergleich zu Minimum Nr. 3 (welches den idealen Parametern entspricht) angegeben. In Tab. 5.11 sind pro Minimum die drei größten Beiträge der einzelnen Observablen zum  $\chi^2$  angegeben. Die Abb. 5.10 bis 5.13 zeigen unterschiedliche Konfidenzkarten für diesen Fit, die eine Abschätzung der Parameterfehler erlauben. Generell stellt man fest, dass die Konfidenzbereiche bei diesem Fit deutlich kleiner sind, als bei den Fits mit den Neutrinodaten, was aufgrund der größeren Anzahl an Freiheitsgraden zu erwarten war.

**Tab. 5.9.:** Minima beim Fit der BRpV-Parameter an die ideale Zerfallsbreite und die idealen Verzweigungsverhältnisse des  $\tilde{\chi}_1^0$ . Minimum Nr. 3 entspricht den idealen Parametern. Auf die Angabe der durch Minuit bestimmten Fehler wird hier verzichtet, da diese auch bei diesem Fit nicht die tatsächlichen Parameterfehler wiedergeben, wie es aus den später dargestellten Konfidenzkarten ersichtlich ist.

	1	2	3	4
$\epsilon_1 [10^{-2} \text{ GeV}]$	3,71	3,91	3,92	3,92
$\epsilon_2 [10^{-2} \text{ GeV}]$	-4,88	-5,21	-5,21	-5,21
$\epsilon_3 [10^{-2} \text{ GeV}]$	4,34	4,63	4,61	4,62
$v_1 [10^{-3} \text{ GeV}]$	-2,23	-2,30	-2,34	-2,37
$v_2 [10^{-3} \text{ GeV}]$	2,78	3,28	3,28	3,28
$v_3 [10^{-3} \text{ GeV}]$	-2,44	-2,94	-2,59	2,60
$\Lambda_1 [10^{-2} \text{ GeV}^2]$	-0,40	1,46	0,29	-0,77
$\Lambda_2 [10^{-2} \text{ GeV}^2]$	-5,56	6,41	6,41	6,41
$\Lambda_3 [10^{-2} \text{ GeV}^2]$	6,05	-6,59	6,41	6,40
$\text{sgn}\left(\frac{\epsilon_2 \Lambda_2}{\epsilon_3 \Lambda_3}\right)$	+1	+1	-1	-1
$\chi^2$	0,69	0,34	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$4,0 \cdot 10^{-3}$
	5	6	7	8
$\epsilon_1 [10^{-2} \text{ GeV}]$	3,93	4,05	4,06	3,93
$\epsilon_2 [10^{-2} \text{ GeV}]$	-5,16	-5,34	-5,34	-5,16
$\epsilon_3 [10^{-2} \text{ GeV}]$	4,62	4,76	4,82	4,65
$v_1 [10^{-3} \text{ GeV}]$	-2,36	-2,39	-2,42	-2,39
$v_2 [10^{-3} \text{ GeV}]$	2,94	3,04	3,04	2,94
$v_3 [10^{-3} \text{ GeV}]$	-2,60	-3,03	-2,71	-2,95
$\Lambda_1 [10^{-2} \text{ GeV}^2]$	-0,52	1,16	0,23	-1,46
$\Lambda_2 [10^{-2} \text{ GeV}^2]$	-5,88	-6,08	-6,09	-5,88
$\Lambda_3 [10^{-2} \text{ GeV}^2]$	6,40	-6,81	6,63	-6,59
$\text{sgn}\left(\frac{\epsilon_2 \Lambda_2}{\epsilon_3 \Lambda_3}\right)$	+1	-1	+1	-1
$\chi^2$	0,12	0,77	0,42	0,35

5. Bestimmung der BRpV-Parameter

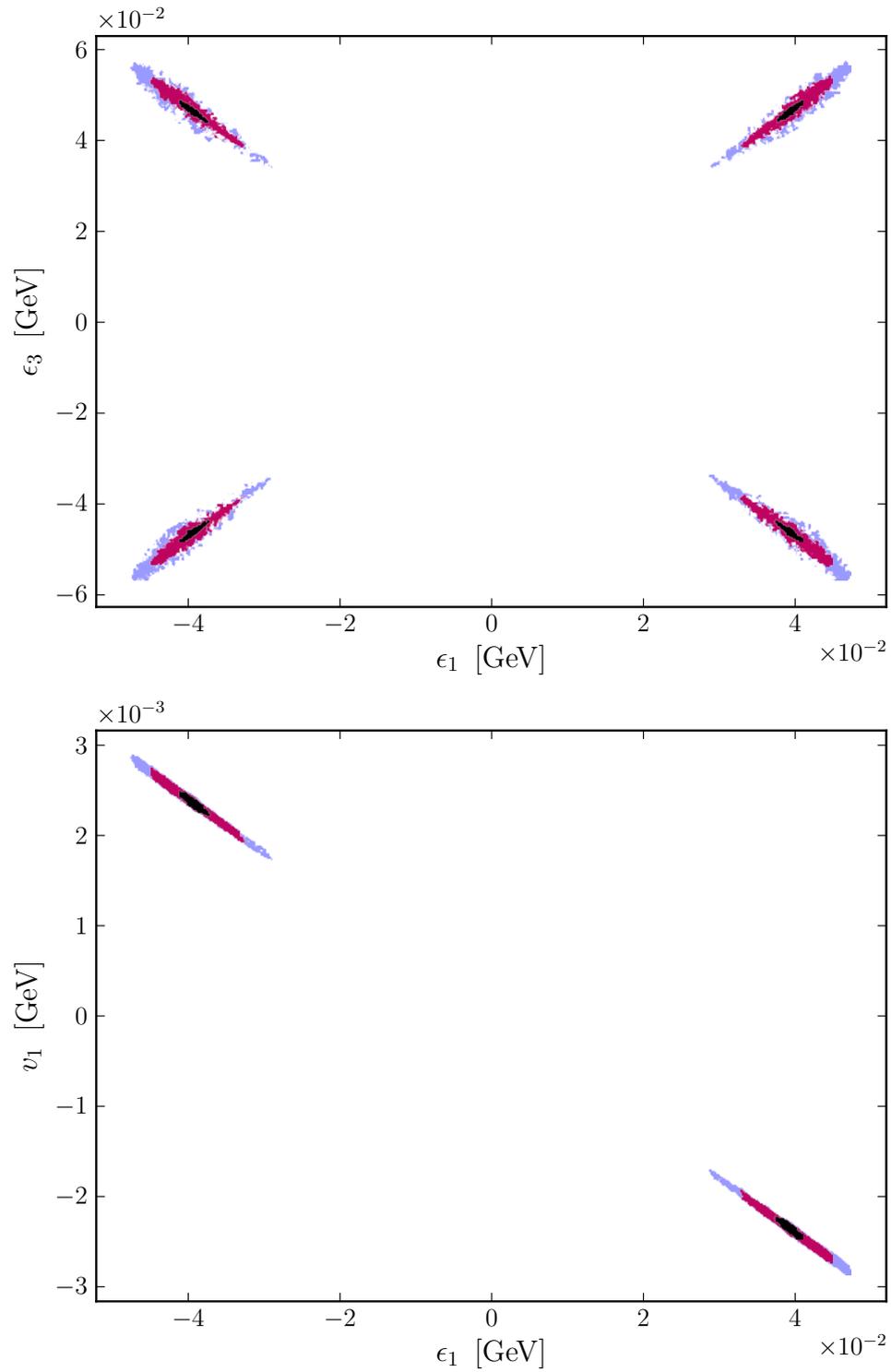
**Tab. 5.10.:** Unterschiede zwischen den Zerfallskanälen der einzelnen Minima im Vergleich zu Minimum Nr. 3 beim Fit mit den Zerfallseigenschaften des  $\tilde{\chi}_1^0$ . Ein „+“ bedeutet, dass der Zerfallskanal am entsprechenden Parameterpunkt hinzugekommen ist, ein „-“ hingegen, dass der Kanal am entsprechenden Parameterpunkt fehlt.

1	2	3	4
+ $\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu_\tau b\bar{b}$	+ $\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow e^\pm W^\mp$		+ $\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow e^\pm W^\mp$
	+ $\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu_\tau b\bar{b}$		+ $\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu_\tau b\bar{b}$
			- $\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu_e b\bar{b}$
5	6	7	8
+ $\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu_\tau b\bar{b}$	+ $\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow e^\pm W^\mp$	+ $\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu_\tau b\bar{b}$	+ $\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow e^\pm W^\mp$
	+ $\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu_\tau b\bar{b}$		
	- $\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu_e b\bar{b}$		

**Tab. 5.11.:** Die größten drei Beiträge der einzelnen Observablen zum  $\chi^2$  pro Minima beim Fit mit den Zerfallseigenschaften des  $\tilde{\chi}_1^0$ . Die Observablen sind absteigend nach der Größe ihrer Beiträge sortiert.

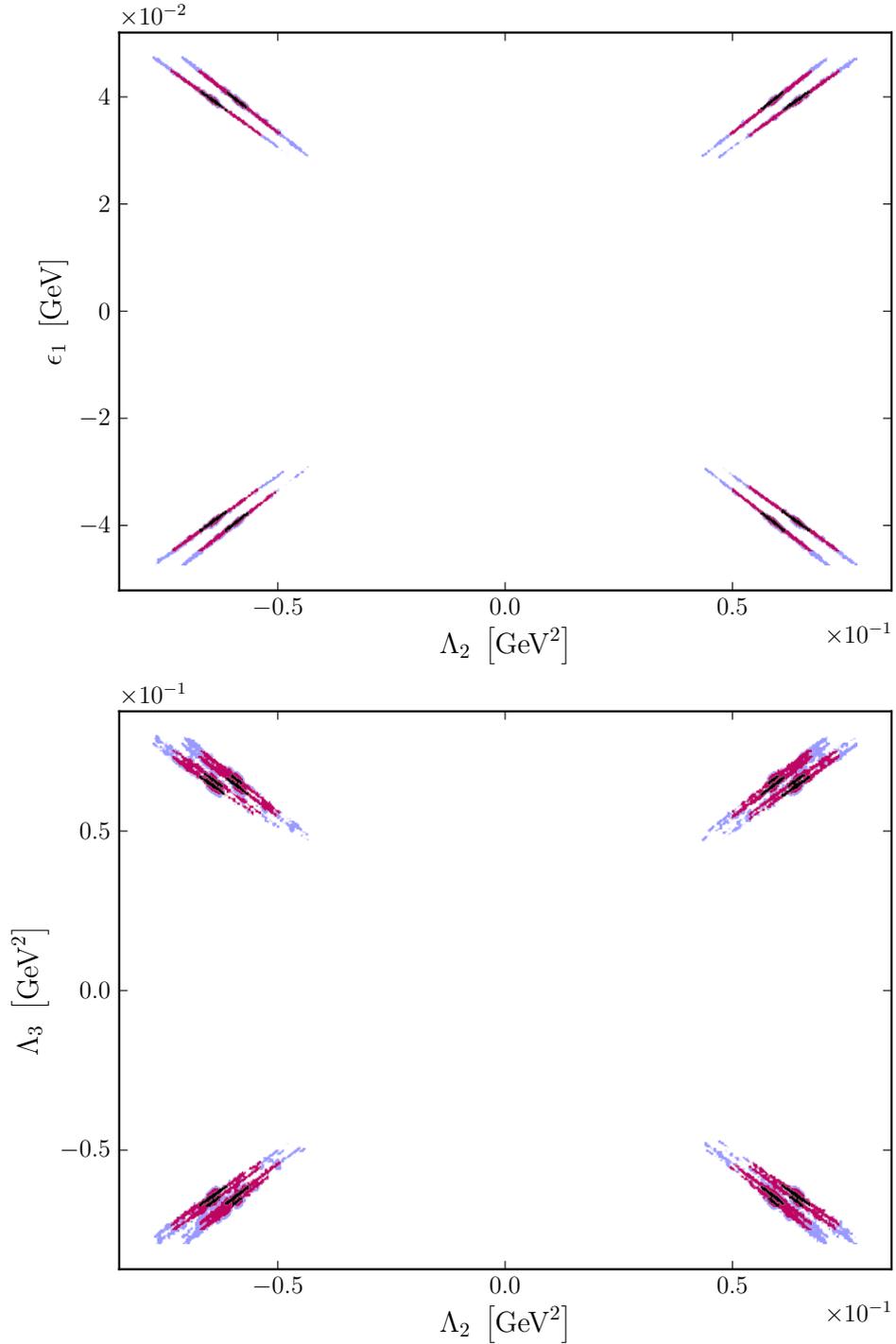
1	2	3	4
$\Gamma(\tilde{\chi}_1^0)$	$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu\tau^+\tau^-)$	$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \mu^\pm W^\mp)$	$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu\mu^+\mu^-)$
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu b\bar{b})$	$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu\tau^\pm\mu^\mp)$	$\Gamma(\tilde{\chi}_1^0)$	$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu b\bar{b})$
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu\tau^\pm\mu^\mp)$	$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu Z^0)$	$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \tau^\pm W^\mp)$	$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu\tau^\pm\mu^\mp)$
5	6	7	8
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu\tau^\pm\mu^\mp)$	$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu\tau^+\tau^-)$	$\Gamma(\tilde{\chi}_1^0)$	$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu\tau^+\tau^-)$
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu\tau^+\tau^-)$	$\Gamma(\tilde{\chi}_1^0)$	$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu\mu^+\mu^-)$	$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu\tau^\pm\mu^\mp)$
$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu\mu^+\mu^-)$	$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu b\bar{b})$	$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu\tau^+\tau^-)$	$\text{BR}(\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \nu\tau^\pm e^\mp)$

**Abb. 5.10.:** Konfidenzkarten der  $\epsilon_1$ - $\epsilon_3$ -Ebene (oben) und der  $\epsilon_1$ - $v_1$ -Ebene (unten) beim Fit mit den Zerfallseigenschaften des  $\tilde{\chi}_1^0$ . Die Abbildungen zeigen die Symmetrie von  $\chi^2(\mathbf{a})$  unter dem Vorzeichenwechsel  $\Lambda_1 \rightarrow -\Lambda_1$ .

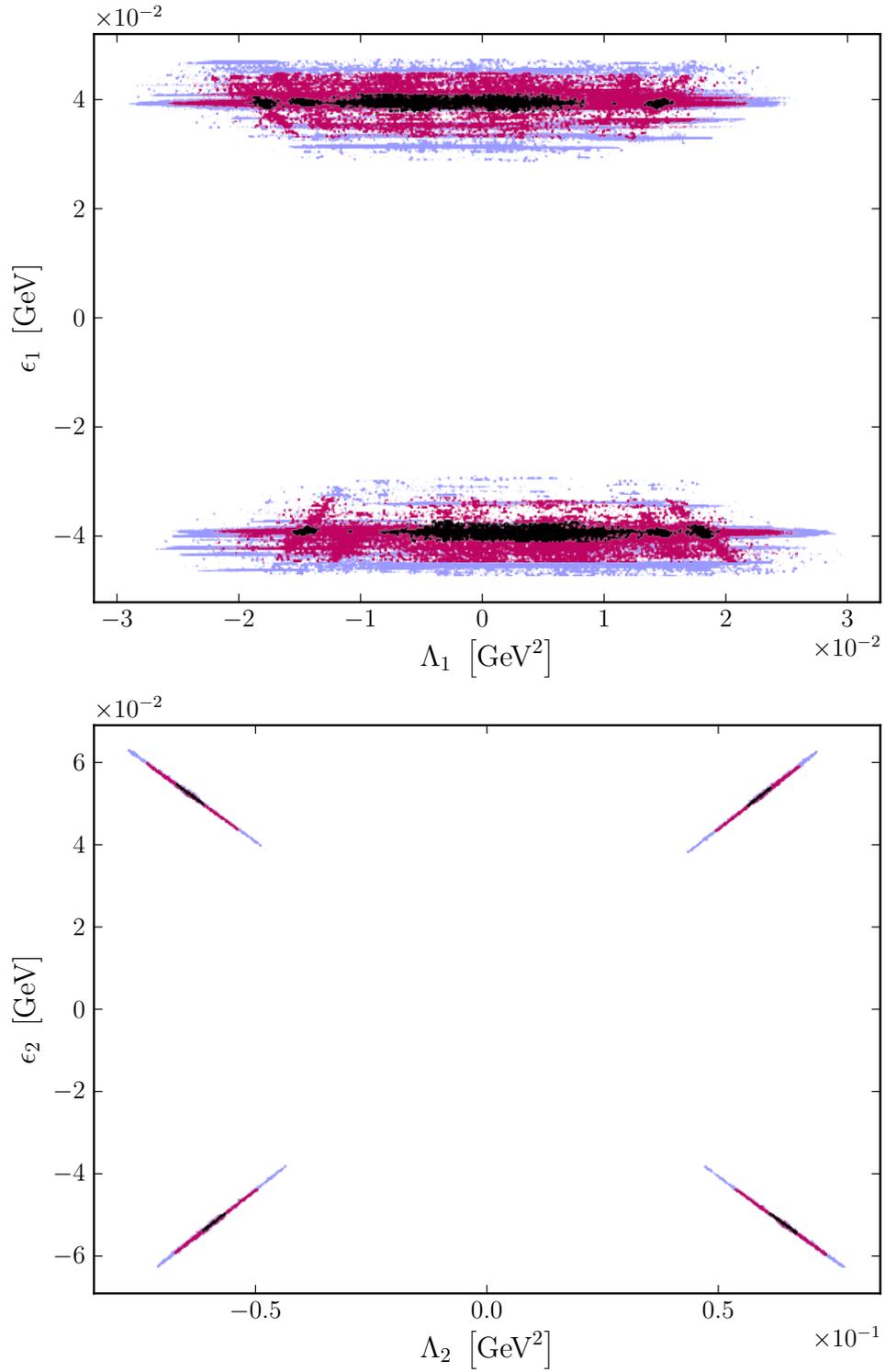


## 5. Bestimmung der BRpV-Parameter

**Abb. 5.11.:** Konfidenzkarten der  $\Lambda_2$ - $\epsilon_1$ -Ebene (oben) und der  $\Lambda_2$ - $\Lambda_3$ -Ebene (unten) beim Fit mit den Zerfalleigenschaften des  $\tilde{\chi}_1^0$ . Oben sind zwei Minima pro Quadrant zu erkennen, unten erkennt man vier Minima. Auffällig ist die ähnliche Größe der Konfidenzbereiche, die zu verschiedenen Minima gehören.

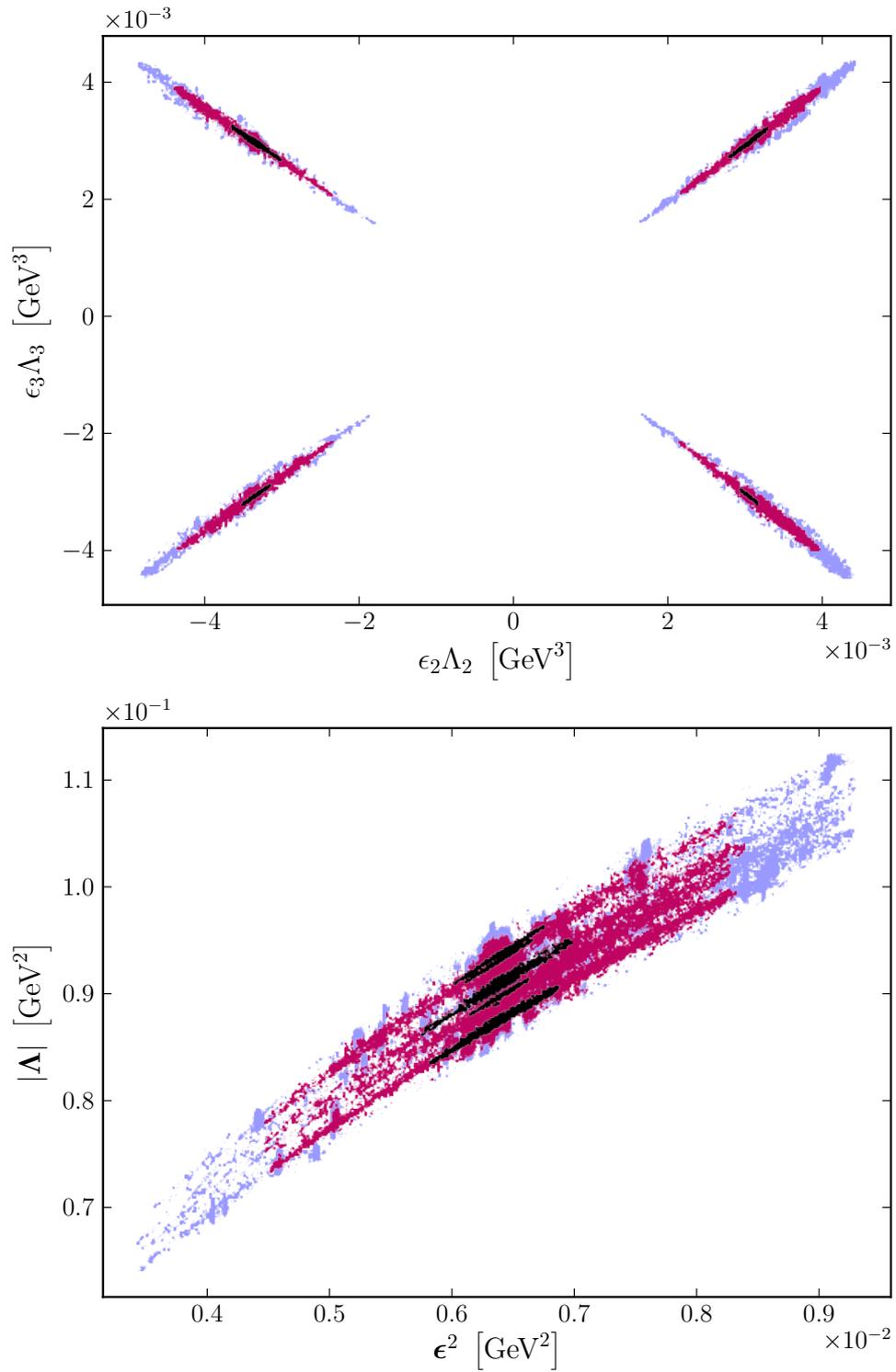


**Abb. 5.12.:** Konfidenzkarten der  $\Lambda_1$ - $\epsilon_1$ -Ebene (oben) und der  $\Lambda_2$ - $\epsilon_2$ -Ebene (unten) beim Fit mit den Zerfallseigenschaften des  $\tilde{\chi}_1^0$ . Interessant ist hier der qualitative Unterschied zwischen  $(\Lambda_1, \epsilon_1)$  und  $(\Lambda_2, \epsilon_2)$ .



5. Bestimmung der BRpV-Parameter

**Abb. 5.13.:** Konfidenzkarten der  $\epsilon_2\Lambda_2$ - $\epsilon_3\Lambda_3$ -Ebene (oben) und der  $\epsilon^2$ - $|\Lambda|$ -Ebene (unten) beim Fit mit den Zerfallseigenschaften des  $\tilde{\chi}_1^0$ . Auf beiden Abbildungen sind vier Minima zu erkennen.



## 5.4. Neutrinodaten und Zerfallseigenschaften des Neutralinos

Bei Betrachtung der Konfidenzkarten der vorausgegangenen Fits wird deutlich, dass die Kombination von Neutrinodaten und Zerfallseigenschaften des Neutralinos die Parameterbereiche mit hoher Anpassungsgüte sehr stark einschränken wird. Bei diesem Fit werden daher die BRpV-Parameter an die idealen Neutrinodaten und die idealen Zerfallseigenschaften des  $\tilde{\chi}_1^0$  gefittet. Zusätzlich wird dabei untersucht wie sich die Bestimmung des mSUGRA-Punkts auf die Bestimmung der BRpV-Parameter auswirkt. Dazu werden  $m_0$ ,  $m_{1/2}$ ,  $A_0$  und  $\tan\beta$  als freie Parameter sowie die kinematischen Kanten aus dem Block `LHCobservables` und die Massen der Neutralinos, Charginos, Sneutrinos, Sleptonen und des  $\tilde{t}_1$  als Datenpunkte für den Fit verwendet. Die Werte dieser Datenpunkte sind in Anhang B zu finden und deren Fehler wurden [61] entnommen.

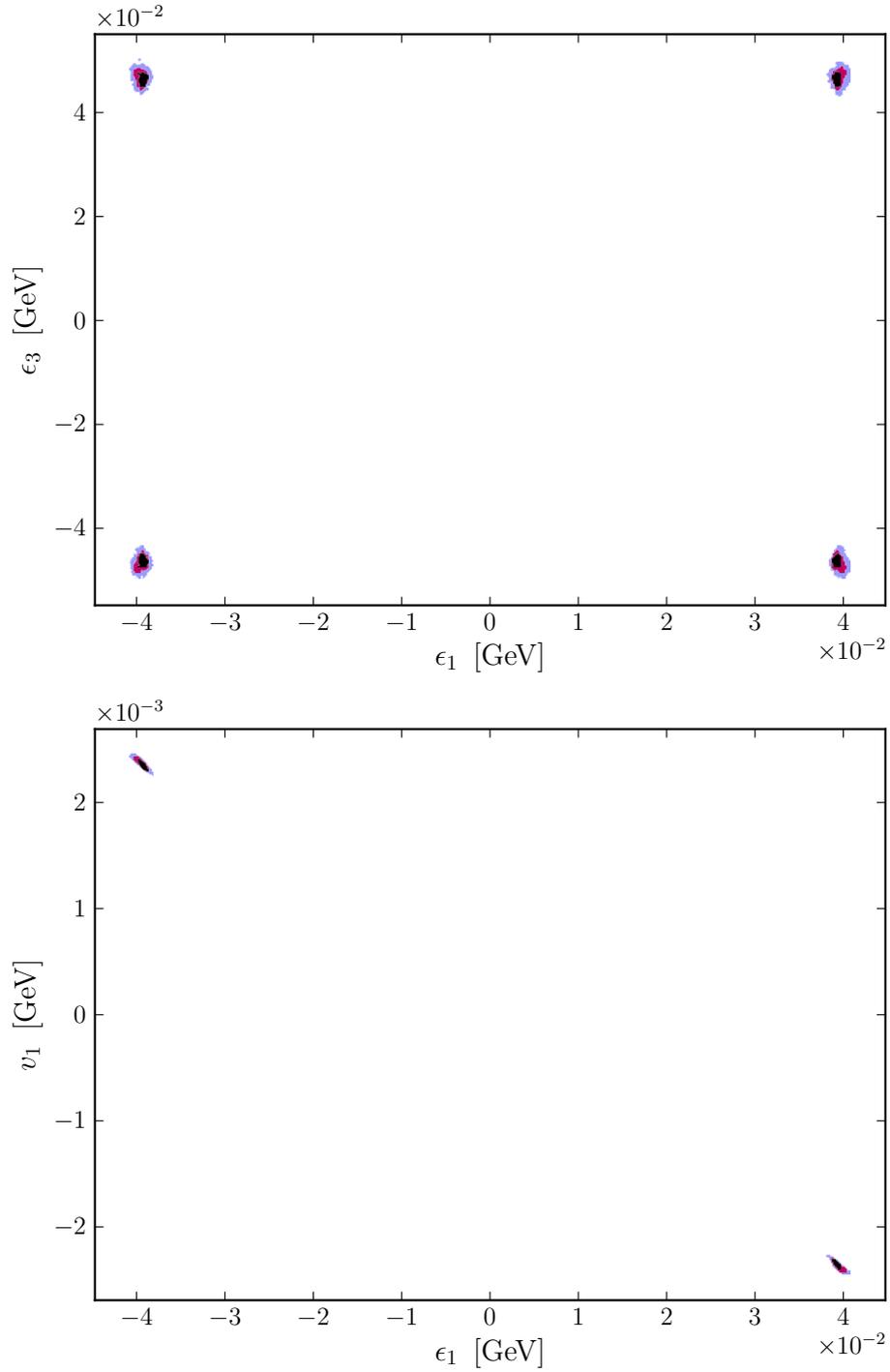
Die Konfidenzbereiche der BRpV-Parameter bei diesem Fit sind in den Abb. 5.14 bis 5.15 dargestellt. Die Kombination der Neutrinodaten und der Zerfallseigenschaften des  $\tilde{\chi}_1^0$  führt dazu, dass nur noch zwei Parameterpunkte mit akzeptabler Anpassungsgüte existieren, wobei einer dieser Punkte natürlich den idealen Parametern entspricht. Aufgrund der Anzahl der Minima lassen sich diese einfach separieren, so dass die Parameterfehler direkt aus den Konfidenzbereichen bestimmt werden können, siehe Tab. 5.12.

**Tab. 5.12.:** Best-fit-Werte und Fehler des Parameterpunkts bester Anpassung beim Fit mit den Neutrinodaten und den Zerfallseigenschaften des  $\tilde{\chi}_1^0$ . Die angegebenen Fehler entsprechen den Konfidenzintervallen mit 68 %, 95 % und 99,7 % Konfidenzniveau.

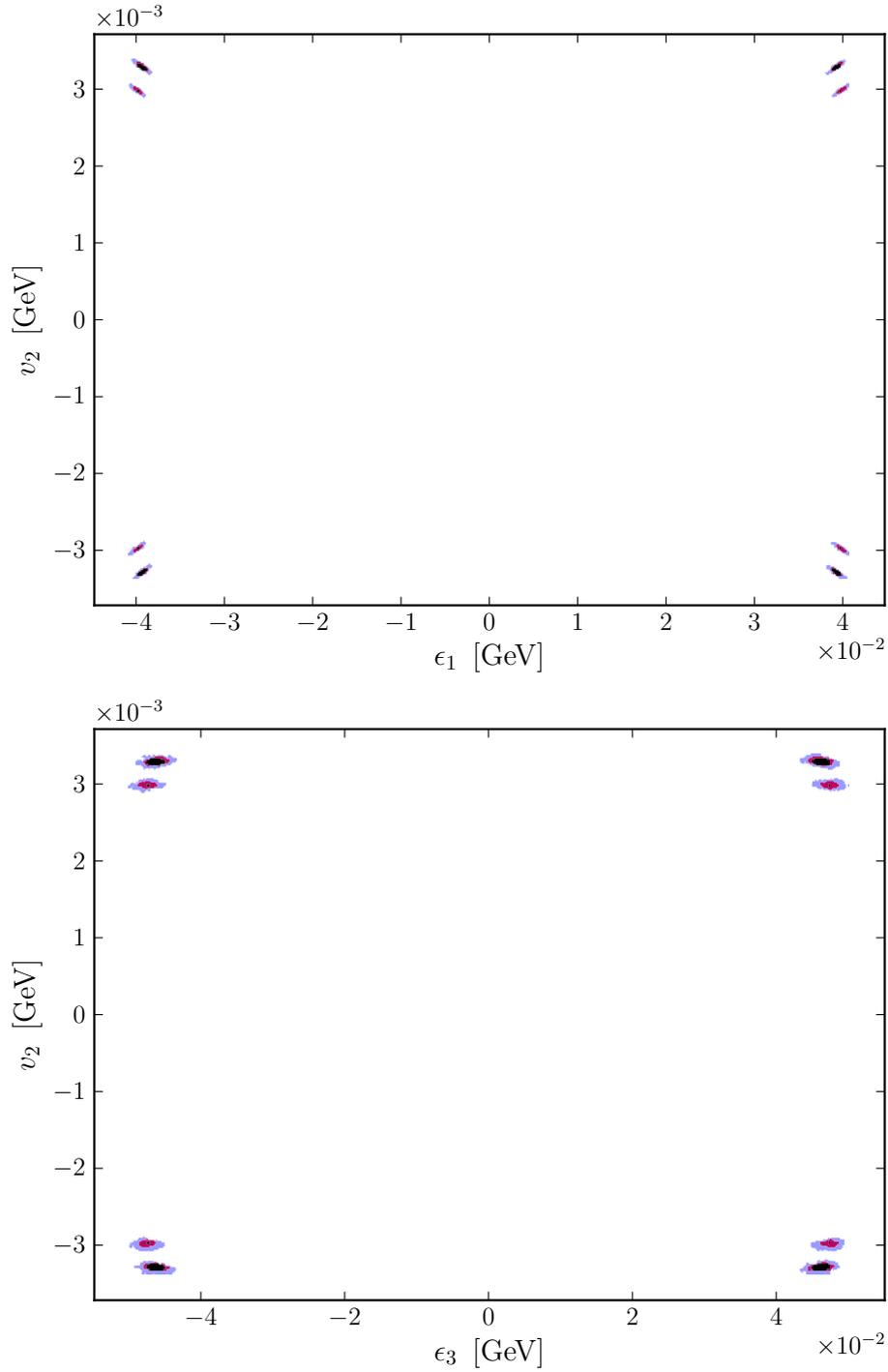
Parameter	Best-fit-Wert	$2\sigma$	$3\sigma$
$\epsilon_1$ [ $10^{-2}$ GeV]	$3,92_{-0,04}^{+0,05}$	$+0,07$ $-0,05$	$+0,11$ $-0,10$
$\epsilon_2$ [ $10^{-2}$ GeV]	$-5,21_{-0,07}^{+0,04}$	$+0,08$ $-0,09$	$\pm 0,12$
$\epsilon_3$ [ $10^{-2}$ GeV]	$4,61_{-0,12}^{+0,13}$	$+0,18$ $-0,16$	$+0,22$ $-0,27$
$v_1$ [ $10^{-3}$ GeV]	$-2,34_{-0,05}^{+0,03}$	$+0,04$ $-0,06$	$+0,08$ $-0,09$
$v_2$ [ $10^{-3}$ GeV]	$3,28_{-0,03}^{+0,04}$	$+0,06$ $-0,05$	$\pm 0,08$
$v_3$ [ $10^{-3}$ GeV]	$-2,59_{-0,08}^{+0,07}$	$+0,10$ $-0,11$	$+0,16$ $-0,13$

## 5. Bestimmung der BRpV-Parameter

**Abb. 5.14.:** Konfidenzkarten der  $\epsilon_1$ - $\epsilon_3$ -Ebene (oben) und der  $\epsilon_1$ - $v_1$ -Ebene (unten) beim Fit mit den Neutrino­daten und den Zerfallseigenschaften des  $\tilde{\chi}_1^0$ . Offensichtlich sind die Konfidenzbereiche im Vergleich zu den vorausgegangenen Fits deutlich kleiner. Außerdem ist auf diesen Karten jeweils nur ein Minimum zu erkennen.



**Abb. 5.15.:** Konfidenzkarten der  $\epsilon_1$ - $v_2$ -Ebene (oben) und der  $\epsilon_3$ - $v_2$ -Ebene (unten) beim Fit mit den Neutrinodaten und den Zerfallseigenschaften des  $\tilde{\chi}_1^0$ . Auf beiden Abbildungen sind zwei Minima zu erkennen. Aufgrund der besseren Anpassungsgüte des idealen Parameterpunkts, ist dessen 63 %-Konfidenzbereich wesentlich größer.





---

---

## KAPITEL 6

---

### Zusammenfassung

Das in dieser Arbeit betrachtete supersymmetrische Modell, in dem  $R$ -Parität durch bilineare Terme im Superpotential gebrochen wird, stellt eine interessante Möglichkeit dar, Neutrino-Physik zu beschreiben, da es über den Zerfall des LSPs direkt an Teilchenbeschleunigern überprüft werden kann. In dieser Arbeit wurde für einen SUSY-Benchmarkpunkt gezeigt wie die  $R$ -Paritätsverletzenden Parameter durch Neutrino-Physik eingeschränkt werden und welchen Einfluss die verschmierten Observablen aus tatsächlichen Experimenten auf den Parameterraum haben. Interessant wären hierbei noch genauere Untersuchungen der Minima, für die die Vorzeichenbedingung nicht erfüllt ist, und der Vergleich mit anderen Benchmarkpunkten und anderen Modellen mit bilinear gebrochener  $R$ -Parität. Aus dem Fit mit der Zerfallsbreite und den Verzweigungsverhältnissen des Neutralinos konnten diejenigen Zerfallskanäle ermittelt werden, die den größten Einfluss auf die Bestimmung der BRpV-Parameter haben. Die Kombination von Neutrinodaten und Zerfallseigenschaften hat dann die Parameterbereiche hoher Anpassungsgüte stark eingeschränkt und gezeigt, dass die BRpV-Parameter mit einer voraussichtlichen Genauigkeit von unter 5 % aus dem Experiment bestimmt werden können.

Die Programmierung von Kaimini hat dabei einen Einblick in das spannende Gebiet der Optimierung gegeben und die Vor- und Nachteile der verwendeten Optimierungsalgorithmen aufgezeigt. Hier besteht noch viel Potential die vorhandenen Algorithmen zu verbessern und weitere zu implementieren, die an spezifische Probleme angepasst sind.



---

---

## ANHANG A

---

### Kaimini Ein- und Ausgabedatei

Dies sind Beispiele für Kaimini Ein- und Ausgabedateien. In der Datei `kaimini.out` wurden die für den Fit irrelevanten Daten entfernt.

`kaimini.in`

```
# mSUGRA input file for SPS 1a'
Block MODSEL          # Select model
  1  1                # mSUGRA
  4  1                # RPV
Block SMINPUTS        # Standard Model inputs
  2  1.16639000E-05   # G_F, Fermi constant
  3  1.19000000E-01   # alpha_s(MZ) SM MSbar
  4  9.11876000E+01   # Z-boson pole mass
  5  4.20000000E+00   # m_b(mb) SM MSbar
  6  1.72800000E+02   # m_top(pole)
  7  1.77700000E+00   # m_tau(pole)
Block MINPAR          # Input parameters
  1  7.00000000E+01   # m0
  2  2.50000000E+02   # m12
  3  1.00000000E+01   # tanb
  4  1.0              # sign(mu)
  5  -3.00000000E+02  # A0
Block RVKAPPAIN       # bilinear RP parameters
  1  3.91855049E-02   # epsilon_1
  2  -5.20808531E-02  # epsilon_2
  3  4.60864354E-02   # epsilon_3
Block RVSNEVIN        # sneutrino vevs
  1  -2.33762622E-03  # v_L_1
  2  3.28137801E-03   # v_L_2
  3  -2.59328830E-03  # v_L_3
Block KaiminiParameters
  1  epsilon_1  RVKAPPAIN;1;1  1  10%  :
  2  epsilon_2  RVKAPPAIN;2;1  1  10%  :
  3  epsilon_3  RVKAPPAIN;3;1  1  10%  :
  4  v_L_1      RVSNEVIN;1;1  1  10%  :
  5  v_L_2      RVSNEVIN;2;1  1  10%  :
```

A. Kaimini Ein- und Ausgabedatei

```

6 v_L_3      RVSNEVIN;3;1  1    10%  :
Block KaiminiDataPoints
1 m^2_atm    SPhenoRP;7;1  1,1  2.40E-03  0.34E-03
2 m^2_sol    SPhenoRP;8;1  1,1  7.59E-05  0.62E-05
3 tan^2_atm  SPhenoRP;9;1  1,1  1.000     0.734
4 tan^2_sol  SPhenoRP;10;1 1,1  0.466     0.122
5 U_e3^2     SPhenoRP;11;1 1,1  0.013     0.049
6 dw_chi_10  1000022;DECAY;2 1,1  3.71347122E-13 15%
Block SPhenoInput # SPheno specific input
1 0          # error level
2 1          # SPA conventions
11 1         # calculate branching ratios
21 0         # calculate cross section
Block KaiminiControl
1 MinuitScan      on 2
1 MinuitSimplex   on 2
1 MinuitMinimize  on 2
1 MinuitMinos     on 2
0 BootstrapIter   100
1 Bootstrap       on
1 ChiSquareContrib on

```

kaimini.out

```

BLOCK KaiminiInfo
1 0.1.2        # version number
2 19716        # approx. wall clock time [s]
3 7099.540     # approx. process time [s]
12 MinuitScan
12 - calls     1
12 - strategy  2
12 - valid_minimum true
13 MinuitSimplex
13 - calls     37
13 - strategy  2
13 - valid_minimum false
11 MinuitMinimize
11 - calls     693
11 - strategy  2
11 - valid_minimum true
BLOCK KaiminiParametersOut
1 epsilon_1    1  3.68816084E-02  1.97566817E-03  :
2 epsilon_2    1 -5.29749835E-02  7.09377456E-04  :
3 epsilon_3    1  3.43510409E-02  1.98648183E-03  :
4 v_L_1        1 -2.22717757E-03  1.39406022E-04  :
5 v_L_2        1  3.40614522E-03  4.55499695E-05  :
6 v_L_3        1 -1.93283811E-03  1.27332438E-04  :
BLOCK KaiminiParameterDifferences
1 epsilon_1    3.91855049E-02 -2.30389649E-03 -5.88E+00%
2 epsilon_2   -5.20808531E-02 -8.94130439E-04  1.72E+00%
3 epsilon_3    4.60864354E-02 -1.17353945E-02 -2.55E+01%

```

```

4 v_L_1      -2.33762622E-03  1.10448649E-04  -4.72E+00%
5 v_L_2       3.28137801E-03  1.24767207E-04   3.80E+00%
6 v_L_3      -2.59328830E-03  6.60450189E-04  -2.55E+01%
BLOCK KaiminiCovarianceMatrix
1 1  3.90326474E-06
1 2  2.06185398E-07
1 3 -3.55780345E-07
1 4 -2.66869222E-07
1 5 -5.50967606E-09
1 6  1.92726625E-08
2 2  5.03216374E-07
2 3  1.72169540E-07
2 4 -1.10822664E-08
2 5 -2.98380886E-08
2 6 -1.11049379E-08
3 3  3.94611008E-06
3 4  1.46931325E-08
3 5  7.57997678E-11
3 6 -2.50192011E-07
4 4  1.94340389E-08
4 5  3.33172173E-10
4 6 -1.04788702E-09
5 5  2.07479972E-09
5 6 -2.24361959E-10
6 6  1.62135498E-08
BLOCK KaiminiCorrelationMatrix
1 1  1.00000000E+00
1 2  1.47118240E-01
1 3 -9.06532442E-02
1 4 -9.68953536E-01
1 5 -6.12243201E-02
1 6  7.66105637E-02
2 2  1.00000000E+00
2 3  1.22178373E-01
2 4 -1.12064916E-01
2 5 -9.23433289E-01
2 6 -1.22941837E-01
3 3  1.00000000E+00
3 4  5.30576807E-02
3 5  8.37712869E-04
3 6 -9.89121826E-01
4 4  1.00000000E+00
4 5  5.24685542E-02
4 6 -5.90328667E-02
5 5  1.00000000E+00
5 6 -3.86831719E-02
6 6  1.00000000E+00
BLOCK KaiminiDataPointsOut
1 m^2_atm      1  2.40009037E-03  2.40000000E-03  3.40000000E-04

```

A. Kaimini Ein- und Ausgabedatei

```

2 m^2_sol      1  7.59126734E-05  7.59000000E-05  6.20000000E-06
3 tan^2_atm    1  9.99966788E-01  1.00000000E+00  7.34000000E-01
4 tan^2_sol    1  4.66007412E-01  4.66000000E-01  1.22000000E-01
5 U_e3^2      1  1.29956578E-02  1.30000000E-02  4.90000000E-02
6 dw_chi_10   1  3.71284953E-13  3.71347122E-13  5.57020683E-14
BLOCK KaiminiChiSquare
0 chi^2        1  5.50824549E-06
1 m^2_atm     1  7.06465130E-08
2 m^2_sol     1  4.17833162E-06
3 tan^2_atm   1  2.04737756E-09
4 tan^2_sol   1  3.69106047E-09
5 U_e3^2     1  7.85285333E-09
6 dw_chi_10   1  1.24567607E-06
BLOCK KaiminiMinosErrors
1 epsilon_1    0  1.97566817E-03 -5.76191169E-03
2 epsilon_2    1  1.04740420E-02 -8.11782508E-03
3 epsilon_3    1  1.34566975E-02 -1.56339246E-02
4 v_L_1       1  3.73463150E-04 -5.65056723E-04
5 v_L_2       0  4.93263768E-04 -4.55499695E-05
6 v_L_3       1  9.80947982E-04 -7.40121937E-04
BLOCK KaiminiBootstrap # iterations= 100
1 1 epsilon_1   1.17066629E-02  8.03669799E-03  9.87168045E-03
1 2 epsilon_1   1.17066629E-02  1.00772816E-02  1.08919722E-02
1 3 epsilon_1   1.17066629E-02  1.21206240E-02  1.19136434E-02
2 1 epsilon_2   3.95084139E-02  1.00244240E-02  2.47664190E-02
2 2 epsilon_2   3.95084139E-02  1.89619525E-02  2.92351832E-02
2 3 epsilon_2   3.95084139E-02  1.89619525E-02  2.92351832E-02
3 1 epsilon_3   4.90616086E-02  1.84159617E-02  3.37387852E-02
3 2 epsilon_3   4.90616086E-02  5.30482757E-02  5.10549421E-02
3 3 epsilon_3   4.90616086E-02  5.30482757E-02  5.10549421E-02
4 1 v_L_1       4.83999706E-04  7.11616658E-04  5.97808182E-04
4 2 v_L_1       6.56248031E-04  7.11616658E-04  6.83932344E-04
4 3 v_L_1       8.06966629E-04  7.11616658E-04  7.59291643E-04
5 1 v_L_2       5.94560751E-04  2.41339949E-03  1.50398012E-03
5 2 v_L_2       1.14283272E-03  2.41339949E-03  1.77811610E-03
5 3 v_L_2       1.14283272E-03  2.41339949E-03  1.77811610E-03
6 1 v_L_3       1.14358408E-03  3.02290878E-03  2.08324643E-03
6 2 v_L_3       3.28989084E-03  3.02290878E-03  3.15639981E-03
6 3 v_L_3       3.28989084E-03  3.02290878E-03  3.15639981E-03
BLOCK KaiminiChiSquareContrib
1      5.90450034E+01      # epsilon_1
2      1.84925061E+01      # epsilon_2
3      1.01508267E+03      # epsilon_3
4      8.96968055E+01      # v_L_1
5      1.97298042E+01      # v_L_2
6      2.15952445E+03      # v_L_3
BLOCK KaiminiChiSquareContribSingle
1 1  2.58489249E+01      # epsilon_1      m^2_atm
1 2  9.05314511E+00      # epsilon_1      m^2_sol

```

```

1 3 4.40301636E-02 # epsilon_1 tan^2_atm
1 4 2.59151401E+00 # epsilon_1 tan^2_sol
1 5 2.13972197E+01 # epsilon_1 U_e3^2
1 6 1.10169456E-01 # epsilon_1 dw_chi_10
2 1 1.58066876E+01 # epsilon_2 m^2_atm
2 2 1.79535933E+00 # epsilon_2 m^2_sol
2 3 6.14041434E-01 # epsilon_2 tan^2_atm
2 4 2.58400667E-01 # epsilon_2 tan^2_sol
2 5 1.69057736E-02 # epsilon_2 U_e3^2
2 6 1.11132668E-03 # epsilon_2 dw_chi_10
3 1 2.43073005E+02 # epsilon_3 m^2_atm
3 2 2.47264444E+01 # epsilon_3 m^2_sol
3 3 7.22073567E+02 # epsilon_3 tan^2_atm
3 4 2.50025723E+01 # epsilon_3 tan^2_sol
3 5 2.22101696E-02 # epsilon_3 U_e3^2
3 6 1.84867919E-01 # epsilon_3 dw_chi_10
4 1 4.71786379E+01 # v_L_1 m^2_atm
4 2 8.56056993E+00 # v_L_1 m^2_sol
4 3 4.95624939E-02 # v_L_1 tan^2_atm
4 4 2.62733800E+00 # v_L_1 tan^2_sol
4 5 3.12344356E+01 # v_L_1 U_e3^2
4 6 4.62615427E-02 # v_L_1 dw_chi_10
5 1 1.76220030E+01 # v_L_2 m^2_atm
5 2 1.14836514E+00 # v_L_2 m^2_sol
5 3 6.89795326E-01 # v_L_2 tan^2_atm
5 4 2.28106917E-01 # v_L_2 tan^2_sol
5 5 2.04473292E-02 # v_L_2 U_e3^2
5 6 2.10864881E-02 # v_L_2 dw_chi_10
6 1 2.82283519E+02 # v_L_3 m^2_atm
6 2 2.42862474E+01 # v_L_3 m^2_sol
6 3 1.82727017E+03 # v_L_3 tan^2_atm
6 4 2.54591660E+01 # v_L_3 tan^2_sol
6 5 2.45246905E-02 # v_L_3 U_e3^2
6 6 2.00825815E-01 # v_L_3 dw_chi_10
[...]
Block RVKAPPA Q= 1.00000000E+03 # bilinear RP parameters at Q
    1 3.68816084E-02 # epsilon_1
    2 -5.29749835E-02 # epsilon_2
    3 3.43510409E-02 # epsilon_3
Block RVSINVEV Q= 1.00000000E+03 # sneutrino vevs at Q
    1 -2.22717757E-03 # v_L_1
    2 3.40614522E-03 # v_L_2
    3 -1.93283811E-03 # v_L_3
Block SPhenoRP # additional RP parameters
    7 2.40009037E-03 # m^2_atm [eV^2]
    8 7.59126734E-05 # m^2_sol [eV^2]
    9 9.99966788E-01 # tan^2 theta_atm
   10 4.66007412E-01 # tan^2 theta_sol

```

A. Kaimini Ein- und Ausgabedatei

	11	1.29956578E-02	# U_e3^2
DECAY	1000022	3.71284953E-13	# chi_10

---

---

## ANHANG B

---

### SPS 1a' Ein- und Ausgabedatei

Dies ist die SPS 1a' Eingabedatei für SPheno, aus der die idealen Datenpunkte und Parameter folgen. In der Datei SPS\_1ap.out wurden die für diese Arbeit irrelevanten Daten entfernt.

SPS\_1ap.in

```
# mSUGRA input file for SPS 1a'
Block MODSEL      # Select model
 1  1              # mSUGRA
 4  1              # RPV
Block SMINPUTS    # Standard Model inputs
 2  1.16639000E-05 # G_F, Fermi constant
 3  1.19000000E-01 # alpha_s(MZ) SM MSbar
 4  9.11876000E+01 # Z-boson pole mass
 5  4.20000000E+00 # m_b(mb) SM MSbar
 6  1.72800000E+02 # m_top(pole)
 7  1.77700000E+00 # m_tau(pole)
Block MINPAR      # Input parameters
 1  7.00000000E+01 # m0
 2  2.50000000E+02 # m12
 3  1.00000000E+01 # tanb
 4  1.0            # sign(mu)
 5  -3.00000000E+02 # A0
Block SPhenoInput # SPheno specific input
 1  0              # error level
 2  1              # SPA conventions
11  1              # calculate branching ratios
21  0              # calculate cross section
91  1              # fit neutrino data
110 1              # output LHC observables
```

SPS\_1ap.out

```
# SUSY Les Houches Accord 2 - MSSM spectrum + Decays
# SPheno v3beta50
# W. Porod, Comput. Phys. Commun. 153 (2003) 275-315, hep-ph/0301101
# in case of problems send email to porod@physik.uni-wuerzburg.de
# Created: 18.06.2010, 10:44
Block SPINFO      # Program information
 1  SPheno        # spectrum calculator
 2  v3beta50      # version number
#
Block SPhenoINFO  # SPheno specific information
 1  2             # using 2-loop RGEs
 2  1             # using running masses for boundary conditions at mZ
Block MODSEL      # Model selection
```

B. SPS 1a' Ein- und Ausgabedatei

```

4 1 # MSSM with explicit R-parity violation
Block MINPAR # Input parameters
3 1.03757274E+01 # tanb at m_Z
4 1.00000000E+00 # Sign(mu)
[...]
Block RVKAPPA Q= 1.00000000E+03 # bilinear RP parameters at Q
1 3.91855049E-02 # epsilon_1
2 -5.20808531E-02 # epsilon_2
3 4.60864354E-02 # epsilon_3
Block RVD Q= 1.00000000E+03 # bilinear RP parameters at Q
1 1.75995893E+00 # Re( B_1 epsilon_1)
2 -2.36082124E+00 # Re( B_2 epsilon_2)
3 2.04270477E+00 # Re( B_3 epsilon_3)
Block RVSNEV Q= 1.00000000E+03 # sneutrino vevs at Q
1 -2.33762622E-03 # v_L_1
2 3.28137801E-03 # v_L_2
3 -2.59328830E-03 # v_L_3
Block SPhenoRP # additional RP parameters
7 2.17388442E-03 # m^2_atm [eV^2]
8 7.69447612E-05 # m^2_sol [eV^2]
9 9.25971769E-01 # tan^2 theta_atm
10 4.11976471E-01 # tan^2 theta_sol
11 1.47914877E-03 # U_e3^2
15 2.32760732E+01 # v_d
16 2.41506190E+02 # v_u
Block MASS # Mass spectrum
# PDG code mass particle
4 1.20000000E+00 # m_c(m_c), MSbar
5 4.20000000E+00 # m_b(m_b), MSbar
6 1.72800000E+02 # m_t(pole)
23 9.11876000E+01 # m_Z(pole)
24 8.03254938E+01 # W+
25 1.11313015E+02 # lightest neutral scalar
1000016 1.70260675E+02 # 2nd neutral scalar
1000014 1.72312895E+02 # 3rd neutral scalar
1000012 1.72320166E+02 # 4th neutral scalar
35 4.24696087E+02 # 5th neutral scalar
2000016 1.70260675E+02 # lightest pseudoscalar
2000014 1.72312895E+02 # 2nd pseudoscalar
2000012 1.72320166E+02 # 3rd pseudoscalar
36 4.24554919E+02 # 4th pseudoscalar
1000015 1.07816523E+02 # lightest charged scalar
2000013 1.25201883E+02 # 2nd charged scalar
2000011 1.25265770E+02 # 3rd charged scalar
1000011 1.89663409E+02 # 4th charged scalar
1000013 1.89685813E+02 # 5th charged scalar
2000015 1.94752405E+02 # 6th charged scalar
37 4.32440866E+02 # 7th charged scalar
1000001 5.69590313E+02 # ~d_L
2000001 5.46383289E+02 # ~d_R
1000002 5.64145135E+02 # ~u_L
2000002 5.46681103E+02 # ~u_R
1000003 5.69590379E+02 # ~s_L
2000003 5.46378853E+02 # ~s_R
1000004 5.64157274E+02 # ~c_L
2000004 5.46664687E+02 # ~c_R
1000005 5.05781952E+02 # ~b_1
2000005 5.45216505E+02 # ~b_2
1000006 3.64408024E+02 # ~t_1
2000006 5.86202322E+02 # ~t_2
1000021 6.14869742E+02 # ~g
12 -8.76559862E-14 # nu_1

```

```

14      -8.77225426E-12 # nu_2
16      -4.74429854E-11 # nu_3
1000022  9.79712319E+01 # chi_10
1000023  1.84066353E+02 # chi_20
1000025  -4.00281538E+02 # chi_30
1000035  4.13723320E+02 # chi_40
-11      5.10998910E-04 # e+
-13      1.05658000E-01 # mu+
-15      1.77700000E+00 # tau+
1000024  1.83842934E+02 # chi_1+
1000037  4.15176596E+02 # chi_2+
[...]
Block RVNmix # /neutrino/neutralino mixing matrix
1 1      -2.46085137E-09 # Re[N(1,1)]
1 2      1.15252105E-09 # Re[N(1,2)]
1 3      1.15235352E-05 # Re[N(1,3)]
1 4      2.96910869E-11 # Re[N(1,4)]
1 5      -8.40939664E-01 # Re[N(1,5)]
1 6      -3.66779893E-01 # Re[N(1,6)]
1 7      3.97860517E-01 # Re[N(1,7)]
2 1      8.66241772E-09 # Re[N(2,1)]
2 2      -4.38663763E-08 # Re[N(2,2)]
2 3      2.04836624E-04 # Re[N(2,3)]
2 4      -5.09355862E-09 # Re[N(2,4)]
2 5      5.39760430E-01 # Re[N(2,5)]
2 6      -6.20807579E-01 # Re[N(2,6)]
2 7      5.68556581E-01 # Re[N(2,7)]
3 1      -4.27884001E-07 # Re[N(3,1)]
3 2      3.91153215E-07 # Re[N(3,2)]
3 3      3.46727103E-06 # Re[N(3,3)]
3 4      1.13572953E-08 # Re[N(3,4)]
3 5      -3.84597032E-02 # Re[N(3,5)]
3 6      -6.92871158E-01 # Re[N(3,6)]
3 7      -7.20035005E-01 # Re[N(3,7)]
4 1      9.90091680E-01 # Re[N(4,1)]
4 2      -3.40978546E-02 # Re[N(4,2)]
4 3      1.29257649E-01 # Re[N(4,3)]
4 4      -4.29914039E-02 # Re[N(4,4)]
4 5      -1.30457182E-05 # Re[N(4,5)]
4 6      1.69961525E-05 # Re[N(4,6)]
4 7      -1.56432787E-05 # Re[N(4,7)]
5 1      7.15171224E-02 # Re[N(5,1)]
5 2      9.55918013E-01 # Re[N(5,2)]
5 3      -2.50703172E-01 # Re[N(5,3)]
5 4      1.35107253E-01 # Re[N(5,4)]
5 5      2.52922419E-05 # Re[N(5,5)]
5 6      -3.33291578E-05 # Re[N(5,6)]
5 7      2.99925252E-05 # Re[N(5,7)]
6 1      -5.70049884E-02 # Re[N(6,1)]
6 2      8.62956685E-02 # Re[N(6,2)]
6 3      6.95807787E-01 # Re[N(6,3)]
6 4      7.10742564E-01 # Re[N(6,4)]
6 5      -7.00877842E-05 # Re[N(6,5)]
6 6      9.31353586E-05 # Re[N(6,6)]
6 7      -8.24355417E-05 # Re[N(6,7)]
7 1      -1.06556077E-01 # Re[N(7,1)]
7 2      2.78587770E-01 # Re[N(7,2)]
7 3      6.60523929E-01 # Re[N(7,3)]
7 4      -6.89015803E-01 # Re[N(7,4)]
7 5      -6.65290451E-05 # Re[N(7,5)]
7 6      8.84694457E-05 # Re[N(7,6)]
7 7      -7.81938174E-05 # Re[N(7,7)]

```

B. SPS 1a' Ein- und Ausgabedatei

```
[...]
DECAY 1000022 3.71347122E-13 # chi_10
# BR NDA ID1 ID2
1.58821410E-02 2 -13 -24 # BR(chi_10 -> mu+ W-)
1.58821410E-02 2 13 24 # BR(chi_10 -> mu- W+)
1.76898654E-02 2 -15 -24 # BR(chi_10 -> tau+ W-)
1.76898654E-02 2 15 24 # BR(chi_10 -> tau- W+)
7.82540015E-03 2 16 23 # BR(chi_10 -> nu_3 Z)
# BR NDA ID1 ID2 ID3
1.10392071E-04 3 12 -5 5 # BR(chi_10 -> nu_1 b b)
2.97748308E-02 3 14 -5 5 # BR(chi_10 -> nu_2 b b)
1.37327705E-04 3 12 13 -11 # BR(chi_10 -> nu_1 mu+ e-)
1.37327705E-04 3 12 -13 11 # BR(chi_10 -> nu_1 e+ mu-)
6.66421130E-04 3 12 -13 13 # BR(chi_10 -> nu_1 mu+ mu-)
7.95301638E-02 3 12 15 -11 # BR(chi_10 -> nu_1 tau+ e-)
7.95301638E-02 3 12 -15 11 # BR(chi_10 -> nu_1 e+ tau-)
1.39143234E-01 3 12 15 -13 # BR(chi_10 -> nu_1 tau+ mu-)
1.39143234E-01 3 12 -15 13 # BR(chi_10 -> nu_1 mu+ tau-)
4.56586598E-01 3 12 -15 15 # BR(chi_10 -> nu_1 tau+ tau-)
[...]
Block LHCobservables # edge observables for LHC
1 8.40104605E+01 # e+e- edge with right selectron, chi^0_2, chi^0_1
2 2.36727022E+02 # e+e- edge with right selectron, chi^0_3, chi^0_1
3 -1.00000000E+00 # e+e- edge with right selectron, chi^0_3, chi^0_2
4 2.45523112E+02 # e+e- edge with right selectron, chi^0_4, chi^0_1
5 -1.00000000E+00 # e+e- edge with right selectron, chi^0_4, chi^0_2
6 -1.00000000E+00 # e+e- edge with right selectron, chi^0_4, chi^0_3
7 8.40411288E+01 # e+e- edge with left selectron, chi^0_2, chi^0_1
8 2.36904471E+02 # e+e- edge with left selectron, chi^0_3, chi^0_1
9 -1.00000000E+00 # e+e- edge with left selectron, chi^0_3, chi^0_2
10 2.45708111E+02 # e+e- edge with left selectron, chi^0_4, chi^0_1
11 -1.00000000E+00 # e+e- edge with left selectron, chi^0_4, chi^0_2
12 -1.00000000E+00 # e+e- edge with left selectron, chi^0_4, chi^0_3
13 6.22819882E+01 # mu+mu- edge with right smuon, chi^0_2, chi^0_1
14 1.60934610E+02 # mu+mu- edge with right smuon, chi^0_3, chi^0_1
15 -1.00000000E+00 # mu+mu- edge with right smuon, chi^0_3, chi^0_2
16 1.66754295E+02 # mu+mu- edge with right smuon, chi^0_4, chi^0_1
17 -1.00000000E+00 # mu+mu- edge with right smuon, chi^0_4, chi^0_2
18 -1.00000000E+00 # mu+mu- edge with right smuon, chi^0_4, chi^0_3
19 -1.00000000E+00 # mu+mu- edge with left smuon, chi^0_2, chi^0_1
20 3.01826107E+02 # mu+mu- edge with left smuon, chi^0_3, chi^0_1
21 8.50019200E+01 # mu+mu- edge with left smuon, chi^0_3, chi^0_2
22 3.14835097E+02 # mu+mu- edge with left smuon, chi^0_4, chi^0_1
23 8.86655829E+01 # mu+mu- edge with left smuon, chi^0_4, chi^0_2
24 -1.00000000E+00 # mu+mu- edge with left smuon, chi^0_4, chi^0_3
25 -1.00000000E+00 # tau+tau- edge with lighter stau, chi^0_2, chi^0_1
26 -1.00000000E+00 # tau+tau- edge with lighter stau, chi^0_3, chi^0_1
27 -1.00000000E+00 # tau+tau- edge with lighter stau, chi^0_3, chi^0_2
28 -1.00000000E+00 # tau+tau- edge with lighter stau, chi^0_4, chi^0_1
29 -1.00000000E+00 # tau+tau- edge with lighter stau, chi^0_4, chi^0_2
30 -1.00000000E+00 # tau+tau- edge with lighter stau, chi^0_4, chi^0_3
31 -1.00000000E+00 # tau+tau- edge with heavier stau, chi^0_2, chi^0_1
32 3.01828757E+02 # tau+tau- edge with heavier stau, chi^0_3, chi^0_1
33 8.51614568E+01 # tau+tau- edge with heavier stau, chi^0_3, chi^0_2
34 3.14838733E+02 # tau+tau- edge with heavier stau, chi^0_4, chi^0_1
35 8.88322417E+01 # tau+tau- edge with heavier stau, chi^0_4, chi^0_2
36 -1.00000000E+00 # tau+tau- edge with heavier stau, chi^0_4, chi^0_3
37 4.01894592E+02 # l+ l- q edge, averaging over d_L, s_L, u_L, c_L
38 2.20503047E+02 # l+ l- q threshold, averaging over d_L, s_l, u_L, c_L
39 2.83389672E+02 # l+-_near q edge, averaging over d_L, s_l, u_L, c_L
```

40	3.93015910E+02	# l+_ <sub>far</sub> q edge, averaging over d_L, s_l, u_L, c_L
41	1.95812898E+02	# l+ l- b threshold



---

## Literaturverzeichnis

- [1] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [2] S. F. Novaes, “Standard model: An Introduction,” [arXiv:hep-ph/0001283](#).
- [3] P. W. Higgs, “Broken symmetries, massless particles and gauge fields,” *Phys. Lett.* **12** (1964) 132–133.  
P. W. Higgs, “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons,” *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508–509.  
F. Englert and R. Brout, “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons,” *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321–322.  
G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, “Global Conservation Laws and Massless Particles,” *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 585–587.
- [4] B. Kayser, “Neutrino Mass, Mixing, and Flavor Change,” *Phys. Lett.* **B667** (2008) 163–171, [arXiv:0804.1497 \[hep-ph\]](#).
- [5] T. Schwetz, M. A. Tortola, and J. W. F. Valle, “Three-flavour neutrino oscillation update,” *New J. Phys.* **10** (2008) 113011, [arXiv:0808.2016 \[hep-ph\]](#).
- [6] B. T. Cleveland *et al.*, “Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector,” *Astrophys. J.* **496** (1998) 505–526.
- [7] Y. Suzuki, “Kamiokande solar neutrino results,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **38** (1995) 54–59.
- [8] **SNO** Collaboration, Q. R. Ahmad *et al.*, “Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory,” *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 011301, [arXiv:nucl-ex/0204008](#).
- [9] **Super-Kamiokande** Collaboration, Y. Fukuda *et al.*, “Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos,” *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 1562–1567, [arXiv:hep-ex/9807003](#).  
**Soudan 2** Collaboration, M. C. Sanchez *et al.*, “Observation of atmospheric neutrino oscillations in Soudan 2,” *Phys. Rev.* **D68** (2003) 113004, [arXiv:hep-ex/0307069](#).  
**MACRO** Collaboration, G. Giacomelli and A. Margiotta, “New MACRO results on atmospheric neutrino oscillations,” *Phys. Atom. Nucl.* **67** (2004) 1139–1146,

[arXiv:hep-ex/0407023](#).

- [10] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, “Remarks on the unified model of elementary particles,” *Prog. Theor. Phys.* **28** (1962) 870–880.  
B. Pontecorvo, “Neutrino experiments and the question of leptonic-charge conservation,” *Sov. Phys. JETP* **26** (1968) 984–988.
- [11] J. Schechter and J. W. F. Valle, “Neutrino Oscillation Thought Experiment,” *Phys. Rev.* **D23** (1981) 1666.  
J. F. Nieves and P. B. Pal, “Rephasing-invariant CP violating parameters with Majorana neutrinos,” *Phys. Rev.* **D64** (2001) 076005, [arXiv:hep-ph/0105305](#).  
A. de Gouvea, B. Kayser, and R. N. Mohapatra, “Manifest CP violation from Majorana phases,” *Phys. Rev.* **D67** (2003) 053004, [arXiv:hep-ph/0211394](#).
- [12] P. Minkowski, “ $\mu \rightarrow e\gamma$  at a Rate of One Out of 1-Billion Muon Decays?,” *Phys. Lett.* **B67** (1977) 421.  
M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky, “Complex Spinors And Unified Theories,” Print-80-0576 (CERN).  
T. Yanagida, “Horizontal gauge symmetry and masses of neutrinos,” *Prog. Theor. Phys.* **64** (1980) 1103.  
R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, “Neutrino mass and spontaneous parity nonconservation,” *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 912.
- [13] S. Weinberg, “Implications of Dynamical Symmetry Breaking,” *Phys. Rev.* **D13** (1976) 974–996.  
S. Weinberg, “Implications of Dynamical Symmetry Breaking: An Addendum,” *Phys. Rev.* **D19** (1979) 1277–1280.
- [14] S. P. Martin, “A Supersymmetry Primer,” [arXiv:hep-ph/9709356](#).
- [15] S. R. Coleman and J. Mandula, “All Possible Symmetries of the  $S$ -Matrix,” *Phys. Rev.* **159** (1967) 1251–1256.
- [16] R. Haag, J. T. Lopuszanski, and M. Sohnius, “All Possible Generators of Supersymmetries of the  $S$ -Matrix,” *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.
- [17] K. Garrett and G. Duda, “Dark Matter: A Primer,” [arXiv:1006.2483 \[hep-ph\]](#).
- [18] J. Wess and J. Bagger, “Supersymmetry and supergravity,” Princeton, USA: Univ. Pr. (1992) 259 p.
- [19] I. J. R. Aitchison, “Supersymmetry and the MSSM: An Elementary introduction,” [arXiv:hep-ph/0505105](#).
- [20] M. E. Peskin, “Supersymmetry in Elementary Particle Physics,” [arXiv:0801.1928 \[hep-ph\]](#).

- [21] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Rocek, and W. Siegel, “Superspace, or one thousand and one lessons in supersymmetry,” *Front. Phys.* **58** (1983) 1–548, [arXiv:hep-th/0108200](#).
- [22] M. Kuroda, “Complete Lagrangian of MSSM,” [arXiv:hep-ph/9902340](#).
- [23] L. Girardello and M. T. Grisaru, “Soft Breaking of Supersymmetry,” *Nucl. Phys.* **B194** (1982) 65.
- [24] S. Dimopoulos and D. W. Sutter, “The Supersymmetric flavor problem,” *Nucl. Phys.* **B452** (1995) 496–512, [arXiv:hep-ph/9504415](#).
- [25] H. P. Nilles, “Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics,” *Phys. Rept.* **110** (1984) 1–162.  
A. H. Chamseddine, R. L. Arnowitt, and P. Nath, “Locally Supersymmetric Grand Unification,” *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 970.
- [26] M. Dine and A. E. Nelson, “Dynamical supersymmetry breaking at low-energies,” *Phys. Rev.* **D48** (1993) 1277–1287, [arXiv:hep-ph/9303230](#).  
G. F. Giudice and R. Rattazzi, “Theories with gauge-mediated supersymmetry breaking,” *Phys. Rept.* **322** (1999) 419–499, [arXiv:hep-ph/9801271](#).
- [27] L. Randall and R. Sundrum, “Out of this world supersymmetry breaking,” *Nucl. Phys.* **B557** (1999) 79–118, [arXiv:hep-th/9810155](#).
- [28] B. C. Allanach *et al.*, “The Snowmass points and slopes: Benchmarks for SUSY searches,” *Eur. Phys. J.* **C25** (2002) 113–123, [arXiv:hep-ph/0202233](#).
- [29] J. A. Aguilar-Saavedra *et al.*, “Supersymmetry parameter analysis: SPA convention and project,” *Eur. Phys. J.* **C46** (2006) 43–60, [arXiv:hep-ph/0511344](#).
- [30] J. W. F. Valle, “Super-gravity unification with bilinear R-parity violation,” [arXiv:hep-ph/9808292](#).
- [31] G. ’t Hooft, “Symmetry breaking through Bell-Jackiw anomalies,” *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 8–11.
- [32] G. R. Farrar and P. Fayet, “Phenomenology of the Production, Decay, and Detection of New Hadronic States Associated with Supersymmetry,” *Phys. Lett.* **B76** (1978) 575–579.  
S. Dimopoulos and H. Georgi, “Softly Broken Supersymmetry and SU(5),” *Nucl. Phys.* **B193** (1981) 150.  
S. Weinberg, “Supersymmetry at Ordinary Energies. 1. Masses and Conservation Laws,” *Phys. Rev.* **D26** (1982) 287.  
N. Sakai and T. Yanagida, “Proton Decay in a Class of Supersymmetric Grand Unified Models,” *Nucl. Phys.* **B197** (1982) 533.  
S. Dimopoulos, S. Raby, and F. Wilczek, “Proton Decay in Supersymmetric Models,” *Phys. Lett.* **B112** (1982) 133.

- [33] J. C. Romao, M. A. Diaz, M. Hirsch, W. Porod, and J. W. F. Valle, “A supersymmetric solution to the solar and atmospheric neutrino problems,” *Phys. Rev.* **D61** (2000) 071703, [arXiv:hep-ph/9907499](#).
- [34] M. Hirsch, M. A. Diaz, W. Porod, J. C. Romao, and J. W. F. Valle, “Neutrino masses and mixings from supersymmetry with bilinear R-parity violation: A theory for solar and atmospheric neutrino oscillations,” *Phys. Rev.* **D62** (2000) 113008, [arXiv:hep-ph/0004115](#).
- [35] M. A. Diaz, M. Hirsch, W. Porod, J. C. Romao, and J. W. F. Valle, “Solar neutrino masses and mixing from bilinear R-parity broken supersymmetry: Analytical versus numerical results,” *Phys. Rev.* **D68** (2003) 013009, [arXiv:hep-ph/0302021](#).
- [36] M. Hirsch and W. Porod, “Neutrino properties and the decay of the lightest supersymmetric particle,” *Phys. Rev.* **D68** (2003) 115007, [arXiv:hep-ph/0307364](#).
- [37] M. Hirsch and J. W. F. Valle, “Supersymmetric origin of neutrino mass,” *New J. Phys.* **6** (2004) 76, [arXiv:hep-ph/0405015](#).
- [38] M. Hirsch and J. W. F. Valle, “Neutrinoless double beta decay in supersymmetry with bilinear R-parity breaking,” *Nucl. Phys.* **B557** (1999) 60–78, [arXiv:hep-ph/9812463](#).
- [39] A. Santamaria and J. W. F. Valle, “Spontaneous R-Parity Violation in Supersymmetry: A Model for Solar Neutrino Oscillations,” *Phys. Lett.* **B195** (1987) 423.
- [40] W. Porod, M. Hirsch, J. Romao, and J. W. F. Valle, “Testing neutrino mixing at future collider experiments,” *Phys. Rev.* **D63** (2001) 115004, [arXiv:hep-ph/0011248](#).
- [41] F. S. Thomas, “Kaimini, a general purpose fitting frontend for programs using the SLHA interface.” <http://github.com/fthomas/kaimini>.
- [42] P. Skands *et al.*, “SUSY Les Houches Accord: Interfacing SUSY spectrum calculators, decay packages, and event generators,” *JHEP* **07** (2004) 036, [arXiv:hep-ph/0311123](#).  
B. Allanach *et al.*, “SUSY Les Houches Accord 2,” *Comp. Phys. Commun.* **180** (2009) 8–25, [arXiv:0801.0045 \[hep-ph\]](#).
- [43] R. Lafaye, T. Plehn, and D. Zerwas, “SFITTER: SUSY parameter analysis at LHC and LC,” [arXiv:hep-ph/0404282](#).
- [44] P. Bechtle, K. Desch, and P. Wienemann, “Fittino, a program for determining MSSM parameters from collider observables using an iterative method,” *Comput. Phys. Commun.* **174** (2006) 47–70, [arXiv:hep-ph/0412012](#).

- [45] F. James, *Statistical Methods in Experimental Physics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2nd ed., 2006.
- [46] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1992.
- [47] **Particle Data Group** Collaboration, C. Amsler *et al.*, “Review of particle physics,” *Phys. Lett.* **B667** (2008) 1.
- [48] F. James, “The Interpretation of Errors in Minuit.” <http://seal.cern.ch/documents/minuit/mnerror.pdf>, 2004.
- [49] F. James and M. Roos, “Minuit: A System for Function Minimization and Analysis of the Parameter Errors and Correlations,” *Comput. Phys. Commun.* **10** (1975) 343–367.
- [50] F. James and M. Winkler, “Minuit User’s Guide.” <http://seal.cern.ch/documents/minuit/mnusersguide.pdf>, 2004.
- [51] M. Galassi *et al.*, *GNU Scientific Library Reference Manual*. Network Theory Ltd., 2003. <http://www.gnu.org/software/gsl/>.
- [52] F. James, “Minuit Tutorial.” <http://seal.cern.ch/documents/minuit/mntutorial.pdf>, 2004.
- [53] J. A. Nelder and R. Mead, “A Simplex Method for Function Minimization,” *The Computer Journal* **7** no. 4, (1965) 308–313.
- [54] R. Fletcher and M. J. D. Powell, “A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization,” *Comput. J.* **6** no. 2, (1963) 163–168.  
R. Fletcher, “A New Approach to Variable Metric Algorithms,” *Comput. J.* **13** no. 3, (1970) 317–322.
- [55] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller, “Equation of State Calculations by Fast Computing Machines,” *The Journal of Chemical Physics* **21** no. 6, (1953) 1087–1092.
- [56] S. Kirkpatrick, J. Gelatt, C. D., and M. P. Vecchi, “Optimization by Simulated Annealing,” *Science* **220** no. 4598, (1983) 671–680.  
V. Cerny, “A thermodynamical approach to the travelling salesman problem: an efficient simulation algorithm,” *Journal of Optimization Theory and Applications* **45** (1985) 41–51.
- [57] W. Porod, “SPHeno, a program for calculating supersymmetric spectra, SUSY particle decays and SUSY particle production at e+ e- colliders,” *Comput. Phys. Commun.* **153** (2003) 275–315, [arXiv:hep-ph/0301101](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0301101).

- [58] P. Skands, “SUSY Les Houches Accord.”  
<http://home.fnal.gov/~skands/slha/>, July, 2010.
- [59] F. S. Thomas, “SLHAea - another SUSY Les Houches Accord input/output library.” <http://fthomas.github.com/slhaea/>.
- [60] B. C. Allanach, “SOFTSUSY: A C++ program for calculating supersymmetric spectra,” *Comput. Phys. Commun.* **143** (2002) 305–331, [arXiv:hep-ph/0104145](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0104145).
- [61] **LHC/LC Study Group** Collaboration, G. Weiglein *et al.*, “Physics interplay of the LHC and the ILC,” *Phys. Rept.* **426** (2006) 47–358, [arXiv:hep-ph/0410364](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0410364).

---

# Abbildungsverzeichnis

1.1. Konfidenzbereiche der Neutrino-Oszillationsparameter aus experimentellen Daten. . . . .	9
2.1. Einschleifenkorrekturen zur Higgs-Masse durch ein Fermion und ein Skalar.	11
2.2. Protonzerfall $p^+ \rightarrow e^+ \pi^0$ durch verletzte $R$ -Parität. . . . .	19
4.1. Dichtefunktion der Chi-Quadrat-Verteilung für verschiedene Freiheitsgrade.	33
4.2. Komplementäre kumulative Verteilungsfunktion der Chi-Quadrat-Verteilung für verschiedene Freiheitsgrade. . . . .	34
4.3. Vergleich von $\chi^2$ in Abhängigkeit eines Parameters bei Fits mit niedriger und hoher Punktdichte. . . . .	35
5.1. Likelihood- und Konfidenzkarte der $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$ -Ebene beim Fit mit idealen Neutrinodaten. . . . .	57
5.2. Likelihood-Karten der $\epsilon_1$ - $\nu_1$ -Ebene beim Fit mit idealen Neutrinodaten.	58
5.3. Konfidenzkarten der $\epsilon_2 \Lambda_2$ - $\epsilon_3 \Lambda_3$ - und $\Lambda_2$ - $\epsilon_3$ -Ebene beim Fit mit idealen Neutrinodaten. . . . .	59
5.4. Konfidenzkarte der $\Lambda_1$ - $\Lambda_3$ -Ebene und Likelihood-Karte der $\epsilon^2$ - $ \mathbf{\Lambda} $ -Ebene beim Fit mit idealen Neutrinodaten. . . . .	60
5.5. Konfidenzkarten der $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$ -Ebene und der $\Lambda_1$ - $\Lambda_3$ -Ebene beim Fit mit experimentellen Neutrinodaten. . . . .	64
5.6. Likelihood-Karten der $\epsilon_1$ - $\nu_1$ -Ebene und der $\Lambda_1$ - $\Lambda_2$ -Ebene beim Fit mit experimentellen Neutrinodaten. . . . .	65
5.7. Konfidenzkarten der $\Lambda_1$ - $\epsilon_1$ -Ebene und der $\Lambda_1$ - $\epsilon_2$ -Ebene beim Fit mit experimentellen Neutrinodaten. . . . .	66
5.8. Likelihood-Karten der $\epsilon_2 \Lambda_2$ - $\epsilon_3 \Lambda_3$ -Ebene und der $\epsilon^2$ - $ \mathbf{\Lambda} $ -Ebene beim Fit mit experimentellen Neutrinodaten. . . . .	67
5.9. $\chi^2$ in Abhängigkeit von $\epsilon_1$ und von $\epsilon_3$ beim Fit mit experimentellen Neutrinodaten. . . . .	68
5.10. Konfidenzkarten der $\epsilon_1$ - $\epsilon_3$ -Ebene und der $\epsilon_1$ - $\nu_1$ -Ebene beim Fit mit den Zerfalleigenschaften des $\tilde{\chi}_1^0$ . . . . .	73
5.11. Konfidenzkarten der $\Lambda_2$ - $\epsilon_1$ -Ebene und der $\Lambda_2$ - $\Lambda_3$ -Ebene beim Fit mit den Zerfalleigenschaften des $\tilde{\chi}_1^0$ . . . . .	74

Abbildungsverzeichnis

5.12. Konfidenzkarten der $\Lambda_1$ - $\epsilon_1$ -Ebene und der $\Lambda_2$ - $\epsilon_2$ -Ebene beim Fit mit den Zerfallseigenschaften des $\tilde{\chi}_1^0$ . . . . .	75
5.13. Konfidenzkarten der $\epsilon_2\Lambda_2$ - $\epsilon_3\Lambda_3$ -Ebene und der $\epsilon^2$ - $ \mathbf{\Lambda} $ -Ebene beim Fit mit den Zerfallseigenschaften des $\tilde{\chi}_1^0$ . . . . .	76
5.14. Konfidenzkarten der $\epsilon_1$ - $\epsilon_3$ -Ebene und der $\epsilon_1$ - $\nu_1$ -Ebene beim Fit mit den Neutrinodaten und den Zerfallseigenschaften des $\tilde{\chi}_1^0$ . . . . .	78
5.15. Konfidenzkarten der $\epsilon_1$ - $\nu_2$ -Ebene und der $\epsilon_3$ - $\nu_2$ -Ebene beim Fit mit den Neutrinodaten und den Zerfallseigenschaften des $\tilde{\chi}_1^0$ . . . . .	79

---

# Tabellenverzeichnis

1.1. Best-fit-Werte der Neutrino-Oszillationsparameter aus experimentellen Daten. . . . .	8
2.1. Chirale Supermultipletts im MSSM. . . . .	14
2.2. Eichsupermultipletts im MSSM. . . . .	14
2.3. Eich- und Masseneigenzustände im MSSM. . . . .	21
4.1. $\Delta\chi^2$ für gebräuchliche Konfidenzniveaus und verschiedene Freiheitsgrade. . . . .	36
5.1. Datenpunkte des Fits mit idealen Neutrinodaten. . . . .	52
5.2. Minima beim Fit mit idealen Neutrinodaten. . . . .	54
5.3. Durch Minuit Minos ermittelten asymmetrischen Parameterfehler beim Fit mit idealen Neutrinodaten. . . . .	55
5.4. Korrelationsmatrix beim Fit mit idealen Neutrinodaten. . . . .	56
5.5. Datenpunkte des Fits mit experimentellen Neutrinodaten. . . . .	61
5.6. Minima beim Fit mit experimentellen Neutrinodaten. . . . .	62
5.7. Durch Minuit Minos ermittelten asymmetrischen Parameterfehler beim Fit mit experimentellen Neutrinodaten. . . . .	63
5.8. Datenpunkte des Fits mit den Zerfallseigenschaften des $\tilde{\chi}_1^0$ . . . . .	69
5.9. Minima beim Fit mit den Zerfallseigenschaften des $\tilde{\chi}_1^0$ . . . . .	71
5.10. Unterschiede zwischen den Zerfallskanälen der Minima beim Fit mit den Zerfallseigenschaften des $\tilde{\chi}_1^0$ . . . . .	72
5.11. Beiträge der einzelnen Observablen zum $\chi^2$ beim Fit mit den Zerfallseigenschaften des $\tilde{\chi}_1^0$ . . . . .	72
5.12. Best-fit-Werte mit Fehlern beim Fit mit den Neutrinodaten und den Zerfallseigenschaften des $\tilde{\chi}_1^0$ . . . . .	77



---

## Danksagung

Allen voran danke dem Betreuer dieser Diplomarbeit Prof. Dr. Werner Porod, der mir bei Fragen und Problemen mit Rat und Tat zur Seite stand. Dr. Ritesh K. Singh danke ich für die hilfreichen und inspirativen Diskussionen über Optimierungsalgorithmen und die Fehleranalyse. Renate Strobel und Benjamin Kaluza danke ich für das Korrekturlesen dieser Arbeit. Darüber hinaus gilt mein Dank meiner Familie, insbesondere meinem Großvater, deren Unterstützung mir während des gesamten Studiums eine sehr große Hilfe war.



---

## Erklärung

Hiermit erkläre ich, Frank S. Thomas, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ausschließlich unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift