Produktion und Zweikörperzerfall von Neutralinos: Effekte CP-verletzender Phasen

Diplomarbeit
von
Reimer Selle

Institut für Theoretische Physik
der
Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Februar 2001

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Auf dem Gebiet der Elementarteilchenphysik sind in den letzten Jahrzehnten sowohl in experimenteller wie auch in theoretischer Hinsicht bedeutsame Fortschritte gemacht worden. Zu dem verbesserten Verständnis der Eigenschaften der Elementarteilchen und ihrer fundamentalen Wechselwirkungen hat maßgeblich das Erkennen und die Anwendung von Symmetrieprinzipien beigetragen. So gelang es etwa M. Gell-Mann mit der von ihm postulierten $SU(3)_{flavor}$-Symmetrie, ein ordnendes Prinzip in die bis dahin unverstandene Vielfalt des an den Beschleunigern entdeckten 'Teilchenzoos' zu bringen. Obgleich diese Symmetrie in der Natur nur näherungsweise erfüllt ist, so hat sie doch den Anstoß zur Entwicklung der $SU(3)_C$-QCD-Eichtheorie gegeben, die heute die theoretische Grundlage zur Beschreibung der starken Wechselwirkung darstellt. Die QCD bildet zusammen mit der quantisierten Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung (QED) und deren Vereinheitlichung mit der schwachen Wechselwirkung durch S.L. Glashow, A. Salam und S. Weinberg die Grundlage des Standardmodells der Teilchenphysik. In dessen Rahmen ist es gelungen, zahlreiche Effekte und Phänomene der Teilchenphysik, insbesondere im elektroschwachen Sektor, mit bis dahin unerreichter Präzision zu berechnen, in erstaunlicher Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen.

Die derzeit im Bau bzw. in Planung befindliche neue Generation von Beschleunigern, der Hadronen-Beschleuniger LHC und ein e^+e^-- Linearbeschleuniger, eröffnet den Zugang zu neuen Energiebereichen, in denen potentiell erste experimentelle Hinweise für eine neue Symmetrie - die 'Supersymmetrie' (SUSY) gefunden werden könnten. Die Attraktivität von supersymmetrischen Modellen für die Teilchenphysik liegt vor allem darin, daß im Rahmen eines supersymmetrisch erweiterten Standardmodells die Möglichkeit besteht, die elektroschwache mit der starken Wechselwirkung in einer Großvereinheitlichten Theorie (GUT) zu vereinigen. Außerdem besteht die Hoffnung, mit Hilfe der Supersymmetrie eine quantisierte Theorie der Gravitation zu entwickeln. Quantisierte Eichtheorien der Gravitation lassen aufgrund ihrer fehlenden Renormierbarkeit im Rahmen des Standardmodells keine sinnvolle (d.h. konvergente) störungstheoretische Behandlung zu.
Darüber hinaus hätte der experimentelle Nachweis supersymmetrischer Teilchen in Beschleunigerexperimenten auch direkte Konsequenzen für die Astrophysik, denn das leichteste dieser Teilchen - sofern es elektrisch neutral und stabil ist[1] - wäre ein exzellenter Kandidat für die 'Dunkle Materie', auf deren Präsenz allein ihre gravitativen Auswirkungen hinweisen. Zahlreiche Berechnungen haben gezeigt, daß ein Großteil dieser Dunklen Materie nicht-baryonischer Natur sein sollte, und daß auch massive Neutrinos höchstwahrscheinlich keinen wesentlichen Beitrag dazu leisten

[1] Ein solches Teilchen ist nicht direkt in den Detektoren der Beschleuniger nachweisbar.

können (siehe [1] und die dort enthaltenen Literaturhinweise).

Eine wesentliche phänomenologische Konsequenz einer exakten Supersymmetrie ist die Existenz supersymmetrischer Partnerteilchen für alle im Standardmodell enthaltenen Teilchen mit derselben Masse, die sich um $\frac{1}{2}$ in ihrem Spin unterscheiden. Da die entsprechenden Partnerteilchen jedoch bislang nicht entdeckt wurden, muß die Superymmetrie, falls sie in der Natur realisiert ist, bei Energien oberhalb der elektroschwachen Energieskala gebrochen sein. Vor allem durch diese Symmetriebrechung wird eine Vielzahl generell zunächst komplexer Parameter in die Theorie eingeführt.
In dieser Arbeit sollen die Auswirkungen endlicher Phasen zweier dieser Parameter, M_1 und μ, auf die Produktion der Neutralinos $\tilde{\chi}_1^0$ und $\tilde{\chi}_3^0$ in e^+e^--Vernichtung und den anschließenden Zerfall des $\tilde{\chi}_3^0$ in den Kanal $\tilde{\chi}_1^0 + Z$ untersucht werden. Ein solcher Prozeß wäre für das gewählte SUSY-Szenario in der ersten Ausbaustufe des geplanten TESLA-Beschleunigers mit einer Schwerpunktsenergie von 500 GeV beobachtbar. Im Rahmen dieser Arbeit wird insbesondere auf Effekte eingegangen, die aus den Polarisationseigenschaften der an dem Prozeß beteiligten Teilchen resultieren.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

2.1 Allgemeines zu Symmetrien

Da bereits auf die große Bedeutung von Symmetrien in der Elementarteilchenphysik hingewiesen wurde, ist es angebracht, hierzu kurz einige Definitionen und Beispiele anzugeben. Ausführlichere Darstellungen findet man in Lehrbüchern zur Quantenfeldteorie, z.B. [2],[3], in denen auch auf Fragen zur Eichfixierung und Renormierbarkeit von Eichtheorien eingegangen wird.

Unter einer Symmetrie versteht man die Invarianz der Lagrangedichte (ggf. bis auf eine totale Ableitung) des betrachteten Systems unter Transformationen der Felder durch Elemente der entsprechenden Symmetriegruppe:

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu K^\mu, \tag{2.1}$$

wobei K^μ eine beliebige Funktion der in der Lagrangedichte enthaltenen Felder und ihrer Ableitungen ist. Dabei unterscheidet man zwischen diskreten und kontinuierlichen Symmetrien. Diskrete Symmetrien werden durch Gruppen mit einer endlichen Anzahl von Gruppenelementen beschrieben, kontinuierliche Symmetrien durch Gruppen mit unendlich vielen Elementen, welche durch einen Satz von kontinuierlichen Parametern $\{\alpha_i\}$ charakterisiert werden. Sind diese Parameter ortsunabhängig, so handelt es sich um eine globale Symmetrie, andernfalls um eine lokale Symmetrie.

Diskrete Symmetrien

In der relativistischen Quantenfeldtheorie sind die wichtigsten diskreten Symmetrien Ladungskonjugation C, Parität P (Raumspiegelung) und Zeitumkehr T, die z.B. auf Spinorfelder folgende Wirkung haben:

$$\begin{aligned} C\Psi(x)C^{-1} &= i\gamma^2\gamma^0\bar{\Psi}^T(x) \\ P\Psi(x)P^{-1} &= i\gamma^1\gamma^3\Psi(x_P) \\ T\Psi(x)T^{-1} &= \gamma^0\Psi(x_T), \end{aligned} \tag{2.2}$$

mit den im Anhang (A.1) definierten Dirac-Matrizen γ^i in der Dirac-Darstellung und den unter Raum- bzw. Zeitspiegelung transformierten Raumzeitkoordinaten:

$$\begin{aligned} x = (x^0, \vec{x}) &\to x_P = (x^0, -\vec{x}) \\ x = (x^0, \vec{x}) &\to x_T = (-x^0, \vec{x}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Nach dem CPT-Theorem muß jede lokale, lorentzinvariante, hermitesche Lagrangedichte invariant unter der Kombination dieser drei Symmetrieoperationen sein.

Daher muß beispielsweise CP-Verletzung (fehlende Invarianz unter der Transformation CP) notwendigerweise mit T-Verletzung einhergehen, damit die Invarianz unter CPT gewährleistet ist.

Kontinuierliche globale Symmetrien

Hierzu betrachten wir nur als einfaches Beispiel die Lagrangedichte für ein freies, masseloses Spinorfeld Ψ:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x) = i\bar{\Psi}(x)\ \not{\partial}\Psi(x). \tag{2.4}$$

Diese ist invariant unter den globalen Phasentransformationen

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = e^{i\alpha}\Psi(x), \qquad \bar{\Psi}(x) \to \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)e^{-i\alpha}, \tag{2.5}$$

mit der konstanten Phase α. Läßt man stattdessen Phasen $\alpha(x)$ zu, die von den Raumzeitkoordinaten abhängen, so erhält man

Kontinuierliche lokale Symmetrien

Im einfachsten Fall hat eine lokale Phasentransformation also die Form

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\Psi(x), \qquad \bar{\Psi}(x) \to \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)e^{-i\alpha(x)}, \tag{2.6}$$

wobei die $e^{\pm i\alpha(x)}$ Elemente einer Darstellung der abelschen $U(1)$-Gruppe sind. Physikalische Anwendung findet dieses Beispiel in der Quantenelektrodynamik (QED), der **abelschen Eichtheorie** der elektromagnetischen Wechselwirkung. Transformieren wir nun die Felder in (2.4) gemäß (2.6), so tritt in der transformierten Lagrangedichte ein weiterer Term auf, der die Invarianz der Lagrangedichte unter dieser Transformation zunichte macht:

$$\mathcal{L}' = i\bar{\Psi}(x)\ \not{\partial}\Psi(x) - \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)(\partial_\mu\alpha(x)). \tag{2.7}$$

Dieser Term kann kompensiert werden, indem wir von der partiellen zur kovarianten Ableitung D_μ übergehen, die sich gemäß

$$D_\mu\Psi(x) \to e^{i\alpha(x)}D_\mu\Psi(x) \tag{2.8}$$

transformieren soll. Diese kovariante Ableitung läßt sich durch Einführung eines Eichfeldes A_μ konstruieren, welches mit der Kopplungskonstante e an das Spinorfeld koppelt:

$$D_\mu\Psi(x) = (\partial_\mu + ieA_\mu)\Psi(x). \tag{2.9}$$

Um den unerwünschten Term in (2.7) zu kompensieren, muß das Eichfeld folgendes Transformationsverhalten aufweisen:

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \tag{2.10}$$

Ein kinetischer Term für das Eichfeld läßt sich mit Hilfe des Feldstärketensors $F_{\mu\nu}$ gewinnen, der über den Kommutator zweier kovarianter Ableitungen definiert ist:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ie}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{2.11}$$

Damit erhalten wir die Lagrangedichte der QED:

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\Psi}(x)\ \not{D}\Psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{2.12}$$

der wir auch noch den Massenterm $m\bar{\Psi}(x)\Psi(x)$ für das Spinorfeld $\Psi(x)$ hinzufügen könnten, ohne die Invarianz der Lagrangedichte unter der Eichtransformation (2.6) zu verletzen. Ein Massenterm für das Eichfeld hingegen, der proportional zu $A_\mu A^\mu$ sein müsste, ist nicht zugelassen, da dieser aufgrund des Transformationsverhaltens des Eichfeldes (2.10) nicht eichinvariant wäre.

Das soeben vorgestellte Eichprinzip läßt sich auf **nichtabelsche Eichgruppen** erweitern. Die entsprechende Eichtransformation der Felder ist in diesem Fall gegeben durch

$$\Psi(x) \to e^{i\alpha^a(x)T^a}\Psi(x). \tag{2.13}$$

(In dieser Arbeit wird stets die Einsteinsche **Summenkonvention** verwendet: über doppelt vorkommende Indizes wird summiert, falls nicht explizit anders angegeben.)
Im Falle nichtabelscher Eichgruppen ist zu berücksichtigen, daß die Kommutatoren der Generatoren T^a der Eichgruppe nicht verschwinden:

$$[T^a, T^b] = ic^{abc}T^c, \tag{2.14}$$

mit den Strukturkonstanten c^{abc} der Eichgruppe. Führen wir für jeden Generator der Eichgruppe ein Eichfeld G^a_μ ein, so gelangen wir, wie zuvor in der QED, zur kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - igT^aG^a_\mu, \tag{2.15}$$

mit der Kopplungskonstante g. Den entsprechenden Feldstärketensor $G^a_{\mu\nu}$ erhalten wir wiederum aus dem Kommutator zweier kovarianter Ableitungen:

$$[D_\mu, D_\nu] = -igT^aG^a_{\mu\nu}, \tag{2.16}$$

zu

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + gc^{abc}G^b_\mu G^c_\mu. \tag{2.17}$$

Darin zeigt sich der Unterschied zu abelschen Eichtheorien, nämlich die im letzten Term des Feldstärketensors enthaltene Selbstwechselwirkung der Eichfelder. Als Beispiel für eine solche nichtabelsche Eichtheorie wird im folgenden das elektroschwache Standardmodell vorgestellt.

2.2 Das elektroschwache Standardmodell

Die theoretische Grundlage der in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen bildet das Minimale Supersymmetrische Standardmodell MSSM.
Doch zunächst sollen die wesentlichen Grundzüge des Glashow-Salam-Weinberg-Modells (GSW-Modell)[5] dargestellt werden, in dessen Rahmen die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung erfolgreich vereinigt werden konnten.
Beim GSW-Modell handelt es sich um eine renormierbare Eichtheorie mit der nichtabelschen Eichgruppe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Die Eichfelder sind Vektorfelder, die zur adjungierten Darstellung der jeweiligen Eichgruppe gehören. Somit ist den drei Generatoren T^a $(a = 1, 2, 3)$ der $SU(2)_L$ ein Triplett W^a_μ und dem Generator Y der $U(1)_Y$ das Singlett B_μ zugeordnet. Diese müssen, ebenso wie die beteiligten Fermionen zunächst masselos sein, da entsprechende Massenterme die Eichinvarianz der Theorie verletzen würden. Die Massen der Eichbosonen und Fermionen werden erst nach Einführung des skalaren Higgsfeldes und spontaner Symmetriebrechung erzeugt.
Beginnen wir zunächst mit den Spinorfeldern, deren wechselwirkungsfreie Lagrangedichten für masselose Fermionen wiederum gegeben sind durch:

$$\mathcal{L}_{free} = i\bar{\psi}\,\partial\!\!\!/\psi. \tag{2.18}$$

Mit Hilfe der Projektionsoperatoren $P_{L/R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$ kann man diese in ihre links- und rechtshändigen Anteile aufspalten:

$$\mathcal{L}_{free} = i\bar{\psi}_L \not{\partial}\psi_L + i\bar{\psi}_R \not{\partial}\psi_R. \tag{2.19}$$

Diese Aufspaltung ist darin begründet, daß nur linkshändige Teilchen an dem durch die geladenen Eichbosonen vermittelten Anteil der schwachen Wechselwirkung teilhaben. Aufgrund dieser Eigenschaft der schwachen Wechselwirkung lassen sich die Materiefelder bzgl. der $SU(2)$-Eichgruppe in folgende Multipletts einordnen:
Die linkshändigen Dupletts

$$E_L^i = \begin{pmatrix} \nu^i \\ e^i \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \nu^e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu^\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu^\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \tag{2.20}$$

und

$$Q_L^i = \begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \tag{2.21}$$

sowie die rechtshändigen Singletts

$$E_R^i = (e_R, \mu_R, \tau_R) \tag{2.22}$$

und

$$U_R^i = (u_R, c_R, t_R), \quad D_R^i = (d_R, s_R, b_R) \tag{2.23}$$

Im folgenden beziehen sich L und R auf links- bzw. rechtshändige Felder. Auf das zur Zeit sehr aktuelle Problem der Neutrinomassen wird hier nicht eingegangen. Daher werden im Rahmen dieses Überblicks über das elektroschwache Standardmodell Neutrinos als masselos betrachtet, und wir gehen davon aus, daß es keine rechtshändigen Neutrinos gibt.
Die elektrische Ladung Q der Teilchen des Modells ergibt sich mit der Gell-Mann-Nishijima-Relation aus deren Quantenzahlen der Operatoren T^3, Y zu

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}. \tag{2.24}$$

Den Multipletts können daher folgende Ladungsquantenzahlen zugeordnet werden:

- Für rechtshändige Felder ist die der $SU(2)$-Eichgruppe zugeordnete Ladung $T^3 = 0$. Für die rechtshändigen Leptonen (e_R, μ_R, τ_R) ist $Y = -2$, für rechtshändige *up*-artige Quarks ist $Y = +\frac{4}{3}$, für *down*-artige Quarks ist $Y = -\frac{2}{3}$.

- Für die linkshändigen Felder erhält man $T^3(\nu, u) = \frac{1}{2}$, $T^3(e, d) = -\frac{1}{2}$ sowie $Y(\nu, e) = -1$ und $Y(u_L, d_L) = \frac{1}{3}$.

Hier sieht man bereits, daß Massenterme der Form $-m_e\bar{\psi}_e\psi_e = -m_e(\bar{e}_Le_R + \bar{e}_Re_L)$ nicht zugelassen sind, da e_L und e_R zu verschiedenen $SU(2)$-Darstellungen gehören und unterschiedliche $U(1)$-Ladungen haben [2].
Fordert man lokale Eichinvarianz, so muß man die in der freien Lagrangedichte vorkommenden Ableitungen ∂_μ durch kovariante Ableitungen D_μ ersetzen, welche die den Eichgruppen $SU(2)_L$ und $U(1)_Y$ entsprechenden Kopplungskonstanten g und g' enthalten:

$$D_\mu = \partial_\mu - igT^aW_\mu^a + ig'\frac{Y}{2}B_\mu. \tag{2.25}$$

Fügt man nun noch die Feldstärketensoren der Eichfelder hinzu, so erhält man folgende Lagrangedichte (ε_{abc} sind die Strukturkonstanten der $SU(2)$):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= \bar{L}_i\gamma^\mu D_\mu L_i + \bar{R}_i\gamma^\mu D_\mu R_i \\ &\quad -\frac{1}{4}(\partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g\varepsilon_{abc}W^b_\mu W^c_\nu)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2. \qquad (2.26)\end{aligned}$$

Diese enthält außer den kinetischen Termen die Wechselwirkungen der fermionischen Materiefelder mit den Eichbosonen, sowie im Fall der nichtabelschen Eichgruppe die Selbstwechselwirkungen der Eichfelder.

Als nächsten Schritt führen wir ein komplexes Skalarfeld ein, das **Higgsfeld**. Dieses soll ein $SU(2)$-Duplett bilden und trägt die Quantenzahlen $T^3 = \pm\frac{1}{2}$ und $Y = 1$.

$$\Phi = \begin{pmatrix}\phi^+ \\ \phi^0\end{pmatrix}. \qquad (2.27)$$

Daraus ergibt sich zunächst folgender Anteil in der Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - V(\Phi). \qquad (2.28)$$

Um die Eichinvarianz und die Renormierbarkeit der Theorie nicht zu verletzen, sind in dem Higgspotential $V(\Phi)$ nur folgende Terme zugelassen:

$$V(\Phi) = -\mu^2(\Phi^\dagger\Phi) + \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger\Phi)^2. \qquad (2.29)$$

Dieses Potential besitzt ein Minimum bei

$$\Phi^\dagger\Phi = \frac{2\mu^2}{\lambda} =: \frac{v^2}{2}. \qquad (2.30)$$

Damit hat das Higgsfeld einen nicht-verschwindenden Vakuumerwartungswert von $\frac{v}{\sqrt{2}}$. Der resultierende Grundzustand Φ_0 kann durch eine geeignete $SU(2)$- Transformation so gewählt werden, daß die elektromagnetische Eichsymmetrie $U(1)_{em}$ (die nicht mit der $U(1)_Y$ identisch ist!) erhalten bleibt.

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix}0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}. \qquad (2.31)$$

Das Higgsfeld entwickelt man nun um diesen Grundzustand:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix}\phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x) + i\rho(x))\end{pmatrix}. \qquad (2.32)$$

In der unitären Eichung verschwinden die unphysikalischen Freiheitsgrade ϕ^+ und ρ; übrig bleibt das Feld $h(x)$:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix}0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x))\end{pmatrix}, \qquad (2.33)$$

dessen Quanten, die Higgs-Bosonen, die folgende Masse haben:

$$M_H = \sqrt{2}\mu = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}v. \qquad (2.34)$$

Die Massen der Eichbosonen ergeben sich aus dem $(D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi)$- Anteil der Higgs-Lagrangedichte:

$$(D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{g^2v^2}{4}[(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] + \frac{v^2}{4}(gW_\mu^3 - g'B_\mu)^2 + ..., \quad (2.35)$$

wobei '...' für weitere Terme steht, die Produkte von drei oder vier Feldern enthalten und Wechselwirkungen zwischen den Eichbosonen und dem Higgsfeld $h(x)$ beschreiben.
Die Masseneigenzustände der Eichbosonen sind daher durch folgende Linearkombinationen der ursrünglichen Felder W_μ^a und B_μ gegeben:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{2}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (2.36)$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

θ_W ist der schwache Mischungswinkel und ist definiert durch

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \quad \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}. \quad (2.38)$$

Für die Massen der Eichbosonen ergeben sich somit folgende Werte:

$$M_W = \frac{v}{2}g \quad (2.39)$$
$$M_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g^2+g'^2} \quad (2.40)$$
$$M_A = 0. \quad (2.41)$$

Identifiziert man A_μ mit dem Photonenfeld der elektromagnetischen Wechselwirkung, so erhält man folgende Beziehungen zwischen den Kopplungskonstanten e der $U(1)_{em}$ und g, g' der $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$:

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \quad (2.42)$$
$$g = \frac{e}{\sin\theta_W} \quad (2.43)$$
$$g' = \frac{e}{\cos\theta_W}. \quad (2.44)$$

Zusammen mit der Gell-Mann-Nishijima-Relation (2.24) und den Leiteroperatoren

$$T^\pm = T^1 \pm iT^2 \quad (2.45)$$

der $SU(2)$ kann man die kovariante Ableitung aus (2.25) umschreiben, um die Wechselwirkungen der Materiefelder mit den Masseneigenzuständen der Eichfelder anzugeben:

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+T^+ + W_\mu^-T^-) - i\frac{g}{\cos\theta_W}Z_\mu(T^3 - \sin^2\theta_W Q) - ieA_\mu Q. \quad (2.46)$$

Um die Massen der Fermionenfelder zu erhalten, betrachten wir nun die Yukawa-Wechselwirkungen dieser Felder mit dem Higgsfeld.

$$\mathcal{L}_m = -\lambda_d^{ij}\bar{Q}_L^i \cdot \Phi d_R^j - \lambda_u^{ij}\bar{Q}_L^i \cdot \Phi^\dagger u_R^j - \lambda_l^{ij}\bar{E}_L^i \cdot \Phi e_R^j \; + \; h.c. \quad (2.47)$$

Ausdrücke der Form $\bar{L}\cdot\Phi$ beinhalteten die Kontraktion der $SU(2)$-Indices der Dupletts L, Φ. Da die Kopplungsmatrizen λ_d^{ij}, λ_u^{ij}, λ_l^{ij} der Materiefelder an das Higgsfeld nicht aus einem Eichprinzip folgen, sind diese zunächst nicht eingeschränkt und sind daher i.a. komplexe Matrizen, die nicht unbedingt symmetrisch sind, und eine Mischung der verschiedenen Quark- bzw. Leptonenflavours bewirken können [2].
Betrachten wir zunächst die Situation im Quarksektor. Jede (quadratische) Matrix kann durch eine Bi-Unitäre Transformation diagonalisiert werden. Daher können λ_u^{ij} und λ_d^{ij} durch unitäre Matrizen U_u, W_u, U_d, W_d auf folgende Form gebracht werden:

$$\lambda_u = U_u D_u W_u^\dagger, \tag{2.48}$$
$$\lambda_d = U_d D_d W_d^\dagger, \tag{2.49}$$

wobei D_u und D_d Diagonalmatrizen mit reellen Eigenwerten sind. Führt man nun die Variablensubstitution

$$u_R^i \to W_u^{ij} u_R^j, \qquad d_R^i \to W_d^{ij} d_R^j, \tag{2.50}$$

durch, so verschwinden die Matrizen W_u und W_d aus den Higgskopplungen. Außerdem vertauschen W_u und W_d mit den kovarianten Ableitungen, da (u_R, c_R, t_R) und (d_R, s_R, b_R) jeweils dieselben Kopplungen an die Eichfelder haben und daher lassen sich W_u und W_d aus der gesamten Lagrangedichte eliminieren.
Eine weitere Vereinfachung wird durch eine entsprechende Variablensubstitution für die linkshändigen Felder ermöglicht:

$$u_L^i \to U_u^{ij} u_L^j, \qquad d_L^i \to U_d^{ij} d_L^j. \tag{2.51}$$

Diese Transformation beseitigt U_u und U_d aus den Termen in (2.47), welche die untere Komponente des Higgsfeldes Φ enthalten; in der unitären Eichung bleiben nur diese Terme erhalten. Man beachte, daß zu diesem Zweck die beiden Komponenten eines Quarkdupletts unterschiedlich transformiert werden müssen. Damit ergeben sich aus den Diagonalelementen der Matrizen D_u und D_d und dem Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes die Quarkmassen zu:

$$m_u^i = \frac{1}{\sqrt{2}} D_u^{ii} v, \qquad m_d^i = \frac{1}{\sqrt{2}} D_d^{ii} v. \tag{2.52}$$

Dabei stehen $D_{u/d}^{ii}$ jeweils für das i-te Diagonalelement der Matrizen $D_{u/d}$. Ähnlich wie zuvor bei W_u und W_d verschwinden die Matrizen U_u und U_d aus den kinetischen Termen sowie aus den elektromagnetischen und Z-Boson-Strömen, z.B.

$$J_{em}^\mu = \bar{u}_L^i \gamma^\mu u_L^i \to \bar{u}_L^i U_u^{\dagger ij} \gamma^\mu U_u^{jk} u_L^k = \bar{u}_L^i \gamma^\mu u_L^i. \tag{2.53}$$

Bei dem Strom, der an die geladenen W-Bosonen koppelt, findet man jedoch, daß U_u und U_d nicht verschwinden, weil hier verschiedene Komponenten der Quarkdupletts eingehen:

$$J^{\mu +} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu d_L^i \to \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu (U_u^\dagger U_d)^{ij} d_L^j. \tag{2.54}$$

Darin tritt die unitäre $N \times N$- Matrix $U_u^\dagger U_d$ auf, wobei N die Anzahl der verschiedenen Generationen ist. Eine solche Matrix hat N^2 reelle Parameter. Durch die Freiheit, die relativen Phasen der $2N$ Quarkfelder zu ändern wird diese Anzahl um $2N-1$ verringert. Es bleiben also noch $(N-1)^2$ reelle Parameter übrig. Davon sind

- $(N-1)(N-2)/2$ Phasen und

- $N(N-1)/2$ Winkel.

Die hierbei auftretenden Phasen sind Quellen für CP-Verletzung. Nach obigen Überlegungen verbleiben bei $N = 3$ Quarkgenerationen drei Winkel und eine Phase. Ursprünglich hatten Kobayashi und Maskawa eine dritte Quarkgeneration vorgeschlagen, um einen Mechanismus für CP-Verletzung zu erhalten [2].
Daher wird die Matrix

$$V = U_u^\dagger U_d \tag{2.55}$$

auch als *Cabbibo-Kobayashi-Maskawa* (CKM) Mischungsmatrix bezeichnet.

Wenden wir uns nun dem leptonischen Teil von (2.47) zu, der aufgrund der fehlenden rechtshändigen Neutrinos nur aus dem folgenden Term besteht:

$$\mathcal{L}_{ml} = -\lambda_l^{ij} \bar{E}_L^i \cdot \Phi e_R^j \; + \; h.c. \tag{2.56}$$

Die Diagonalisierung der Kopplungsmatrix λ_l geschieht wiederum durch eine Bi-Unitäre Transformation:

$$\lambda_l = U_l D_l W_l^\dagger, \tag{2.57}$$

mit den komplexen Matrizen U_l und W_l und der reellen Diagonalmatrix D_l. Bei der anschließenden Variablentransformation können nun beide Komponenten der linkshändigen Dupletts gleich transformiert werden:

$$e_L^i \to U_l^{ij} e_L^j, \quad \nu_L^i \to U_l^{ij} \nu_L^j, \quad e_R^i \to W_l^{ij} e_R^j. \tag{2.58}$$

Daher beeinflußt diese Variablentransformation nicht den Strom, der die Leptonen an die geladenen W-Bosonen koppelt (die anderen Ströme sowie die kinetischen Terme sind wiederum ohnehin unproblematisch). Dies hat zur Folge, daß die schwachen Wechselwirkungen der Leptonen CP-Invariant sind. Außerdem sind die Leptonenzahlen der einzelnen Generationen erhalten, was in Präzisionsmessungen bestätigt wurde [2].
Nach diesen Variablensubstitutionen bekommt der Yukawa-Anteil der Lagrangedichte in unitärer Eichung die Form

$$\mathcal{L}_m = -m_d^i \bar{d}_L^i d_R^i \left(1 + \frac{h}{v}\right) - m_u^i \bar{u}_L^i u_R^i \left(1 + \frac{h}{v}\right) - m_l^i \bar{e}_L^i e_R^i \left(1 + \frac{h}{v}\right) \; + h.c. \tag{2.59}$$

Darin sind die Massenterme der Fermionen mit den Quarkmassen aus (2.52) und den Leptonenmassen

$$m_e^i = \frac{1}{\sqrt{2}} D_l^{ii} v \tag{2.60}$$

enthalten, sowie deren Wechselwirkungen mit dem Higgsfeld mit zur jeweiligen Masse der Fermionen proportionaler Kopplungskonstante.

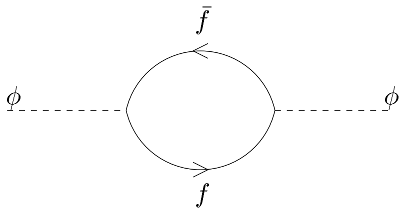
Faßt man die Lagrangedichten $\mathcal{L}_{int}$, $\mathcal{L}_{Higgs}$ und $\mathcal{L}_m$ zusammen, so ergibt sich das elektroschwache Standardmodell in unitärer Eichung. Dieses beinhaltet massive Fermionen, deren Wechselwirkungen mit z.T. ebenfalls massiven Eichbosonen, die Selbstwechselwirkungen der $SU(2)$-Eichfelder sowie ein massives Higgs-Boson.
Die in der Lagrangedichte vorkommenden Massen und Kopplungskonstanten sind zunächst als 'nackte' Größen zu verstehen. Im allgemeinen erhalten diese jedoch in

höheren Ordnungen der Störungstheorie Korrekturen. Die physikalischen Parameter erhält man aus der Kombination der 'nackten' Größen und ihrer Korrekturen. Präzise Berechnungen in höheren Ordnungen der Störungstheorie erfordern allerdings eine renormierbare Eichung, die man durch Einführung von eichfixierenden Termen und *Faddeev-Popov*-Geistfeldern erreichen kann [3].

2.3 Supersymmetrie

2.3.1 Warum Supersymmetrie?

Bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt ist das Standardmodell sehr erfolgreich bei der theoretischen Beschreibung der Phänomene der Teilchenphysik in den bislang experimentell zugänglichen Energiebereichen. In diesem Sinne ist das Standardmodell zumindest eine sehr präzise und robuste Niederenergie-Theorie. Dennoch sprechen einige Gründe dafür, daß das Standardmodell für höhere Energien erweitert werden muß. Dies sollte spätestens bei der Planckmasse $M_{PL} \approx 10^{19}\ GeV$ der Fall sein, ab der gravitative Quanteneffekte wichtig werden. Aus dem riesigen Verhältnis der Planckmasse zur Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung bei etwa $m_W \approx 100\ GeV$ ergibt sich das sog. 'Hierarchieproblem' des Standardmodells, das im Zusammenhang mit den im vorigen Abschnitt erwähnten Massenkorrekturen zu sehen ist. Diese erweisen sich im Rahmen des Standardmodells für skalare Teilchen als problematisch. So führen Fermion-Antifermion-Beiträge zur Selbstenergie des Higgs-Bosons, die aus Diagrammen der Art

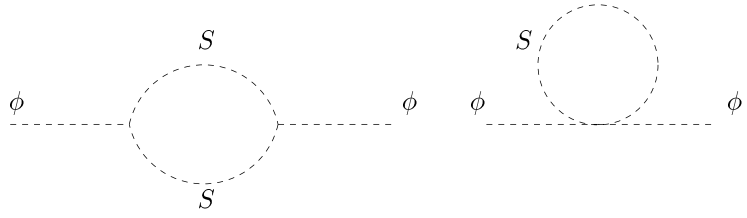


resultieren, bereits auf Einschleifenniveau zu Massenkorrekturen, die quadratisch divergent sind [11]:

$$\delta m_h^2 = N(f)\frac{|\lambda_f|^2}{16\pi^2}[-2\Lambda_{UV}^2 + 6m_f^2 \ln(\Lambda_{UV}/m_f) + ...]. \tag{2.61}$$

Darin sind m_f und λ_f die Masse des Fermions und seine Yukawakopplung an das Higgsfeld und $N(f)$ ist die Color-Multiplizität des Fermions ($N(f) = 1$ für Leptonen, $N(f) = 3$ für Quarks). Endliche Beiträge wurden durch die Punkte angedeutet. Λ_{UV} ist der ultraviolette Impuls-Abschneideparameter, der zur Regularisierung der Impulsintegration verwendet wird und sollte als die Energieskala interpretiert werden, ab der neue physikalische Effekte relevant werden und das Hochenergieverhalten der Theorie verändern. Die Massenkorrekturen des Higgs-Bosons neigen also im Standardmodell dazu, sehr sensitiv auf Energieskalen von Physik jenseits der elektroschwachen Symmetriebrechung zu reagieren, da sie von der Größenordnung der größten Skala in der Theorie - im Zweifelsfall also M_{PL} - sind. Um die Unitarität der WW-Streuung nicht zu verletzen darf die Masse des Higgs-Bosons jedoch nicht wesentlich größer als etwa 1 TeV sein [6]. In der Tat deuten die letzten am mittlerweile eingestellten LEP2-Experiment in Genf durchgeführten Messungen auf ein Higgs-Boson mit einer Masse von ungefähr 115 GeV hin [7]. Daher benötigt

man Counterterme, die ebenfalls von der Größenordnung M_{PL} sind und in jeder Ordnung der Störungstheorie fein justiert werden müssen, damit die Higgsmasse einen physikalisch sinnvollen Wert annimmt. Dies ist das sog. 'fine-tuning'-Problem des Standardmodells. Es gibt im Standardmodell keine Symmetrie, welche das Verschwinden der quadratischen Divergenzen sicherstellt.
Führt man jedoch weitere skalare Felder der Masse m_S ein, die mit λ_S an das Higgsfeld koppeln, so erhält man weitere Beiträge zur Selbstenergie des Higgs-Bosons:



Von diesen liefert das rechte Diagramm wiederum einen quadratisch divergenten Beitrag zur Higgsmassenkorrektur,

$$\delta m_H^2 = N(S)\frac{\lambda_S}{16\pi^2}[\Lambda_{UV}^2 - 2m_S^2 \ln(\Lambda_{UV}/m_S) + ...]. \tag{2.62}$$

Da die Fermion- und Boson-Schleifenbeiträge sich um ein relatives Vorzeichen unterscheiden, besteht prinzipiell die Möglichkeit, daß sich die beiden Beiträge gegenseitig aufheben. Existiert eine Symmetrie, welche die in den Schleifen propagierenden Teilchen miteinander in Verbindung bringt, so daß zu jedem Fermion skalare Teilchen existieren, für die

$$N(S) = 2N(f), \qquad \lambda_S = |\lambda_f|^2 \tag{2.63}$$

gewährleistet ist, so verschwinden die quadratisch divergenten Beiträge. Dabei beinhaltet die Forderung $N(S) = 2N(f)$ die Gleichheit fermionischer und bosonischer Freiheitsgrade des Modells. Gilt weiterhin

$$m_S = m_f, \tag{2.64}$$

so heben sich die Fermion- und Boson-Schleifenbeiträge exakt gegeneinader auf [6]. Wie im nächsten Kapitel angedeutet wird, liefert eine exakte Supersymmetrie genau diese Resultate.
Es gibt jedoch weitere Argumente, die Supersymmetrie zu einer interessanten Erweiterung des Standardmodells machen:

- Die einfachste Erweiterung des Standardmodells zu einer Großvereinheitlichten Theorie (*Grand Unified Theory*) GUT, eine $SU(5)$-Eichtheorie, liefert einen zu kleinen Wert für die Zerfallsdauer des Protons. Außerdem hat sich gezeigt, daß es im Rahmen einer solchen Erweiterung des Standardmodells unmöglich ist, die Werte der Kopplungskonstanten der elektromagnetischen, schwachen und starken Wechselwirkung bei der GUT-Skala M_{GUT} zu vereinigen. Supersymmetrische Theorien hingegen ermöglichen ein solches Resultat bei $M_{GUT} \approx 10^{15} - 10^{16}\ GeV$.

- Die Vereinigung der Gravitation mit den anderen Wechselwirkungen kann eine GUT als Erweiterung des Standardmodells nicht leisten, da eine quantisierte Gravitationstheorie in diesem Rahmen nicht renormierbar ist. Eine Einbeziehung der Gravitation scheint in supersymmetrischen Modellen (SUGRA) jedoch nicht ausgeschlossen zu sein.

- Auch Superstring-Theorien, die derzeit als hoffnungsvollste Kandidaten einer 'Theory of Everything' gelten, benötigen die Existenz von Supersymmetrie (zumindest an der Planck-Skala)[6].

2.3.2 Supersymmetrie-Algebra

Nach dem Haag-Lopuszanski-Sohnius (HLS) Theorem [8] umfaßt die maximale Symmetriegruppe der S-Matrix einer unitären, wechselwirkenden Feldtheorie außer dem direkten Produkt der Poincaré-Gruppe und einer (beliebig großen) Eichgruppe auch eine (möglicherweise erweiterte) Supersymmetrie.
Die in der Poincaré-Gruppe enthaltenen Generatoren von Lorentztransformationen $M_{\mu\nu}$ und Translationen P_μ erfüllen folgende Algebra:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \tag{2.65}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu), \tag{2.66}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}), \tag{2.67}$$

mit dem im Anhang definierten metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$. Die Generatoren T_i der Eichgruppe $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ des Standardmodells vertauschen mit den Generatoren der Poincaré-Gruppe, da es sich hierbei nicht um Raum-Zeit-Symmetrien, sondern um innere Symmetrien handelt:

$$[P_\mu, T_i] = 0, \tag{2.68}$$

$$[M_{\mu\nu}, T_i] = 0. \tag{2.69}$$

Gemeinsame Casimiroperatoren der Poincaré-Gruppe und der Eichgruppe sind daher der Massenquadratoperator $P^2 = P_\mu P^\mu$ und der Spinoperator $W^2 = W_\mu W^\mu$, mit dem Pauli-Ljubanski-Vektor

$$W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\nu\rho}P^\sigma. \tag{2.70}$$

Daher haben die Mitglieder eines irreduziblen Multipletts der Eichgruppe dieselbe Masse und denselben Spin.
Wie im vorigen Kapitel bereits angedeutet, suchen wir eine Symmetrie, die einen bosonischen Zustand in einen fermionischen Zustand umwandelt und umgekehrt:

$$Q|boson\rangle = |fermion\rangle, \tag{2.71}$$

$$Q|fermion\rangle = |boson\rangle. \tag{2.72}$$

Dies wiederum bedeutet, daß die Generatoren dieser Supersymmetrie (SUSY) selbst halbzahligen Spin tragen und somit fermionischen Charakter haben, im Gegensatz zu den bosonischen Generatoren der Poincaré-Gruppe und der Eichgruppe. Die einfachste Wahl für diese Generatoren besteht aus einem zweikomponentigen Weyl-Spinor Q und dessen konjugiertem $\bar{Q}$. Da diese Generatoren fermionisch sind, ist es zweckmässig - ähnlich wie bei den Erzeuger- und Vernichteroperatoren für fermionische Felder - ihre Algebra mit Antikommutatoren zu beschreiben:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 0, \tag{2.73}$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}P_\mu. \tag{2.74}$$

Der Generator Q gehört zur $(\frac{1}{2}, 0)$- Darstellung der $SL(2, \mathcal{C})$ (der universellen Überdeckungsgruppe der Lorentzgruppe) mit zugehörigen Spinorindices α, β, der Generator $\bar{Q}$ entsprechend zur $(0, \frac{1}{2})$-Darstellung mit punktierten Spinorindices. σ^μ ist

gegeben durch $(1, \sigma_i)$, mit den in (A.1) angegebenen Paulimatrizen σ_i. Der Translationsoperator P_μ muß hierbei aus Gründen der Lorentz-Kovarianz in der Antikommutatorrelation (2.74) auftreten [8]. Wir beschränken uns hier von vornherein auf eine einzige Generation von Supersymmetriegeneratoren. Die Einführung weiterer Generationen $Q^i, \bar{Q}^i, \quad i = 1, 2, ..., N$ führt zu erweiterten (nichtminimalen) supersymmetrischen Theorien.
Betrachten wir nun die Vertauschungsrelationen der Generatoren der Supersymmetrie mit den Generatoren der Poincaré-Gruppe und der Eichgruppe:

$$[Q_\alpha, P_\mu] = 0, \tag{2.75}$$

$$[Q_\alpha, M^{\mu\nu}] = i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta, \tag{2.76}$$

$$[Q_\alpha, T_i] = 0, \tag{2.77}$$

mit $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)$ und $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma_i)$. Daran erkennen wir, daß die Supersymmetrie eine Raum-Zeit-Symmetrie ist, und daß die Mitglieder eines Supermultipletts zwar die gleiche Masse haben, sich in ihrem Spin jedoch um $\frac{1}{2}$ unterscheiden. Weiterhin haben sie dieselben Eigenschaften bezüglich der Eichgruppe, d.h. sie transformieren sich unter derselben Darstellung der Eichgruppe und haben dieselben Kopplungskonstanten und Wechselwirkungen.
Um diese Supermultipletts explizit anzugeben und aus ihnen die Lagrangedichte supersymmetrischer Theorien zu berechnen, bedarf es der Einführung der Konzepte von **Superraum** und **Superfeldern**. Für die Beschreibung von SUSY - Transformationen ist es zunächst notwendig, fermionische Koordinaten $\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ einzuführen, die zusammen mit x_μ den 8-dimensionalen **Superraum** aufspannen. Die Weyl-Spinoren $\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ sind *Grassmann* - d.h. antikommutierende - Variablen:

$$\begin{aligned} \{\theta_\alpha, \theta_\beta\} &= 0, & (2.78)\\ \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} &= 0, & (2.79)\\ \{\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} &= 0. & (2.80) \end{aligned}$$

Eine endliche **globale** SUSY - Transformation mit Transformationsparametern $\xi, \bar{\xi}$ hat dann die Form

$$e^{i\xi Q + i\bar{\xi}\bar{Q}}. \tag{2.81}$$

Die Objekte, auf die diese Transformationen wirken, die **Superfelder**, sind Funktionen von x_μ und $\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$. Aus einer endlichen Transformation $T(\xi)$ eines solchen Superfeldes $\Phi(x_\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$

$$T(\xi)\Phi(x_\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) = e^{i\xi Q + i\bar{\xi}\bar{Q}} \Phi(x_\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})[e^{i\xi Q + i\bar{\xi}\bar{Q}}]^{-1} \tag{2.82}$$

erhalten wir unter Ausnutzung der SUSY-Algebra für eine infinitesimale Transformation (die Spinorindices werden im folgenden z.T. unterdrückt)

$$\begin{aligned} \delta(\xi, \bar{\xi})\Phi(x_\mu, \theta, \bar{\theta}) &= T(\xi)\Phi(x_\mu, \theta, \bar{\theta}) - \Phi(x_\mu, \theta, \bar{\theta}) \\ &= [\xi \frac{\partial}{\partial \theta} + \bar{\xi} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - i(\xi \sigma^\mu \bar{\theta} - \theta \sigma^\mu \bar{\xi}) \frac{\partial}{\partial x_\mu}]\Phi(x_\mu, \theta, \bar{\theta}), \quad (2.83) \end{aligned}$$

aus der eine explizite Darstellung der SUSY-Generatoren abgelesen werden kann:

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\beta \sigma^\mu_{\beta\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \tag{2.84}$$

Weiterhin lassen sich SUSY-kovariante Ableitungen angeben, die mit der SUSY - Transformation (2.83) antikommutieren:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \bar D_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - i\theta^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\mu}. \tag{2.85}$$

Für einige der im MSSM benötigten Superfelder erweist es sich als günstig, die folgenden chiralen Darstellungen zu verwenden, in denen θ und $\bar\theta$ leicht unterschiedlich behandelt werden [6].

L-Darstellung:

$$\delta(\xi,\bar\xi)\Phi_L = [\xi\frac{\partial}{\partial\theta} + \bar\xi\frac{\partial}{\partial\bar\theta} + 2i\theta\sigma^\mu\bar\xi\frac{\partial}{\partial x_\mu}]\Phi_L; \tag{2.86}$$

$$D_L = \frac{\partial}{\partial\theta} + 2i\sigma^\mu\bar\theta\frac{\partial}{\partial x_\mu}; \quad \bar D_L = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta}. \tag{2.87}$$

R-Darstellung:

$$\delta(\xi,\bar\xi)\Phi_R = [\xi\frac{\partial}{\partial\theta} + \bar\xi\frac{\partial}{\partial\bar\theta} - 2i\xi\sigma^\mu\bar\theta\frac{\partial}{\partial x_\mu}]\Phi_R; \tag{2.88}$$

$$\bar D_R = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta} - 2i\theta\sigma^\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}; \quad D_R = \frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{2.89}$$

In diesen Darstellungen nehmen die SUSY - Transformationen und die kovarianten Ableitungen $\bar D_L$ und D_R besonders einfache Gestalt an. Die einzelnen Darstellungen sind über die Identität

$$\Phi(x_\mu,\theta,\bar\theta) = \Phi_L(x_\mu + i\theta\sigma_\mu\bar\theta,\theta,\bar\theta) = \Phi_R(x_\mu - i\theta\sigma_\mu\bar\theta,\theta,\bar\theta) \tag{2.90}$$

miteinander verknüpft. Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wenden wir uns nunmehr den im MSSM benötigten chiralen Superfeldern und Vektorsuperfeldern zu.

2.3.3 Chirale Superfelder

Wie wir gesehen haben, ist der Materiesektor des Standardmodells in linkshändige Dupletts und rechtshändige Singletts bezüglich der Eichgruppe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ unterteilt. Es ist daher sinnvoll, je ein chirales Fermion (mit zwei Freiheitsgraden) mit seinen skalaren Partnern, den *Sfermionen* in einem Superfeld zusammenzufassen. Dies geschieht am einfachsten mit den zu diesem Zweck eingeführten chiralen Darstellungen. Die Bedingungen

$$\bar D_L\Phi_L = 0, \tag{2.91}$$
$$D_R\Phi_R = 0 \tag{2.92}$$

führen in der chiralen Darstellung auf links- bzw. rechtshändige Superfelder $\Phi_{L/R}$, die jeweils unabhängig von $\bar\theta$ bzw. θ sind. Diese Felder lassen sich in Potenzreihen in x_μ, θ bzw. $x_\mu, \bar\theta$ entwickeln, die aufgrund der Grassmann-Natur der Variablen θ und $\bar\theta$ endlich sind. Für Φ_L erhalten wir somit:

$$\Phi_L(x,\theta) = \phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta F(x), \tag{2.93}$$

mit den komplexen Skalarfeldern ϕ, F und dem Weyl-Spinor ψ. Wenden wir auf dieses Superfeld die Transformation (2.86) an, so erhalten wir:

$$\delta(\xi,\bar{\xi})\Phi_L = \sqrt{2}\xi\psi + 2\xi\theta F + 2i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\phi + 2\sqrt{2}i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}\theta\partial_\mu\psi. \tag{2.94}$$

Durch Vergleich dieses Ausdrucks mit

$$\delta(\xi,\bar{\xi})\Phi_L = \delta\phi + \sqrt{2}\theta\delta\psi + \theta\theta\delta F \tag{2.95}$$

gelangen wir zu den Transformationen der Komponentenfelder:

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \sqrt{2}\xi\psi, \\ \delta\psi &= \sqrt{2}\xi F + i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\phi, \\ \delta F &= -i\sqrt{2}\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\xi}. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Unter einer solchen Transformation gehen also in der Tat fermionische Felder in bosonische Felder über und umgekehrt. Beim Abzählen der Freiheitsgrade stehen zunächt den zwei fermionischen Freiheitsgraden des Weyl-Spinors ψ vier bosonische der komplexen skalaren Felder ϕ, F gegenüber. Es stellt sich jedoch heraus, daß es sich bei dem Feld F um ein unphysikalisches Hilfsfeld handelt, das aus dem Modell eliminiert werden kann [9]. Somit enthält ein chirales Superfeld die gleiche Anzahl an physikalischen bosonischen und fermionischen Freiheitsgraden. Zusammen mit dem rechtshändigen Superfeld erhalten wir also für jedes Standardmodell-Fermion zwei skalare Partnerteilchen.

2.3.4 Vektorsuperfelder

Wir benötigen noch Superfelder, welche die Spin-1 Eichbosonen des Standardmodells sowie deren Superpartner, die *Gauginos*, enthalten. Dazu führen wir selbstadjungierte Vektorsuperfelder

$$V(x,\theta,\bar{\theta}) = V^\dagger(x,\theta,\bar{\theta}) \tag{2.97}$$

ein, die wiederum in eine endliche Potenzreihe in x, θ und $\bar{\theta}$ entwickelt werden:

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\bar{\theta}) &= (1 + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\partial^\mu)C(x) + (i\theta + \frac{1}{2}\theta\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu)\chi(x) \\ &\quad + \frac{i}{2}(\theta\theta - \bar{\theta}\bar{\theta})(M(x) + iN(x)) + (-i\bar{\theta} + \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu)\bar{\chi}(x) \\ &\quad - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x). \end{aligned} \tag{2.98}$$

Dabei sind C, M, N und D reelle skalare Felder, χ und λ Weyl-Spinoren und A_μ ein Vektorfeld. Soll das Vektorfeld ein Eichboson beschreiben, so muß das Vektorsuperfeld sich nach der adjungierten Darstellung der entsprechenden Eichgruppe transformieren. Diese Tatsache kann man ausnutzen, um einige der zahlreichen Felder in (2.98) zu eliminieren. In der Wess-Zumino-Eichung [9] verschwinden die Felder C, M, N und χ aus der Theorie, während die Eichfreiheit des Eichfeldes A_μ erhalten bleibt [6]. Somit enthält das Vektorsuperfeld nur noch die physikalischen Felder A_μ und λ sowie das Hilfsfeld D.

Auf die Herleitung der Lagrangedichte des MSSM und eine Darstellung der elektroschwachen Symmetriebrechung im MSSM wird hier aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Literatur dazu findet man z.B. in [6],[10],[11],[12]. Wir beschränken uns darauf, das resultierende Teilchenspektrum des MSSM und einige seiner wichtigsten Eigenschaften anzugeben.

2.3.5 Teilchenspektrum des MSSM

Das MSSM ist eine 'minimale' Erweiterung des Standardmodells in dem Sinne, daß die Anzahl der eingeführten Superfelder und Wechselwirkungen so klein wie möglich gehalten wird. Für jedes rechts- bzw. linkshändige Fermion des Standardmodells wird ein rechts- bzw. linkshändiges chirales Superfeld eingeführt, um den Materieinhalt des MSSM zu beschreiben. Die Eichgruppe des MSSM ist identisch mit der des Standardmodells: $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Der Eichsektor wird durch Vektorsuperfelder beschrieben, die außer den Eichbosonen deren supersymmetrische Partnerteilchen, die Gauginos, enthalten. Der $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$-Anteil der Eichgruppe kann dabei wahlweise durch die Eichfelder $W_\mu^a,\ a = 1, 2, 3$ und B_μ und deren SUSY-Partner, die Winos $\tilde{W}_\mu^a,\ a = 1, 2, 3$ und Binos $\tilde{B}_\mu$ oder durch $W^\pm$, Z und γ, den physikalischen Feldern nach der spontanen Symmetriebrechung, und den entsprechenden Partnerteilchen charakterisiert werden. Im Zusammenhang mit der spontanen Symmetriebrechung im elektroschwachen Sektor durch $SU(2)$-Duplett-Skalare stellt sich heraus, daß im MSSM mindestens zwei Higgs-Superfelder mit Hyperladungen $Y = \pm 1$ benötigt werden. In einem Modell mit nur einem Higgs - Superfeld treten durch das darin enthaltene Higgsino Eich-Anomalien auf, die durch ein zweites Higgs - Superfeld mit entgegengesetzter Hyperladung beseitigt werden können [6]. Desweiteren ist es nicht möglich, mit einem einzigen Higgs - Superfeld Massenterme sowohl für *up*- als auch *down*-artige Quarks zu erzeugen. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über das Teilchenspektrum des MSSM. Darin wurden bereits die Masseneigenzustände aufgeführt, auf die wir später näher eingehen werden.

Standardmodell-	SUSY Partnerteilchen			
Teilchen	Wechselwirkungseigenzustand		Masseneigenzustand	
$l = e, \mu, \tau$	$\tilde{l}_L, \tilde{l}_R$	Slepton	$\tilde{l}_1, \tilde{l}_2$	Slepton
$\nu = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	$\tilde{\nu}$	Sneutrino	$\tilde{\nu}$	Sneutrino
$q = u, d, s, c, b, t$	$\tilde{q}_L, \tilde{q}_R$	Squark	$\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$	Squark
$W^\pm$	$\tilde{W}^\pm$	Wino	$\tilde{\chi}_j^\pm$	Chargino
H_1^-	$\tilde{H}_1^-$	Higgsino		
H_2^+	$\tilde{H}_2^+$	Higgsino		
γ	$\tilde{\gamma}$	Photino	$\tilde{\chi}_j^0$	Neutralino
Z	$\tilde{Z}$	Zino		
H_1^0	$\tilde{H}_1^0$	Higgsino		
H_2^0	$\tilde{H}_2^0$	Higgsino		
g	$\tilde{g}$	Gluino	$\tilde{g}$	Gluino

Tabelle 2.1: Das Teilchenspektrum des MSSM.

Eine weitere Reduzierung des Teilchenspektrums, etwa durch Identifikation einiger Gauginos mit SM-Fermionen, ist nicht möglich, da diese Fermionen und die Eichbosonen verschiedenen Eichmultipletts angehören.

2.3.6 R-Parität

Supersymmetrische Theorien können i.a. auch eichinvariante und renormierbare Terme enthalten, die die Baryonenzahl B oder die Leptonenzahl L verletzen [11]. Das Auftreten solcher Terme ist jedoch problematisch, da B- und L - verletzende Prozesse experimentell nicht beobachtet wurden; insbesondere würde B - Verletzung eine zu kleine Lebensdauer für das Proton ergeben, deren untere Grenze nach jüngsten Messungen bei ca. 10^{32} a liegt [13]. Die B- und L-verletzenden Terme können jedoch durch die Einführung einer neuen Symmetrie, der R-Parität, eliminiert werden. Dabei handelt es sich um eine diskrete Z_2-Symmetrie, deren Quantenzahl für jedes Teilchen des Modells gegeben ist durch

$$R_P = (-1)^{3(B-L)+2s}, \tag{2.99}$$

wobei s der Spin des Teilchens ist. Verlangen wir nun, daß nur diejenigen Terme in der Lagrangedichte erlaubt sind, in denen das Produkt der R-Paritäten aller darin enthaltenen Felder $+1$ ergibt, so verschwinden genau die unerwünschten B- und L-verletzenden Terme. Aus der Definition (2.99) geht hervor, daß alle Teilchen des Standardmodells sowie die Higgs-Bosonen gerade R-Parität ($R_P = +1$) haben, während Squarks, Sleptonen, Gauginos und Higgsinos ungerade R-Parität ($R_P = -1$) besitzen. Dies hat weitreichende Konsequenzen:

- Das leichteste supersymmetrische Teilchen (LSP) muß stabil sein. Falls dieses LSP elektrisch neutral ist und keine Farbladung trägt, kann es nur über die schwache Wechselwirkung an 'normale' Materie koppeln und würde somit einen guten Kandidaten für nicht-baryonische Dunkle Materie abgeben.
- Jedes supersymmetrische Teilchen zerfällt schließlich in einen Zustand, der eine ungerade Anzahl von LSPs enthält.
- In Beschleunigerexperimenten können supersymmetrische Teilchen nur in geraden Anzahlen erzeugt werden.

2.3.7 Supersymmetriebrechung

Wie wir in Kapitel (2.3.2) gesehen haben, liefern Modelle mit exakter SUSY eine Massenentartung zwischen den Mitgliedern eines Superfelds, also zwischen den bekannten SM-Teilchen und ihren postulierten SUSY-Partnern. Diese Aussage steht jedoch im Widerspruch zu den experimentellen Befunden, da bislang noch kein SUSY- Partnerteilchen gefunden werden konnte [13]. Falls SUSY in der Natur realisiert ist, müssen die Massen der SUSY- Partnerteilchen also größer als die der Standardmodellteilchen sein. Dies wiederum bedeutet, daß bei einer Skala oberhalb des bislang erforschten Energiebereichs eine Brechung der SUSY vorliegen muß. Für die Beschreibung des entsprechenden Brechungsmechanismus existieren bereits zahlreiche Modelle [11]. Vom phenomenologischen Standpunkt aus betrachtet genügt es jedoch, die zusätzlichen Terme, die die SUSY brechen, explizit in die MSSM-Lagrangedichte einzuführen. Dabei werden nur die sog. *soft supersymmetry breaking terms (SSB)* berücksichtigt, welche die Symmetrie nur 'schwach' brechen, da sie zu keinen quadratischen Divergenzen führen [14]. Diese sind im MSSM gegeben durch [11]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SSB} \quad = \quad & -\frac{1}{2}(M_2\tilde{W}\tilde{W} + M_1\tilde{B}\tilde{B} + h.c.) \\ & -\tilde{l}_L^\dagger m_L^2 \tilde{l}_L - \tilde{l}_R m_R^2 \tilde{l}_R^\dagger \\ & -\tilde{l}_R A \tilde{l}_L H_1 + h.c. \\ & -m_{H_1}^2 H_1^\dagger H_1 - m_{H_2}^2 H_2^\dagger H_2 - (bH_1H_2 + h.c.), \end{aligned} \tag{2.100}$$

wobei die Squark- und Gluino-Beiträge vernachlässigt wurden. M_1 und M_2 sind jeweils die $U(1)_Y$ und $SU(2)_L$ - Gaugino-Massenparameter. Die zweite Zeile enthält die SSB-Beiträge zu den Sleptonmassen, mit den hermiteschen 3×3 Matrizen m_L^2 und m_R^2 ($\tilde{l}_L$ z.B. ist ein 3-er Vektor mit den Einträgen $\tilde{e}_L,\ \tilde{\mu}_L,\ \tilde{\tau}_L$). Die dritte Zeile enthält trilineare Kopplungen der skalaren Felder mit der komplexen 3×3 Kopplungsmatrix A und in der letzten Zeile schließlich finden wir die SSB-Beiträge zu den Higgs-Massen, m_{H_1} und m_{H_2}, sowie den SSB- Higgs-Mischungsparameter b.

Die SSB- Terme bewirken nicht nur eine Massenaufspaltung zwischen den Mitgliedern der einzelnen Supermultipletts: aufgrund der Symmetriebrechung sind die Masseneigenzustände nicht mehr identisch mit den Wechselwirkungseigenzuständen. Vielmehr mischen die Winos mit den geladenen Higgsinos zu Charginos und die Photinos, Zinos und neutralen Higgsinos zu Neutralinos. Ebenso tritt bei den Sfermionen eine Mischung auf, die proportional zur Masse des zugehörigen Fermions ist. Für Fermionen der ersten und zweiten Teilchengeneration kann man die Masse der Fermionen und damit auch die Mischung der Sfermionen vernachlässigen und daher die Wechselwirkungseigenzustände auch als Masseneigenzustände betrachten.

Ein Problem des MSSM ist die sehr große Anzahl freier Parameter (über 100), von denen ein Großteil durch die SSB-Terme in das Modell gelangen. Darunter befinden sich zahlreiche CP-verletzende Phasen. Die Anzahl der Parameter des MSSM kann jedoch stark reduziert werden, wenn wir von einer Großvereinheitlichten Theorie ausgehen. Ein weiterer wichtiger Parameter ist der SUSY-Higgs Massenparameter μ, der in folgenden Termen der Lagrangedichte auftritt (Squark-Beiträge werden wiederum vernachlässigt):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MSSM} \supset\ & -\mu(\tilde{H}_2^+\tilde{H}_1^- + \tilde{H}_2^0\tilde{H}_1^0) + h.c. \\ & -|\mu|^2(|H_1^0|^2 + |H_1^-|^2 + |H_2^0|^2 + |H_2^+|^2) \\ & +\mu^*(\tilde{l}_R^\dagger y \tilde{l}_L H_2^0 + \tilde{l}_R^\dagger y \tilde{\nu} H_2^{+*}) + h.c. \end{aligned} \tag{2.101}$$

Darin sind die Higgsino-Massenterme, Beiträge zu den Higgs-Boson-Massen und die Yukawakopplungen der Leptonen mit der Kopplungsmatrix y enthalten.

2.3.8 Neutralinomischung

Die bereits erwähnten Mischungen der Wechselwirkungseigenzustände werden durch Mischungsmatrizen beschrieben, die durch die folgenden Größen parametrisiert werden [24]:

- Den $U(1)_Y$-Gaugino-Massenparameter M_1
- Den $SU(2)_L$-Gaugino-Massenparameter M_2
- Den Higgsino-Massenparameter μ
- Das Verhältnis der Higgs-Vakuumerwartungswerte $\frac{\langle H_2^0\rangle}{\langle H_1^0\rangle} = \frac{v_2}{v_1} = \tan\beta$

Im Rahmen dieser Arbeit werden wir sowohl den $U(1)$- Gaugino-Massenparameter M_1 als auch den Higgsino-Massenparameter μ als komplexe Größen behandeln.

Dabei interessieren wir uns in erster Linie für die Mischungen der elektrisch neutralen Gauginos und Higgsinos zu den entsprechenden Masseneigenzuständen, den

Neutralinos. Der relevante Massenterm in der Lagrangedichte ist zunächst von der Form

$$\mathcal{L}^0_{mass} = -\frac{1}{2}\psi^0_i Y_{ij} \psi^0_j + h.c. \tag{2.102}$$

Wir verwenden als Basis für die Zweier-Spinoren

$$\psi^0_j = (-i\lambda_\gamma, -i\lambda_Z, \psi^a_H, \psi^b_H), \qquad j = 1, ..., 4, \tag{2.103}$$

wobei λ_γ, λ_Z die Zweier-Spinoren von Photino und Zino darstellen. Die Higgsino-Zustände ψ^a_H, ψ^b_H sind gegeben durch folgende Linearkombinationen der Weyl-Spinoren der neutralen Higgsinos $\psi_{H^0_1}$, $\psi_{H^0_2}$:

$$\begin{aligned} \psi^a_H &= \psi_{H^0_1} \cos\beta - \psi_{H^0_2} \sin\beta, & (2.104) \\ \psi^b_H &= \psi_{H^0_1} \sin\beta + \psi_{H^0_2} \cos\beta. & (2.105) \end{aligned}$$

In dieser Basis ist die Massenmischungsmatrix Y gegeben durch

$$Y = \begin{pmatrix} M_2 \sin^2\theta_W + M_1 \cos^2\theta_W & (M_2 - M_1)\sin\theta_W \cos\theta_W & 0 & 0 \\ (M_2 - M_1)\sin\theta_W \cos\theta_W & M_2 \cos^2\theta_W + M_1 \sin^2\theta_W & m_Z & 0 \\ 0 & m_Z & \mu \sin 2\beta & -\mu\cos 2\beta \\ 0 & 0 & -\mu\cos 2\beta & -\mu \sin 2\beta \end{pmatrix}. \tag{2.106}$$

Gehen wir von einer Großvereinheitlichten Theorie (GUT) aus, so können wir über die Bedingung

$$\frac{|M_1|}{|M_2|} = \frac{5}{3}\tan^2\theta_W, \tag{2.107}$$

den Betrag des $U(1)_Y$-Massenparameters M_1 aus dem Satz der freien Parameter eliminieren.
Die symmetrische Matrix Y kann mit einer einzigen unitären Matrix N diagonalisiert werden:

$$N^* Y N^{-1} = M^0_D. \tag{2.108}$$

Da eine analytische Berechnung der Diagonalisierung sehr aufwendig ist und das komplizierte Resultat wenig zum Verständnis der Abhängigkeit der Neutralinomassen von den Modellparametern beiträgt, werden die Masseneigenwerte sowie die Elemente der Diagonalisierungsmatrix in der Praxis numerisch berechnet.
Die Neutralinos $\tilde{\chi}^0_1, ..., \tilde{\chi}^0_4$ werden nach der Größe ihrer Massen angeordnet. Die Weyl-Spinoren dieser Masseneigenzustände erhalten wir dann zu

$$\chi^0_i = N_{ij}\psi^0_j, \qquad i, j = 1, ..., 4 \tag{2.109}$$

Daraus werden die Majorana-Spinoren $\tilde{\chi}^0_i$ gebildet:

$$\tilde{\chi}^0_i = \begin{pmatrix} \chi^0_i \\ \bar{\chi}^0_i \end{pmatrix}, \qquad i = 1, ..., 4 \tag{2.110}$$

Wir gehen davon aus, daß das leichteste Neutralino $\tilde{\chi}^0_1$ das LSP im MSSM mit R-Paritätserhaltung ist.

2.3.9 Charginomischung

Bei den Berechnungen in dieser Arbeit kommen zwar explizit keine Charginos vor, es ist jedoch bei der Auswahl der Szenarien zu beachten, daß sich für die gewählten SUSY-Parameter keine Charginomassen ergeben, die im Widerspruch zu deren experimentellen unteren Massenschranken stehen. Daher werden wir kurz auf die Charginomischungen eingehen.
Die SUSY-Brechung und die elektroschwache Eichsymmetriebrechung erzeugen für die Charginos die Massenterme [10]

$$\mathcal{L}^{\pm}_{mass} = \frac{ig}{\sqrt{2}}[v_1\lambda^+\psi_{H_1^-} + v_2\lambda^-\psi_{H_2^+}] + M_2\lambda^+\lambda^- - \mu\psi_{H_1^-}\psi_{H_2^+} + h.c., \tag{2.111}$$

wobei $\lambda^\pm$ und $\psi_{H_1^-}$, $\psi_{H_2^+}$ die Weyl-Spinoren der geladenen Winos und Higgsinos und v_1, v_2 wieder die Vakuumerwartungswerte der neutralen Higgs-Felder sind. Wählen wir die Weyl-Spinoren $\psi_j^\pm$

$$\psi_j^+ = (-i\lambda^+, \psi_{H_2^+}), \quad \psi_j^- = (-i\lambda^-, \psi_{H_1^-}), \quad j = 1,2 \tag{2.112}$$

als Basis, so läßt sich (2.111) auf die Form

$$\mathcal{L}^{\pm}_{mass} = -\frac{1}{2}(\psi^+\psi^-)\begin{pmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi^+ \\ \psi^-\end{pmatrix} + h.c. \tag{2.113}$$

bringen, mit der Massenmischungsmatrix X:

$$X = \begin{pmatrix} M_2 & m_W\sqrt{2}\sin\beta \\ m_W\sqrt{2}\cos\beta & \mu \end{pmatrix}. \tag{2.114}$$

Die darin enthaltene Masse des W- Bosons ist im MSSM gegeben durch

$$m_W^2 = \frac{1}{4}g^2(v_1^2 + v_2^2). \tag{2.115}$$

Die komplexe und nicht symmetrische Matrix X kann durch eine Bi-Unitäre Transformation mit geeigneten 2×2-Matrizen U und V diagonalisiert werden:

$$U^* X V^{-1} = M_D = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}. \tag{2.116}$$

Die Masseneigenzustände ergeben sich dann aus den Wechselwirkungseigenzuständen in Zweier-Spionorschreibweise zu

$$\chi_i^+ = V_{ij}\psi_j^+, \quad \chi_i^- = U_{ij}\psi_j^-, \quad i,j = 1,2. \tag{2.117}$$

In Vierer-Spinornotation sind die Charginos als geladene Fermionen durch Dirac-Spinoren zu beschreiben:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix}\chi_1^+ \\ \bar{\chi}_1^-\end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix}\chi_2^+ \\ \bar{\chi}_2^-\end{pmatrix}, \tag{2.118}$$

Damit erhalten wir für den Massenterm

$$\mathcal{L}^{\pm}_{mass} = -(m_1\bar{\chi}_1\chi_1 + m_2\bar{\chi}_2\chi_2). \tag{2.119}$$

2.3.10 Die Massen der Sfermionen

Die Symmetriebrechung führt dazu, daß auch die links- und rechtshändigen Sfermionen $\tilde{f}_{L,R}$ verschiedene Massen erhalten. Ausgehend von der Annahme, daß an der Vereinheitlichungsskala der GUT alle skalaren Teilchen die gleiche Masse m_0 haben [15], kann man mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichungen die folgende Gleichung ableiten, aus der die Sfermionmassen berechnet werden können [16]:

$$m^2_{\tilde{f}_{L/R}} = m_f^2 + m_0^2 + C(\tilde{f})M^2 \pm m_Z^2 \cos 2\beta(T_{3f} - e_f \sin^2\theta_W) \tag{2.120}$$

mit:

m_0:	Masse der skalaren Teilchen an der Vereinheitlichungsskala der GUT
T_{3f}:	dritte Komponente des schwachen Isospins des Fermions f
e_f:	elektrische Ladung des Fermions f (-1 für Elektronen)
m_f:	Fermionmasse
$C(\tilde{f})$:	dimensionsloser sfermionabhängiger Parameter mit folgenden Werten [17]: $C(\tilde{l}_R) \approx 0.23$, $C(\tilde{l}_L) \approx 0.79$, $C(\tilde{q}_R) \approx 10.1$, $C(\tilde{q}_L) \approx 10.8$

Für die Selektronmassen, die wir für den t- und u-Kanal-Selektronaustausch des betrachteten Prozesses benötigen, erhalten wir daher:

$$m^2_{\tilde{e}_L} = m_0^2 + 0.79M_2^2 + m_Z^2 \cos 2\beta(-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W) \tag{2.121}$$

$$m^2_{\tilde{e}_R} = m_0^2 + 0.23M_2^2 - m_Z^2 \cos 2\beta \sin^2\theta_W \tag{2.122}$$

2.4 Spinformalismus

In dieser Arbeit sollten die Spinkorrelationen zwischen der Produktion und dem Zerfall der Neutralinos bertrachtet werden. Dazu wurden verschiedene Konzepte verwendet, die im folgenden vorgestellt werden sollen.

2.4.1 Explizite Spin-$\frac{1}{2}$-Helizitätszustände

Zur Berechnung der Produktionshelizitätsamplituden wurden explizite Darstellungen von Spin-$\frac{1}{2}$-Helizitätsspinoren verwendet, wobei die in [18] aufgeführten Konventionen verwendet wurden. Die explizite Form der Helizitätsspinoren ist abhängig von der verwendeten Darstellung der Dirac-Matrizen γ^μ. Hier wird die Dirac-Darstellung der γ-Matrizen verwendet:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.123}$$

wobei die σ^i die üblichen Paulimatrizen sind.
Der Helizitätsspinor $u(p,\lambda)$ ist eine Lösung der Diracgleichung für freie Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen mit der Masse m, der Helizität λ und dem Viererimpuls $p^\mu = (E, \vec{p})$, mit $E = \sqrt{p^2 + m^2}$:

$$(\not{p} - m)u(p,\lambda) = 0. \tag{2.124}$$

Den Spinor für das Antiteilchen erhält man aus $u(p,\lambda)$ durch Ladungskonjugation:

$$v(p,\lambda) = C\bar{u}^T(p,\lambda), \tag{2.125}$$

mit der Ladungskonjugationsmatrix C, die in der Dirac-Darstellung gegeben ist durch:

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.126}$$

Der Spinor des Antiteilchens erfüllt die folgende Diracgleichung:

$$(\not{p} + m)v(p, \lambda) = 0. \tag{2.127}$$

Die Lösungen der Diracgleichung (2.124) sind vierkomponentige Spinoren der Form

$$u(p) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \cosh\frac{\zeta}{2}\chi \\ \sinh\frac{\zeta}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{p}\chi \end{pmatrix}, \tag{2.128}$$

mit zweikomponentigen Spinoren χ, dem Einheitsvektor $\hat{p}$ in Impulsrichtung sowie

$$\cosh\frac{\zeta}{2} = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.129}$$

$$\sinh\frac{\zeta}{2} = \left(\frac{E-m}{2m}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.130}$$

Die Rapidität ζ hängt über $E = m\cosh\zeta$ und $p = m\sinh\zeta$ mit der Energie E und dem Impulsbetrag p zusammen. Um explizite Helizitätszustände zu konstruieren, wählt man für die Spinoren χ Eigenzustände des Helizitätsoperators $\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{p}$:

$$\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{p}\chi_\lambda = \lambda\chi_\lambda, \tag{2.131}$$

mit den Helizitätseigenwerten $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. Wählt man für $\hat{p}$

$$\hat{p} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \tag{2.132}$$

mit Polarwinkel θ und Azimutalwinkel ϕ bzgl. einer festen z-Achse, so erhält man als Lösungen für (2.131):

$$\chi_{\frac{1}{2}}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad \chi_{-\frac{1}{2}}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.133}$$

Damit erhält man die expliziten Formen der vierkomponentigen Helizitätsspinoren:

$$u(p, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\,\chi_\lambda(\hat{p}) \\ 2\lambda\sqrt{E-m}\,\chi_\lambda(\hat{p}) \end{pmatrix}, \tag{2.134}$$

$$v(p, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{E-m}\,\chi_{-\lambda}(\hat{p}) \\ -2\lambda\sqrt{E+m}\,\chi_{-\lambda}(\hat{p}) \end{pmatrix}. \tag{2.135}$$

Diese Helizitätsspinoren sind auf $2m$ normiert, mit $\bar{w} = w^\dagger\gamma^0$:

$$\bar{u}(p, \lambda)u(p, \lambda') = 2m\,\delta_{\lambda,\lambda'}, \tag{2.136}$$

$$\bar{v}(p, \lambda)v(p, \lambda') = -2m\,\delta_{\lambda,\lambda'}. \tag{2.137}$$

Mit dieser Normierung ergibt sich ein problemloser Übergang $m \to 0$ zu masselosen Teilchen.

Für Zweiteilchen-Helizitätszustände, die beim betrachteten Prozess sowohl im Anfangszustand (e^-/e^+) als auch bei den produzierten Neutralinos vorliegen, muß man eine Definition für $\chi_\lambda(-\hat{p})$ wählen, die konsistent mit der Jacob-Wick Zweiteilchen-Konvention ist [18]. Aus dem in (2.132) angegebenen Impulseinheitsvektor $\hat{p}(\theta, \phi)$

des ersten Teilchens erhält man den Impulseinheitsvektor $-\hat{p}$ des in die entgegengesetzte Richtung laufenden zweiten Teilchens mit dem Polarwinkel $\pi-\theta$ und Azimutalwinkel $\phi+\pi$. Damit folgt aus (2.133):

$$\chi_{-\lambda}(-\hat{p}) = \xi_\lambda \chi_\lambda(\hat{p}), \tag{2.138}$$

mit der Phase $\xi_\lambda = 2\lambda e^{-2i\lambda\phi}$. Mit Hilfe der oben angegebenen expliziten Helizitätsspinoren lassen sich folgende Beziehungen herleiten:

$$\begin{aligned} u(-p,-\lambda) &= \xi_\lambda \gamma^0 u(p,\lambda), && (2.139)\\ v(-p,-\lambda) &= \xi_{-\lambda} \gamma^0 v(p,\lambda), && (2.140) \end{aligned}$$

mit $p := (E,\vec{p})$ und $-p := (E,-\vec{p})$. Unter Berücksichtigung dieser Relationen lassen sich mit den expliziten Helizitätsspinoren (2.134,2.135) die Produktions - Helizitätsamplituden berechnen. Diese Methode hat zwar den Nachteil, von der gewählten Darstellung der Diracmatrizen und dem gewählten Koordinatensystem abhängig zu sein, liefert jedoch in einem frühen Stadium der Berechnungen kompakte und übersichtliche Ergebnisse.

2.4.2 Helizitätsprojektionsoperatoren

Oftmals erweist es sich als nützlich, Helizitätsprojektionsoperatoren einzuführen, die unabhängig von der gewählten Darstellung der Diracmatrizen sind. Dazu führt man zunächst einen Spin-Vierervektor s^μ ein, der für massive Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen mit dem Viererimpuls $p^\mu = (E,\vec{p})$ und Helizität λ definiert ist durch:

$$s^\mu = \frac{2\lambda}{m}(|\vec{p}|, E\hat{p}). \tag{2.141}$$

Für diesen Vierervektor gilt

$$s\cdot p = 0, \qquad s\cdot s = -1. \tag{2.142}$$

Er ist so gewählt, daß $u(p,\lambda)$ bzw. $v(p,\lambda)$ Eigenzustände des Operators $\gamma^5 \not{s}$ mit Eigenwert 1 sind:

$$\begin{aligned} \gamma^5 \not{s} u(p,\lambda) &= u(p,\lambda), && (2.143)\\ \gamma^5 \not{s} v(p,\lambda) &= v(p,\lambda). && (2.144) \end{aligned}$$

Unser Ziel ist es, die Helizitätsprojektionsoperatoren $u(p,\lambda)\bar{u}(p,\lambda)$, $v(p,\lambda)\bar{v}(p,\lambda)$ zu berechnen. Dazu addiert man zunächst auf beiden Seiten der Diracgleichung (2.124) bzw. (2.127) $2mu(p,\lambda)$ bzw. $2mv(p,\lambda)$. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\not{p}+m}{2m} u(p,\lambda) &= u(p,\lambda), && (2.145)\\ \frac{-\not{p}+m}{2m} v(p,\lambda) &= v(p,\lambda). && (2.146) \end{aligned}$$

Aus der Addition von $u(p,\lambda)$ bzw.$v(p,\lambda)$ auf beiden Seiten der Eigenwertgleichungen für $\gamma^5 \not{s}$ folgen:

$$\begin{aligned} \frac{1+\gamma^5 \not{s}}{2} u(p,\lambda) &= u(p,\lambda), && (2.147)\\ \frac{1+\gamma^5 \not{s}}{2} v(p,\lambda) &= v(p,\lambda). && (2.148) \end{aligned}$$

Kombiniert man diese Gleichungen unter der Berücksichtigung der Normierungen (2.136, 2.137), so gelangt man zu den gesuchten Helizitätsprojektionsoperatoren:

$$u(p,\lambda)\bar{u}(p,\lambda) = \frac{1}{2}(1+\gamma^5 \not{s})(\not{p}+m), \tag{2.149}$$

$$v(p,\lambda)\bar{v}(p,\lambda) = \frac{1}{2}(1+\gamma^5 \not{s})(\not{p}-m). \tag{2.150}$$

2.4.3 Die Bouchiat-Michel-Formeln

Bei der Berechnung der Zerfallsdichtematrix, die ohne Verwendung expliziter Spinoren durchgeführt wird, erhält man einen Term der Form $u(p,\lambda)\bar{u}(p,\lambda')$. Zu dessen Berechnung sind die Helizitätsprojektionsoperatoren (2.149),(2.150) jedoch nicht geeignet; statt dessen finden die Bouchiat-Michel-Formeln Verwendung, die nun abgeleitet werden sollen.
Zunächst führen wir drei Vierer-Spinvektoren s^a_μ, $a = 1,2,3$ ein, die so gewählt sind, daß s^a und p/m einen orthonormalen Satz bilden:

$$\begin{aligned} p\cdot s^a &= 0, & (2.151)\\ s^a\cdot s^b &= -\delta^{ab}, & (2.152)\\ s^a_\mu\cdot s^a_\nu &= -g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{m^2}. & (2.153)\end{aligned}$$

Eine häufig benutzte Wahl der Vektoren s^a ist [18]:

$$\begin{aligned} s^{1\mu} &= (0,\cos\theta\cos\phi,\cos\theta\sin\phi,-\sin\theta),\\ s^{2\mu} &= (0,-\sin\phi,\cos\phi,0),\\ s^{3\mu} &= \frac{1}{m}(|\vec{p}|,E\hat{p}),\end{aligned} \tag{2.154}$$

Wobei das Koordinatensystem wieder so gewählt ist, daß der Einheitsvektor des Impulses durch

$$\hat{p} = (\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta), \tag{2.155}$$

gegeben ist. Der Vektor s^3 ist bis auf den Vorfaktor 2λ identisch mit dem Spin-Vektor aus dem vorhergehenden Kapitel:

$$2\lambda\, s^3 = s. \tag{2.156}$$

Die Eigenwertgleichungen des Operaors $\gamma^5 \not{s}$ (2.143),(2.144) kann man für die Vektoren s^a erweitern:

$$\gamma^5 \not{s}^a u(p,\lambda') = \sigma^a_{\lambda\lambda'}u(p,\lambda), \tag{2.157}$$

$$\gamma^5 \not{s}^a v(p,\lambda') = \sigma^a_{\lambda'\lambda}v(p,\lambda). \tag{2.158}$$

Dabei steht $\sigma^a_{\lambda\lambda'}$ für das Matrixelement $\lambda\lambda'$ der Paulimatrix σ^a. Für $a=3$ würde man unter Verwendung von

$$\sigma^3_{\lambda\lambda'} = 2\lambda\delta_{\lambda\lambda'} \tag{2.159}$$

mit $\lambda = +\frac{1}{2}$ aus (2.157) sofort Gleichung (2.143) erhalten. Durch analoges Vorgehen wie im vorigen Abschnitt lassen sich die Verallgemeinerungen der Helizitätsprojektionsoperatoren (2.149),(2.150) finden, die *Bouchiat-Michel-Formeln*:

$$u(p,\lambda')\bar{u}(p,\lambda) = \frac{1}{2}[\delta_{\lambda\lambda'} + \gamma^5 \not{s}^a \sigma^a_{\lambda\lambda'}](\not{p} + m), \tag{2.160}$$

$$v(p,\lambda')\bar{v}(p,\lambda) = \frac{1}{2}[\delta_{\lambda\lambda'} + \gamma^5 \not{s}^a \sigma^a_{\lambda'\lambda}](\not{p} - m). \tag{2.161}$$

- Die Terme mit $a = 3$ führen unter Verwendung von (2.156),(2.159) wiederum auf (2.149) und (2.150) und beschreiben somit den longitudinalen Anteil der Polarisation.
- In den Termen mit $a = 1, 2$ sind die transversalen Anteile der Polarisation enthalten.

2.4.4 Spin-1 Helizitätszustände

Für das im Zerfall entstehende Z-Boson benötigen wir noch dessen Helizitätseigenzustände. Ein Spin-1 Boson der Masse m wird durch einen Satz von drei Polarisationsvektoren $\varepsilon^{a\mu}$, $a = 1, 2, 3$ charakterisiert. Diese sind die Eigenzustände des Spinoperators und liegen im zum Impuls $p^\mu = (E, \vec{p})$ des Teilchens orthogonalen Teilraum, für den folgende Orthonormalbasis gewählt werden kann [19]:

$$\varepsilon^{1\mu} = (0, \vec{\varepsilon}^{\,1}), \quad \varepsilon^{2\mu} = (0, \vec{\varepsilon}^{\,2}), \quad \varepsilon^{3\mu} = \frac{1}{m}\left(|\vec{p}|, E\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\right), \tag{2.162}$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$p^\mu \varepsilon^a_\mu = 0 \tag{2.163}$$

$$\varepsilon^{a\mu}\varepsilon^b_\mu = -\delta_{ab} \tag{2.164}$$

$$\vec{\varepsilon}^{\,1} \times \vec{\varepsilon}^{\,2} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}. \tag{2.165}$$

Diese Vektoren stellen die linearen Polarisationszustände des Spin-1 Bosons dar:

- $\varepsilon^{1\mu}, \varepsilon^{2\mu}$ beschreiben die transversale und
- $\varepsilon^{3\mu}$ die longitudinale Polarisation.

Die konkrete Form der Vektoren $\vec{\varepsilon}^{\,1}, \vec{\varepsilon}^{\,2}$ hängt vom gewählten Bezugssystem ab. Aus den linearen Polarisationszuständen erhält man die Eigenzustände $\varepsilon^\mu(\lambda)$ des Helizitätsoperators mit Eigenwerten $\lambda = \pm 1, 0$ zu [19]:

$$\varepsilon^\mu(\pm 1) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon^{1\mu} \pm i\varepsilon^{2\mu}), \tag{2.166}$$

$$\varepsilon^\mu(0) = \varepsilon^{3\mu}. \tag{2.167}$$

2.5 Die S-Matrix

Bei einem Streuprozeß betrachtet man den Übergang von einem Anfangszustand

$$|i\rangle = |\Phi(t = -\infty)\rangle, \tag{2.168}$$

bei dem die einlaufenden Teilchen so weit von einander entfernt sind, daß sie als nicht wechselwirkend betrachtet werden können, zu einem Endzustand

$$|f\rangle = |\Phi(t = +\infty)\rangle \tag{2.169}$$

nach der Streuung, bei dem die auslaufenden Teilchen wiederum als nicht mehr miteinander wechselwirkend betrachtet werden können. Die Streumatrix S stellt die Verbindung zwischen Anfangs- und Endzustand her:

$$|\Phi(t=+\infty)\rangle = S|i\rangle. \tag{2.170}$$

Die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Endzustand aus der Menge der möglichen Endzustände zu erhalten ist dann gegeben durch:

$$|\langle f|\Phi(t=+\infty)|^2 = |\langle f|S|i\rangle|^2 = S_{fi}^2, \tag{2.171}$$

mit der Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude S_{fi}. Diese berechnet man zweckmäßigerweise im Wechselwirkungsbild, bei dem sowohl die Operatoren als auch die Zustände zeitabhängig sind. Der Hamiltonian des Systems kann in einen freien Anteil H_0 und den die Wechselwirkungen enthaltenden Anteil H_I aufgeteilt werden:

$$H = H_0 + H_I. \tag{2.172}$$

Die Zeitabhängigkeit der Operatoren wird durch H_0 beschrieben, die der Zustände ist durch H_I bestimmt:

$$\begin{aligned} H_I(t) &= e^{iH_0(t-t_0)} H_I^S e^{-iH_0(t-t_0)}, && (2.173)\\ i\frac{\partial}{\partial t}|\Phi(t)\rangle &= H_I(t)|\Phi(t)\rangle, && (2.174)\end{aligned}$$

wobei H_I^S der Wechselwirkungshamiltonian im Schrödingerbild ist. Durch Integration von (2.174) erhält man eine Integralgleichung für $|\Phi(t)\rangle$

$$|\Phi(t)\rangle = |i\rangle + (-i)\int_{-\infty}^{t} dt_1 H_I(t_1)|\Phi(t_1)\rangle, \tag{2.175}$$

die durch Iteration gelöst werden kann:

$$|\Phi(t)\rangle = |i\rangle + (-i)\int_{-\infty}^{t} dt_1 H_I(t_1)|i\rangle + (-i)^2\int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2)|\Phi(t_2)\rangle. \tag{2.176}$$

Durch wiederholte Iteration gelangt man zu einer Darstellung der S-Matrix im Ortsraum in Form einer unendlichen Reihe [4]:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_n \mathrm{T}[\mathcal{H}_I(x_1)\dots\mathcal{H}_I(x_n)], \tag{2.177}$$

wobei die Hamiltondichten $\mathcal{H}_I$, mit $H_I = \int d^3x \mathcal{H}_I$, eingeführt wurden. Die Integrationsgrenzen sind jeweils $-\infty$ und $+\infty$; $\mathrm{T}[\mathcal{H}_I(x_1)\dots\mathcal{H}_I(x_n)]$ steht für das zeitgeordnete Produkt der in den Klammern stehenden Operatoren und ist z.B. für zwei Operatoren $A(x_1), B(x_2)$ gegeben durch:

$$\mathrm{T}[A(x_1), B(x_2)] = \theta(t_1 - t_2)A(x_1)B(x_2) + \theta(t_2 - t_1)B(x_2)A(x_1), \tag{2.178}$$

mit der Stufenfunktion $\theta(t_i - t_j)$.
Da die am Streuprozeß beteiligten Teilchen durch ihre Impulse und Spins charakterisiert werden, ist es zweckmäßig im Impulsraum zu arbeiten, in dem die Elemente S_{fi} der S-Matrix folgende Form haben:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)T_{fi}. \tag{2.179}$$

Dabei bezeichnen P_f und P_i die Summen der Viererimpulse der Teilchen im Endzustand bzw. im Anfangszustand. In der Deltafunktion $\delta^4(P_f - P_i)$ kommt somit die Energie- und Impulserhaltung beim Streuprozeß zum Ausdruck. Der Term δ_{fi} enthält keine Wechselwirkungen und wird daher im folgenden nicht betrachtet. Das Übergangsmatrixelement $T_{fi} = \langle f|S|i\rangle$, $|f\rangle \neq |i\rangle$ wird berechnet, indem Anfangs- und Endzustand durch Anwendung der passenden Erzeuger- und Vernichtungsoperatoren auf das Vakuum dargestellt werden und die S-Matrix eingesetzt wird, welche die für den betrachteten Prozess relevanten Wechselwirkungs-Hamiltondichten (bzw. Lagrangedichten, $\mathcal{L}_I = -\mathcal{H}_I$) enthält.

2.6 Spin-Dichtematrizen

Da die Auswirkungen der Polarisationseigenschaften der am betrachteten Prozess beteiligten Teilchen untersucht werden sollen, ist es zweckmäßig mit Spin- Dichtematrizen zu arbeiten. Definitionen hierzu findet man z.B. in [19],[20]. Die Spin-Dichtematrix ρ eines Teilchens mit Spin s und dem Eigenwert m_s der z-Komponente des Spinoperators,

$$\rho = \sum_{m_s, m_s'} |s m_s'\rangle \rho_{m_s, m_s'} \langle s m_s| \tag{2.180}$$

läßt sich nach $(2s+1)$ -dimensionalen Matrizen Q^n_m entwickelen, die sich gemäß einer irreduziblen Darstellung der Drehgruppe mit Index n transformieren:

$$\rho = \frac{1}{2s+1}\left(\mathbf{I} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\mathbf{2s}} \sum_{\mathbf{m=-n}}^{\mathbf{n}} \langle \mathbf{Q^{n\dagger}_m} \rangle \mathbf{Q^n_m}\right) \tag{2.181}$$

Die Matrixelemente der Spin-Dichtematrizen für die einlaufenden Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen Elektron und Positron sind gegeben durch [19]:

$$\rho(e^-)_{\lambda_1 \lambda_1'} = \frac{1}{2}(1 + P_1^m \sigma^m)_{\lambda_1 \lambda_1'} \tag{2.182}$$

und

$$\rho(e^+)_{\lambda_2 \lambda_2'} = \frac{1}{2}(1 + P_2^n \sigma^n)_{\lambda_2 \lambda_2'}. \tag{2.183}$$

Dabei sind die $\sigma^{m,n}$, $m,n = 1,2,3$ die Paulimatrizen, und P_1^m und P_2^n die Einträge der Polarisationsvektoren von Elektron bzw. Positron, wobei $m,n = 1,2$ die transversalen Polarisationsgrade und $m,n = 3$ die longitudinalen Polarisationsgrade bezeichnen. Konventionsgemäß ist $P^3 > 0$ (< 0) für rechts- (links-) händige Polarisation [21]. Die Spin-Dichtematrizen für die einlaufenden Teilchen tauchen auf, da es nicht möglich ist, vollständig polarisierte Eingangsteilchen zu präparieren. Daher muß das Ergebnis mit den Dichtematrizen gewichtet werden.

Die Spin-Dichtematrix $\rho_{P\lambda_1\lambda_2,\lambda_1'\lambda_2'}^{\lambda_i\lambda_j,\lambda_i'\lambda_j'}$ für die Produktion der Neutralinos $\tilde{\chi}^0_i$, $\tilde{\chi}^0_j$ setzt sich aus den Helizitätsamplituden $T_{P\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_i\lambda_j}$, $T_{P\lambda_1'\lambda_2'}^{\lambda_i'\lambda_j'*}$ für deren Produktion (siehe Kap.4.1) zusammen:

$$\rho_{P\lambda_1\lambda_2,\lambda_1'\lambda_2'}^{\lambda_i\lambda_j,\lambda_i'\lambda_j'} = T_{P\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_i\lambda_j} T_{P\lambda_1'\lambda_2'}^{\lambda_i'\lambda_j'*}. \tag{2.184}$$

Dabei stehen $\lambda_i(')$, $\lambda_j(')$ für die Helizitäten der erzeugten Neutralinos und $\lambda_1(')$, $\lambda_2(')$ für die Helizitäten des Elektrons und des Positrons im Anfangszustand. Die Spin-Dichtematrizen der Zerfälle $\rho_{D\lambda_i'\lambda_i}$ und $\rho_{D\lambda_j'\lambda_j}$ ergeben sich entsprechend aus den Zerfallsamplituden:

$$\rho_{D\lambda_i'\lambda_i} = T_{D\lambda_i'} T^*_{D\lambda_i}, \tag{2.185}$$
$$\rho_{D\lambda_j'\lambda_j} = T_{D\lambda_j'} T^*_{D\lambda_j}. \tag{2.186}$$

Damit erhält man das Amplitudenbetragsquadrat für den aus Produktion und anschließendem Zerfall der Neutralinos bestehenden Gesamtprozeß aus den Spin-Dichtematrizen:

$$|T|^2 = |\Delta(\tilde{\chi}_i^0)|^2 |\Delta(\tilde{\chi}_j^0)|^2 \rho(e^-)_{\lambda_1\lambda_1'} \rho(e^+)_{\lambda_2\lambda_2'} \rho_{P\lambda_1\lambda_2,\lambda_1'\lambda_2'}^{\lambda_i\lambda_j,\lambda_i'\lambda_j'} \rho_{D\lambda_i'\lambda_i} \rho_{D\lambda_j'\lambda_j}, \tag{2.187}$$

mit den Pseudopropagatoren

$$\Delta(\tilde{\chi}_{i/j}^0) = \frac{1}{s_{i/j} - m_{i/j}^2 + i m_{i/j}\Gamma_{i/j}}. \tag{2.188}$$

Diese beschreiben die Propagation der Neutralinos zwischen ihrer Produktion und ihrem Zerfall; sie enthalten deren invariante Massen $s_{i/j}$, Massen $m_{i/j}$ und totale Zerfallsbreiten $\Gamma_{i/j}$.

Um die Polarisationen der Neutralinos zu beschreiben, entwickelt man die Spin-Dichtematrizen für Produktion und Zerfall nach den Paulimatrizen (die Elektron- und Positron- Helizitätsindices in ρ_P werden unterdrückt):

$$\begin{aligned}
\rho_P^{\lambda_i\lambda_j,\lambda_i'\lambda_j'} &= \delta_{\lambda_i\lambda_i'}\delta_{\lambda_j\lambda_j'} P + \delta_{\lambda_j\lambda_j'} \sum_a \sigma^a_{\lambda_i\lambda_i'} \Sigma^a_P(\tilde{\chi}_i^0) + \delta_{\lambda_i\lambda_i'} \sum_b \sigma^b_{\lambda_j\lambda_j'} \Sigma^b_P(\tilde{\chi}_j^0) \\
&\quad + \sum_{ab} \sigma^a_{\lambda_i\lambda_i'} \sigma^b_{\lambda_j\lambda_j'} \Sigma^{ab}_P(\tilde{\chi}_i^0, \tilde{\chi}_j^0), \qquad (2.189)\\
\rho_{D\lambda_i'\lambda_i} &= \delta_{\lambda_i'\lambda_i} D(\tilde{\chi}_i^0) + \sum_a \sigma^a_{\lambda_i'\lambda_i} \Sigma^a_D(\tilde{\chi}_i^0), \qquad (2.190)\\
\rho_{D\lambda_i'\lambda_i} &= \delta_{\lambda_j'\lambda_j} D(\tilde{\chi}_j^0) + \sum_b \sigma^b_{\lambda_j'\lambda_j} \Sigma^b_D(\tilde{\chi}_j^0). \qquad (2.191)
\end{aligned}$$

Die Spin-Dichtematrix für die Produktion (2.189) setzt sich aus folgenden Termen zusammen:

1. Der Term P, der unabhängig von der Polarisation der Neutralinos ist,
2. die Spin-Terme $\Sigma^a_P(\tilde{\chi}_i^0)$, $\Sigma^b_P(\tilde{\chi}_j^0)$, die von der Polarisation der Teilchen $\tilde{\chi}_i^0$, $\tilde{\chi}_j^0$ abhängen, sowie
3. die Spin-Spin-Terme Σ^{ab}_P, die von der Polarisation beider Teilchen abhängen.

Die Zerfallsmatrizen (2.190,2.191) enthalten:

1. Die Terme $D(\tilde{\chi}_{i,j}^0)$, die unabhängig von der Polarisation des zerfallenden Neutralinos sind und
2. die Spin-Terme $\Sigma^a_D(\tilde{\chi}_i^0), \Sigma^b_D(\tilde{\chi}_j^0)$, die von der Polarisation des zerfallenden Neutralinos abhängen.

Im Amplitudenbetragsquadrat (2.187) treten Terme der Form $\Sigma^a_P(\tilde{\chi}_i^0)\Sigma^a_D(\tilde{\chi}_i^0)$ auf, die Spin-Korrelationen zwischen der Produktion und dem Zerfall desselben Teilchens beschreiben. Betrachtet man einen Prozess, bei dem beide erzeugten Teilchen zerfallen, so erhält man durch Terme, die $\Sigma_P^{ab}(\tilde{\chi}_i^0\tilde{\chi}_j^0)\Sigma_D^a(\tilde{\chi}_i^0)\Sigma_D^b(\tilde{\chi}_j^0)$ enthalten, Korrelationen zwischen den Zerfallsprodukten beider Zerfälle.

Die Entwicklung der Spin-Dichtematrizen nach den Paulimatrizen ergibt sich bei der Berechnung der Zerfallsdichtematrix durch Verwendung der Bouchiat-Michel-Formeln (2.160,2.161) automatisch. Für die Produktion werden jedoch zunächst die Helizitätsamplituden und daraus die Elemente der Produktions-Dichtematrix ausgerechnet. Aus diesen erhält man durch folgende Beziehungen die gesuchten Terme:

$$
\begin{aligned}
4P &= \delta_{\lambda_j'\lambda_j}\delta_{\lambda_i'\lambda_i}\rho_P^{\lambda_i\lambda_j,\lambda_i'\lambda_j'}, &(2.192)\\
4\Sigma_P^a(\tilde{\chi}_i^0) &= \delta_{\lambda_j'\lambda_j}\sigma^a_{\lambda_i'\lambda_i}\rho_P^{\lambda_i\lambda_j,\lambda_i'\lambda_j'}, &(2.193)\\
4\Sigma_P^b(\tilde{\chi}_j^0) &= \delta_{\lambda_i'\lambda_i}\sigma^b_{\lambda_j'\lambda_j}\rho_P^{\lambda_i\lambda_j,\lambda_i'\lambda_j'}, &(2.194)\\
4\Sigma_P^{ab}(\tilde{\chi}_i^0\tilde{\chi}_j^0) &= \sigma^a_{\lambda_i'\lambda_i}\sigma^b_{\lambda_j'\lambda_j}\rho_P^{\lambda_i\lambda_j,\lambda_i'\lambda_j'}. &(2.195)
\end{aligned}
$$

Da außer dem totalen und dem differentiellen Wirkungsquerschnitt auch die Spin-Dichtematrixelemente des im Zerfall entstehenden Z-Bosons berechnet werden sollen, geben wir an dieser Stelle auch die allgemeine Form der Spin-Dichtematrix eines massiven Spin-1 Teilchens an, die sich durch die dreidimensionalen Spinmatrizen s_i beschreiben läßt[20]:

$$\rho = \frac{1}{3}\left(\mathbf{I} + \sqrt{3}\vec{P}\vec{s} + \sum_{m=-2}^{2}\langle Q_m^{2\dagger}\rangle Q_m^2\right), \tag{2.196}$$

mit

$$P_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\langle s_i\rangle, \tag{2.197}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
Q_0^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(3s_z^2-2), \quad Q_1^2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\{(s_x+is_y)s_z + s_z(s_x+is_y)\},\\
Q_2^2 &= \frac{1}{2}\sqrt{3}(s_x+is_y)^2, \quad Q_{-1}^2 = -Q_1^{2\dagger}, \quad Q_{-2}^2 = Q_2^{2\dagger}. &(2.198)
\end{aligned}
$$

Kapitel 3

Bezugssystem und Koordinatenwahl

Das Bezugssystem für die Produktion und den Zerfall ist das Laborsystem, das zugleich auch das CMS ist.

3.1 Die Produktion

Das Koordinatensystem (Abb. 3.1) wurde so gewählt, daß die Produktionsebene die xz-Ebene aufspannt. Die erzeugten Teilchen bewegen sich in $+z$-Richtung ($\tilde{\chi}_i^0 \to p_3$) und in $-z$-Richtung ($\tilde{\chi}_j^0 \to p_4$).

Die Viererimpulse der einlaufenden Teilchen ($e^- \to p_1,\ \ e^+ \to p_2$) sind:

$$p_1^\mu = \begin{pmatrix} E_b \\ -|\vec{p}_1| \sin\theta_3 \\ 0 \\ |\vec{p}_1| \cos\theta_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad p_2^\mu = \begin{pmatrix} E_b \\ |\vec{p}_2| \sin\theta_3 \\ 0 \\ -|\vec{p}_2| \cos\theta_3 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

mit der Strahlenergie E_b und θ_3, dem Winkel zwischen p_1 und p_3. Die einlaufenden Teilchen können bei den betrachteten Energien als masselos angenommen werden, wodurch sich deren Viererimpulse vereinfachen zu:

$$p_1^\mu = E_b \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin\theta_3 \\ 0 \\ \cos\theta_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad p_2^\mu = E_b \begin{pmatrix} 1 \\ \sin\theta_3 \\ 0 \\ -\cos\theta_3 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Die Viererimpulse der erzeugten massiven Neutralinos sind

$$p_3^\mu = \begin{pmatrix} E_3 \\ 0 \\ 0 \\ |\vec{p}_3| \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad p_4^\mu = \begin{pmatrix} E_4 \\ 0 \\ 0 \\ -|\vec{p}_4| \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

wobei deren Energien und Impulse gegeben sind durch:

$$E_3 = \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}}, \tag{3.4}$$

$$E_4 = \frac{s + m_4^2 - m_3^2}{2\sqrt{s}}, \tag{3.5}$$

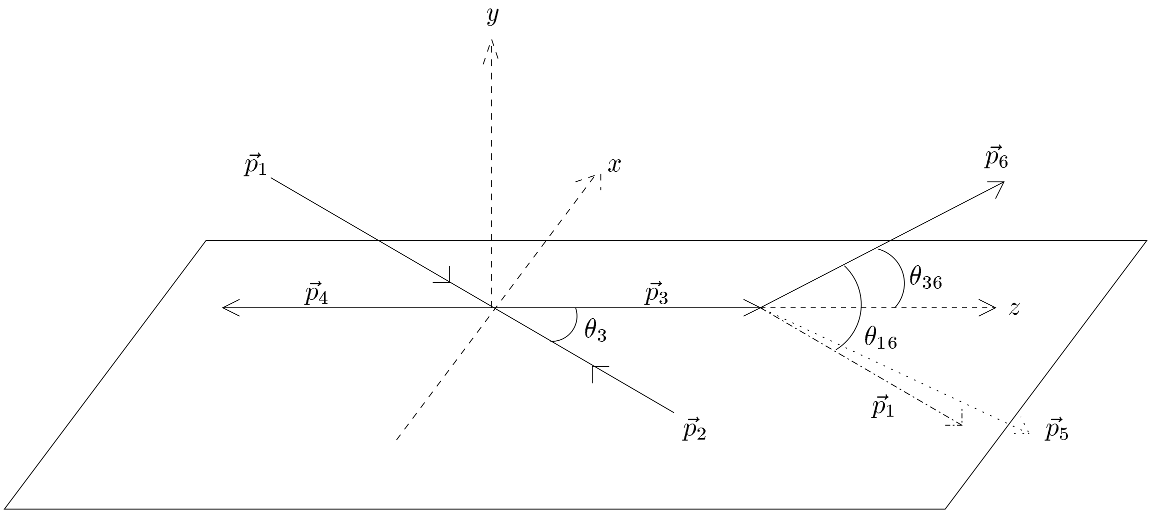


Abbildung 3.1: Definitionen der Impulse und Winkel im Laborsystem. Die Azimutalwinkel sind aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet.

$$|\vec{p}_3| \quad = \quad \frac{\sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}}{2\sqrt{s}} = |\vec{p}_4| = p, \tag{3.6}$$

mit der kinematischen Dreiecksfunktion

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz, \tag{3.7}$$

und der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = 2E_b$.
Für die Berechnung der Zerfallsdichtematrix des Neutralinos $\tilde{\chi}_i^0$ werden dessen Polarisationsvektoren $s^{a\mu}$, $a = 1, 2, 3$ benötigt. Diese ergeben sich aus ihrer Definition (2.154) in dem gewählten Koordinatensystem zu:

$$s^{1\mu}(p_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s^{2\mu}(p_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s^{3\mu}(p_3) = \frac{1}{m_3} \begin{pmatrix} |\vec{p}_3| \\ 0 \\ 0 \\ E_3 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

3.2 Der Zerfall

Numerisch wird nur die Produktion der Neutralinos $\tilde{\chi}_3^0$, $\tilde{\chi}_1^0$ und der anschliessende Zweikörperzerfall des Neutralinos $\tilde{\chi}_3^0$ in $\tilde{\chi}_1^0$ und Z^0 ausgewertet:

$$e^+ + e^- \to \tilde{\chi}_3^0(p_3) + \tilde{\chi}_1^0(p_4), \tag{3.9}$$

$$\tilde{\chi}_3^0(p_3) \to \tilde{\chi}_1^0(p_5) + Z^0(p_6). \tag{3.10}$$

Die auftretenden Impulse sind Abb.3.1 zu entnehmen. Da die Impulse der Zerfallsprodukte beim Zweikörperzerfall in einer Ebene liegen, genügt es, den Viererimpuls des beobachteten (bzw. aus seinem Zerfall rekonstruierten) Z^0-Bosons anzugeben:

$$p_6^\mu = \begin{pmatrix} E_6 \\ |\vec{p}_6| \sin\theta_{36} \cos\phi_{36} \\ |\vec{p}_6| \sin\theta_{36} \sin\phi_{36} \\ |\vec{p}_6| \cos\theta_{36} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Den Impuls p_5 des beim Zerfall entstehenden Neutralinos $\tilde{\chi}_1^0$ erhält man aus der Impulserhaltung:

$$p_5^\mu = p_3^\mu - p_6^\mu. \tag{3.12}$$

Wir gehen davon aus, daß das leichteste Neutralino $\tilde{\chi}_1^0$ das LSP ist und somit - bei R-Paritätserhaltung - stabil ist. Da es elektrisch neutral ist, kann es nicht direkt im Detektor nachgewiesen werden und tritt im Ereignis nur als 'missing energy' in Erscheinung.

Schließlich benötigen wir noch die Helizitätszustände des Z-Bosons. Die linearen Polarisationszustände werden so gewählt, daß $\varepsilon^{2\mu}$ senkrecht auf der durch die Impulse des Elektrons und des Z-Bosons festgelegten Ebene steht:

$$\varepsilon^{1\mu} = \left(0, \frac{(\vec{p}_1 \times \vec{p}_6) \times \vec{p}_6}{|\vec{p}_1 \times \vec{p}_6| \cdot |\vec{p}_6|}\right), \tag{3.13}$$

$$\varepsilon^{2\mu} = \left(0, \frac{\vec{p}_1 \times \vec{p}_6}{|\vec{p}_1 \times \vec{p}_6|}\right), \tag{3.14}$$

$$\varepsilon^{3\mu} = \frac{1}{m}\left(|\vec{p}_6|, E\frac{\vec{p}_6}{|\vec{p}_6|}\right). \tag{3.15}$$

Aus diesen erhält man wieder über

$$\varepsilon^\mu(\pm 1) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon^{1\mu} \pm i\varepsilon^{2\mu}), \tag{3.16}$$

$$\varepsilon^\mu(0) = \varepsilon^{3\mu}, \tag{3.17}$$

die gesuchten Helizitätszustände.

Kapitel 4

Spin-Dichtematrizen für Produktion und Zerfall

In diesem Kapitel werden wir die Amplituden und Spin-Dichtematrizen für Produktion und Zerfall mit Hilfe des in Kap. 2.4 vorgestellten Spinformalismus berechnen.

4.1 Die Produktion der Neutralinos

Wenden wir uns zunächst dem Produktionsprozeß

$$e^+ + e^- \to \tilde{\chi}_i^0(p_3) + \tilde{\chi}_j^0(p_4) \tag{4.1}$$

zu. Dieser wird für beliebige Neutralinos $i, j = 1, 2, 3, 4$ berechnet, der Spezialfall $i = 3, j = 1$ wird erst beim Zerfall und dessen numerischer Auswertung betrachtet. Bei der Berechnung der Amplituden erweist sich der Majorana-Charakter der Neutralinos als problematisch, da die im Standardmodell üblichen Feynmanregeln sich nicht direkt auf diese übertragen lassen. Das Teilchenspektrum des Standardmodells enthält ausschließlich geladene Fermionen, denen in Feynmandiagrammen für ein- bzw. auslaufende Teilchen und Antiteilchen in eindeutiger Weise Spinoren zugeordnet werden können. So erhält man z.B. für in einem Feynmandiagramm enthaltene einlaufende Elektronen (Positronen) einen u ($\bar{v}$)-Spinor und für auslaufende Elektronen (Positronen) einen $\bar{u}$ (v)-Spinor in der zugehörigen Amplitude [4]. Da bei Majoranateilchen jedoch Teilchen und Antiteilchen identisch sind, kann z.B. ein auslaufendes Majoranateilchen entweder mit einem $\bar{u}$-Spinor oder einem v-Spinor in die Amplitude eingehen. Um zu entscheiden, welcher Spinor für ein gegebenes Feynmandiagramm die richtige Wahl ist, kann man speziell für Majoranateilchen entwickelte Feynmanregeln verwenden [10]. Diese sind in der Praxis jedoch relativ unhandlich, so daß es mitunter einfacher ist, sich die Amplituden direkt mit dem Wick-Theorem aus den für den Prozeß relevanten Lagrangedichten herzuleiten. Letztere Methode wurde in [23] verwendet, woraus sowohl die Lagrangedichten als auch die Amplituden übernommen wurden.

Für den Prozeß (4.1) sind auf dem Baumgraphenniveau folgende Beiträge relevant:

- Z-Austausch im s-Kanal
- Selektronaustausch (jeweils rechts- und linkshändige Selektronen) im t-Kanal und im u-Kanal.

Die benötigten Terme der Lagrangedichte sind daher:

$$\mathcal{L}_{Z^0 l^+ l^-} = -\frac{g}{\cos\theta_W} Z_\mu \bar{l}\gamma^\mu [L_l P_L + R_l P_R] l \quad + h.c. \tag{4.2}$$

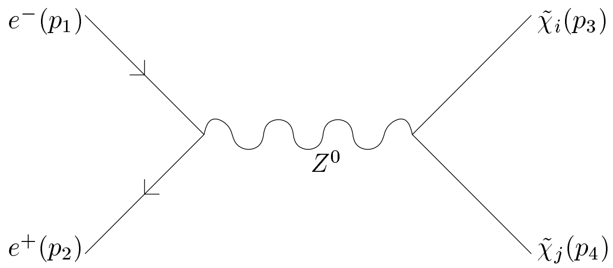
$$\mathcal{L}_{Z^0 \tilde{\chi}^0_i \tilde{\chi}^0_j} = \frac{1}{2}\frac{g}{\cos\theta_W} Z_\mu \bar{\tilde{\chi}}^0_i \gamma^\mu [O''^L_{ij} P_L + O''^R_{ij} P_R]\tilde{\chi}^0_j \quad + h.c. \tag{4.3}$$

$$\mathcal{L}_{l\tilde{l}\tilde{\chi}^0_m} = g f^L_{lm} \bar{l} P_R \tilde{\chi}^0_m \tilde{l}_L + g f^R_{lm} \bar{l} P_L \tilde{\chi}^0_m \tilde{l}_R \quad + h.c. \ \ , m = i, j. \tag{4.4}$$

Darin wurden die folgenden Abkürzungen verwendet:

- $L_l = T_{3l} - e_l \sin\theta_W{}^2, \qquad R_l = -e_l \sin\theta_W{}^2,$
- T_{3l} ist der Eigenwert des $SU(2)_W$-Generators T_3 (vgl. Kap.2.2) des Leptons l. Daher ist $T_{3l} = -\frac{1}{2}$ für linkshändige Elektronen und $T_{3l} = 0$ für rechtshändige Elektronen. e_l ist die Ladungsquantenzahl des Leptons l.
- $O''^L_{ij} = -\frac{1}{2}(N_{i3}N^*_{j3} - N_{i4}N^*_{j4})\cos 2\beta - \frac{1}{2}(N_{i3}N^*_{j4} + N_{i4}N^*_{j3})\sin 2\beta,$
  $O''^R_{ij} = -O''^{L*}_{ij}$
- N_{ij} sind die Matrixelemente der unitären 4×4-Matrix, die die Neutralino-Massenmischungsmatrix diagonalisiert (vgl. Kap. 2.3.8);
- $P_{L/R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$ sind die Chiralitätsprojektoren;
- $f^L_{lm} = -\sqrt{2}\left[\frac{1}{\cos\theta_W}(T_{3l} - e_l \sin\theta_W{}^2)N_{m2} + e_l \sin\theta_W N_{m1}\right],$
  $f^R_{lm} = -\sqrt{2} e_l \sin\theta_W [\tan\theta_W N^*_{m2} - N^*_{m1}] \ \ , m = i, j$

s-Kanal Produktion



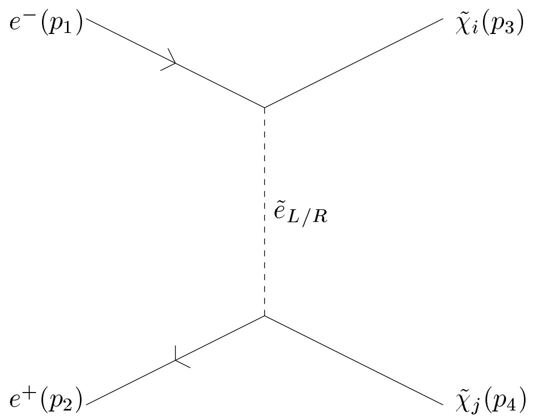
Die zugehörige Amplitude ist gegeben durch:

$$A^{\lambda_i \lambda_j}_{\lambda_1 \lambda_2} = iD(s)[\bar{v}_{\lambda_2}(e^+)\gamma^\mu (L_l P_L + R_l P_R) u_{\lambda_1}(e^-)]$$
$$\cdot[\bar{u}_{\lambda_i}(\tilde{\chi}^0_i)\gamma_\mu (O''^L_{ij} P_L + O''^R_{ij} P_R) v_{\lambda_j}(\tilde{\chi}^0_j)], \tag{4.5}$$

mit

$$D(s) = \frac{g^2}{\cos\theta_W{}^2} \cdot \frac{1}{s - m_Z^2 + i m_Z \Gamma_Z}. \tag{4.6}$$

t-Kanal Produktion



Die zugehörige Amplitude ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} B^{\lambda_i\lambda_j}_{\lambda_1\lambda_2} = & -iD_l(t)[\bar{v}_{\lambda_2}(e^+)P_R v_{\lambda_j}(\tilde{\chi}^0_j)][\bar{u}_{\lambda_i}(\tilde{\chi}^0_i)P_L u_{\lambda_1}(e^-)] \\ & -iD_r(t)[\bar{v}_{\lambda_2}(e^+)P_L v_{\lambda_j}(\tilde{\chi}^0_j)][\bar{u}_{\lambda_i}(\tilde{\chi}^0_i)P_R u_{\lambda_1}(e^-)], \end{aligned} \tag{4.7}$$

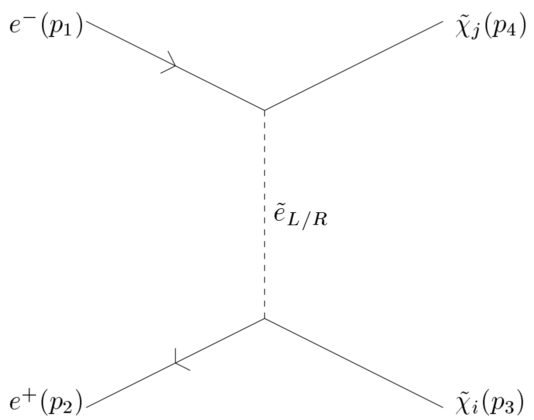
mit

$$D_l(t) = \frac{g^2}{t - m_{\tilde{e}_L}} \cdot f^{L*}_{li} \cdot f^L_{lj} \tag{4.8}$$

und

$$D_r(t) = \frac{g^2}{t - m_{\tilde{e}_R}} \cdot f^{R*}_{li} \cdot f^R_{lj}. \tag{4.9}$$

u-Kanal Produktion



Die zugehörige Amplitude ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} C^{\lambda_i\lambda_j}_{\lambda_1\lambda_2} = & \, iD_l(u)[\bar{v}_{\lambda_2}(e^+)P_R v_{\lambda_i}(\tilde{\chi}^0_i)][\bar{u}_{\lambda_j}(\tilde{\chi}^0_j)P_L u_{\lambda_1}(e^-)] \\ & +iD_r(u)[\bar{v}_{\lambda_2}(e^+)P_L v_{\lambda_i}(\tilde{\chi}^0_i)][\bar{u}_{\lambda_j}(\tilde{\chi}^0_j)P_R u_{\lambda_1}(e^-)], \end{aligned} \tag{4.10}$$

mit

$$D_l(u) = \frac{g^2}{u - m_{\tilde{e}_L}} \cdot f^L_{li} \cdot f^{L*}_{lj} \tag{4.11}$$

und

$$D_r(u) = \frac{g^2}{u - m_{\tilde{e}_R}} \cdot f_{li}^R \cdot f_{lj}^{R*}. \tag{4.12}$$

Dabei sind s, t, u die Mandelstam-Variablen:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2, \\ u &= (p_2 - p_3)^2 = (p_4 - p_1)^2. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Die Amplituden können durch eine Fierztransformation (siehe Anhang A.3) der t- und u-Kanal Amplituden auf eine einheitliche Form gebracht werden. Dadurch erhalten die Helizitätsamplituden die Form

$$T_{P\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_i\lambda_j} = Q_{\alpha\beta}^{ij}[\bar{v}_{\lambda_2}(e^+)\gamma^\mu P_\alpha u_{\lambda_1}(e^-)][\bar{u}_{\lambda_i}(\tilde{\chi}_i^0)\gamma_\mu P_\beta v_{\lambda_j}(\tilde{\chi}_j^0)], \tag{4.14}$$

mit den 'verallgemeinerten Ladungen' $Q_{\alpha\beta}^{ij}$, die durch die Chiralitäten $\alpha, \beta = L, R$ der Leptonen- und Neutralinoströme klassifiziert werden (vgl. [30]):

$$Q_{LL}^{ij} = i[D(s)L_l O_{ij}^{''L} + \frac{1}{2}D_l(u)], \tag{4.15}$$

$$Q_{LR}^{ij} = i[-D(s)L_l O_{ij}^{''L*} - \frac{1}{2}D_l(t)], \tag{4.16}$$

$$Q_{RL}^{ij} = i[D(s)R_l O_{ij}^{''L} - \frac{1}{2}D_r(t)], \tag{4.17}$$

$$Q_{RR}^{ij} = i[-D(s)R_l O_{ij}^{''L*} + \frac{1}{2}D_r(u)]. \tag{4.18}$$

Diese Amplituden werden mit den in Kap.2.4.1 vorgestellten expliziten Spinoren im angegebenen Koordinatensystem berechnet und ergeben sich zu:

$$T_{P-+}^{++} = -E\sin\theta_3(Q_{LL}^{ij}\varepsilon_3^-\varepsilon_4^+ + Q_{LR}^{ij}\varepsilon_3^+\varepsilon_4^-), \tag{4.19}$$

$$T_{P-+}^{+-} = -E(1-\cos\theta_3)(Q_{LL}^{ij}\varepsilon_3^-\varepsilon_4^- + Q_{LR}^{ij}\varepsilon_3^+\varepsilon_4^+), \tag{4.20}$$

$$T_{P-+}^{-+} = E(1+\cos\theta_3)(Q_{LL}^{ij}\varepsilon_3^+\varepsilon_4^+ + Q_{LR}^{ij}\varepsilon_3^-\varepsilon_4^-), \tag{4.21}$$

$$T_{P-+}^{--} = E\sin\theta_3(Q_{LL}^{ij}\varepsilon_3^+\varepsilon_4^- + Q_{LR}^{ij}\varepsilon_3^-\varepsilon_4^+), \tag{4.22}$$

$$T_{P+-}^{++} = -E\sin\theta_3(Q_{RL}^{ij}\varepsilon_3^-\varepsilon_4^+ + Q_{RR}^{ij}\varepsilon_3^+\varepsilon_4^-), \tag{4.23}$$

$$T_{P+-}^{+-} = E(1+\cos\theta_3)(Q_{RL}^{ij}\varepsilon_3^-\varepsilon_4^- + Q_{RR}^{ij}\varepsilon_3^+\varepsilon_4^+), \tag{4.24}$$

$$T_{P+-}^{-+} = -E(1-\cos\theta_3)(Q_{RL}^{ij}\varepsilon_3^+\varepsilon_4^+ + Q_{RR}^{ij}\varepsilon_3^-\varepsilon_4^-), \tag{4.25}$$

$$T_{P+-}^{--} = E\sin\theta_3(Q_{RL}^{ij}\varepsilon_3^+\varepsilon_4^- + Q_{RR}^{ij}\varepsilon_3^-\varepsilon_4^+). \tag{4.26}$$

Alle Helizitätsamplituden, in denen Elektron und Positron dieselbe Helizität haben ergeben 0, da diese Teilchen als masselos betrachtet werden. Es wurden die Bezeichnungen $\varepsilon_{i/j}^{\pm}$ und T_{P-+}^{++}, etc. eingeführt, die definiert sind über

- $T_{P-+}^{+-} = T_{P\lambda_1=-\frac{1}{2},\lambda_2=+\frac{1}{2}}^{\lambda_i=+\frac{1}{2},\lambda_j=-\frac{1}{2}}$ usw.,
- $\varepsilon_n^{\pm} = (\sqrt{E_n - m_n} \pm \sqrt{E_n + m_n})$, $n = 3, 4$.

Aus diesen Helizitätsamplituden wird nun zunächst die Spin-Dichtematrix der Produktion, $\rho^{\lambda_i\lambda_j,\lambda'_i\lambda'_j}_{P\lambda_1\lambda_2,\lambda'_1\lambda'_2} = T^{\lambda_i\lambda_j}_{P\lambda_1\lambda_2}T^{\lambda'_i\lambda'_j *}_{P\lambda'_1\lambda'_2}$ berechnet. Aufgrund der Signatur der Ereignisse ('missing energy') ist die Produktionsebene nicht rekonstruierbar. Daher beschränken wir uns auf den Fall longitudinaler Strahlpolarisationen und somit müssen nur die Matrixelemente $\rho^{\lambda_i\lambda_j,\lambda'_i\lambda'_j}_{P-+,-+}$ und $\rho^{\lambda_i\lambda_j,\lambda'_i\lambda'_j}_{P+-,+-}$ berechnet werden. Der besseren Übersicht halber werden diese nacheinander angegeben, wobei die Elektron- und Positron-Helizitätsindizes unterdrückt werden.
Betrachten wir also zunächst den **Fall 1:** $\lambda_1 = \lambda'_1 = -\frac{1}{2},\ \lambda_2 = \lambda'_2 = +\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\rho_P^{++,++} &= 4E_b^2\sin^2\theta_3[Q_+(E_3E_4-p^2)+Q_-p(E_3-E_4) \\
&\qquad +Q_Rm_3m_4], &(4.27)\\
\rho_P^{++,+-} &= -4E_b^2(1-\cos\theta_3)\sin\theta_3[Q_+E_3m_4-Q_-pm_4+Q_RE_4m_3 \\
&\qquad +iQ_Ipm_3], &(4.28)\\
\rho_P^{++,-+} &= 4E_b^2(1+\cos\theta_3)\sin\theta_3[Q_+E_4m_3+Q_-pm_3+Q_RE_3m_4 \\
&\qquad -iQ_Ipm_4], &(4.29)\\
\rho_P^{++,--} &= -4E_b^2\sin^2\theta_3[Q_+m_3m_4+Q_R(E_3E_4-p^2) \\
&\qquad +iQ_Ip(E_3-E_4)], &(4.30)\\
\rho_P^{+-,+-} &= 4E_b^2(1-\cos\theta_3)^2[Q_+(E_3E_4+p^2)-Q_-p(E_3+E_4) \\
&\qquad +Q_Rm_3m_4], &(4.31)\\
\rho_P^{+-,-+} &= -4E_b^2(1-\cos^2\theta_3)[Q_+m_3m_4+Q_R(E_3E_4+p^2) \\
&\qquad -iQ_Ip(E_3+E_4)], &(4.32)\\
\rho_P^{+-,--} &= 4E_b^2(1-\cos\theta_3)\sin\theta_3[Q_+E_4m_3-Q_-pm_3+Q_RE_3m_4 \\
&\qquad -iQ_Ipm_4], &(4.33)\\
\rho_P^{-+,-+} &= 4E_b^2(1+\cos\theta_3)^2[Q_+(E_3E_4+p^2)+Q_-p(E_3+E_4) \\
&\qquad +Q_Rm_3m_4], &(4.34)\\
\rho_P^{-+,--} &= -4E_b^2(1+\cos\theta_3)\sin\theta_3[Q_+E_3m_4+Q_-pm_4+Q_RE_4m_3 \\
&\qquad +iQ_Ipm_3], &(4.35)\\
\rho_P^{--,--} &= 4E_b^2\sin^2\theta_3[Q_+(E_3E_4-p^2)-Q_-p(E_3-E_4) \\
&\qquad +Q_Rm_3m_4]. &(4.36)
\end{aligned}$$

Dabei wurden folgende Abkürzungen verwendet (keine Summation über i, j):

- $Q_\pm = |Q^{ij}_{LL}|^2 \pm |Q^{ij}_{LR}|^2$,
- $Q_R = 2\mathrm{Re}(Q^{ij}_{LL}Q^{ij*}_{LR}) = Q^{ij}_{LL}Q^{ij*}_{LR} + Q^{ij*}_{LL}Q^{ij}_{LR}$,
- $Q_I = 2\mathrm{Im}(Q^{ij}_{LL}Q^{ij*}_{LR}) = Q^{ij}_{LL}Q^{ij*}_{LR} - Q^{ij*}_{LL}Q^{ij}_{LR}$,
- $p = p_3 = p_4$.

Wenden wir uns nun dem **Fall 2:** $\lambda_1 = \lambda'_1 = +\frac{1}{2},\ \lambda_2 = \lambda'_2 = -\frac{1}{2}$ zu:

$$\begin{aligned}
\rho_P^{++,++} &= 4E_b^2\sin^2\theta_3[Q'_+(E_3E_4-p^2)+Q'_-p(E_3-E_4) \\
&\qquad +Q'_Rm_3m_4], &(4.37)\\
\rho_P^{++,+-} &= 4E_b^2(1+\cos\theta_3)\sin\theta_3[Q'_+E_3m_4-Q'_-pm_4+Q'_RE_4m_3 \\
&\qquad +iQ'_Ipm_3], &(4.38)\\
\rho_P^{++,-+} &= -4E_b^2(1-\cos\theta_3)\sin\theta_3[Q'_+E_4m_3+Q'_-pm_3+Q'_RE_3m_4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& & -iQ'_I p m_4], & \quad (4.39)\\
\rho_P^{++,--} &=& -4E_b^2 \sin^2\theta_3[Q'_+ m_3 m_4 + Q'_R(E_3E_4 - p^2) & \\
& & +iQ'_I p(E_3 - E_4)], & \quad (4.40)\\
\rho_P^{+-,+-} &=& 4E_b^2(1+\cos\theta_3)^2[Q'_+(E_3E_4+p^2) - Q'_- p(E_3+E_4) & \\
& & +Q'_R m_3 m_4], & \quad (4.41)\\
\rho_P^{+-,-+} &=& -4E_b^2(1-\cos^2\theta_3)[Q'_+ m_3 m_4 + Q'_R(E_3E_4+p^2) & \\
& & -iQ'_I p(E_3+E_4)], & \quad (4.42)\\
\rho_P^{+-,--} &=& -4E_b^2(1+\cos\theta_3)\sin\theta_3[Q'_+ E_4 m_3 - Q'_- p m_3 + Q'_R E_3 m_4 & \\
& & -iQ'_I p m_4], & \quad (4.43)\\
\rho_P^{-+,-+} &=& 4E_b^2(1-\cos\theta_3)^2[Q'_+(E_3E_4+p^2) + Q'_- p(E_3+E_4) & \\
& & +Q'_R m_3 m_4], & \quad (4.44)\\
\rho_P^{-+,--} &=& 4E_b^2(1-\cos\theta_3)\sin\theta_3[Q'_+ E_3 m_4 + Q'_- p m_4 + Q'_R E_4 m_3 & \\
& & +iQ'_I p m_3], & \quad (4.45)\\
\rho_P^{--,--} &=& 4E_b^2 \sin^2\theta_3[Q'_+(E_3E_4-p^2) - Q'_- p(E_3-E_4) & \\
& & +Q'_R m_3 m_4]. & \quad (4.46)
\end{aligned}
$$

Mit den Abkürzungen:

- $Q'_\pm = |Q^{ij}_{RL}|^2 \pm |Q^{ij}_{RR}|^2$,
- $Q'_R = 2\mathrm{Re}(Q^{ij}_{RL} Q^{ij*}_{RR}) = Q^{ij}_{RL} Q^{ij*}_{RR} + Q^{ij*}_{RL} Q^{ij}_{RR}$,
- $Q'_I = 2\mathrm{Im}(Q^{ij}_{RL} Q^{ij*}_{RR}) = Q^{ij}_{RL} Q^{ij*}_{RR} - Q^{ij*}_{RL} Q^{ij}_{RR}$,
- $p = p_3 = p_4$.

Die Entwicklung der Produktions-Spin-Dichtematrix nach den Pauli-Matrizen wird unter Verwendung der Beziehungen (2.192) - (2.195) durchgeführt. Somit erhält man im **Fall 1:**$\lambda_1 = \lambda'_1 = -\frac{1}{2},\ \lambda_2 = \lambda'_2 = +\frac{1}{2}$:

$$
\begin{aligned}
P &=& 4E_b^2[Q_+(E_3E_4 + p^2\cos^2\theta_3) + Q_R m_3 m_4 & \\
& & +Q_- p(E_3+E_4)\cos\theta_3], & \quad (4.47)\\
\Sigma_P^1(\tilde\chi_i^0) &=& 4E_b^2\sin\theta_3[Q_+E_4m_3 + Q_RE_3m_4 + Q_- p m_3\cos\theta_3], & \quad (4.48)\\
\Sigma_P^2(\tilde\chi_i^0) &=& 4E_b^2\sin\theta_3 Q_I p m_4, & \quad (4.49)\\
\Sigma_P^3(\tilde\chi_i^0) &=& -4E_b^2[Q_-(pE_4 + pE_3\cos^2\theta_3) & \\
& & +(Q_+(E_3E_4+p^2) + Q_R m_3 m_4)\cos\theta_3], & \quad (4.50)\\
\Sigma_P^1(\tilde\chi_j^0) &=& -4E_b^2\sin\theta_3[Q_+E_3m_4 + Q_RE_4m_3 + Q_- p m_4\cos\theta_3], & \quad (4.51)\\
\Sigma_P^2(\tilde\chi_j^0) &=& 4E_b^2\sin\theta_3 Q_I p m_3, & \quad (4.52)\\
\Sigma_P^3(\tilde\chi_j^0) &=& 4E_b^2[Q_-(pE_3 + pE_4\cos^2\theta_3) & \\
& & +(Q_+(E_3E_4+p^2) + Q_R m_3 m_4)\cos\theta_3], & \quad (4.53)\\
\Sigma_P^{11}(\tilde\chi_i^0,\tilde\chi_j^0) &=& -4E_b^2\sin^2\theta_3[Q_+m_3m_4 + Q_RE_3E_4], & \quad (4.54)\\
\Sigma_P^{21}(\tilde\chi_i^0,\tilde\chi_j^0) &=& -4E_b^2\sin^2\theta_3 Q_I p E_4, & \quad (4.55)\\
\Sigma_P^{12}(\tilde\chi_i^0,\tilde\chi_j^0) &=& 4E_b^2\sin^2\theta_3 Q_I p E_3, & \quad (4.56)\\
\Sigma_P^{22}(\tilde\chi_i^0,\tilde\chi_j^0) &=& -4E_b^2\sin^2\theta_3 Q_R p^2, & \quad (4.57)\\
\Sigma_P^{13}(\tilde\chi_i^0,\tilde\chi_j^0) &=& 4E_b^2\sin\theta_3[Q_- p m_3 + (Q_+E_4m_3 + Q_RE_3m_4)\cos\theta_3], & \quad (4.58)\\
\Sigma_P^{31}(\tilde\chi_i^0,\tilde\chi_j^0) &=& 4E_b^2\sin\theta_3[Q_- p m_4 + (Q_+E_3m_4 + Q_RE_4m_3)\cos\theta_3], & \quad (4.59)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_P^{23}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0) &= 4E_b^2\sin\theta_3\cos\theta_3 Q_I p m_4, & (4.60)\\
\Sigma_P^{32}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0) &= -4E_b^2\sin\theta_3\cos\theta_3 Q_I p m_3, & (4.61)\\
\Sigma_P^{33}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0) &= -4E_b^2[Q_+(E_3E_4\cos^2\theta_3+p^2)+Q_R m_3m_4\cos^2\theta_3 & \\
&\quad +Q_- p(E_3+E_4)\cos\theta_3]. & (4.62)
\end{aligned}$$

Und entsprechend für **Fall 2:** $\lambda_1=\lambda_1'=+\frac{1}{2},\ \lambda_2=\lambda_2'=-\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
P &= 4E_b^2[Q'_+(E_3E_4+p^2\cos^2\theta_3)+Q'_R m_3m_4 & \\
&\quad -Q'_- p(E_3+E_4)\cos\theta_3], & (4.63)\\
\Sigma_P^1(\tilde{\chi}_i^0) &= -4E_b^2\sin\theta_3[Q'_+E_4m_3+Q'_RE_3m_4-Q'_-pm_3\cos\theta_3], & (4.64)\\
\Sigma_P^2(\tilde{\chi}_i^0) &= -4E_b^2\sin\theta_3 Q'_I p m_4, & (4.65)\\
\Sigma_P^3(\tilde{\chi}_i^0) &= -4E_b^2[Q'_-(pE_4+pE_3\cos^2\theta_3) & \\
&\quad -(Q'_+(E_3E_4+p^2)+Q'_R m_3m_4)\cos\theta_3], & (4.66)\\
\Sigma_P^1(\tilde{\chi}_j^0) &= 4E_b^2\sin\theta_3[Q'_+E_3m_4+Q'_RE_4m_3-Q'_-pm_4\cos\theta_3], & (4.67)\\
\Sigma_P^2(\tilde{\chi}_j^0) &= -4E_b^2\sin\theta_3 Q'_I p m_3, & (4.68)\\
\Sigma_P^3(\tilde{\chi}_j^0) &= 4E_b^2[Q'_-(pE_3+pE_4\cos^2\theta_3) & \\
&\quad -(Q'_+(E_3E_4+p^2)+Q'_R m_3m_4)\cos\theta_3], & (4.69)\\
\Sigma_P^{11}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0) &= -4E_b^2\sin^2\theta_3[Q'_+m_3m_4+Q'_RE_3E_4], & (4.70)\\
\Sigma_P^{21}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0) &= -4E_b^2\sin^2\theta_3 Q'_I pE_4, & (4.71)\\
\Sigma_P^{12}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0) &= 4E_b^2\sin^2\theta_3 Q'_I pE_3, & (4.72)\\
\Sigma_P^{22}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0) &= -4E_b^2\sin^2\theta_3 Q'_R p^2, & (4.73)\\
\Sigma_P^{13}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0) &= -4E_b^2\sin\theta_3[Q'_-pm_3-(Q'_+E_4m_3+Q'_RE_3m_4)\cos\theta_3], & (4.74)\\
\Sigma_P^{31}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0) &= -4E_b^2\sin\theta_3[Q'_-pm_4-(Q'_+E_3m_4+Q'_RE_4m_3)\cos\theta_3], & (4.75)\\
\Sigma_P^{23}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0) &= 4E_b^2\sin\theta_3\cos\theta_3 Q'_I p m_4, & (4.76)\\
\Sigma_P^{32}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0) &= -4E_b^2\sin\theta_3\cos\theta_3 Q'_I p m_3, & (4.77)\\
\Sigma_P^{33}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0) &= -4E_b^2[Q'_+(E_3E_4\cos^2\theta_3+p^2)+Q'_R m_3m_4\cos^2\theta_3 & \\
&\quad -Q'_- p(E_3+E_4)\cos\theta_3]. & (4.78)
\end{aligned}$$

Betrachtet man diese Ausdrücke, so stellt man fest, daß in beiden Fällen folgende Relationen zwischen den Termen bestehen:

- Aus $\Sigma_P^1(\tilde{\chi}_i^0)$, $\Sigma_P^3(\tilde{\chi}_i^0)$ erhält man $\Sigma_P^1(\tilde{\chi}_j^0)$ bzw. $\Sigma_P^3(\tilde{\chi}_j^0)$ durch die Vertauschungen
  $m_3 \leftrightarrow m_4,\ \ E_3 \leftrightarrow E_4$
  und einen Vorzeichenwechsel des gesamten Ausdrucks.
- Aus $\Sigma_P^2(\tilde{\chi}_i^0)$ erhält man Aus $\Sigma_P^2(\tilde{\chi}_j^0)$ durch die Vertauschung
  $m_3 \leftrightarrow m_4,$
  und Beibehalten des Vorzeichens.
- Aus $\Sigma_P^{13}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0)$ bekommt man $\Sigma_P^{31}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0)$ wiederum durch die Vertauschungen
  $m_3 \leftrightarrow m_4,\ \ E_3 \leftrightarrow E_4,$
  und Beibehalten des Vorzeichens.
- Aus $\Sigma_P^{12}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0)$, $\Sigma_P^{23}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0)$ erhält man $\Sigma_P^{21}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0)$ bzw. $\Sigma_P^{32}(\tilde{\chi}_i^0,\tilde{\chi}_j^0)$ durch die Vertauschungen
  $m_3 \leftrightarrow m_4,\ \ E_3 \leftrightarrow E_4$
  und einen Vorzeichenwechsel des gesamten Ausdrucks.

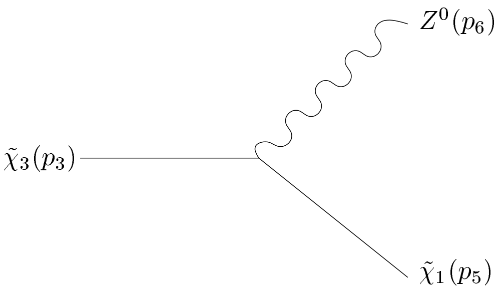
Die hier vorgestellten Ergebnisse können - bei gleicher Wahl des Koordinatensystems und unter Verwendung der relevanten verallgemeinerten Ladungen $Q'^{ij}_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = L, R$ - auch auf andere Prozesse übertragen werden, falls sich die Produktionsamplituden durch Fierztransformation ebenfalls auf die Form (4.14) bringen lassen. Dies ist z.B. für den Prozeß $e^+ + e^- \to \tilde{\chi}_i^- + \tilde{\chi}_j^+$, $i, j = 1, 2$ der Fall [30]. Mit den Helizitätsamplituden (4.19) - (4.26) können auch die für den Fall transversaler Strahlpolarisation relevanten Produktionsdichtematrixelemente, z.B. $\rho_{P-+,+-}^{\lambda_i\lambda_j,\lambda'_i\lambda'_j} = T_{P-+}^{\lambda_i\lambda_j} T_{P+-}^{\lambda'_i\lambda'_j *}$, berechnet werden.

4.2 Der Zerfall des zweitschwersten Neutralinos

Betrachten wir nun den Zweikörperzerfall des zweitschwersten Neutralinos

$$\tilde{\chi}_3^0(p_3) \to \tilde{\chi}_1^0(p_5) + Z^0(p_6). \tag{4.79}$$

Aus dem entsprechenden Feynmandiagramm



erhält man mit der Lagrangedichte (4.3) die Zerfallsamplitude:

$$T_{D\lambda_i}^{\lambda_k} = \frac{g}{\cos\theta_W} \bar{u}(\tilde{\chi}_1^0)\gamma^\mu [O''^L_{31} P_L + O''^R_{31} P_R] u_{\lambda_i}(\tilde{\chi}_3^0) \varepsilon_\mu^{*\lambda_k}. \tag{4.80}$$

Dabei wurde die Helizität des entstehenden $\tilde{\chi}_1^0$ unterdrückt, da über diesen nicht beobachteten Freiheitsgrad summiert wird, während die Helizität des Z-Bosons explizit aufgeführt wird. Erst bei der Berechnung des Wirkungsquerschnitts wird darüber summiert. Die Zerfallsdichtematrix ergibt sich somit zu:

$$\begin{aligned}
\rho_{D\lambda_i\lambda'_i}^{\lambda_k\lambda'_k} &= T_{D\lambda_i}^{\lambda_k} T_{D\lambda'_i}^{\lambda'_k *} \qquad (4.81)\\
&= \frac{g^2}{\cos^2\theta_W} \bar{u}(\tilde{\chi}_1^0)\gamma^\mu [O''^L_{31} P_L + O''^R_{31} P_R]\\
&\quad \cdot u_{\lambda_i}(\tilde{\chi}_3^0) \bar{u}_{\lambda'_i}(\tilde{\chi}_3^0)\gamma^\nu [O''^{L*}_{31} P_L + O''^{R*}_{31} P_R] u(\tilde{\chi}_1^0) \varepsilon_\mu^{*\lambda_k} \varepsilon_\nu^{\lambda'_k}\\
&= \frac{g^2}{\cos^2\theta_W} \mathrm{Tr}\{(\not{p}_5 + m_5)\gamma^\mu [O''^L_{31} P_L + O''^R_{31} P_R]\\
&\quad \cdot \frac{1}{2}[\delta_{\lambda'_i\lambda_i} + \gamma^5 \not{s}_3^a \sigma_{\lambda'_i\lambda_i}](\not{p}_3 + m_3)\gamma^\nu [O''^{L*}_{31} P_L + O''^{R*}_{31} P_R]\} \varepsilon_\mu^{*\lambda_k} \varepsilon_\nu^{\lambda'_k}.
\end{aligned}$$

Die Zerfalls-Dichtematrix wird wiederum nach den Paulimatrizen entwickelt:

$$\rho_{D\lambda_i\lambda'_i}^{\lambda_k\lambda'_k} = \delta_{\lambda'_i\lambda_i} D^{\lambda_k\lambda'_k}(\tilde{\chi}_3^0) + \sum_a \sigma^a_{\lambda'_i\lambda_i} \Sigma_D^{a\lambda_k\lambda'_k}(\tilde{\chi}_3^0), \tag{4.82}$$

wobei $D^{\lambda_k\lambda'_k}(\tilde{\chi}_3^0)$ und $\Sigma_D^{a\lambda_k\lambda'_k}(\tilde{\chi}_3^0)$ gegeben sind durch:

$$
\begin{aligned}
D^{\lambda_k\lambda'_k}(\tilde{\chi}^0_3) &= \frac{g^2}{\cos^2\theta_W} 2\{|O''^L_{31}|^2 \cdot [(p_3\cdot\varepsilon^{*\lambda_k})\cdot(p_3\cdot\varepsilon^{\lambda'_k}) + (p_3\cdot p_3 - p_3\cdot p_6)\delta_{\lambda_k\lambda'_k}] \\
&\quad + \delta_{\lambda_k\lambda'_k} m_3 m_5 (\mathrm{Re}^2(O''^L_{31}) - \mathrm{Im}^2(O''^L_{31}))\} \qquad (4.83)\\
\Sigma^{a\lambda_k\lambda'_k}_D(\tilde{\chi}^0_3) &= \frac{g^2}{\cos^2\theta_W} 2i\{-m_3\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{*\lambda_k}_\mu \varepsilon^{\lambda'_k}_\nu (p_3-p_6)_\rho s^a_{3\sigma}\cdot|O''^L_{31}|^2 \\
&\quad - m_5\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{*\lambda_k}_\mu\varepsilon^{\lambda'_k}_\nu p_{3\rho}s^a_{3\sigma}\cdot(\mathrm{Re}^2(O''^L_{31}) - \mathrm{Im}^2(O''^L_{31})) \\
&\quad + 2m_5\mathrm{Re}(O''^L_{31})\mathrm{Im}(O''^L_{31})[(s^a_3\cdot\varepsilon^{*\lambda_k})(p_3\cdot\varepsilon^{\lambda'_k}) \\
&\quad - (p_3\cdot\varepsilon^{*\lambda_k})(s^a_3\cdot\varepsilon^{\lambda'_k})]\}. \qquad (4.84)
\end{aligned}
$$

Dabei wurden folgende Beziehungen verwendet:

$$
\begin{aligned}
p^\mu_5 &= p^\mu_3 - p^\mu_6 \qquad (4.85)\\
(p_6\cdot\varepsilon^{\lambda_k(')}) &= 0 \qquad (4.86)\\
(p_3\cdot s^a_3) &= 0 \qquad (4.87)\\
(\varepsilon^{\lambda_k}\cdot\varepsilon^{*\lambda'_k}) &= -\delta_{\lambda_k\lambda'_k}. \qquad (4.88)
\end{aligned}
$$

Führen wir die Summation über $\lambda_k = \lambda'_k$ durch, so erkennen wir, daß der Term $\Sigma^a_D(\tilde{\chi}^0_3)$ verschwindet. Daher treten - im Gegensatz zu Dreikörperzerfällen (vgl. [21],[22]) - für den betrachteten Zweikörperzerfall im Wirkungsquerschnitt keine Spinkorrelationen zwischen Produktion und Zerfall des Neutralinos $\tilde{\chi}^0_3$ auf. Der Wirkungsquerschnitt faktorisiert also in $P\cdot D$ und die Zerfallsdichtematrix reduziert sich nach Summation über die Z-Helizität auf

$$
\rho_{D\lambda_i\lambda'_i} = \delta_{\lambda'_i\lambda_i} D(\tilde{\chi}^0_3), \qquad (4.89)
$$

mit

$$
\begin{aligned}
D(\tilde{\chi}^0_3) = \frac{g^2}{\cos^2\theta_W} 2\{|O''^L_{31}|^2 \cdot [\sum_{\lambda_k}(p_3\cdot\varepsilon^{*\lambda_k})\cdot(p_3\cdot\varepsilon^{\lambda_k}) + 3(p_3\cdot p_3 - p_3\cdot p_6)] \\
+ 3m_3m_5(\mathrm{Re}^2(O''^L_{31}) - \mathrm{Im}^2(O''^L_{31}))\}. \qquad (4.90)
\end{aligned}
$$

4.3 Der Gesamtprozeß

In Kap. 2.6 hatten wir gesehen, daß das Amplitudenbetragsquadrat für den Gesamtprozeß $e^- + e^+ \to \tilde{\chi}^0_i + \tilde{\chi}^0_j$ mit anschliessenden Zerfall beider Neutralinos allgemein die folgende Form hat:

$$
|T|^2 = |\Delta(\tilde{\chi}^0_i)|^2|\Delta(\tilde{\chi}^0_j)|^2\rho(e^-)_{\lambda_1\lambda'_1}\rho(e^+)_{\lambda_2\lambda'_2}\rho^{\lambda_i\lambda_j,\lambda'_i\lambda'_j}_{P\lambda_1\lambda_2,\lambda'_1\lambda'_2}\rho_{D\lambda'_i\lambda_i}\rho_{D\lambda'_j\lambda_j}. \qquad (4.91)
$$

Für die Berechnung des Wirkungsquerschnitts des betrachteten Prozesses, der sich aus der Produktion $e^- + e^+ \to \tilde{\chi}^0_3 + \tilde{\chi}^0_1$ mit longitudinaler Strahlpolarisation und dem Zerfall $\tilde{\chi}^0_3 \to Z^0 + \tilde{\chi}^0_1$ zusammensetzt, benötigen wir also folgende Terme:

- $\rho(e^-)_{\lambda_1\lambda'_1} = \frac{1}{2}(1+P^3_1\sigma^3)_{\lambda_1\lambda'_1}$ und $\rho(e^+)_{\lambda_2\lambda'_2} = \frac{1}{2}(1+P^3_2\sigma^3)_{\lambda_2\lambda'_2}$ zur Beschreibung der Strahlpolarisation,
- die Spin-Dichtematrix der Produktion $\rho^{\lambda_i\lambda_j,\lambda'_i\lambda'_j}_{P\lambda_1\lambda_2,\lambda'_1\lambda'_2}$, mit $\lambda_1 = \lambda'_1 = \pm\frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = \lambda'_2 = \mp\frac{1}{2}$,

- die Zerfallsdichtematrix $\rho_{D\lambda_i\lambda_i'}(\tilde{\chi}_3^0)$ sowie den Pseudopropagator $\Delta(\tilde{\chi}_3^0)$ des zerfallenden Teilchens;
- da das zweite Neutralino nicht zerfällt, fällt dessen Pseudopropagator $\Delta(\tilde{\chi}_j^0), j = 1$ aus der Amplitude heraus und für dessen Zerfallsdichtematrix kann $\rho_{D\lambda_j\lambda_j'}(\tilde{\chi}_1^0) = \delta_{\lambda_j\lambda_j'}$ gesetzt werden.

Somit erhalten wir $|T|^2$ zu:

$$\begin{aligned} |T|^2 &= |\Delta(\tilde{\chi}_3^0)|^2\{(1+P_1^3)(1-P_2^3)P_{+-,+-}D(\tilde{\chi}_3^0) + (1-P_1^3)(1+P_2^3)P_{-+,-+}D(\tilde{\chi}_3^0))\} \\ &= |\Delta(\tilde{\chi}_3^0)|^2\{(1-P_1^3P_2^3)[(P_{+-,+-}+P_{-+,-+})D(\tilde{\chi}_3^0)] \\ &\qquad +(P_1^3-P_2^3)[(P_{+-,+-}-P_{-+,-+})D(\tilde{\chi}_3^0)]\}. \end{aligned} \tag{4.92}$$

Wird die Zerfallwinkelverteilung des Z-Bosons gemessen (dies wurde beispielsweise in [31] für W-Bosonen durchgeführt), so können eventuell aus der Polarisation des entstehenden Z-Bosons zusätzliche Informationen gewonnen werden. Die Polarisationseigenschaften des Z-Bosons gehen über dessen Dichtematrixelemente $\rho^{\lambda_k\lambda_k'}$ in die Zerfallwinkelverteilung ein. Daher sollen auch diese Dichtematrixelemente als Funktion des Winkels θ_{16} zwischen dem Z-Boson und dem einlaufenden Elektron numerisch ausgewertet werden. Man erhält sie aus

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^{\lambda_k\lambda_k'} &= |\Delta(\tilde{\chi}_3^0)|^2\{(1+P_1^3)(1-P_2^3)[P_{+-,+-}D^{\lambda_k\lambda_k'}(\tilde{\chi}_3^0) + \Sigma^a_{P+-,+-}\Sigma_D^{a\lambda_k\lambda_k'}(\tilde{\chi}_3^0)] \\ &\qquad +(1-P_1^3)(1+P_2^3)[P_{-+,-+}D^{\lambda_k\lambda_k'}(\tilde{\chi}_3^0) + \Sigma^a_{P-+,-+}\Sigma_D^{a\lambda_k\lambda_k'}(\tilde{\chi}_3^0)]\} \\ &= |\Delta(\tilde{\chi}_3^0)|^2\{(1-P_1^3P_2^3)[(P_{+-,+-}+P_{-+,-+})D^{\lambda_k\lambda_k'}(\tilde{\chi}_3^0) \\ &\qquad\qquad +(\Sigma^a_{P+-,+-}+\Sigma^a_{P-+,-+})\Sigma_D^{a\lambda_k\lambda_k'}(\tilde{\chi}_3^0)] \\ &\qquad +(P_1^3-P_2^3)[(P_{+-,+-}-P_{-+,-+})D^{\lambda_k\lambda_k'}(\tilde{\chi}_3^0) \\ &\qquad\qquad +(\Sigma^a_{P+-,+-}-\Sigma^a_{P-+,-+})\Sigma_D^{a\lambda_k\lambda_k'}(\tilde{\chi}_3^0)]\}. \end{aligned} \tag{4.93}$$

nach Ausintegration der nicht beobachteten Freiheitsgrade (vgl. Kap. 5). Um zu entscheiden, welche Dichtematrixelemente des Z-Bosons berechnet werden sollen, betrachten wir zunächst die Symmetrieeigenschaften der Zerfallsdichtematrix $\rho_D^{\lambda_k\lambda_k'}$.

- Dabei finden wir für die $D^{\lambda_k\lambda_k'}$-Terme:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(D^{+1,+1}) &= \mathrm{Re}(D^{-1,-1}), \\ \mathrm{Im}(D^{+1,+1}) &= \mathrm{Im}(D^{-1,-1}) = 0, \\ \mathrm{Re}(D^{+1,0}) &= \mathrm{Re}(D^{0,+1}) = -\mathrm{Re}(D^{-1,0}) = -\mathrm{Re}(D^{0,-1}), \\ \mathrm{Im}(D^{+1,0}) &= -\mathrm{Im}(D^{0,+1}) = \mathrm{Im}(D^{-1,0}) = -\mathrm{Im}(D^{0,-1}), \\ D^{+1,-1} &= D^{-1,+1}. \end{aligned} \tag{4.94}$$

- Sowie für die $\Sigma_D^{a\lambda_k\lambda_k'}$-Terme:

$$\begin{aligned} \Sigma_D^{a\,+1,-1} &= \Sigma_D^{a\,-1,+1} = \Sigma_D^{a\,0,0} = 0, \\ \mathrm{Re}(\Sigma_D^{a\,+1,+1}) &= -\mathrm{Re}(\Sigma_D^{a\,-1,-1}), \\ \mathrm{Im}(\Sigma_D^{a\,+1,+1}) &= \mathrm{Im}(\Sigma_D^{a\,-1,-1}) = 0, \\ \mathrm{Re}(\Sigma_D^{a\,+1,0}) &= \mathrm{Re}(\Sigma_D^{a\,0,+1}) = \mathrm{Re}(\Sigma_D^{a\,-1,0}) = \mathrm{Re}(\Sigma_D^{a\,0,-1}), \\ \mathrm{Im}(\Sigma_D^{a\,+1,0}) &= -\mathrm{Im}(\Sigma_D^{a\,-1,-1}) = -\mathrm{Im}(\Sigma_D^{a\,-1,0}) = \mathrm{Im}(\Sigma_D^{a\,0,-1}). \end{aligned} \tag{4.95}$$

Daraus ergeben sich zunächst folgende analytische Relationen:

$$\mathrm{Re}(\rho^{+1,0}) = \mathrm{Re}(\rho^{0,+1}), \tag{4.96}$$
$$\mathrm{Re}(\rho^{-1,0}) = \mathrm{Re}(\rho^{0,-1}), \tag{4.97}$$
$$\mathrm{Im}(\rho^{+1,0}) = -\mathrm{Im}(\rho^{0,+1}), \tag{4.98}$$
$$\mathrm{Im}(\rho^{-1,0}) = -\mathrm{Im}(\rho^{0,-1}). \tag{4.99}$$

Darüber hinaus können wir den Umstand, daß die Beiträge der $D^{\lambda_k \lambda'_k}$-Terme für $\lambda_k \neq \lambda'_k$ sehr klein sind, ausnutzen:

- Die Unterschiede zwischen den Dichtematrixelementen in (4.96) und (4.97) bzw. (4.98) und (4.99) sind recht gering, denn diese unterscheiden sich lediglich durch das Vorzeichen der dazu beitragenden D-Terme.
- Die Dichtematrixelemente $\rho^{+1,-1}$ und $\rho^{-1,+1}$, deren Σ-Beiträge exakt Null sind, sind vernachlässigbar klein.

Außerdem hat die numerische Auswertung ergeben, daß die Dichtematrixelemente $\rho^{+1,+1}$ und $\rho^{-1,-1}$, gegen $\cos\theta_{16}$ aufgetragen, spiegelsymmetrisch um $\cos\theta_{16} = 0$ sind.

Um einen Überblick über das Verhalten der Dichtematrixelemente des Z-Bosons bei Variation der Phasen von μ und M_1 zu erhalten, ist es daher ausreichend, die Elemente $\rho^{+1,+1}$, $\rho^{0,0}$ und $\mathrm{Re}(\rho^{+1,0})$, $\mathrm{Im}(\rho^{+1,0})$ zu betrachten.

Kapitel 5

Wirkungsquerschnitt und Phasenraum

Der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma$ für einen Prozeß, bei dem zwei einlaufende Teilchen $1, 2$ in einen Endzustand übergehen, der die drei Teilchen $4, 5, 6$ enthält, ergibt sich zu [4]:

$$d\sigma = \frac{1}{2\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_1^2, m_2^2)} |T|^2 dlips(s, p_4, p_5, p_6). \tag{5.1}$$

Dabei wurde die Nummerierung der Teilchen bereits so gewählt, daß sie mit der zuvor verwendeten übereinstimmt. Im differentiellen Wirkungsquerschnitt sind enthalten:

- Die kinematische Dreiecksfunktion $\lambda(s, m_1^2, m_2^2)$, in die außer den Massen der einlaufenden Teilchen die *effektive Masse*, d.h. die Mandelstam-Variable $s = (p_1 + p_2)^2$, des Prozesses eingeht. Da Elektron und Positron als masselos betrachtet werden, ist in unserem Fall $\lambda^{\frac{1}{2}}(s, 0, 0) = s = 4E_b^2$.
- Das Amplitudenbetragsquadrat $|T|^2$ des Prozeßes, hier also

$$\begin{aligned} |T|^2 &= |\Delta(\tilde{\chi}_3^0)|^2 \{(1 - P_1^3 P_2^3)[(P_{+-,+-} + P_{-+,-+})D(\tilde{\chi}_3^0)] \\ &\quad + (P_1^3 - P_2^3)[(P_{+-,+-} - P_{-+,-+})D(\tilde{\chi}_3^0)]\}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

- sowie das lorentzinvariante Phasenraumelement

$$dlips(s, p_4, p_5, p_6) = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_4 - p_5 - p_6) dlips(p_4, p_5, p_6). \tag{5.3}$$

  Dabei bezeichnet $p_i = p_1 + p_2$ den gesamten Viererimpuls des Anfangszustandes. Das eigentliche Phasenraumelement $dlips(p_4, p_5, p_6)$ ist gegeben durch:

$$dlips(p_4, p_5, p_6) = \frac{d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \cdot \frac{d^3\vec{p}_5}{(2\pi)^3 2E_5} \cdot \frac{d^3\vec{p}_6}{(2\pi)^3 2E_6}, \tag{5.4}$$

  mit $E_N = \sqrt{m_N^2 + p_N^2}$.

Zunächst wollen wir den lorentzinvarianten Phasenraum in einen Produktions- und einen Zerfallsanteil faktorisieren. Dazu führen wir als Hilfsteilchen das zerfallende Neutalino $\tilde{\chi}_3^0$ mit Impuls p_3 ein, indem wir in $dlips(s, p_4, p_5, p_6)$ eine 1 in Form von

$$1 = \int d^4 p_3 \delta^4(p_3 - p_5 - p_6) \tag{5.5}$$

einfügen:

$$\begin{aligned}
dlips(s,p_4,p_5,p_6) &= dlips(s,p_4,p_5,p_6)d^4p_3\delta^4(p_3-p_5-p_6) \\
&= (2\pi)^4\delta^4(p_i-p_4-p_5-p_6)\delta^4(p_3-p_5-p_6)d^4p_3 dlips(p_4,p_5,p_6) \\
&= (2\pi)^4\delta^4(p_i-p_4-p_3)\delta^4(p_3-p_5-p_6)d^4p_3 dlips(p_4,p_5,p_6). \quad (5.6)
\end{aligned}$$

Dies lässt sich weiter umformen mit [25]:

$$\begin{aligned}
dlips(p_4,p_5,p_6) &= dlips(p_4)dlips(p_5,p_6), \quad (5.7)\\
dlips(s_3,p_5,p_6) &= (2\pi)^4\delta^4(p_3-p_5-p_6)dlips(p_5,p_6), \quad (5.8)
\end{aligned}$$

wobei die effektive Masse $s_3 = p_3^2$ des Neutralinos $\tilde{\chi}_3^0$ eingeführt wurde. Damit erhält man

$$dlips(s,p_4,p_5,p_6) = \delta^4(p_i-p_4-p_3)d^4p_3 dlips(p_4)dlips(s_3,p_5,p_6). \quad (5.9)$$

Nun wird wiederum $1 = \int \delta(p_3^2 - s_3)ds_3$ eingefügt, mit

$$d^4p_3 = \int d^4p_3\delta(p_3^2-s_3)ds_3 = \frac{d^3\vec{p}_3}{2E_3}ds_3 = (2\pi)^3 dlips(p_3)ds_3, \quad (5.10)$$

wobei über p_3^0 integriert wurde. E_3 ist dabei zunächst gegeben durch $E_3 = \sqrt{s_3 + |\vec{p}_3|^2}$, durch die Integration über s_3 (siehe unten) wird daraus $E_3 = \sqrt{m_3^2 + |\vec{p}_3|^2}$.
Somit gelangt man zu:

$$\begin{aligned}
dlips(s,p_4,p_5,p_6) &= \delta^4(p_i-p_4-p_3)(2\pi)^3 dlips(p_3)dlips(p_4)ds_3 dlips(s_3,p_5,p_6) \\
&= \frac{1}{2\pi}dlips(s,p_3,p_4)ds_3 dlips(s_3,p_5,p_6). \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Dies ist die angestrebte Faktorisierung in

- den 'Produktionsphasenraum' $d^P lips = dlips(s,p_3,p_4)$ und
- den 'Zerfallsphasenraum' $d^D lips = dlips(s_3,p_5,p_6)$.

Nun erfolgt die Integration über s_3, wobei für das Betragsquadrat des Pseudopropagators von $\tilde{\chi}_3^0$ die 'Narrow-Width'-Näherung (siehe [22],[27]) verwendet wird:

$$|\Delta(\tilde{\chi}_3^0)|^2 = \frac{1}{(s_3-m_3^2)^2 + m_3^2\Gamma_3^2} \approx \frac{\pi}{m_3\Gamma_3}\delta(s_3-m_3^2) \quad (5.12)$$

$$\Rightarrow \int \frac{ds_3}{(s_3-m_3^2)^2+m_3^2\Gamma_3^2} = \int ds_3 \frac{\pi\delta(s_3-m_3^2)}{m_3\Gamma_3} = \frac{\pi}{m_3\Gamma_3}. \quad (5.13)$$

Dadurch wurde das Teilchen 'on-shell' gesetzt: $s_3 = p_3^2 = m_3^2$.

Wenden wir uns zuerst dem **Produktionsphasenraum** zu:

$$\begin{aligned}
d^P lips &= dlips(s,p_3,p_4) = (2\pi)^4\delta^4(p_i-p_3-p_4)\frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3}\cdot\frac{d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\delta(2E_b-E_3-E_4)\delta^3(\vec{p}_3+\vec{p}_4)\frac{d^3\vec{p}_3}{2E_3}\frac{d^3\vec{p}_4}{2E_4}. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde der Übergang zum CMS vollzogen. Nun wird über $\vec{p}_4$ integriert:

$$d^P lips = \frac{1}{(2\pi)^2}\delta(2E_b-E_3-E_4)\frac{d^3\vec{p}_3}{2E_3 2E_4}, \quad (5.15)$$

wobei

$$d^3\vec{p}_3 = |\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3| d\Omega_3 = |\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3| \sin\theta_3 d\theta_3 d\phi_3. \tag{5.16}$$

Mit die Gesamtenergie E der produzierten Teilchen

$$E = E_3 + E_4 = \sqrt{m_3^2 + |\vec{p}_3|^2} + \sqrt{m_4^2 + |\vec{p}_3|^2} \tag{5.17}$$

wird nun eine Variablensubstitution durchgeführt:

$$\frac{|\vec{p}_3|^2}{2E_3 2E_4} d|\vec{p}_3| = \frac{|\vec{p}_3|}{4E} dE \tag{5.18}$$

und somit

$$d^P lips = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(2E_b - E) \frac{|\vec{p}_3|}{4E} dE \sin\theta_3 d\theta_3 d\phi_3. \tag{5.19}$$

Nach Integration über den in der Amplitude nicht explizit auftauchenden Winkel ϕ_3 und über E gelangt man zu:

$$d^P lips = \frac{1}{2\pi} \frac{|\vec{p}_3|}{8E_b} \sin\theta_3 d\theta_3. \tag{5.20}$$

setzt man noch

$$\begin{aligned} |\vec{p}_3| &= \frac{\sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}}{2\sqrt{s}} \quad \text{und} && (5.21) \\ 8E_b &= 4\sqrt{s}, && (5.22) \end{aligned}$$

so erhält man als Endresultat für den Produktionsphasenraum:

$$d^P lips = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}}{2\sqrt{s} \cdot 4\sqrt{s}} \sin\theta_3 d\theta_3. \tag{5.23}$$

Betrachten wir nun den **Zerfallsphasenraum**:

$$\begin{aligned} d^D lips &= dlips(s_3, p_5, p_6) = (2\pi)^4 \delta^4(p_3 - p_5 - p_6) \frac{d^3\vec{p}_5}{(2\pi)^3 2E_5} \frac{d^3\vec{p}_6}{(2\pi)^3 2E_6} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(E_3 - E_5 - E_6) \frac{|\vec{p}_6|^2 d|\vec{p}_6| d\Omega_6}{2E_5 2E_6} && (5.24) \end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt bereits über den Impuls des nicht beobachteten LSP $\tilde{\chi}_1^0(p_5)$ integriert. Für $\vec{p}_5$ ist daher

$$\vec{p}_5 = \vec{p}_3 - \vec{p}_6 \tag{5.25}$$

zu setzen. Dadurch ist das Argument der Energie-Deltafunktion eine Funktion $f(|\vec{p}_6|)$ (θ_{36} ist der Winkel zwischen $\vec{p}_3$ und $\vec{p}_6$):

$$\begin{aligned} f(|\vec{p}_6|) &= E_3 - E_5 - E_6 \\ &= E_3 - \sqrt{m_5 + |\vec{p}_5|^2} - \sqrt{m_6 + |\vec{p}_6|^2} \\ &= E_3 - \sqrt{m_5 + |\vec{p}_3| + |\vec{p}_6|^2 - 2|\vec{p}_3||\vec{p}_6| \cos\theta_{36}} - \sqrt{m_6 + |\vec{p}_6|^2}. && (5.26) \end{aligned}$$

Bei der Integration über $|\vec{p}_6|$ muß folgende Beziehung verwendet werden:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i^0)}{|f'(x_i^0)|}, \tag{5.27}$$

wobei x_i^0 die Nullstellen der Funktion $f(x)$ sind. Die Nullstellen der zu betrachtenden Funktion $f(|\vec{p}_6|)$ werden mit $|\vec{p}_6^{\pm}|$ bezeichnet und ergeben sich zu:

$$|\vec{p}_6^{\pm}| = \frac{(m_3^2+m_6^2-m_5^2)|\vec{p}_3|\cos\theta_{36} \pm \sqrt{|\vec{p}_3|^2+m_3^2}\sqrt{\lambda(m_3^2,m_5^2,m_6^2)-4m_6^2|\vec{p}_3|^2\sin^2\theta_{36}}}{2(m_3^2+|\vec{p}_3|^2\sin^2\theta_{36})}. \tag{5.28}$$

Da der Radikant dieser Lösungen nicht negativ sein darf, erhält man eine von $|\vec{p}_3|$ abhängige obere Grenze für $\sin^2\theta_{36}$:

$$\sin^2\theta_{36}^{max} = \frac{\lambda(m_3^2,m_5^2,m_6^2)}{4m_6^2|\vec{p}_3|^2}, \tag{5.29}$$

bzw. mit $|\vec{p}_3| = \frac{\sqrt{\lambda(s,m_3^2,m_4^2)}}{2\sqrt{s}}$:

$$\sin^2\theta_{36}^{max} = \frac{s}{m_6^2}\frac{\lambda(m_3^2,m_5^2,m_6^2)}{\lambda(s,m_3^2,m_4^2)}. \tag{5.30}$$

Setzt man nun $\sin^2\theta_{36}^{max} = 1$ sowie $m_3 = m(\tilde{\chi}_3^0),\ m_4 = m_5 = m(\tilde{\chi}_1^0),\ m_6 = m_Z$, so erhält man für den betrachteten Prozeß eine Schranke $\sqrt{s_0}$ für die Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$:

$$\sqrt{s_0} = \frac{m^2(\tilde{\chi}_3^0)-m^2(\tilde{\chi}_1^0)}{m_Z}. \tag{5.31}$$

Für $\sqrt{s} > \sqrt{s_0}$ ist zu beachten:

- Der Winkel θ_{36} darf nur die Werte $[0,\theta_{36}^{max}]$ annehmen, mit θ_{36}^{max} aus (5.29) .
- Beide Lösungen $|\vec{p}_6^{\pm}|$ sind physikalisch relevant und gehen in den Zerfallsphasenraum ein.

Bei den betrachteten Szenarien ist jedoch für eine Schwerpunktsenergie von 500 GeV stets der Fall $\sqrt{s} < \sqrt{s_0}$ realisiert; daher

- durchläuft der Polarwinkel θ_{36} den vollen Bereich $[0,\pi]$,
- ist nur die Lösung $|\vec{p}_6^{+}|$ relevant, da in diesem Fall $|\vec{p}_6^{-}|$ für alle θ_{36} negativ und somit unphysikalisch ist.

Für (5.27) benötigen wir noch die Ableitung von $f(|\vec{p}_6|)$ nach $|\vec{p}_6|$:

$$f'(|\vec{p}_6|) = \frac{E_6|\vec{p}_3|\cos\theta_{36} - E_3|\vec{p}_6|}{E_5E_6}. \tag{5.32}$$

Damit ergibt sich der Zerfallsphasenraum im Fall $\sqrt{s} > \sqrt{s_0}$ zu:

$$\begin{aligned} d^D lips &= \frac{1}{(2\pi)^2}\delta(f(|\vec{p}_6|))\frac{|\vec{p}_6|^2 d|\vec{p}_6| d\Omega_6}{2E_5 2E_6} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}d\Omega_6\frac{1}{4}\sum_{\pm}\frac{|\vec{p}_6^{\pm}|^2}{|E_6^{\pm}|\vec{p}_3|\cos\theta_{36}-E_3|\vec{p}_6^{\pm}||}, \end{aligned} \tag{5.33}$$

mit $E_6^{\pm} = m_6^2 + |\vec{p}_6^{\pm}|^2$.
Für $\sqrt{s} < \sqrt{s_0}$ erhält man entsprechend

$$\begin{aligned} d^D lips &= \frac{1}{(2\pi)^2}\delta(f(|\vec{p}_6|))\frac{|\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_6| d\Omega_6}{2E_5 2E_6} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}d\Omega_6\frac{1}{4}\frac{|\vec{p}_6^{+}|^2}{|E_6^{+}|\vec{p}_3|\cos\theta_{36}-E_3|\vec{p}_6^{+}||}. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Das darin enthaltene Raumwinkelelement $d\Omega_6$ wird so gewählt, daß es die dem Experiment zugänglichen Winkel θ_{16}, ϕ_{16} zwischen dem einlaufenden Elektron und dem im Zerfall entstehenden Z-Boson enthält. Die in der Zerfallsdichtematrix implizit enthaltenen Winkel θ_{36}, ϕ_{36} werden mit Hilfe der Sphärischen Trigonometrie [26] durch θ_{16} und ϕ_{16} ausgedrückt.

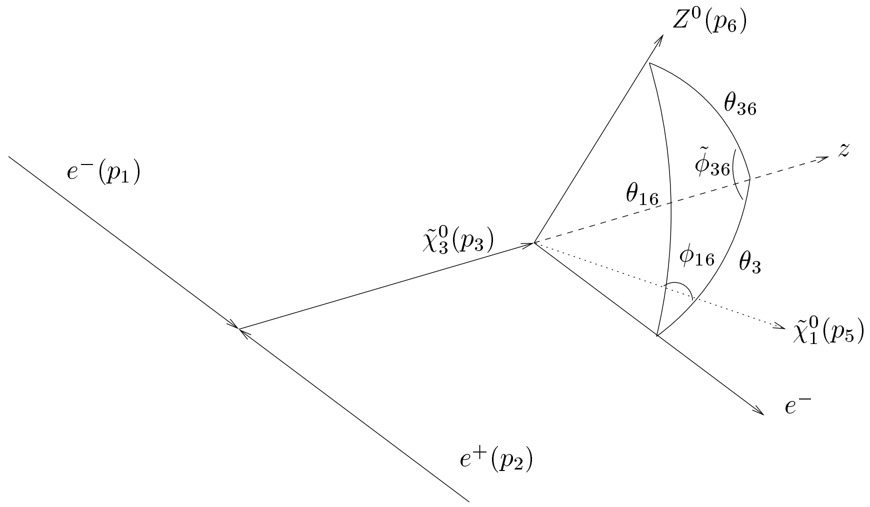


Abbildung 5.1: Definitionen der Impulse und Winkel im Laborsystem.

Dazu benötigen wir den **Seitencosinussatz**:

$$\cos\theta_{36} = \cos\theta_{16}\cos\theta_3 + \sin\theta_{16}\sin\theta_3\cos\phi_{16}, \tag{5.35}$$

sowie den **Sinussatz**:

$$\sin\tilde{\phi}_{36} = \sin\theta_{16}\frac{\sin\phi_{16}}{\sin\theta_{36}}, \tag{5.36}$$

mit

$$\sin\theta_{36} = +\sqrt{1-\cos^2\theta_{36}}. \tag{5.37}$$

Für den Cosinus von $\tilde{\phi}_{36}$ findet man

$$\cos\tilde{\phi}_{36} = \frac{1}{\sin\theta_{36}}[\cos\theta_{16}\sin\theta_3 - \sin\theta_{16}\cos\theta_3\cos\phi_{16}]. \tag{5.38}$$

Setzen wir noch

$$\tilde{\phi}_{36} = \pi - \phi_{36} \tag{5.39}$$

ein, so gelangen wir schließlich zu:

$$\begin{aligned}
\cos\theta_{36} &= \cos\theta_{16}\cos\theta_3 + \sin\theta_{16}\sin\theta_3\cos\phi_{16}, && (5.40)\\
\sin\phi_{36} &= \sin\theta_{16}\frac{\sin\phi_{16}}{\sin\theta_{36}}, && (5.41)\\
\cos\phi_{36} &= -\frac{1}{\sin\theta_{36}}[\cos\theta_{16}\sin\theta_3 - \sin\theta_{16}\cos\theta_3\cos\phi_{16}] && (5.42)
\end{aligned}$$

Als Endergebnis für den **differentiellen Wirkungsquerschnitt** erhalten wir somit:

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{1}{2\lambda^{\frac{1}{2}}(s,m_1^2,m_2^2)}|T|^2 dlips(s,p_4,p_5,p_6) \\
&= \frac{1}{2\lambda^{\frac{1}{2}}(s,m_1^2,m_2^2)}|M|^2 \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\sqrt{\lambda(s,m_3^2,m_4^2)}}{2\sqrt{s}\cdot 4\sqrt{s}}\sin\theta_3 d\theta_3 \frac{\pi}{m_3\Gamma_3} \\
&\quad \frac{1}{(2\pi)^2} d\Omega_6 \frac{1}{4}\frac{|\vec{p}_6^{\,+}|^2}{|E_6^+|\vec{p}_3|\cos\theta_{36} - E_3|\vec{p}_6^{\,+}||}, \\
&= \frac{1}{64(2\pi)^4 s^2}|M|^2 \frac{\pi}{m_3\Gamma_3}\frac{\sqrt{\lambda(s,m_3^2,m_4^2)}|\vec{p}_6^{\,+}|^2}{|E_6^+|\vec{p}_3|\cos\theta_{36} - E_3|\vec{p}_6^{\,+}||}\sin\theta_3 d\theta_3 d\Omega_6. \qquad (5.43)
\end{aligned}$$

Dabei wurde das modifizierte Amplitudenquadrat $|M|^2$ eingeführt, das mit $|T|^2$ bis auf den Faktor $|\Delta(\tilde{\chi}_3^0)|^2$ übereinstimmt, der aufgrund der bereits durchgeführten Integration über s_3 nicht mehr vorkommt.

Die **Dichtematrixelemente** $\rho^{\lambda_k,\lambda_k'}(\theta_{16})$ des Z-Bosons in Abhängigkeit von θ_{16} erhalten wir, indem wir das im differentiellen Wirkungsquerschnitt (5.43) vorkommende Amplitudenbetragsquadrat $|T|^2$ durch $\tilde{\rho}^{\lambda_k,\lambda_k'}$ aus (4.93) ersetzen und über θ_3 und ϕ_{16} integrieren.
Bei der numerischen Auswertung im nächsten Kapitel werden die Ergebnisse in Form der normierten Dichtematrixelemente $\rho^0_{\lambda_k,\lambda_k'}$ angegeben, die definiert sind über:

$$\rho^0_{\lambda_k,\lambda_k'} = \frac{\rho^{\lambda_k,\lambda_k'}}{\mathrm{Tr}\rho^{\lambda_k,\lambda_k'}} = \frac{\rho^{\lambda_k,\lambda_k'}}{\rho^{+1,+1}+\rho^{-1,-1}+\rho^{\,0,0}}. \qquad (5.44)$$

Kapitel 6

Numerische Ergebnisse

Unter den über 100 Parametern des MSSM befinden sich zahlreiche CP-verletzende Phasen, die jedoch unter anderem durch die experimentellen Obergrenzen der elektrischen Dipolmomente von Elektron und Neutron [13],

$$\begin{aligned} |d_e| &< 0,34 \times 10^{-26} ecm, \\ |d_n| &< 0,97 \times 10^{-25} ecm, \end{aligned} \tag{6.1}$$

eingeschränkt werden können. In früheren Untersuchungen ergaben sich zunächst starke Einschränkungen für die *einzelnen* Phasen. Demnach sollten diese Phasen kleiner als 10^{-2} sein, falls die Massenparameter des MSSM unterhalb von $1\,TeV$ liegen sollen [32]. Neuere Berechnungen weisen jedoch darauf hin, daß sich verschiedene Beiträge zu den Dipolmomenten gegenseitig aufheben können und somit selbst für relativ leichte supersymmetrische Partnerteilchen Phasen von der Größenordnung $O(1)$ nicht ausgeschlossen sind [33]. Bei den durchgeführten numerischen Berechnungen sollten in erster Linie die Auswirkungen endlicher Phasen ϕ_μ und ϕ_1 der SUSY-Parameter μ und M_1 auf den Prozeß

$$e^+ + e^- \to \tilde{\chi}_1^0 + \tilde{\chi}_3^0, \;\; \tilde{\chi}_3^0 \to \tilde{\chi}_1^0 + Z \tag{6.2}$$

betrachtet werden. Außer dem totalen und dem differentiellen Wirkungsquerschnitt wurden dazu auch Elemente der Spin-Dichtematrix des Z-Bosons berechnet, um entscheiden zu können, ob Aussicht darauf besteht, aus dessen Zerfallswinkelverteilung Informationen über die Werte der Phasen ϕ_μ und ϕ_1 zu gewinnen.
Ein weiteres Anliegen war es, die Abhängigkeit der berechneten Größen von der Polarisation der einlaufenden Teilchen zu untersuchen.

Wir haben uns für den Prozeß (6.2) entschieden, da unser Hauptanliegen die Untersuchung von Spineffekten beim Zweikörperzerfall eines Neutralinos mit einem Z-Boson im Endzustand war. Dieser Zerfallskanal steht dem Neutralino $\tilde{\chi}_2^0$ nur für relativ hohe Werte für M_2 und μ offen[1]. Eine entsprechende Parameterwahl führt aber einerseits zu einer recht großen Masse für $\tilde{\chi}_1^0$, andererseits ergeben sich bereits für Schwerpunktsenergien, die knapp über der Schwelle für die Produktion von $\tilde{\chi}_1^0$ und $\tilde{\chi}_2^0$ liegen, Einschränkungen für den kinematisch erlaubten Bereich des Winkels θ_{36} zwischen dem zerfallenden $\tilde{\chi}_2^0$ und dem Z-Boson[2]. Diese Schranke $\sqrt{s_0}$ für die Schwerpunktsenergie (5.31) ist von den Massen der am Zerfall beteiligten Teilchen abhängig und liegt für den Prozeß (6.2) für die betrachteten Szenarien bei etwa 1 TeV. Die Einschränkung des Winkels θ_{36} führt zu Problemen bei der numerischen Auswertung mit den geläufigen Integrationsroutinen (Gauss-Integration,

[1]Bei Verwendung der GUT-Relation zwischen den Gaugino-Massenparametern M_1 und M_2.
[2]Falls die Differenz der Massen von $\tilde{\chi}_1^0$ und $\tilde{\chi}_2^0$ nicht wesentlich gröser als die Z-Masse ist.

Monte-Carlo- Integration), da sie mit Stützstellen arbeiten . Ein Teil dieser - bei der Monte-Carlo- Integration zufällig gewählten - Stützstellen im Raum der Integrationsparameter führen zu kinematisch verbotenen Werten für den Winkel θ_{36}, der sich über trigonometrischen Funktionen aus den Integrationsparametern ergibt (vgl. Kap. 5). Daher benötigt man für $\sqrt{s} > \sqrt{s_0}$ zur Berechnung der Winkelverteilungen ein Integrationsverfahren, das in der Lage ist, die Integration über ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet durchzuführen, welches die unzulässigen Stützstellen nicht enthält.

6.1 Parameter des Standardmodells

Von den Parametern des Standardmodells werden die Massen der W- und Z-Bosonen, die Breite des Z-Bosons sowie der schwache Mischungswinkel θ_W und die Feinstrukturkonstante α benötigt. Die entsprechenden Werte wurden [13] entnommen:

$$m_W = 80,4\,GeV \tag{6.3}$$
$$m_Z = 91,187\,GeV \tag{6.4}$$
$$\Gamma_Z = 2,49\,GeV \tag{6.5}$$
$$\sin^2\theta_W = 0,231 \tag{6.6}$$
$$\alpha = \frac{1}{128} \tag{6.7}$$

Der angegebene Wert von α bezieht sich auf $Q^2 \approx m_W^2$ und ist bei der betrachteten Schwerpunktsenergie von 500 GeV besser geeignet als der Niedrigenergiewert $\frac{1}{137}$ für $Q^2 = 0$.

6.2 Szenarienwahl

Das verwendete SUSY-Szenario wurde in Anlehnung an das für den geplanten Linearbeschleuniger vorgeschlagene mSUGRA-Referenzszenario[3] [34] für $\tan\beta = 3$ gewählt. Darin gehen folgende mSUGRA-Parameter ein:

Parameter	Erläuterung	Wert
m_0	Gemeinsame skalare Masse an der GUT-Skala	100 GeV
$M_{1/2}$	Gemeinsame Gauginomasse an der GUT-Skala	200 GeV
A_0	Gemeinsame trilineare Kopplung an der GUT-Skala	0 GeV
$\tan\beta$		3

Daraus ergibt sich für die benötigten SUSY-Parameter:

$$m_{\tilde{e}_L^-} = 176\,GeV \tag{6.8}$$
$$m_{\tilde{e}_R^-} = 133\,GeV \tag{6.9}$$
$$|M_1| = 78,7\,GeV \tag{6.10}$$
$$M_2 = 152\,GeV \tag{6.11}$$
$$|\mu| = 316\,GeV \tag{6.12}$$

[3] In diesem Szenario sind alle Massenparameter reell.

Um einen Überblick über die Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte und Winkelverteilungen von den Phasen ϕ_μ und ϕ_1 zu erhalten, wurden für diese Phasen jeweils die Werte $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ verwendet.
Um den Einfluß der Strahlpolarisation auf die Ergebnisse zu untersuchen, wurden folgende Polarisationskonfigurationen gewählt:

- Beide Strahlen unpolarisiert
- Polarisationsgrad der Elektronen: $P_1^3 = 0,85$,
  Polarisationsgrad der Positronen: $P_2^3 = -0,6$
- Polarisationsgrad der Elektronen:$P_1^3 = -0,85$,
  Polarisationsgrad der Positronen: $P_2^3 = 0,6$
- Polarisationsgrad der Elektronen: $P_1^3 = 0,85$,
  Positronen unpolarisiert
- Polarisationsgrad der Elektronen:$P_1^3 = -0,85$,
  Positronen unpolarisiert

Diese Konfigurationen werden im folgenden mit (00), $(+-)$, $(-+)$, $(+0)$ und (-0) bezeichnet. Die angegebenen Werte orientieren sich an den derzeitigen Planungen für den TESLA- Linearbeschleuniger.

6.3 Massen und Breiten

In Tabelle (6.1) sind die verwendeten Werte für die Massen der Neutralinos $\tilde{\chi}_1^0$, $\tilde{\chi}_3^0$ sowie die totalen Zerfallsbreiten von $\tilde{\chi}_3^0$ für die betrachteten Phasenkombinationen aufgeführt. Dabei fällt auf, daß die Änderungen der Masse und insbesondere der Breite des zweitschwersten Neutralinos maßgeblich von ϕ_μ bestimmt sind und nur eine geringe Sensitivität auf ϕ_1 zeigen. Daß die Masse von $\tilde{\chi}_3^0$ stärker von der Phase von μ beeinflußt wird, ist in Anbetracht der Struktur der Neutralino-Massenmischungsmatrix Y (2.106), den im Vergleich zu $|\mu|$ deutlich kleineren Gaugino-Massenparametern und den jeweils sehr kleinen Gaugino-Anteilen von $\tilde{\chi}_3^0$ (vgl. Tab. 6.2) plausibel.

Für den Fall $\phi_\mu = \phi_1 = 0$ fanden wir für den Kanal $\tilde{\chi}_3^0 \to \tilde{\chi}_1^0 + Z$ ein Verzweigungsverhältnis von $BR = 0,09$. Dieser Wert unterscheidet sich deutlich von dem in [34] angegebenen Wert von $BR = 0,14$. Der für diese Phasen von uns erhaltene Wirkungsquerschnitt ($9,6\ fb$) für die Produktion von $\tilde{\chi}_3^0$ und $\tilde{\chi}_1^0$ stimmt jedoch gut mit dem in [34] zu $9,9\ fb$ angegebenen Wert überein. Der Grund für die Diskrepanz im Verzweigungsverhältnis ist in Anbetracht der (z.B. im Vergleich zu $\tilde{\chi}_2^0$) relativ großen totalen Breite von $\tilde{\chi}_3^0$ unter Umständen in der Verwendung der Narrow-Width-Näherung für den Pseudopropagator von $\tilde{\chi}_3^0$ (5.12) zu suchen.
Der Mischungscharakter der Masseneigenzustände $\tilde{\chi}_1^0$ und $\tilde{\chi}_3^0$ in der Basis $(\tilde{\gamma}|\tilde{Z}|\tilde{H}_a^0|\tilde{H}_b^0)$ ist für Phasenkombinationen, die reellwertigen M_1 und μ entsprechen, der Tabelle (6.2) zu entnehmen. Dabei auftretende rein imaginäre Mischungsmatrixelemente sind auf die verwendete Diagonalisierungsroutine zurückzuführen, die stets positive Masseneigenwerte liefert. Geht man hingegen davon aus, daß die Massenmatrix stets reell ist, so kann die Diagonalisierung mit einer reellen, orthogonalen Diagonalisierungsmatrix durchgeführt werden. Bei dieser Vorgehensweise erhält man jedoch mitunter negative Masseneigenwerte [22]. Eventuell auftretende negative Vorzeichen der Eigenwerte werden bei dem verwendeten Diagonalisierungsverfahren durch rein imaginäre Mischungsmatrixelemente des entsprechenden Neutralinos kompensiert. Dies führt unter anderem dazu, daß die Kopplungen z.B. für $\phi_\mu = \phi_1 = 0$ rein imaginär sind (siehe Abb.6.1).

ϕ_μ	ϕ_1	$m(\tilde{\chi}_1^0)$ /GeV	$m(\tilde{\chi}_3^0)$ /GeV	$\Gamma(\tilde{\chi}_3^0)$ /GeV
0	0	71,8	319,8	2,10
0	$0,25\pi$	73,2	319,9	2,10
0	$0,50\pi$	76,4	320,1	2,09
0	$0,75\pi$	79,7	320,4	2,00
0	π	81,0	320,5	1,99
$0,25\pi$	0	73,7	320,1	1,93
$0,25\pi$	$0,25\pi$	76,9	320,3	1,91
$0,25\pi$	$0,50\pi$	79,9	320,5	1,91
$0,25\pi$	$0,75\pi$	81,0	320,8	1,83
$0,25\pi$	π	79,5	320,8	1,84
$0,50\pi$	0	77,3	321,2	1,55
$0,50\pi$	$0,25\pi$	80,0	321,7	1,54
$0,50\pi$	$0,50\pi$	80,9	321,7	1,55
$0,50\pi$	$0,75\pi$	79,5	321,9	1,47
$0,50\pi$	π	76,6	321,8	1,50
$0,75\pi$	0	79,9	323,3	1,25
$0,75\pi$	$0,25\pi$	80,8	323,6	1,26
$0,75\pi$	$0,50\pi$	79,6	323,8	1,31
$0,75\pi$	$0,75\pi$	77,0	323,8	1,18
$0,75\pi$	π	74,4	323,5	1,21
π	0	80,8	325,6	1,27
π	$0,25\pi$	79,7	325,4	1,27
π	$0,50\pi$	77,3	325,2	1,30
π	$0,75\pi$	74,7	325,0	1,12
π	π	73,7	324,9	1,13

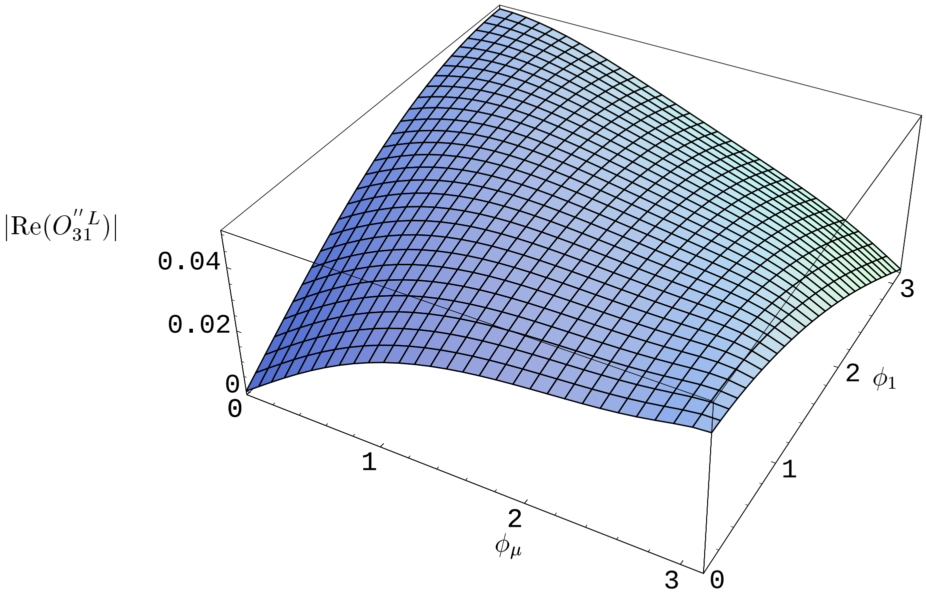
Tabelle 6.1: Massen von $\tilde{\chi}_1^0$, $\tilde{\chi}_3^0$ sowie totale Breite von $\tilde{\chi}_3^0$

ϕ_μ	ϕ_1	$\tilde{\chi}_1^0$	$\tilde{\chi}_3^0$
0	0	$(0,77\|-0,60\|0,15\|0,15)$	$i(0,01\|-0,09\|0,46\|-0,89)$
0	π	$i(-0,86\|0,49\|-0,05\|-0,12)$	$i(0,04\|-0,11\|0,46\|-0,88)$
π	0	$(-0,89\|0,43\|0,05\|0,11)$	$(0,03\|0,23\|0,46\|-0,86)$
π	π	$i(0,88\|-0,44\|-0,11\|-0,11)$	$(0,06\|0,21\|0,46\|-0,86)$

Tabelle 6.2: Neutralino-Eigenzustände für $\tilde{\chi}_1^0$, $\tilde{\chi}_3^0$ in der Basis $(\tilde{\gamma}|\tilde{Z}|\tilde{H}_a^0|\tilde{H}_b^0)$ für reellwertige M_1 und μ.

6.4 Kopplungen

Die folgenden dreidimensionalen Diagramme sollen einen Überblick über die bei dem betrachteten Prozess vorkommenden Kopplungskonstanten (bzw. deren Produkte) $O_{31}^{''L}$ sowie $f_{e3}^L f_{e1}^{L*}$ und $f_{e3}^R f_{e1}^{R*}$ vermitteln. Mit dem verwendeten Diagonalisierungsverfahren treten bei bestimmten Phasenkombinationen für alle Kopplungskonstanten abrupte Vorzeichenwechsel auf, die jedoch nicht von physikalischer Bedeutung sind, da sie sich kompensieren. Daher werden in den Diagrammen die Beträge der Real- und Imaginärteile der Kopplungskonstanten dargestellt.



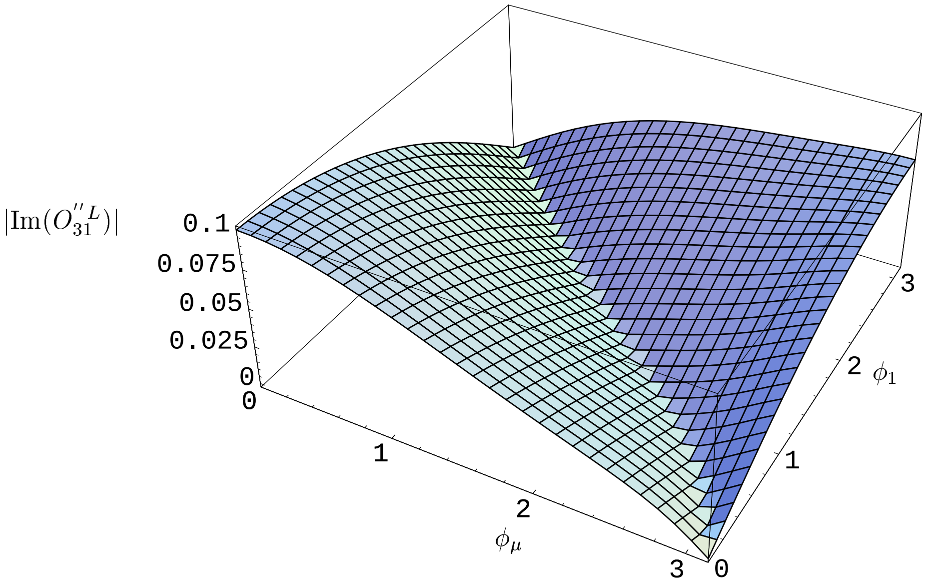


Abbildung 6.1: Beträge von Real- und Imaginärteil der Kopplungskonstanten O''^L_{31} in Abhängigkeit von ϕ_μ und ϕ_1.

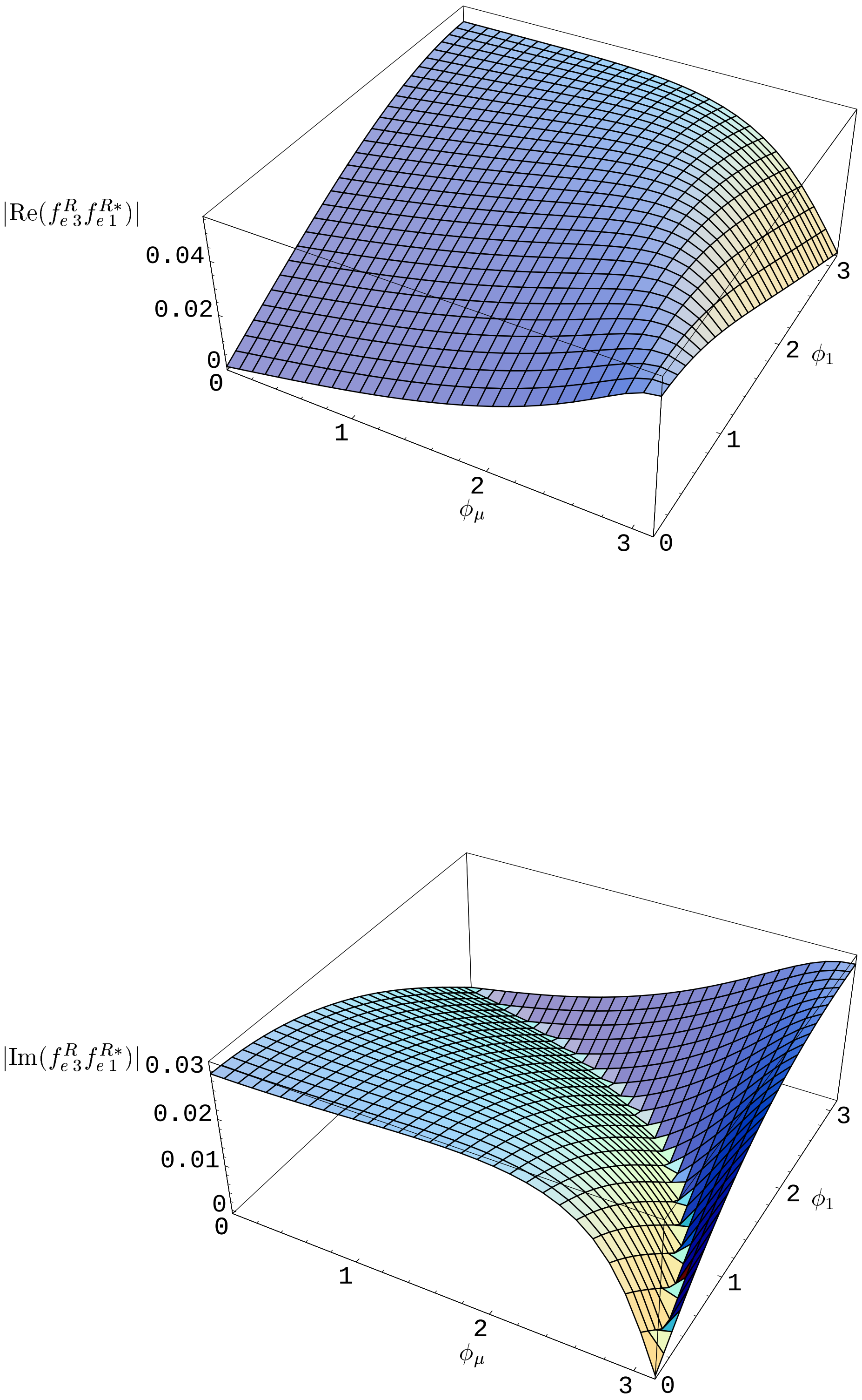
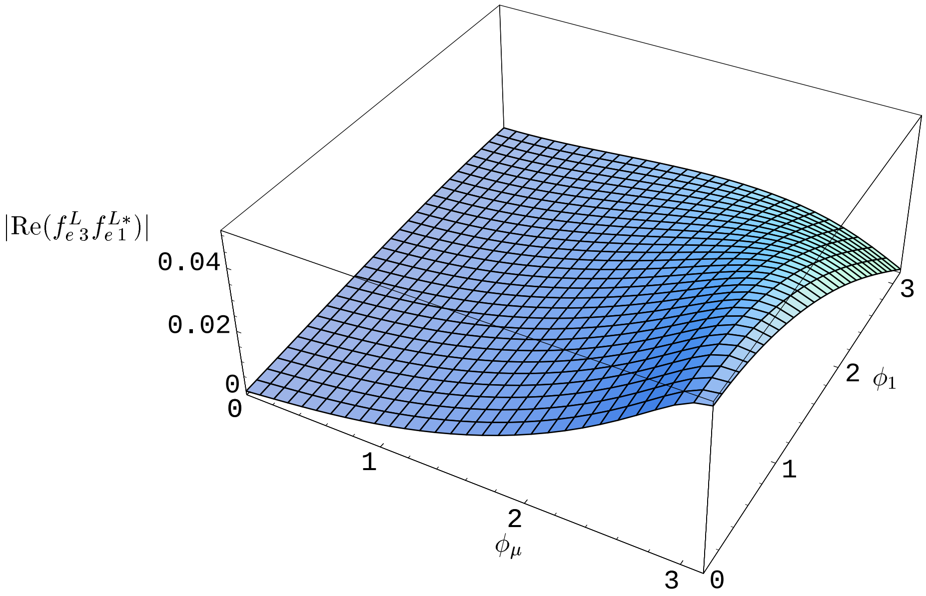


Abbildung 6.2: Beträge von Real- und Imaginärteil von $f^R_{e\,3} f^{R*}_{e\,1}$ in Abhängigkeit von ϕ_μ und ϕ_1.



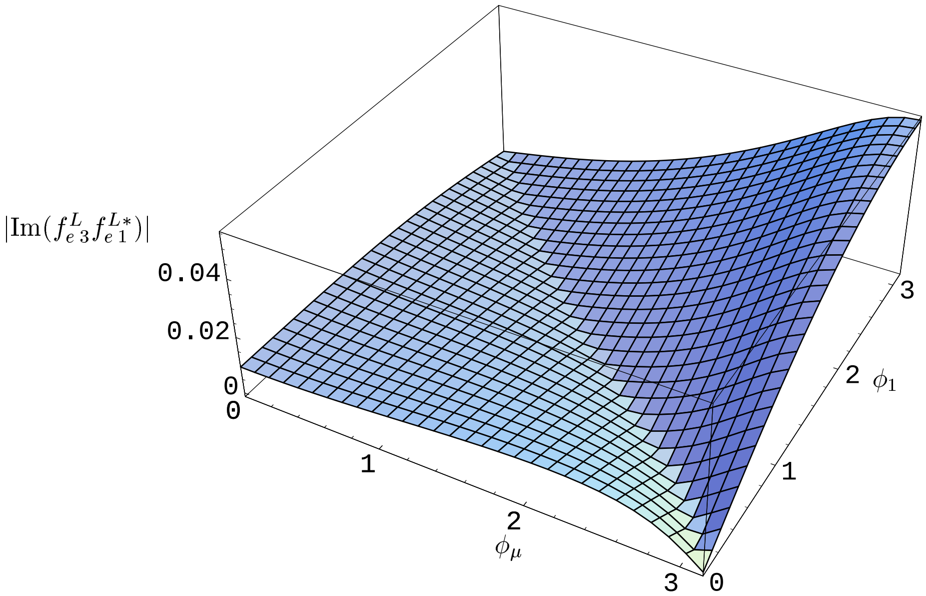


Abbildung 6.3: Beträge von Real- und Imaginärteil von $f^L_{e\,3} f^{L*}_{e\,1}$ in Abhängigkeit von ϕ_μ und ϕ_1.

6.5 Totaler Wirkungsquerschnitt

Der totale Wirkungsquerschnitt von Produktion und Zerfall wurde für alle in Kap. 6.2 angegebenen Phasenkombinationen und Strahlpolarisationskonfigurationen berechnet. Die entsprechenden Ergebnisse sind den Tabellen 6.3, 6.4 zu entnehmen. Darin sind die verschiedenen σ_{tot} den folgenden Polarisationskonfigurationen zugeordnet (vgl. Kap. 6.2):

- σ^u_{tot} für (00)
- σ^1_{tot} für $(+-)$
- σ^2_{tot} für $(-+)$
- σ^3_{tot} für $(+0)$
- σ^4_{tot} für (-0)

Desweiteren wurden die mit $R_i = \frac{\sigma^i_{tot}}{\sigma^u_{tot}},\ i = 1, 2, 3, 4$ bezeichneten Verhältnisse der entsprechenden polarisierten Wirkungsquerschnitte zum unpolarisierten Wirkungsquerschnitt angegeben.

ϕ_μ	ϕ_1	$\sigma^u_{tot}\ /fb$	$\sigma^1_{tot}\ /fb$	$\sigma^2_{tot}\ /fb$	R_1	R_2
0	0	0,83	2,21	0,31	2,65	0,37
0	$0,25\pi$	0,70	1,86	0,24	2,67	0,35
0	$0,50\pi$	0,40	1,09	0,11	2,73	0,29
0	$0,75\pi$	0,18	0,49	0,04	2,80	0,22
0	π	0,10	0,29	0,02	2,82	0,19
$0,25\pi$	0	0,68	1,89	0,17	2,77	0,26
$0,25\pi$	$0,25\pi$	0,44	1,21	0,10	2,79	0,23
$0,25\pi$	$0,50\pi$	0,20	0,56	0,04	2,83	0,19
$0,25\pi$	$0,75\pi$	0,11	0,31	0,02	2,84	0,18
$0,25\pi$	π	0,14	0,41	0,02	2,86	0,17
$0,50\pi$	0	0,45	1,30	0,06	2,90	0,12
$0,50\pi$	$0,25\pi$	0,24	0,69	0,04	2,86	0,16
$0,50\pi$	$0,50\pi$	0,13	0,35	0,03	2,80	0,22
$0,50\pi$	$0,75\pi$	0,14	0,38	0,04	2,75	0,27
$0,50\pi$	π	0,26	0,73	0,06	2,80	0,22
$0,75\pi$	0	0,31	0,81	0,12	2,63	0,40
$0,75\pi$	$0,25\pi$	0,17	0,43	0,09	2,52	0,51
$0,75\pi$	$0,50\pi$	0,16	0,36	0,13	2,22	0,80
$0,75\pi$	$0,75\pi$	0,33	0,69	0,31	2,09	0,94
$0,75\pi$	π	0,58	1,26	0,49	2,18	0,84
π	0	0,17	0,30	0,22	1,75	1,27
π	$0,25\pi$	0,27	0,48	0,35	1,74	1,28
π	$0,50\pi$	0,53	0,90	0,70	1,70	1,33
π	$0,75\pi$	0,94	1,56	1,30	1,65	1,38
π	π	1,08	1,75	1,50	1,63	1,39

Tabelle 6.3: Totale Wirkungsquerschnitte ohne Polarisation und für die Polarisationskonfigurationen $(+-)$, $(-+)$

ϕ_μ	ϕ_1	$\sigma^u_{tot}\ /fb$	$\sigma^3_{tot}\ /fb$	$\sigma^4_{tot}\ /fb$	R_3	R_4
0	0	0,83	1,39	0,28	1,67	0,33
0	$0,25\pi$	0,70	1,17	0,22	1,68	0,32
0	$0,50\pi$	0,40	0,69	0,11	1,70	0,28
0	$0,75\pi$	0,18	0,31	0,04	1,76	0,24
0	π	0,10	0,18	0,02	1,76	0,22
$0,25\pi$	0	0,68	1,18	0,18	1,73	0,26
$0,25\pi$	$0,25\pi$	0,44	0,76	0,11	1,75	0,25
$0,25\pi$	$0,50\pi$	0,20	0,35	0,05	1,78	0,23
$0,25\pi$	$0,75\pi$	0,11	0,19	0,02	1,79	0,22
$0,25\pi$	π	0,14	0,26	0,03	1,78	0,21
$0,50\pi$	0	0,45	0,82	0,08	1,81	0,19
$0,50\pi$	$0,25\pi$	0,24	0,43	0,05	1,80	0,21
$0,50\pi$	$0,50\pi$	0,13	0,22	0,03	1,76	0,25
$0,50\pi$	$0,75\pi$	0,14	0,24	0,04	1,72	0,27
$0,50\pi$	π	0,26	0,46	0,06	1,76	0,24
$0,75\pi$	0	0,31	0,51	0,11	1,65	0,35
$0,75\pi$	$0,25\pi$	0,17	0,27	0,07	1,59	0,41
$0,75\pi$	$0,50\pi$	0,16	0,23	0,09	1,42	0,58
$0,75\pi$	$0,75\pi$	0,33	0,44	0,22	1,34	0,66
$0,75\pi$	π	0,58	0,81	0,35	1,39	0,61
π	0	0,17	0,20	0,15	1,14	0,86
π	$0,25\pi$	0,27	0,31	0,24	1,14	0,86
π	$0,50\pi$	0,53	0,59	0,47	1,11	0,89
π	$0,75\pi$	0,94	1,02	0,87	1,08	0,92
π	π	1,08	1,15	1,00	1,07	0,93

Tabelle 6.4: Totale Wirkungsquerschnitte ohne Polarisation und für die Polarisationskonfigurationen $(+0)$, (-0)

Betrachtet man die Ergebnisse, so fällt zunächst auf, daß der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt eine starke Abhängigkeit sowohl von ϕ_μ als auch von ϕ_1 aufweist und für die angegebenen Phasenkombinationen über eine Größenordnung variiert. Dabei erhält man bei kleinen Phasen von μ die größten Wirkungsquerschnitte, wenn die Phase von M_1 ebenfalls klein ist, während große Phasen von M_1 zu erheblich niedrigeren Werten führen. Dieses Verhalten ändert sich mit wachsendem ϕ_μ und kehrt sich für $\phi_\mu \to \pi$ schließlich ins Gegenteil um, da hier besonders hohe Werte der Phasen von M_1 die höchsten Wirkungsquerschnitte liefern. Auch ist deutlich erkennbar, daß verschiedene Phasenkombinationen zu demselben Wert für den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt führen können.
Die Polarisationskonfiguration $(+-)$ führt stets zu einer erheblichen Steigerung des Wirkungsquerschnitts. Der an R_1 abzulesende erreichbare Zugewinn ist wiederum von der Phasenkombination abhängig und ist - im Gegensatz zu σ^u_{tot} - vor allem mit der Phase von μ korreliert. Aus der Struktur des Amplitudenbetragsquadrats (vgl. Kap. 5) ,

$$
\begin{aligned}
|M|^2 &= \{(1-P_1^3P_2^3)[(P_{+-,+-}+P_{-+,-+})D(\tilde{\chi}^0_3)] \\
&\quad +(P_1^3-P_2^3)[(P_{+-,+-}-P_{-+,-+})D(\tilde{\chi}^0_3)]\},
\end{aligned}
$$

ist zu erkennen, daß die Summe der Größen $R_{i/j}$ für zwei Polarisationskonfigurationen i und j, die sich in den Vorzeichen der Polarisationsgrade von Elektron *und* Positron unterscheiden, konstant ist. Daher geht ein verminderter Zuwachs des Wirkungsquerschnitts in der Polarisationskonfiguration $(+-)$ mit einem vergleichsweise höheren Wirkungsquerschnitt für die Polarisationskonfiguration $(-+)$ einher. Bei $\phi_\mu = \pi$ ergibt sich für alle Werte von ϕ_1 in beiden Polarisationskonfigurationen $(+-)$ und $(-+)$ eine Steigerung des Wirkungsquerschnitts im Vergleich zum unpolarisierten Fall. Dies liegt daran, daß die Differenz der Terme $P_{+-,+-}$ und $P_{-+,-+}$, zu denen jeweils $\tilde{e}_R$-Austausch $(P_{+-,+-})$ bzw. $\tilde{e}_L$-Austausch $(P_{-+,-+})$ beiträgt, kleiner wird. Dieses Verhalten spiegelt sich auch in der in Abb. 6.2 und Abb. 6.3 dargestellten Abhängigkeit der Kopplungen $f^R_{e\,3} f^{R*}_{e\,1}$ bzw. $f^L_{e\,3} f^{L*}_{e\,1}$ von den Phasen ϕ_μ und ϕ_1 wider.
Die für die Polarisationskonfigurationen $(+-)$ und $(-+)$ getroffenen Aussagen lassen sich im wesentlichen auch auf die Konfigurationen $(+0)$ und (-0) übertragen, allerdings sind die Effekte in diesem Fall weniger stark ausgeprägt; außerdem ist der Wirkungsquerschnitt mit negativer Elektron-Polarisation stets kleiner als ohne Polarisation.

Die Tatsache, daß die Unterschiede in den Wirkungsquerschnitten für verschiedene Strahlpolarisationen beim Vergleich der Szenarien mit $\phi_\mu = 0$ bzw. $\phi_\mu = \pi$ besonders deutlich sind, ist im Zusammenhang mit einer Publikation von M. Brhlik, G.J. Good und G.L. Kane [35] erwähnenswert. Darin wurden - im Hinblick auf die bereits angesprochenen möglichen 'cancelations' unter den Beiträgen, die von verschiedenen endlichen Phasen des MSSM stammen - unter anderem die mit den Schranken der elektrischen Dipolmomente von Elektron und Neutron zulässigen Bereiche der Phasen von μ und M_1 untersucht. Dabei fanden sie, daß die mit beiden Dipolmomenten verträglichen Werte der Phase von μ in der Nähe von 0, π oder 2π angesiedelt sind, während für die Phase von M_1 für diese Werte von ϕ_μ ein weit größerer Spielraum besteht. Da die Autoren sich jedoch meist auf ein anderes Szenario beziehen, sind die von ihnen gewonnenen Ergebnisse nur bedingt auf unsere Rechnungen übertragbar, obgleich nach Angaben der Autoren die verwendeten Parameter 'ausreichend' variiert und dabei über weite Bereiche des Parameterraums qualitativ dieselben Resultate gefunden wurden. Das von ihnen gewählte Referenzszenario unterscheidet sich von unserem vor allem durch den kleineren Wert von $\tan\beta$ $(\to 1,2)$ und darin, daß zwischen den Gauginomassenparametern M_1 und M_2 keine GUT-Relation angenommen wurde.

Für Phasenkombinationen, die bei verschiedenen Polarisationskonfigurationen jeweils vergleichbare Wirkungsquerschnitte liefern, wird die Frage interessant, inwieweit qualitative Unterschiede im differentiellen Wirkungsquerschnitt oder in der Zerfallswinkelverteilung des Z-Bosons dazu beitragen können, diese Mehrdeutigkeiten zu reduzieren. Dazu betrachten wird exemplarisch die folgenden Parameterpaare:

- $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{0, \frac{\pi}{4}\}$ und $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{4}, 0\}$,
- $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{0, \frac{\pi}{2}\}$ und $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\}$,
- $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{0, \frac{3\pi}{4}\}$ und $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$,
- $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\}$ und $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$,

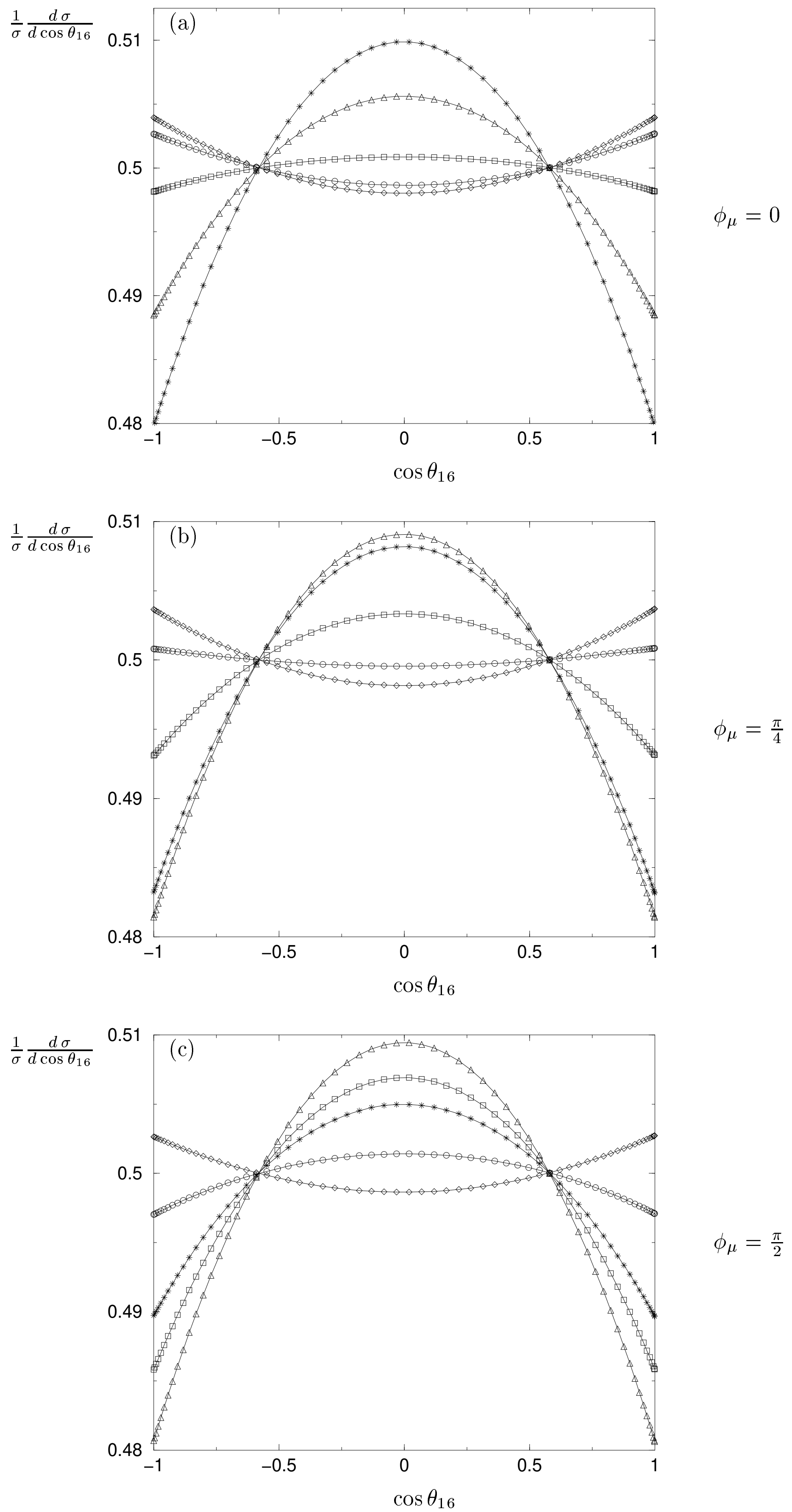
6.6 Differentieller Wirkungsquerschnitt

Wie wir gesehen haben, schwankt der totale Wirkungsquerschnitt im Bereich einer Größenordnung. Um die qualitativen Eigenschaften der Winkelverteilungen für die verschiedenen Phasenkombinationen besser überblicken zu können wurden daher stets die normierten Größen gegen $\cos\theta_{16}$ aufgetragen[4]. Es wurden jeweils die Kurven für eine feste Phase von μ und die fünf betrachteten Werte von ϕ_1 in einem Diagramm zusammengefaßt. Die Polarisationskonfigurationen $(+-)$ und $(+0)$ wurden im Hinblick auf die ohnehin schon große Anzahl der Diagramme weggelassen, da sie in ihrem qualitativen Verhalten stark der Konfiguration (00) ähneln[5].

Betrachten wir zunächst allgemein das Verhalten der Winkelverteilungen ohne Strahlpolarisation (Abb. 6.4), so stellen wir fest, daß die Winkelverteilungen stets vorwärts/rückwärts-symmetrisch sind und - abhängig von der Phasenkombination - ein Maximum bzw. Minimum transversal zur Strahlachse aufweisen. Diese relative Erhöhung bzw. Erniedrigung gegenüber dem Wert in Vorwärts- bzw. Rückwärtsrichtung ist meist für diejenigen Phasenkombinationen maximal, die zu einem sehr kleinen totalen Wirkungsquerschnitt führen, und der Betrag dieser relativen Erhöhung bzw. Erniedrigung ist in der Regel kleiner als 3% (bezogen auf den entsprechenden totalen Wirkungsquerschnitt). Diese Unterschiede im qualitativen Verlauf der Winkelverteilungen nehmen für die Konfigurationen $(-+)$ (Abb. 6.5) und (-0) (Abb. 6.6) eher noch ab. Nur in Einzelfällen erlauben sie einen Hinweis[6] auf die vorliegende Phasenkombination. So ergibt sich beispielsweise nur für $\phi_\mu = \pi$, $\phi_1 = 0$ sowohl im unpolarisierten Fall wie auch für die Konfigurationen $(-+)$ und (-0) ein Maximum in transversaler Richtung.

Bei den in Kap. 6.5 angegebenen Parameterpaaren, die bei verschiedenen Polarisationskonfigurationen jeweils vergleichbare Wirkungsquerschnitte liefern, lassen sich bestenfalls beim Vergleich der Winkelverteilungen ohne Strahlpolarisation für $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\}$ und $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$ erwähnenswerte - aber keineswegs signifikante - Unterschiede ($\approx 0,5\%$) feststellen.

[4]Zur Erinnerung: θ_{16} ist der Winkel zwischen dem einlaufenden Elektron und dem Z-Boson.
[5]Dies trifft auch auf die im Anschluß betrachteten Dichtematrixelemente des Z-Bosons zu.
[6]Dabei ist natürlich zu bedenken, daß nur 25 Phasenkombination untersucht wurden!



$\frac{1}{\sigma}\frac{d\,\sigma}{d\cos\theta_{16}}$
(a)
0.51
0.5
0.49
0.48
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = 0$
$\frac{1}{\sigma}\frac{d\,\sigma}{d\cos\theta_{16}}$
(b)
0.51
0.5
0.49
0.48
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = \frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{\sigma}\frac{d\,\sigma}{d\cos\theta_{16}}$
(c)
0.51
0.5
0.49
0.48
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = \frac{\pi}{2}$

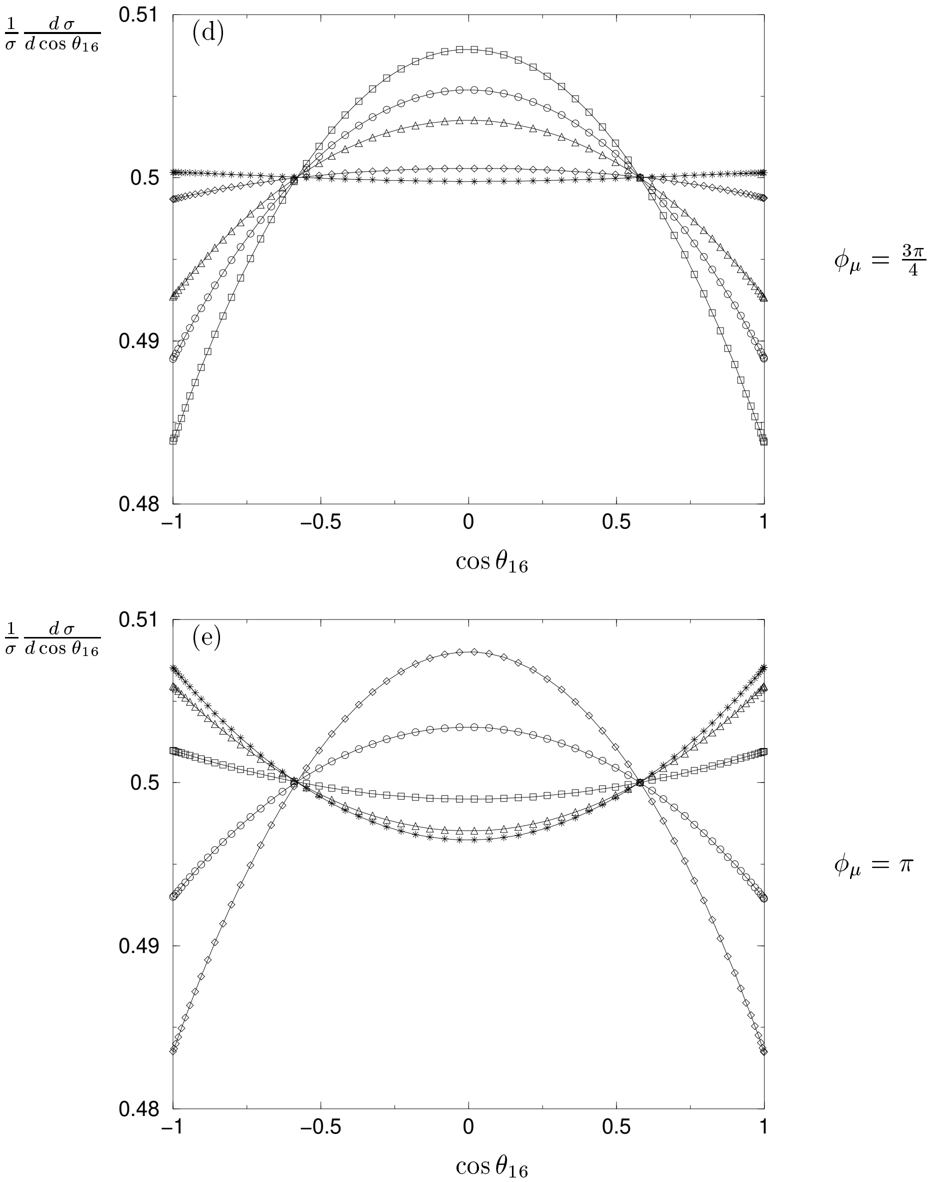
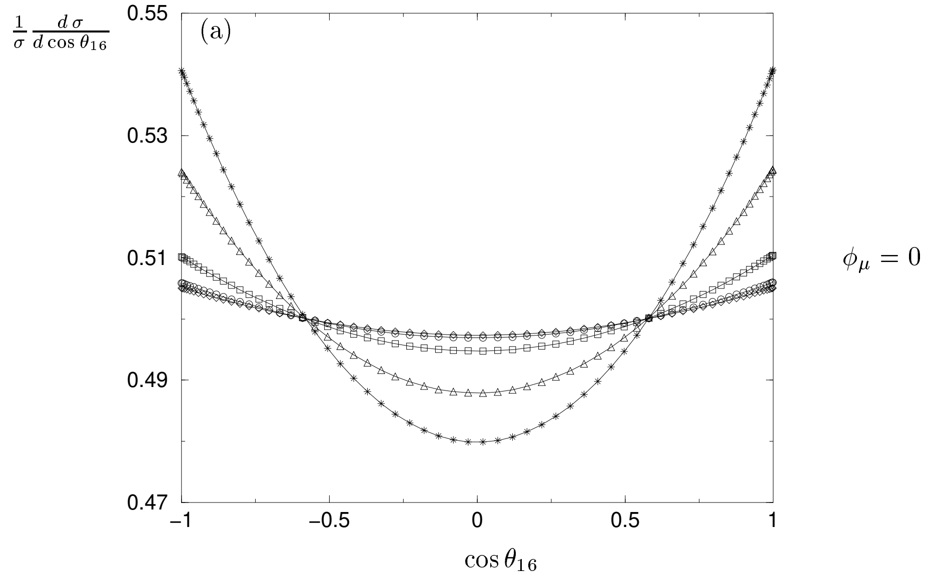


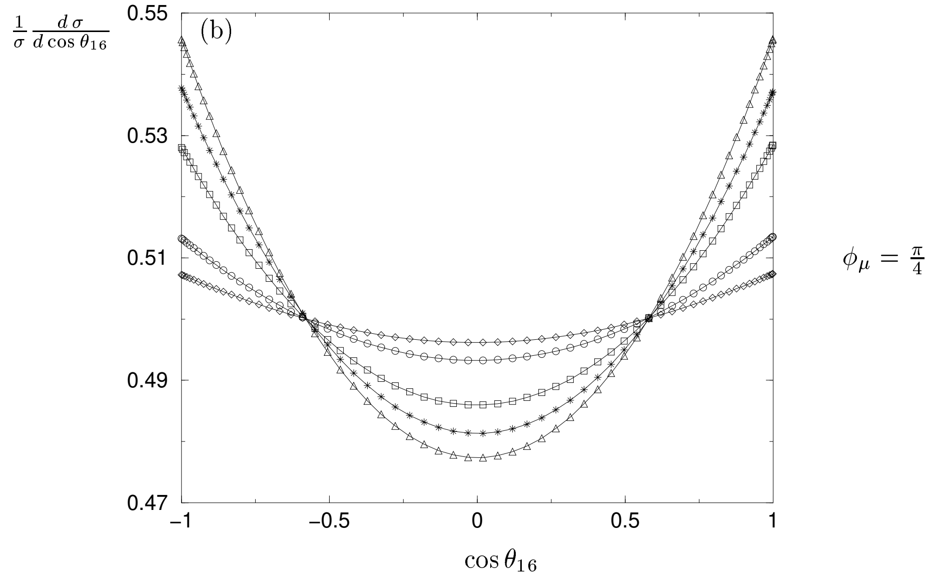
Abbildung 6.4: Winkelverteilungen für die Konfiguration (00)

Den Symbolen sind jeweils folgende Phasen von M_1 zugeordnet:

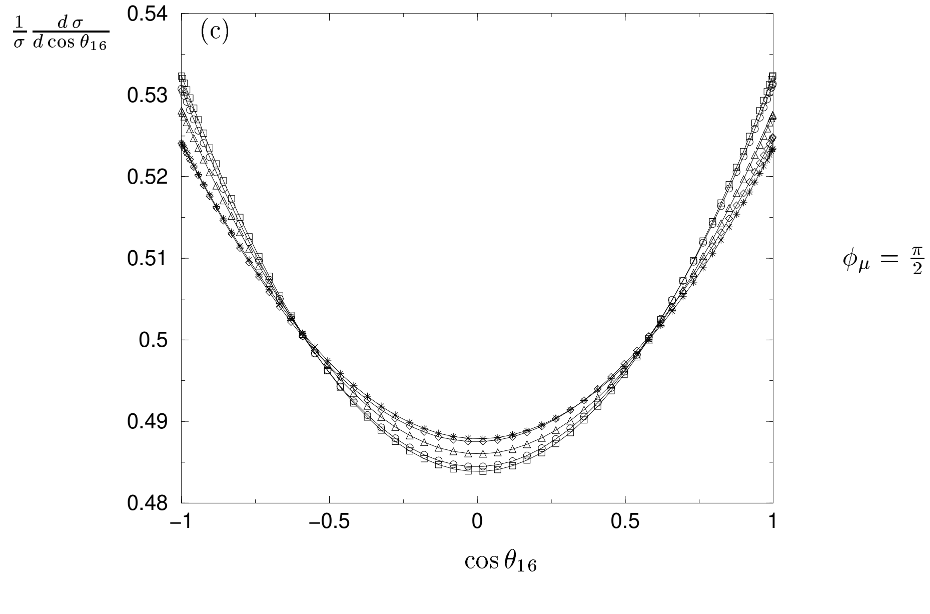
$$
\begin{array}{ccl}
\diamond & : & \phi_1 = 0 \\
o & : & \phi_1 = \dfrac{\pi}{4} \\
\square & : & \phi_1 = \dfrac{\pi}{2} \\
\triangle & : & \phi_1 = \dfrac{3\pi}{4} \\
* & : & \phi_1 = \pi
\end{array}
$$



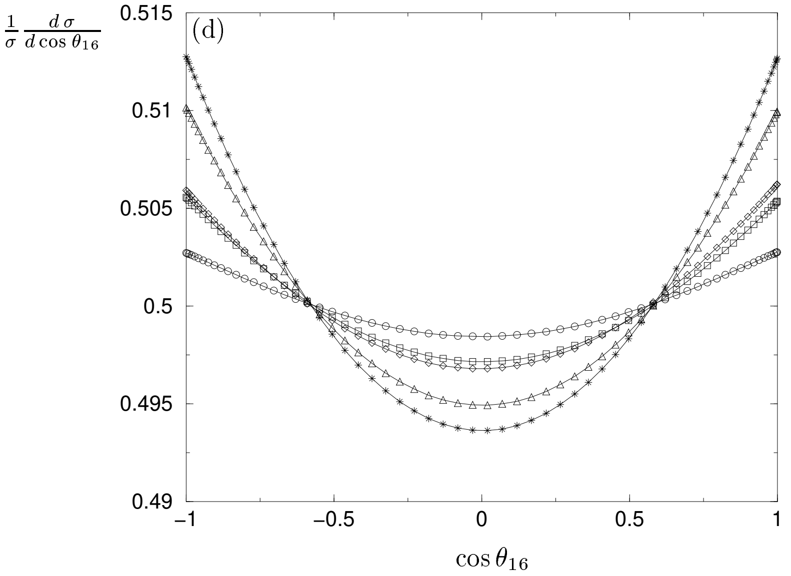
$\frac{1}{\sigma}\frac{d\,\sigma}{d\cos\theta_{16}}$
(a)
0.55
0.53
0.51
0.49
0.47
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = 0$



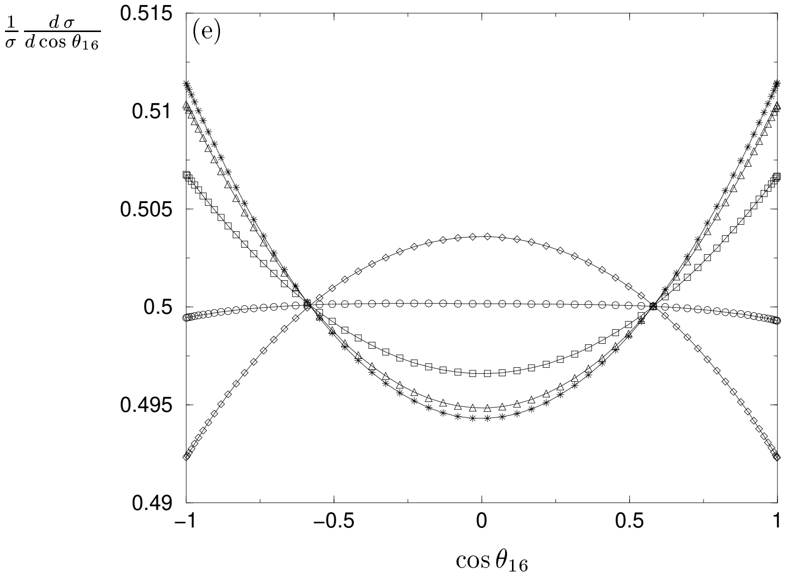
$\frac{1}{\sigma}\frac{d\,\sigma}{d\cos\theta_{16}}$
(b)
0.55
0.53
0.51
0.49
0.47
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = \frac{\pi}{4}$



$\frac{1}{\sigma}\frac{d\,\sigma}{d\cos\theta_{16}}$
(c)
0.54
0.53
0.52
0.51
0.5
0.49
0.48
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = \frac{\pi}{2}$



$\phi_\mu = \frac{3\pi}{4}$

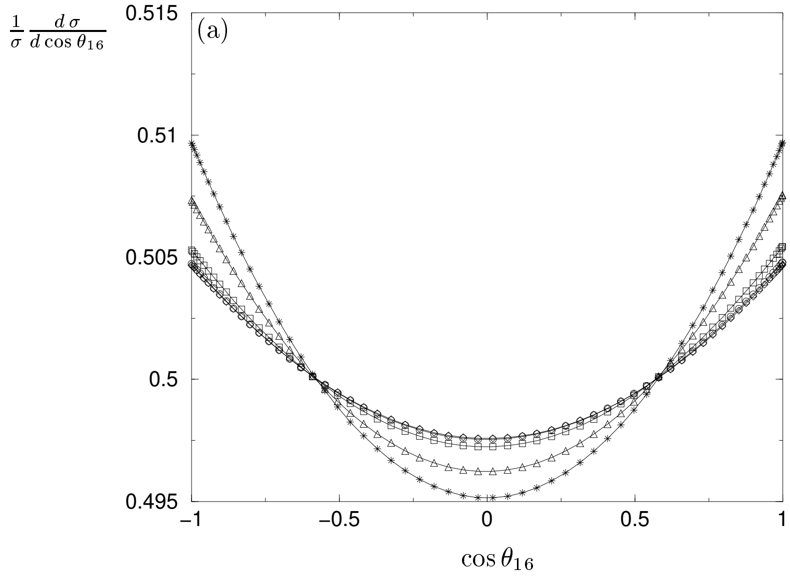


$\phi_\mu = \pi$

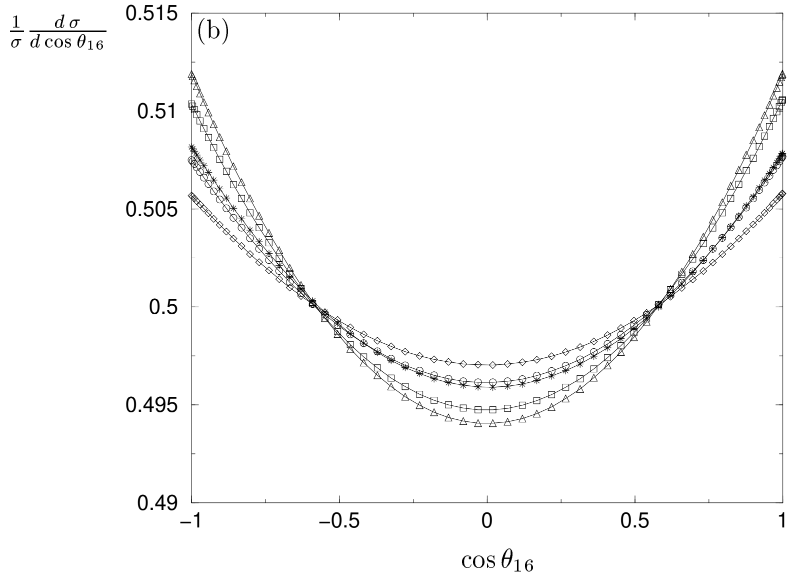
Abbildung 6.5: Winkelverteilungen für die Konfiguration $(-+)$

Den Symbolen sind jeweils folgende Phasen von M_1 zugeordnet:

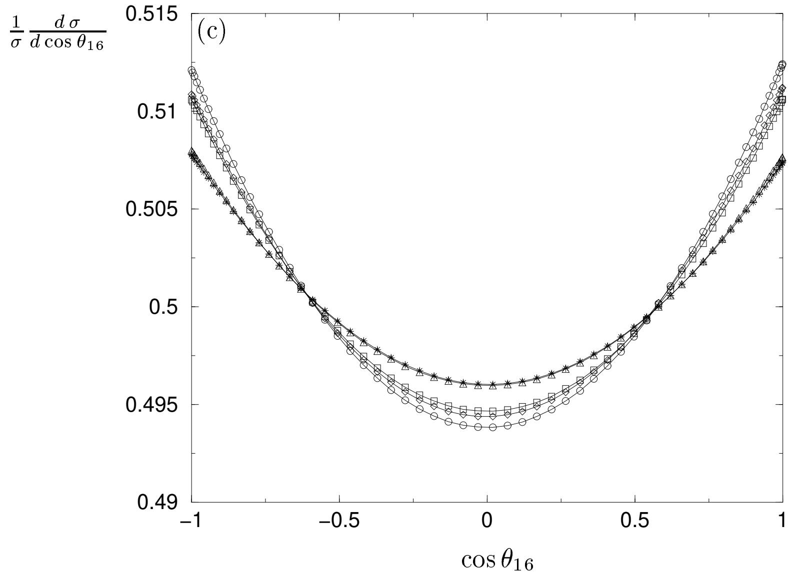
$$
\begin{aligned}
\diamond &: \quad \phi_1 = 0 \\
o &: \quad \phi_1 = \frac{\pi}{4} \\
\square &: \quad \phi_1 = \frac{\pi}{2} \\
\triangle &: \quad \phi_1 = \frac{3\pi}{4} \\
* &: \quad \phi_1 = \pi
\end{aligned}
$$



$\phi_\mu = 0$



$\phi_\mu = \frac{\pi}{4}$



$\phi_\mu = \frac{\pi}{2}$

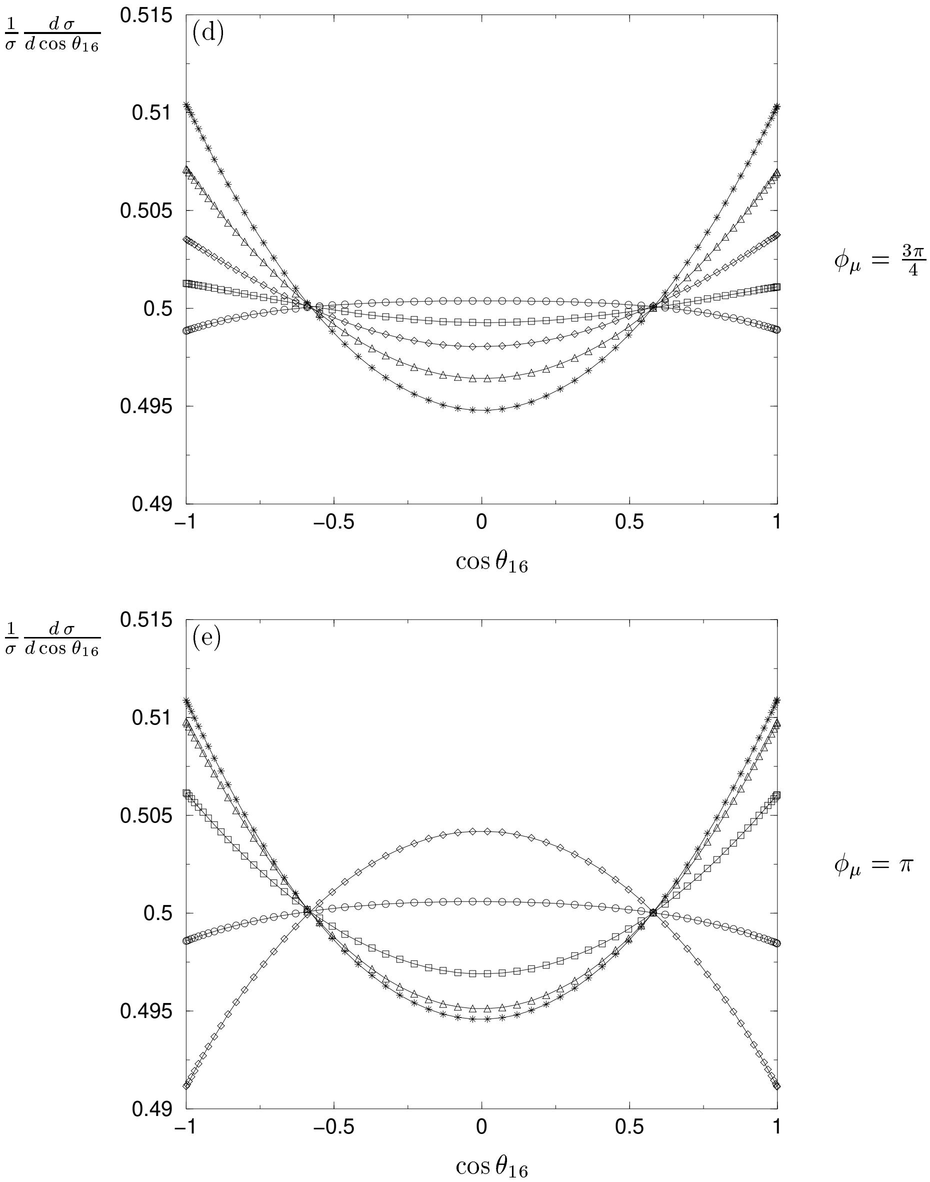


Abbildung 6.6: Winkelverteilungen für die Konfiguration (-0)

Den Symbolen sind jeweils folgende Phasen von M_1 zugeordnet:

$$\begin{array}{ccl}
\diamond & : & \phi_1 = 0 \\
o & : & \phi_1 = \dfrac{\pi}{4} \\
\square & : & \phi_1 = \dfrac{\pi}{2} \\
\triangle & : & \phi_1 = \dfrac{3\pi}{4} \\
* & : & \phi_1 = \pi
\end{array}$$

6.7 Dichtematrixelemente des Z-Bosons

Angesichts der eher verwirrenden Diagrammvielfalt, die sich für 25 Phasenkombinationen und drei verschiedenen Polarisationen für die Dichtematrixelemente ergeben, werden wir hier nur die Dichtematrixelemente zuvor angeführten Phasenpaarungen

- $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{0, \frac{\pi}{4}\}$ und $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{4}, 0\}$,
- $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{0, \frac{\pi}{2}\}$ und $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\}$,
- $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{0, \frac{3\pi}{4}\}$ und $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$,
- $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\}$ und $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$,

betrachten. Der komplette Satz der Diagramme ist im Anhang A.4 beigefügt. Auf eine Diskussion des normierten Dichtematrixelements $\rho^0_{0,0}$ wird verzichtet, weil die darin enthaltene Informartion komplementär zu $\rho^0_{+1,+1}$ ist, da

$$\rho^0_{0,0} + \rho^0_{+1,+1} + \rho^0_{-1,-1} = 1 \tag{6.13}$$

gilt und $\rho^0_{-1,-1}$ spiegelsymmetrisch zu $\rho^0_{+1,+1}$ bezüglich $\cos\theta_{16} = 0$ ist. Der Vollständigkeit halber sind die entsprechenden Diagramme für die Konfiguration (00) ebenfalls im Anhang A.4 enthalten.

Die Abbildungen 6.7 bis 6.9 enthalten die Dichtematrixelemente $\rho^0_{+1,+1}$, $\mathrm{Re}(\rho^0_{+1,0})$ und $\mathrm{Im}(\rho^0_{+1,0})$ für die Konfigurationen (00), $(-+)$ und (-0). Die zu vergleichenden Phasenkombinationen sind jeweils $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{0, \frac{\pi}{4}\}$ $(\hat{=}\diamond)$ und $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{4}, 0\}$ $(\hat{=}o)$ bzw. $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{0, \frac{3\pi}{4}\}$ $(\hat{=}\triangle)$ und $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$ $(\hat{=}*)$. Für die Konfiguration (00) liegen die Kurven stets dicht beeinander. Für die Konfigurationen mit negativem Polarisationsgrad des Elektronenstrahls ergeben sich qualitativ zum Teil recht auffällige Unterschiede, insbesondere in der Konfiguration (-0) ohne Positronpolarisation. Quantitativ sind die Unterschiede jedoch so gering, daß es angesichts des kleinen Wirkungsquerschnitts praktisch unmöglich sein dürtfe, diese Unterschiede durch Messung der Zerfallswinkelverteilung des Z-Bosons zu nutzen, um genauere Hinweise auf die Werte der beiden Phasen zu erhalten.
Die Abbildungen 6.10 bis 6.12 zeigen, daß es auch beim Vergleich von $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{0, \frac{\pi}{2}\}$ $(\hat{=}\diamond)$ und $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\}$ $(\hat{=}o)$ - insbesondere ohne Strahlpolarisation - kaum nennenswerten Unterschiede gibt. Betrachten wir die Dichtematrixelemente für $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\}$ $(\hat{=}\triangle)$ bzw. $\{\phi_\mu, \phi_1\} = \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$ $(\hat{=}*)$, so lassen sich bei allen Konfigurationen merkliche Differenzen feststellen, die z.B. für $\rho^0_{+1,+1}$ in den Konfigurationen $(-+)$ und (-0) in Vorwärtsrichtung etwa 50% betragen. Außerdem ist für diese beiden Phasenkombinationen stets das Vorzeichen von $\mathrm{Im}(\rho^0_{+1,0})$ verschieden. Insgesamt gesehen scheinen jedoch solche relativ ausgeprägten Unterschiede eher die Ausnahme zu sein.

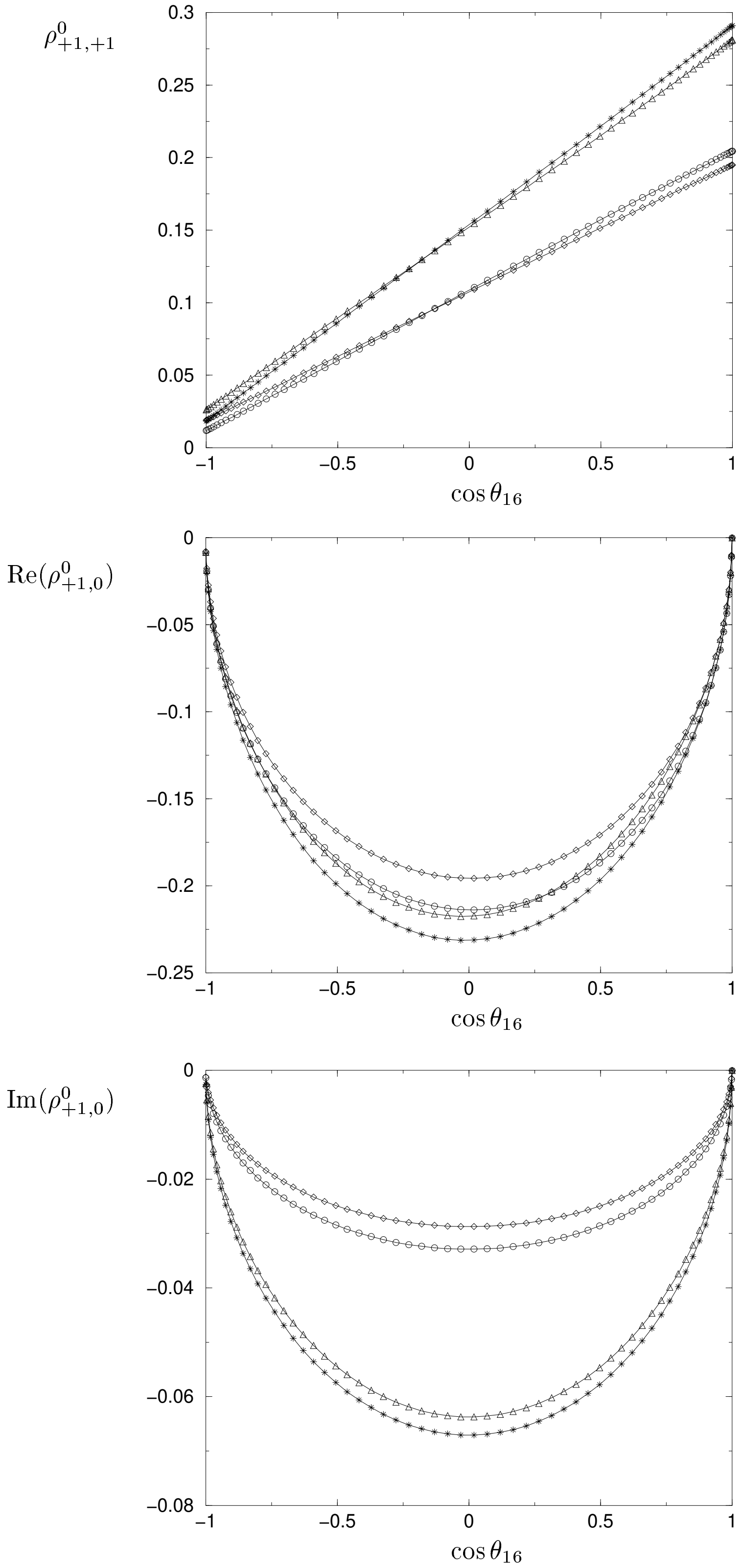


Abbildung 6.7: Dichtematrixelemente $\rho^0_{+1,+1}$, $\mathrm{Re}(\rho^0_{+1,0})$ und $\mathrm{Im}(\rho^0_{+1,0})$ für die Konfiguration (00). Den Symbolen sind jeweils folgende Phasenpaare $\{\phi_\mu, \phi_1\}$ zugeordnet:

$$
\begin{array}{llll}
\diamond & : \quad \{0, \frac{\pi}{4}\}, & \qquad \triangle : & \{0, \frac{3\pi}{4}\} \\
o & : \quad \{\frac{\pi}{4}, 0\}, & \qquad * : & \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}
\end{array}
$$

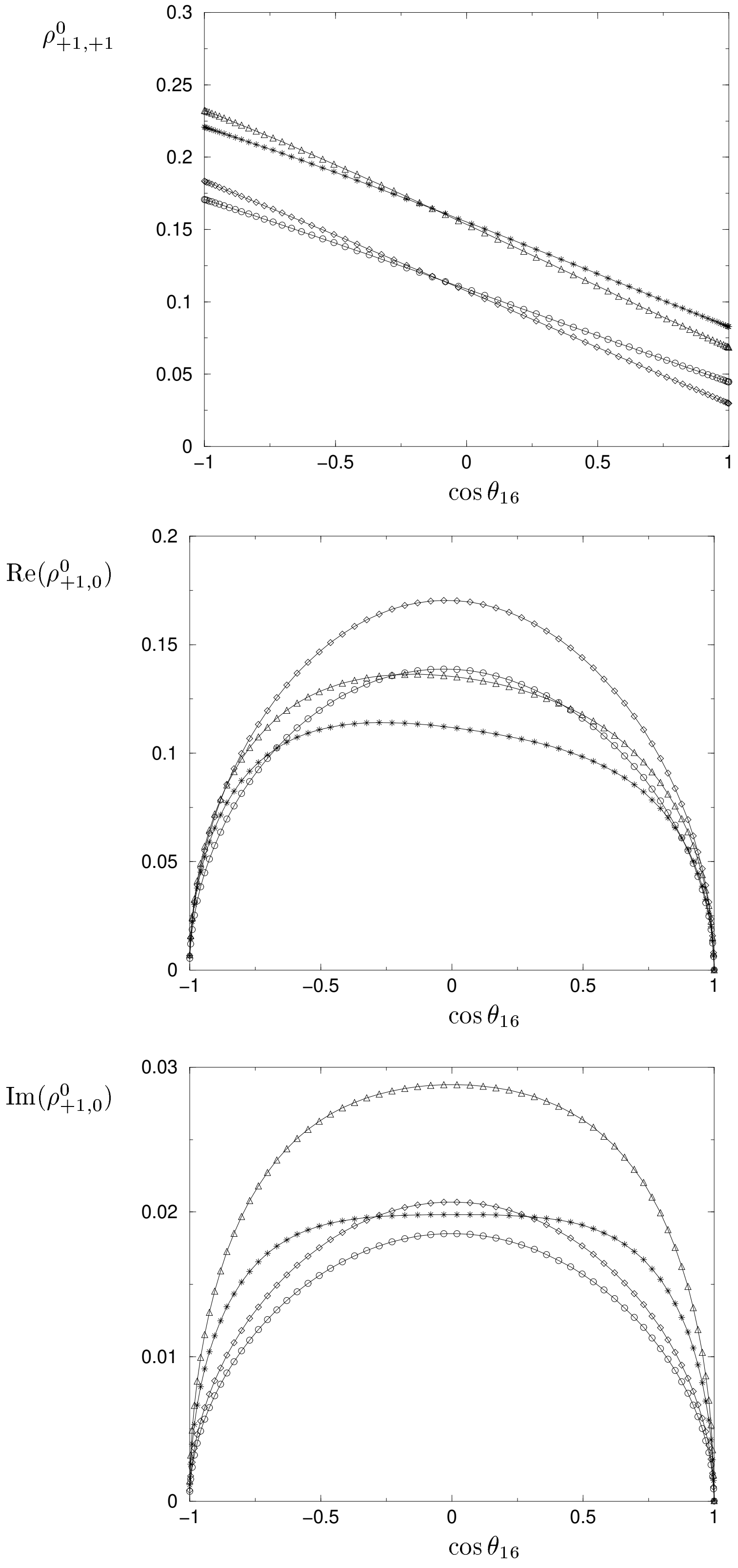


Abbildung 6.8: Dichtematrixelemente $\rho^0_{+1,+1}$, $\mathrm{Re}(\rho^0_{+1,0})$ und $\mathrm{Im}(\rho^0_{+1,0})$ für die Konfiguration $(-+)$. Den Symbolen sind jeweils folgende Phasenpaare $\{\phi_\mu, \phi_1\}$ zugeordnet:

$$
\begin{array}{lll}
\diamond \; : \; \{0, \frac{\pi}{4}\}, & & \triangle : \{0, \frac{3\pi}{4}\} \\
o \; : \; \{\frac{\pi}{4}, 0\}, & & * : \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}
\end{array}
$$

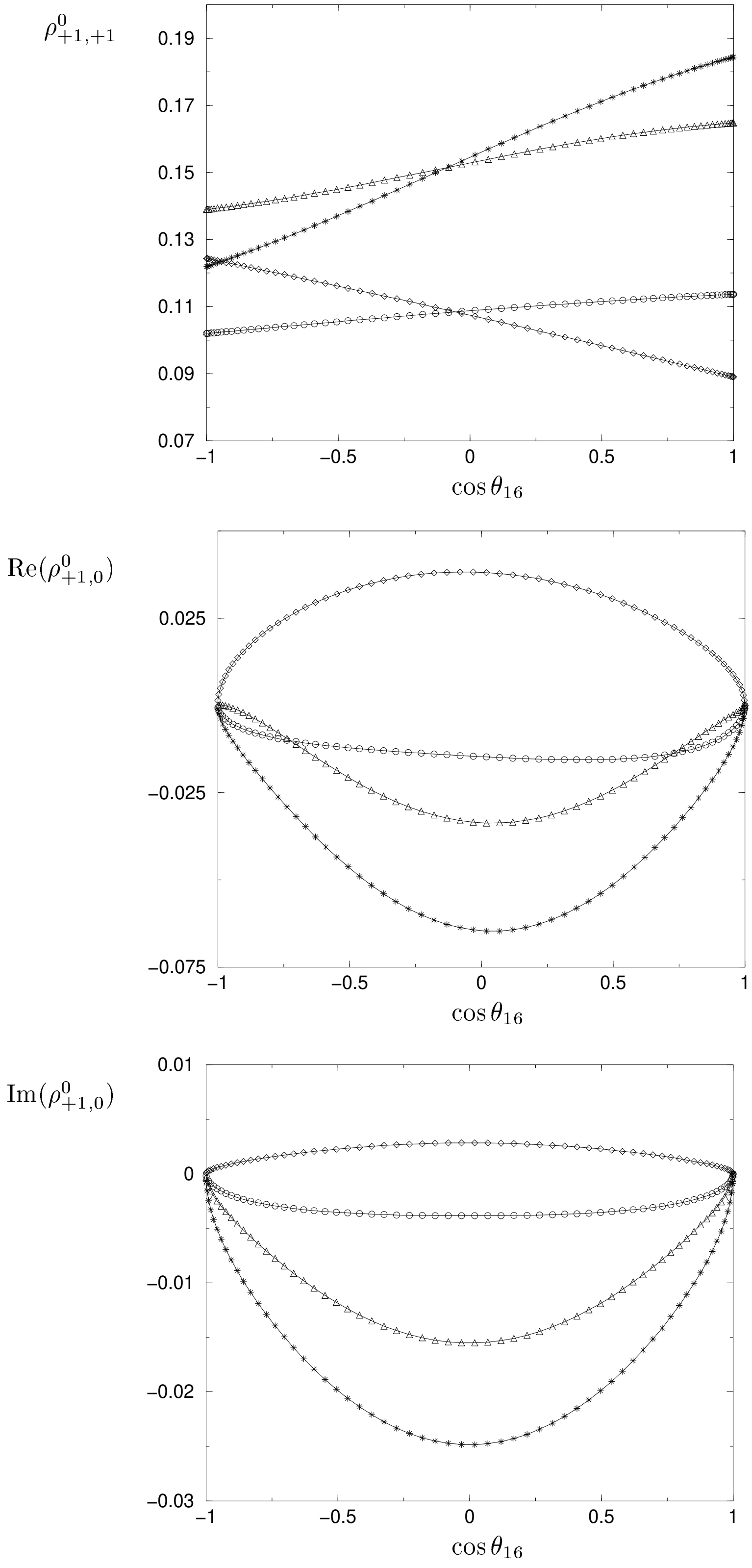


Abbildung 6.9: Dichtematrixelemente $\rho^0_{+1,+1}$, $\mathrm{Re}(\rho^0_{+1,0})$ und $\mathrm{Im}(\rho^0_{+1,0})$ für die Konfiguration (-0). Den Symbolen sind jeweils folgende Phasenpaare $\{\phi_\mu, \phi_1\}$ zugeordnet:

$$\diamond \;:\; \{0, \frac{\pi}{4}\}, \qquad \triangle : \{0, \frac{3\pi}{4}\}$$
$$o \;:\; \{\frac{\pi}{4}, 0\}, \qquad * : \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$$

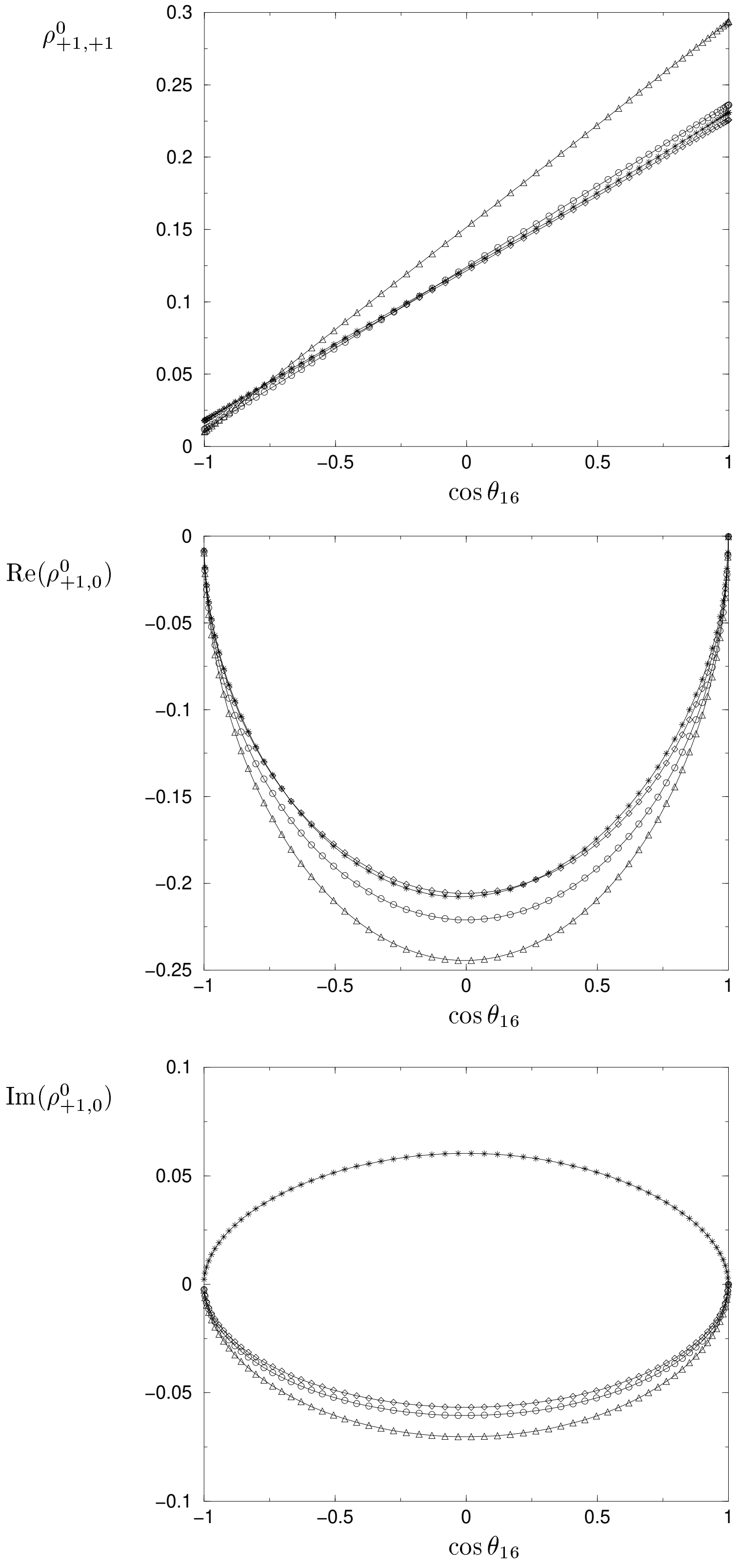


Abbildung 6.10: Dichtematrixelemente $\rho^0_{+1,+1}$, $\mathrm{Re}(\rho^0_{+1,0})$ und $\mathrm{Im}(\rho^0_{+1,0})$ für die Konfiguration (00). Den Symbolen sind jeweils folgende Phasenpaare $\{\phi_\mu, \phi_1\}$ zugeordnet:

$$
\begin{array}{lll}
\diamond \; : \; \{0, \frac{\pi}{2}\}, & \qquad & \triangle : \{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\} \\
o \; : \; \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\}, & \qquad & * : \{\frac{\pi}{2}, \pi\}
\end{array}
$$

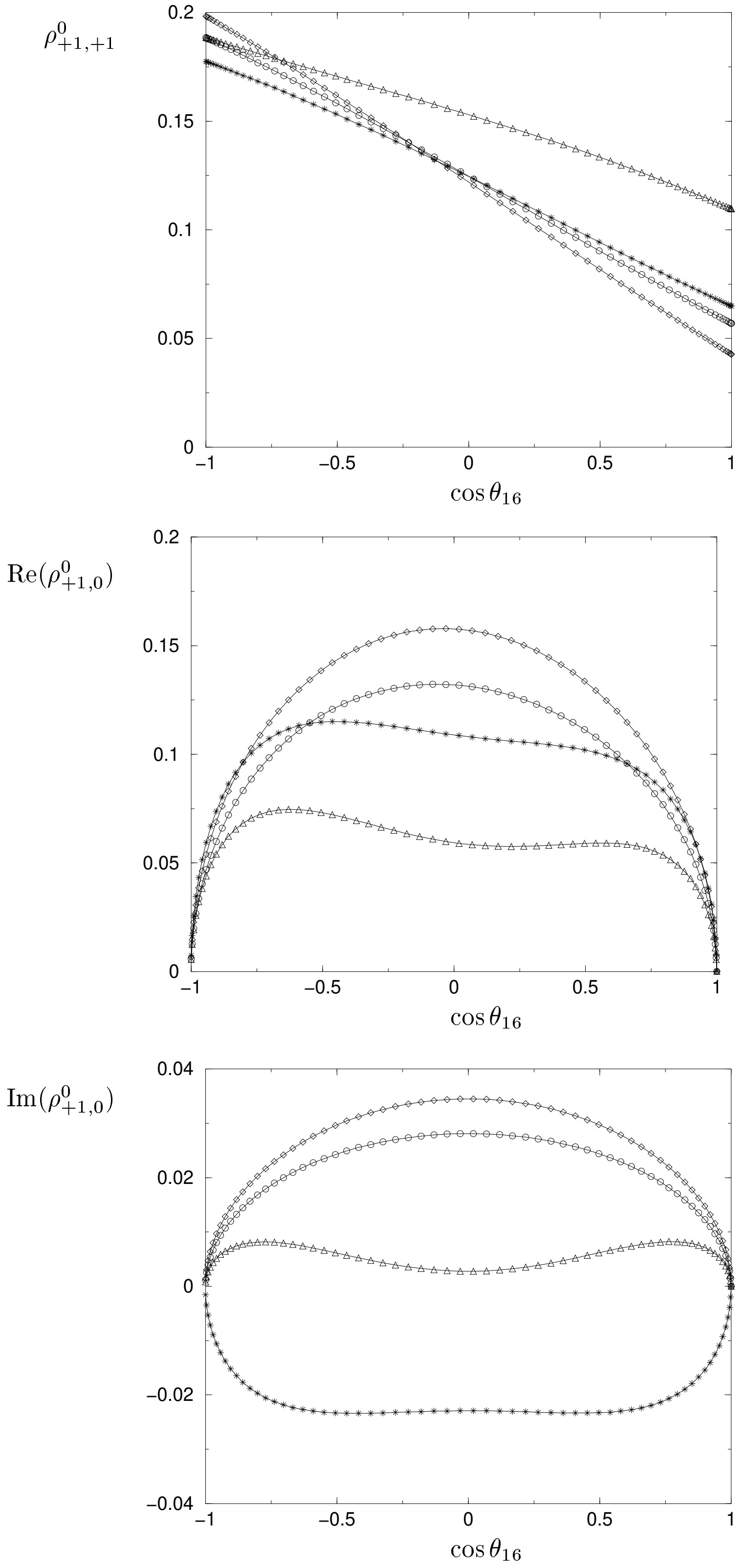


Abbildung 6.11: Dichtematrixelemente $\rho^0_{+1,+1}$, $\mathrm{Re}(\rho^0_{+1,0})$ und $\mathrm{Im}(\rho^0_{+1,0})$ für die Konfiguration $(-+)$. Den Symbolen sind jeweils folgende Phasenpaare $\{\phi_\mu, \phi_1\}$ zugeordnet:

$$\diamond \; : \; \{0, \frac{\pi}{4}\}, \qquad \triangle : \{0, \frac{3\pi}{4}\}$$
$$o \; : \; \{\frac{\pi}{4}, 0\}, \qquad * : \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$$

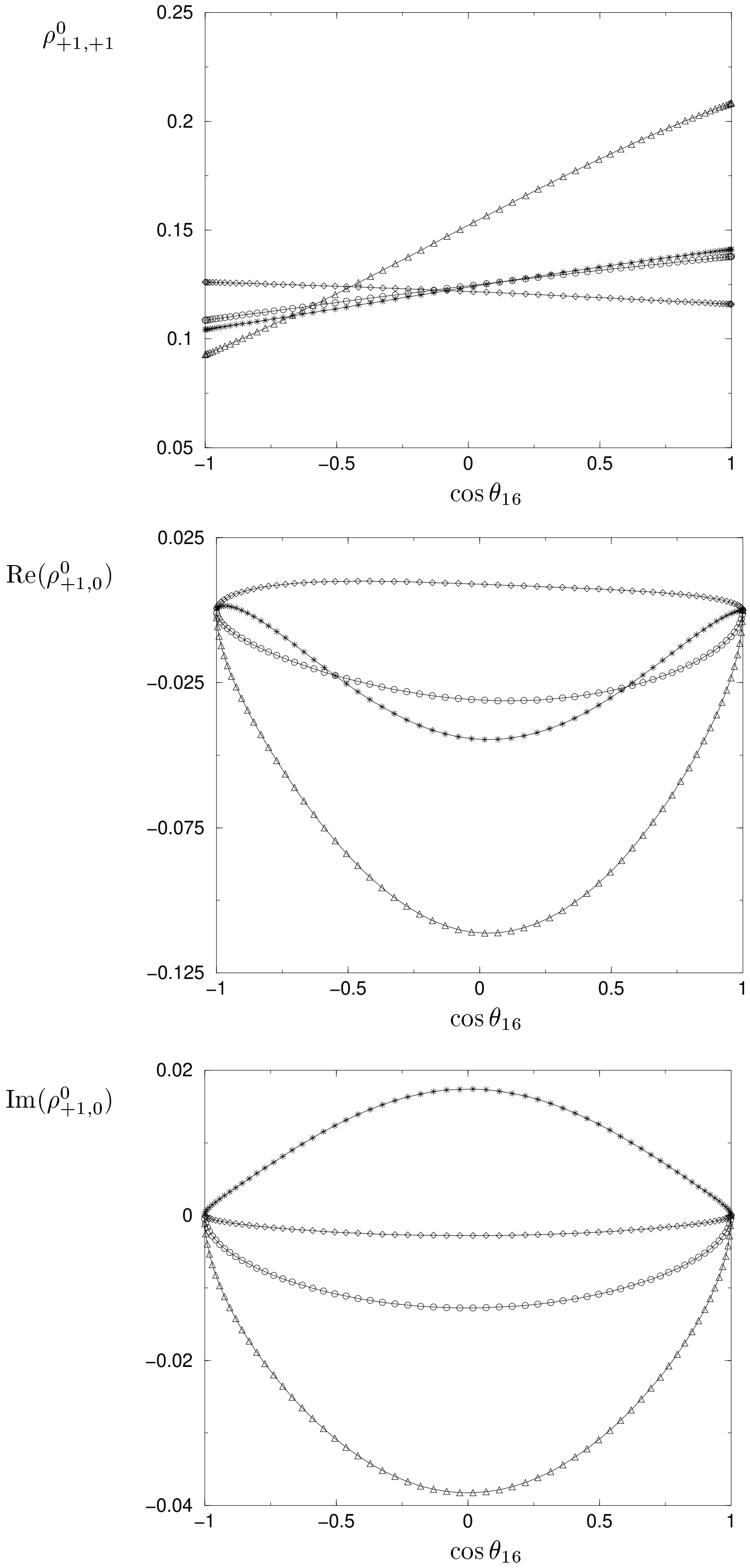


Abbildung 6.12: Dichtematrixelemente $\rho^0_{+1,+1}$, $\mathrm{Re}(\rho^0_{+1,0})$ und $\mathrm{Im}(\rho^0_{+1,0})$ für die Konfiguration (-0). Den Symbolen sind jeweils folgende Phasenpaare $\{\phi_\mu, \phi_1\}$ zugeordnet:

$$\diamond \; : \; \{0, \frac{\pi}{4}\}, \qquad \triangle : \{0, \frac{3\pi}{4}\}$$
$$o \; : \; \{\frac{\pi}{4}, 0\}, \qquad * : \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$$

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Die im analytischen Teil der Arbeit durchgeführte Berechnung der Produktionsdichtematrix ist mit den in Anlehnung an [30] eingeführten 'verallgemeinerten Ladungen' eventuell auch für die Produktion anderer Fermionen interessant[1], da die Ergebnisse kompakt und übersichtlich sind und durch Einsetzen der relevanten Propagatoren und Kopplungen an den zu betrachteten Prozess angepaßt werden können.
Die numerische Auswertung wurde für ein modifiziertes mSUGRA-Szenario durchgeführt. Dieses Szenario ist durch den zu kleinen Wert für die Masse des leichtesten Higgs-Bosons experimentell bereits ausgeschloßen; es wurde dennoch als Grundlage der numerischen Auswertung gewählt, da es sich um ein gängiges Referenzszenario handelt und somit den Vergleich der Ergebnisse mit anderen Berechnungen zuläßt.
Da insbesondere die Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts und der Dichtematrixelemente des im Zerfall entstehenden Z-Bosons untersucht werden sollten, haben wir uns auf 25 Kombinationen der Phasen von M_1 und μ und einen Wert der Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 500\,GeV$ beschränkt.
Die totalen Wirungsquerschnitte liegen im fb-Bereich und sind somit relativ klein. Dem steht allerdings eine gut erkennbare Ereignis-Signatur gegenüber: ein isoliertes Z-Boson (bzw. Zerfallsprodukte, deren invariante Masse der Masse des Z-Bosons entspricht) und die 'missing energy' der beiden aus Produktion und Zerfall stammenden LSPs. Für ein derartiges Signal ist kaum mit Untergrund, insbesondere aus Standardmodell-Prozessen, zu rechnen. Ein SUSY-Untergrundereignis ist z.B.

$$e^+ + e^- \to \tilde{\chi}_1^0 + \tilde{\chi}_3^0, \quad \tilde{\chi}_3^0 \to \tilde{\chi}_2^0 + Z, \quad \tilde{\chi}_2^0 \to \tilde{\chi}_1^0 + \nu + \bar{\nu}.$$

Die Auswirkungen endlicher Phasen von M_1 und μ auf den betrachteten Prozeß sind am deutlichsten im totalen Wirkungsquerschnitt erkennbar, der für die betrachteten Phasenkombinationen über eine Größenordnung variiert. Dabei haben wir festgestellt, daß verschiedene Phasenkombinationen zu demselben Wert für den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt führen können. Werden jedoch Messungen mit unterschiedlichen Strahlpolarisationen durchgeführt, so lassen sich mit den jeweils gemessenen Wirkungsquerschnitten einige dieser Mehrdeutigkeiten beseitigen und erlauben somit zumindest eine Einschränkung der Bereiche im SUSY-Parameterraum, in denen ϕ_μ und ϕ_1 liegen können. Dabei erwies es sich als vorteilhaft, sowohl den Elektron- als auch den Positronstrahl zu polarisieren, da dies zum einen - insbesondere für die Konfiguration $(+-)$ - eine deutlichere Steigerung des Wirkungsquerschnitts zur Folge hat und andererseits die Phasenkombinationen etwas besser

[1] Falls sich die Amplituden durch Fierztransformation auf die angegebene Form bringen lassen!

voneinander zu unterscheiden sind, was an den jeweiligen Verhältnissen des polarisierten zum unpolarisierten Wirkungquerschnitt ablesbar ist (siehe Tab.6.3, 6.4).
Die Beiträge, die der differentielle Wirkungsquerschnitt und die Polarisationseigenschaften des Z-Bosons zur Bestimmung bzw. Einschränkung der Phasen ϕ_μ und ϕ_1 leisten können, sind wohl - zumindest für die gewählten Werte der SUSY-Parameter - vernachlässigbar. Dies liegt an den meist geringen Unterschieden, die sich beim Vergleich dieser Größen für Phasenkombinationen mit ähnlichem totalen Wirkungsquerschnitt ergeben. Angesichts der kleinen Wirkungsquerschnitte sind daher keine meßbaren Effekte zu erwarten.
Da in die hier nicht berechnete Zerfallswinkelverteilung verschiedene Kombinationen von Dichtematrixelementen eingehen (Beispiele hierzu sind in [20] zu finden), wäre es interessant zu untersuchen, inwiefern die Symmetrieeigenschaften der Dichtematrix des Z-Bosons (siehe Kap. 4.3) die für einzelne Elemente vorhandenen Unterschiede verstärken oder abschwächen. Auch wenn nennenswerte Unterschiede in den Dichtematrixelementen bei den hier betrachteten Szenarien eher die Ausnahme waren, wäre es im Hinblick auf andere Szenarien, in denen sich eventuell deutlichere Unterschiede und/oder höhere Wirkungsquerschnitte ergeben oder hinsichtlich anderer Zweiteilchenzerfälle (z.B. von Charginos) von Nutzen, dieser Frage nachzugehen.

Interessant wäre es auch Prozesse zu betrachten, bei denen beide erzeugten Teilchen jeweils in zwei Teilchen zerfallen und die Spinkorrelationen zwischen den Zerfallsprodukten beider Zerfälle zu untersuchen.

Literaturverzeichnis

[1] G. Jungman, M. Kamionkowski, K. Griest, Supersymmetric Dark Matter, *Phys. Rep.* 267 (1996), 195-373, sowie *hep-ph/9506380*

[2] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, *Addison-Wesley Publishing Company*, Reading, Mass. 1995

[3] L.H.Ryder, Quantum Field Theory (2nd edition), *Cambridge University Press*, Cambridge 1996

[4] F. Mandl, G. Shaw, Quantenfeldtheorie, *Aula-Verlag*, Wiesbaden 1993.

[5] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* 22 (1961) 579.
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 19 (1967) 1264.
A. Salam, in Elementary Particle Theory, ed. N. Svartholm, *Almqvist and Wiksell*, Stockholm (1968) 367.

[6] M. Drees, An introduction to Supersymmetry, *hep-ph/9611409*

[7] R. Barate et al. (ALEPH Collaboration), hep-ex/0011045 (to appear in Phys. Lett. **B**);
M. Acciarri et al. (L3 Collaboration), hep-ex/0011043 (to appear in Phys. Lett. **B**)

[8] R. Haag, J. Lopuszanski, M. Sohnius, *Nucl. Phys.* B88 (1975) 257.

[9] J. Wess, B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B70** (1974) 39.
J. Wess, B. Zumino, *Phys. Lett.* **49B** (1974) 52.

[10] H. E. Haber, G. L. Kane, *Phys. Rep.* 117 (1985) 75.

[11] S. P. Martin, A Supersymmetry Primer, *hep-ph/9709356*

[12] H. J. W. Müller-Kirsten, A. Wiedemann, Supersymmetry, *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, Singapur 1987.

[13] Particle Data Group, *Eur. Phys. J.* C3 (1998) 1

[14] L. Girardello, M. T. Grisaru, *Nucl. Phys.* B194 (1982) 65.

[15] H. Baer, X. Tata, FSU-HEP-921222.

[16] L. J. Hall, J. Polchinski, *Phys. Lett.* 152B (1985) 335.

[17] A. Bartl, M. Dittmar, W. Majerotto, Proceedings of the Workshop e^+e^- Collisions at 500 GeV. The Physics Potential, Part B, Munich, Annecy, Hamburg, Ed. by P. Zerwas, DESY 92-123B (1992) 603.

[18] H. Haber, Proceedings of the 21st SLAC Summer Institute on Particle Physics: Spin Structure in High Energy Processes, SLAC Stanford, CA, 26 July-6 August 1993

[19] W. Hollik, *Diplomarbeit* Würzburg 1976

[20] J.Werle, Relativistic Theory of Reactions, *PWN - Polish Scientific Publishers*, Warschau 1966

[21] G. Moortgart-Pick, *Dissertation* Würzburg 1999

[22] G. Moortgart-Pick, *Diplomarbeit* Würzburg 1996

[23] A.Bartl, H.Fraas, W.Majerotto, *Nucl. Phys.* **B 278** (1986) 1

[24] A. Bartl, H. Fraas, W. Majerotto, N. Oshimo, *Phys. Rev.* D40 (1989) 1594.

[25] E. Byckling, K. Kajantie, Particle Kinematics, *John Wiley* & *Sons*, London 1973.

[26] I. Bronstein, K. Semendjajev, Taschenbuch der Mathematik, *Verlag Harri Deutsch, Thun*, Frankfurt a. M. 1993

[27] H. Pilkuhn, The Interactions of Hadrons, *North-Holland Publishing Company*, Amsterdam 1967.

[28] G. Moortgat-Pick, H. Fraas, A. Bartl, W. Majerotto, *Eur. Phys. J.* C9 (1999) 521.

[29] L.B.Okun, Leptons and Quarks, *North-Holland Personal Library* Amsterdam 1984

[30] S.Y. Choi, A. Djouadi, M. Guchait, J. Kalinowski, H.S. Song, P.M. Zerwas, *hep-ph/0002033*

[31] The L3 Collaboration, *hep-ex/0001016*

[32] A. Masiero, L. Silvestrini, in: Perspectives on Supersymmetry, ed. G.L. Kane, *World Scientific*, Singapore 1998

[33] T. Ibrahim, P. Nath, *Phys. Lett.* **B418**, 98 (1998); *Phys. Rev.* **D57**, 478 (1998)

[34] S. Ambrosanio, G. A. Blair, P. Zerwas, ECFA-Desy LC-Workshop, 1998 (http://www.hep.ph.rhbnc.ac.uk/ blair/susy)

[35] M. Brhlik, G.J. Good, G.L. Kane, *hep-ph/9810457 v2(29.1.2001)*

Anhang A

Anhang

A.1 Definitionen und Konventionen

Allen Berechnungen wurden natürliche Einheiten zugrunde gelegt, d.h. es wurde

$$\hbar = c = 1 \tag{A.1}$$

gesetzt und es wird die Einsteinsche Summenkonvention benutzt, d.h. über doppelt vorkommende Indizes wird summiert.
Da alle Energien und Massen mit der Einheit [GeV] in die Rechnung eingehen, benötigt man für den Wirkungsquerschnitt den Umrechnungsfaktor von $(\mathrm{GeV})^{-2}$ auf pb:

$$1\ (\mathrm{GeV})^{-2} \mathrel{\hat{=}} 3.8939 \cdot 10^8\ \mathrm{pb} \tag{A.2}$$

Es wird der folgende metrische Tensor verwendet:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

Für Vierervektoren gilt:

$$\text{kontravarianter Vektor}: a^\mu = \begin{pmatrix} a^0 \\ \vec{a} \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

$$\text{kovarianter Vektor}: a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu = \begin{pmatrix} a^0 \\ -\vec{a} \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

Damit erhält man für das Skalarprodukt zweier Vierervektoren:

$$a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \vec{a}\vec{b} \tag{A.6}$$

Die Dirac-Matrizen erfüllen folgende Clifford-Algebra:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{A.7}$$

In der Dirac-Darstellung haben sie die Form:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{A.8}$$

mit den Pauli-Matrizen σ^j:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

Die Matrix γ^5 ist gegeben durch:

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

Unabhängig von ihrer Darstellung haben die Dirac-Matrizen folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mu\dagger} &= \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 && \text{(A.11)}\\
{\gamma^0}^2 &= 1 && \text{(A.12)}\\
\gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 && \text{(A.13)}\\
\gamma^{5\dagger} &= \gamma^5 && \text{(A.14)}\\
{\gamma^5}^2 &= 1 && \text{(A.15)}\\
\{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= 0 && \text{(A.16)}
\end{aligned}$$

Das Kreuz steht für das hermitesch Konjugierte.
Der Levi-Civita-Tensor ist definiert durch:

$$\epsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} \equiv \begin{cases} +1 & \text{für gerade Permutionen von 0123} \\ -1 & \text{für ungerade Permutionen von 0123} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{A.17}$$

wobei:

$$\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} \tag{A.18}$$

Produkte von ϵ-Tensoren mit Vierervektoren werden abgekürzt durch:

$$[abcd] := \epsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} a^\mu b^\nu c^\varrho d^\sigma \tag{A.19}$$

Die Ladungskonjugationsmatrix C ist gegeben durch:

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.20}$$

mit den Eigenschaften

$$C^\dagger = C^T = -C, \quad C^2 = -I \tag{A.21}$$

A.2 Spurtheoreme

Die bei der Berechnung der Zerfallsamplitude auftretenden Spuren wurden mit Hilfe der folgenden Spurtheoreme gelöst:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(1) &= 4 && \text{(A.22)}\\
\mathrm{Tr}(\gamma_i\gamma_j\ldots\gamma_n) &= 0 \quad \text{wenn } n \text{ ungerade} && \text{(A.23)}\\
\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} && \text{(A.24)}\\
\mathrm{Tr}(\not a\ \not b) &= 4(ab) && \text{(A.25)}\\
\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\varrho\gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu}g^{\varrho\sigma} - g^{\mu\varrho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\varrho}) && \text{(A.26)}\\
\mathrm{Tr}(\not a\ \not b\ \not c\ \not d) &= 4[(ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc)] && \text{(A.27)}\\
\mathrm{Tr}(\not 1\ \not 2\ldots \not 2n) &= (12)\mathrm{Tr}(\not 3\ldots \not 2n) - (13)\mathrm{Tr}(\not 2\ \not 4\ldots \not 2n) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \ldots + (12n)\mathrm{Tr}(\not{2} \ldots \not{2}n-1) && \text{(A.28)}\\
\mathrm{Tr}(\gamma^5) &= 0 && \text{(A.29)}\\
\mathrm{Tr}(\gamma^5 \gamma_\mu \gamma_\nu) &= 0 && \text{(A.30)}\\
\mathrm{Tr}(\gamma^5 \not{a} \not{b}) &= 0 && \text{(A.31)}\\
\mathrm{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\varrho \gamma_\sigma) &= 4i\epsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} && \text{(A.32)}\\
\mathrm{Tr}(\gamma_5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) &= 4i[abcd] && \text{(A.33)}\\
\mathrm{Tr}(\gamma_5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} \not{e} \not{f}) &= 4i\{(ab)[cdef] - (ac)[bdef] + (bc)[adef] + \\
& \qquad +(ef)[abcd] - (df)[abce] + (de)[abcf]\} && \text{(A.34)}
\end{aligned}
$$

Allgemein gelten für Spurberechnungen folgende Relationen:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A+B) &= \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B), && \text{(A.35)}\\
\mathrm{Tr}(\alpha A) &= \alpha \mathrm{Tr}(A), && \text{(A.36)}\\
\mathrm{Tr}(AB) &= \mathrm{Tr}(BA). && \text{(A.37)}
\end{aligned}
$$

A.3 Fierz-Transformationen

Ein Lorentz-Skalar kann auf fünf verschiedene Arten aus vier Spinoren a, b, c, d gebildet werden [29]. Dabei ergeben sich:

- skalarartige Größen: $[\bar{a}b][\bar{c}\,d]$,
- vektorartige: $[\bar{a}\gamma^\mu b][\bar{c}\,\gamma_\mu d]$,
- tensorartige: $[\bar{a}\sigma^{\mu\nu} b][\bar{c}\,\sigma_{\mu\nu} d]$,
- axialvektorartige: $[\bar{a}\gamma^\mu\gamma^5 b][\bar{c}\,\gamma_\mu\gamma^5 d]$,
- und pseudoskalarartige: $[\bar{a}\gamma^5 b][\bar{c}\,\gamma^5 d]$.

Diese bilden ein vollständiges System, so daß eine Größe nach den anderen entwickelt werden kann.

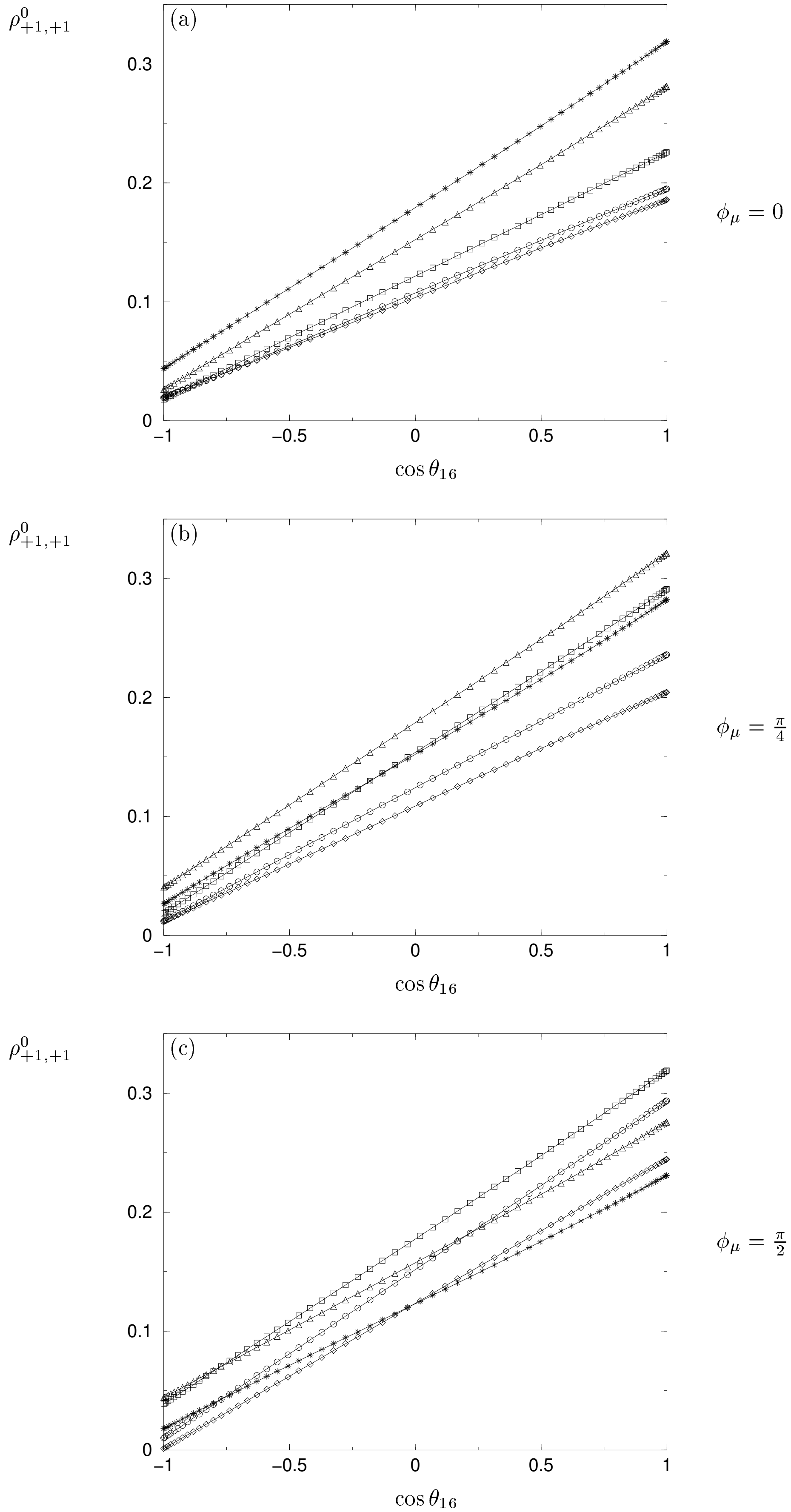
$$
[\bar{a}O^i b][\bar{c}\,O_i d] = \sum_{j=S}^{P} c_{ij} [\bar{a}O^j b][\bar{c}\,O_j d] \qquad \text{(A.38)}
$$

wobei $i = S, V, T, A, P$ und $O^S = 1$, $O^V = \gamma^\mu$, $O^T = \sigma^{\mu\nu}$, $O^A = \gamma^\mu\gamma^5$ und $O^P = \gamma^5$.
Die Werte für die Koeffizienten c_{ij} kann man Tabelle A.1 entnehmen:

	S	V	T	A	P
S	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
V	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
T	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$
A	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1
P	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tabelle A.1: Die Koeffizienten c_{ij} der Fierz Transformation

A.4 Dichtematrixelemente des Z-Bosonen



$\rho^0_{+1,+1}$
(a)
0.3
0.2
0.1
0
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = 0$
$\rho^0_{+1,+1}$
(b)
0.3
0.2
0.1
0
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = \frac{\pi}{4}$
$\rho^0_{+1,+1}$
(c)
0.3
0.2
0.1
0
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = \frac{\pi}{2}$

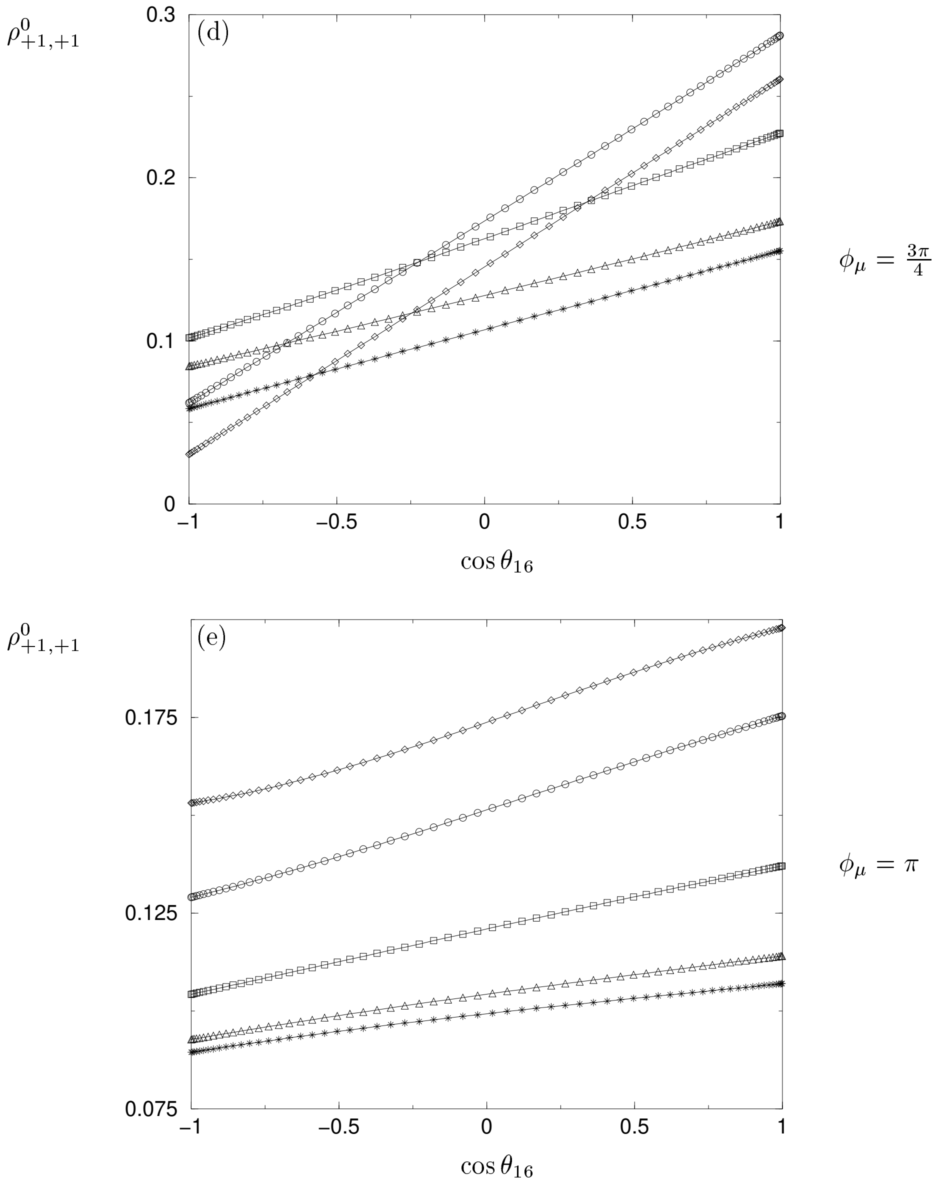
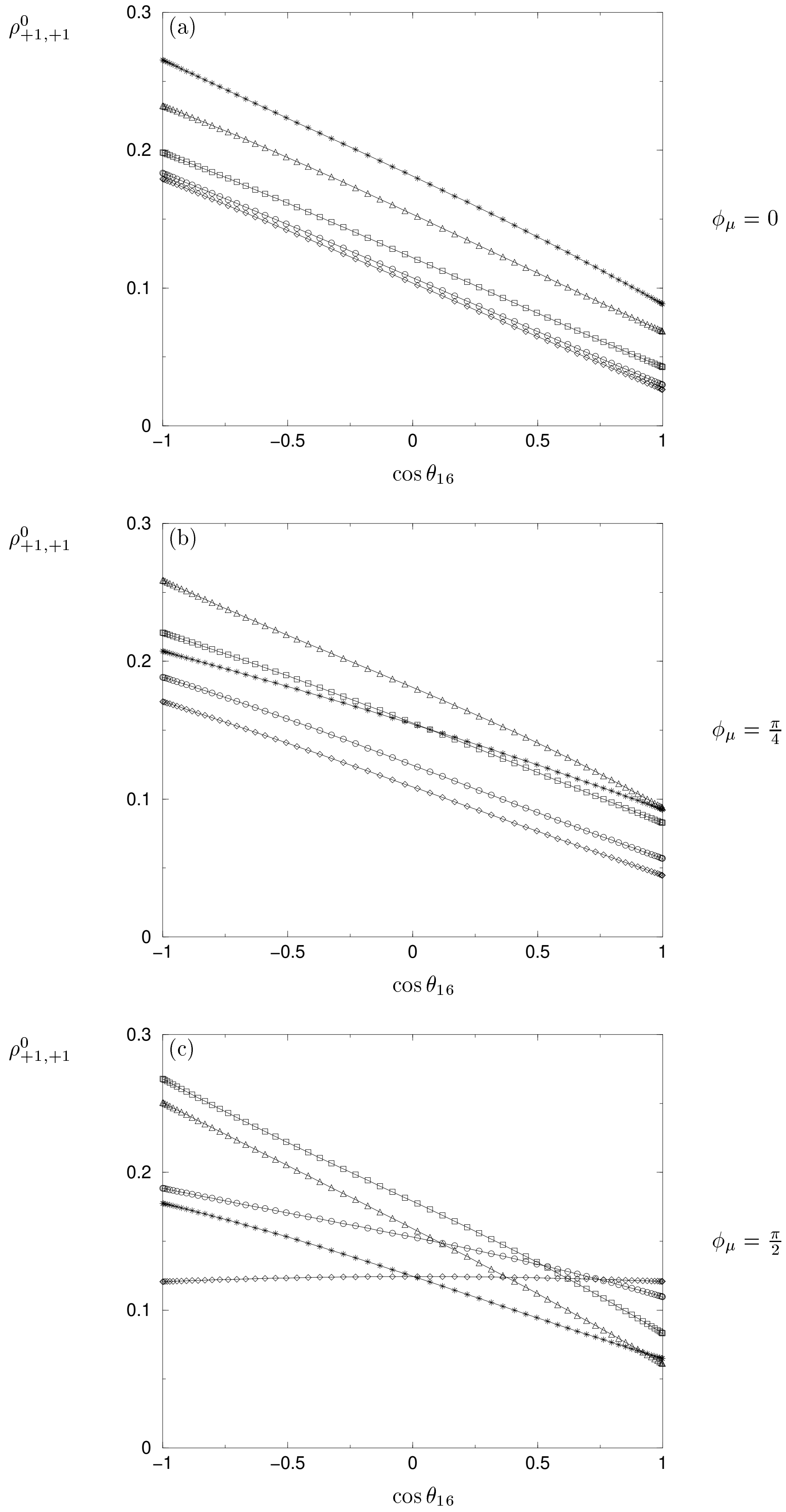
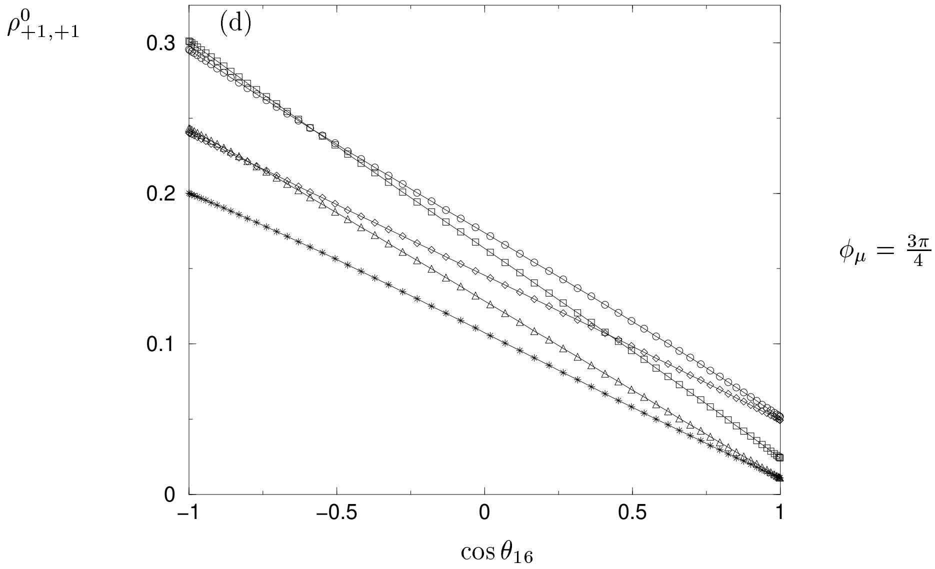


Abbildung A.1: Normiertes Dichtematrixelement $\rho^0_{+1,+1}$ des Z-Bosons für die Konfiguration (00)

Den Symbolen sind jeweils folgende Phasen von M_1 zugeordnet:

$$
\begin{array}{lcl}
\Diamond & : & \phi_1 = 0 \\
\bigcirc & : & \phi_1 = \frac{\pi}{4} \\
\Box & : & \phi_1 = \frac{\pi}{2} \\
\triangle & : & \phi_1 = \frac{3\pi}{4} \\
* & : & \phi_1 = \pi
\end{array}
$$


$\rho^0_{+1,+1}$
(a)
$\phi_\mu = 0$
(b)
$\phi_\mu = \frac{\pi}{4}$
(c)
$\phi_\mu = \frac{\pi}{2}$
$\cos\theta_{16}$
0
0.1
0.2
0.3
−1
−0.5
0
0.5
1



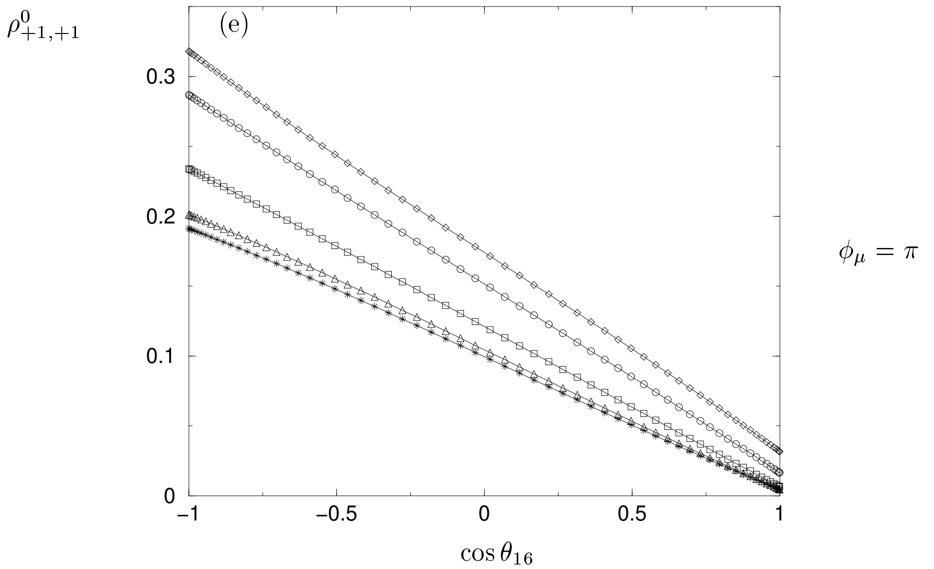
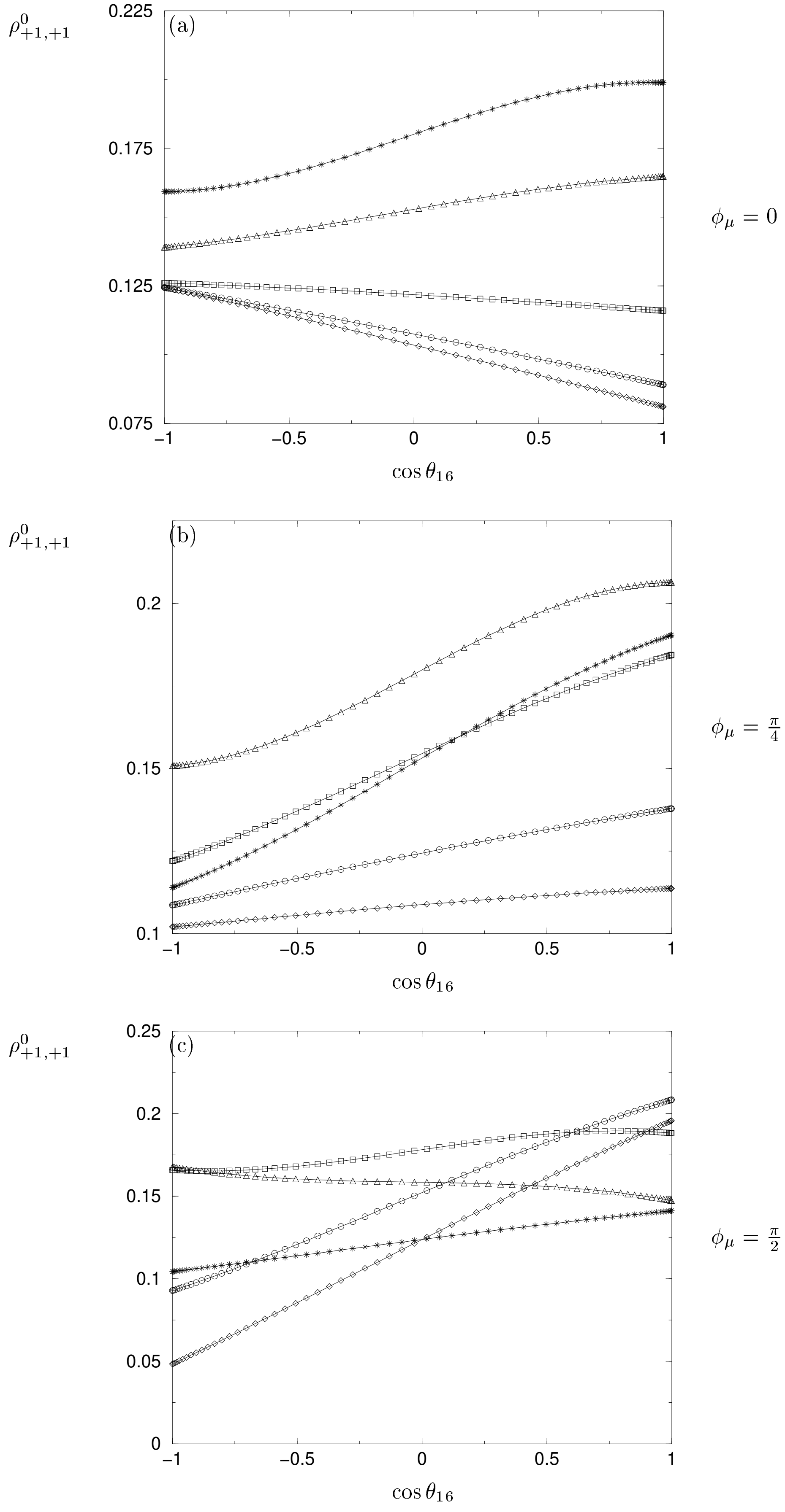


Abbildung A.2: Normiertes Dichtematrixelement $\rho^0_{+1,+1}$ des Z-Bosons für die Konfiguration $(-+)$

Den Symbolen sind jeweils folgende Phasen von M_1 zugeordnet:

$$\begin{aligned}
\diamond &: \quad \phi_1 = 0\\
\bigcirc &: \quad \phi_1 = \frac{\pi}{4}\\
\square &: \quad \phi_1 = \frac{\pi}{2}\\
\triangle &: \quad \phi_1 = \frac{3\pi}{4}\\
* &: \quad \phi_1 = \pi
\end{aligned}$$



$\rho^0_{+1,+1}$
(a)
0.225
0.175
0.125
0.075
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = 0$
$\rho^0_{+1,+1}$
(b)
0.2
0.15
0.1
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = \frac{\pi}{4}$
$\rho^0_{+1,+1}$
(c)
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = \frac{\pi}{2}$

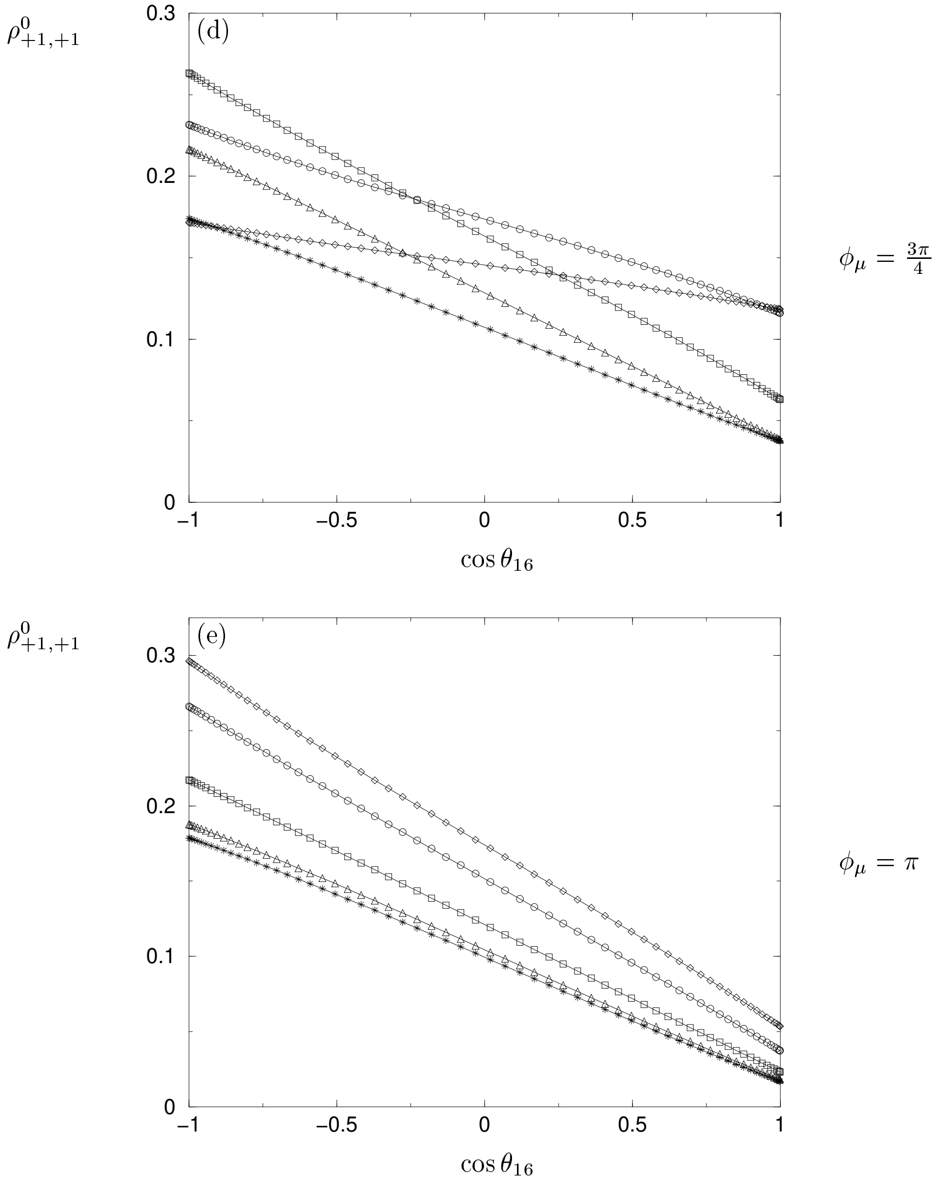
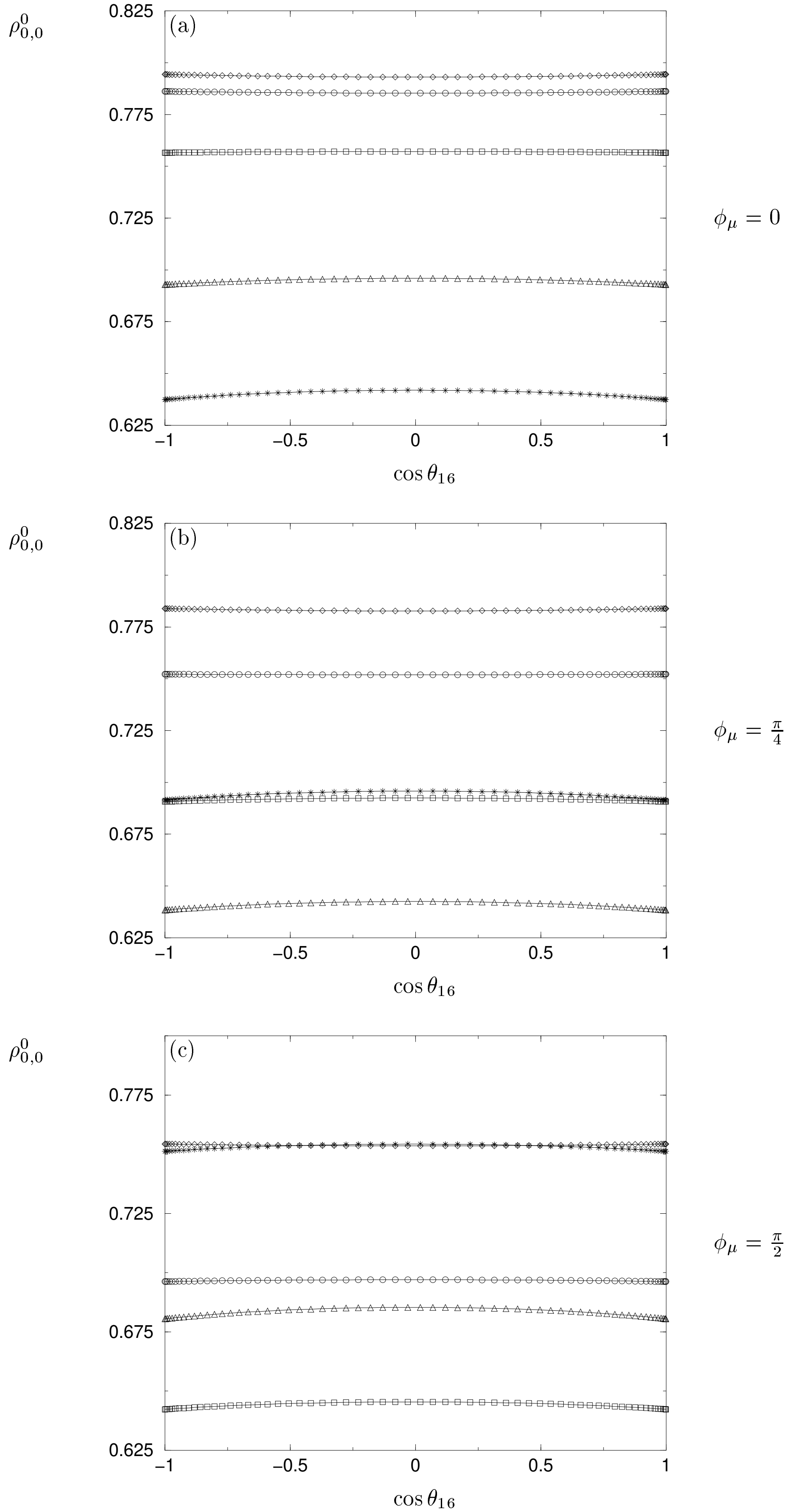


Abbildung A.3: Normiertes Dichtematrixelement $\rho^0_{+1,+1}$ des Z-Bosons für die Konfiguration (-0)

Den Symbolen sind jeweils folgende Phasen von M_1 zugeordnet:

$$\begin{aligned}
\diamond &: \quad \phi_1 = 0 \\
\bigcirc &: \quad \phi_1 = \frac{\pi}{4} \\
\square &: \quad \phi_1 = \frac{\pi}{2} \\
\triangle &: \quad \phi_1 = \frac{3\pi}{4} \\
* &: \quad \phi_1 = \pi
\end{aligned}$$



$\rho^0_{0,0}$
(a)
$\phi_\mu = 0$
(b)
$\phi_\mu = \frac{\pi}{4}$
(c)
$\phi_\mu = \frac{\pi}{2}$
0.825
0.775
0.725
0.675
0.625
–1
–0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$

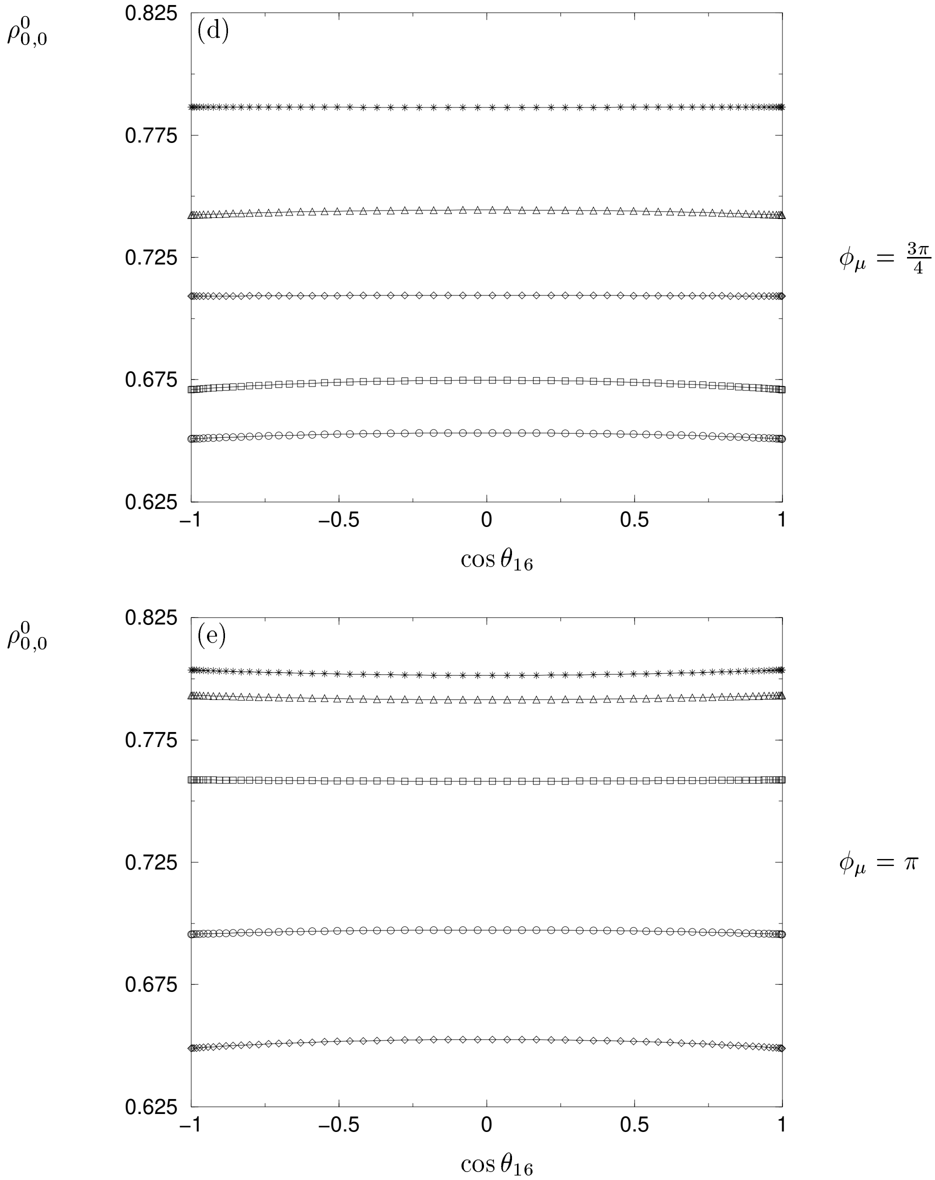
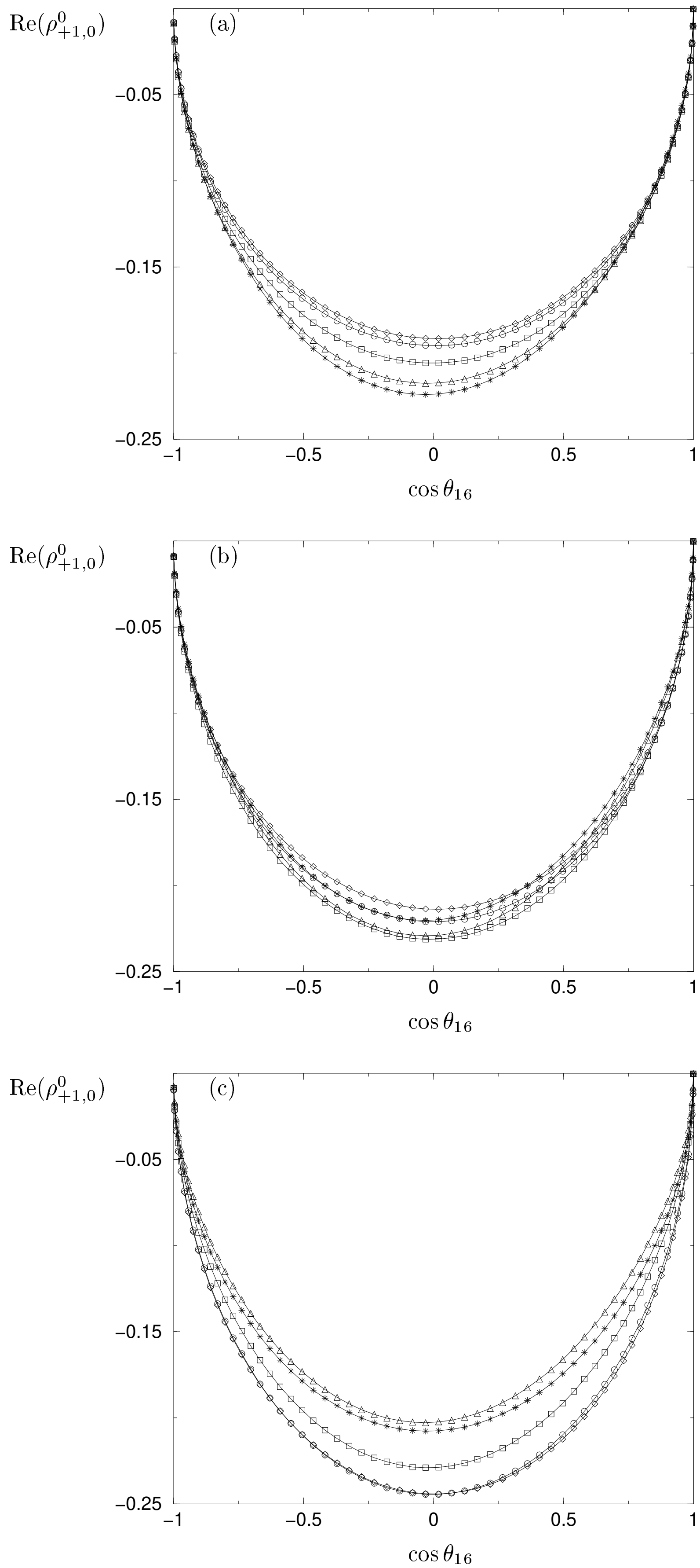


Abbildung A.4: Normiertes Dichtematrixelement $\rho^0_{0,0}$ des Z-Bosons für die Konfiguration (00)

Den Symbolen sind jeweils folgende Phasen von M_1 zugeordnet:

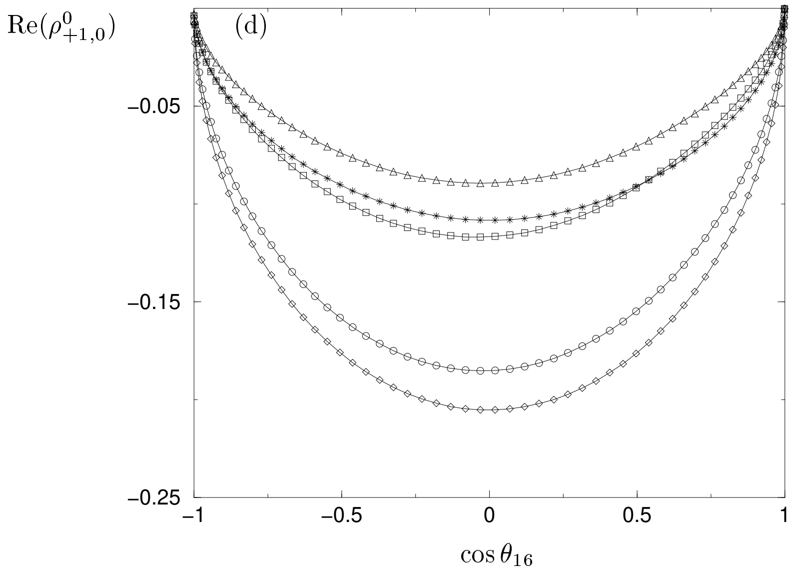
$$\begin{array}{ccl}
\diamond & : & \phi_1 = 0 \\
\bigcirc & : & \phi_1 = \frac{\pi}{4} \\
\square & : & \phi_1 = \frac{\pi}{2} \\
\triangle & : & \phi_1 = \frac{3\pi}{4} \\
* & : & \phi_1 = \pi
\end{array}$$



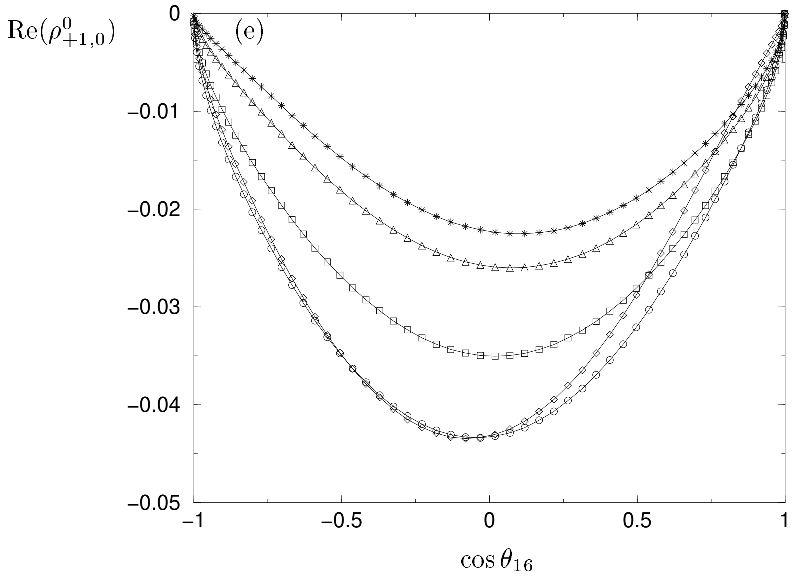
$\phi_\mu = 0$

$\phi_\mu = \frac{\pi}{4}$

$\phi_\mu = \frac{\pi}{2}$



$\phi_\mu = \frac{3\pi}{4}$



$\phi_\mu = \pi$

Abbildung A.5: Realteil des normierten Dichtematrixelements $\rho^0_{+1,0}$ des Z-Bosons für die Konfiguration (00)

Den Symbolen sind jeweils folgende Phasen von M_1 zugeordnet:

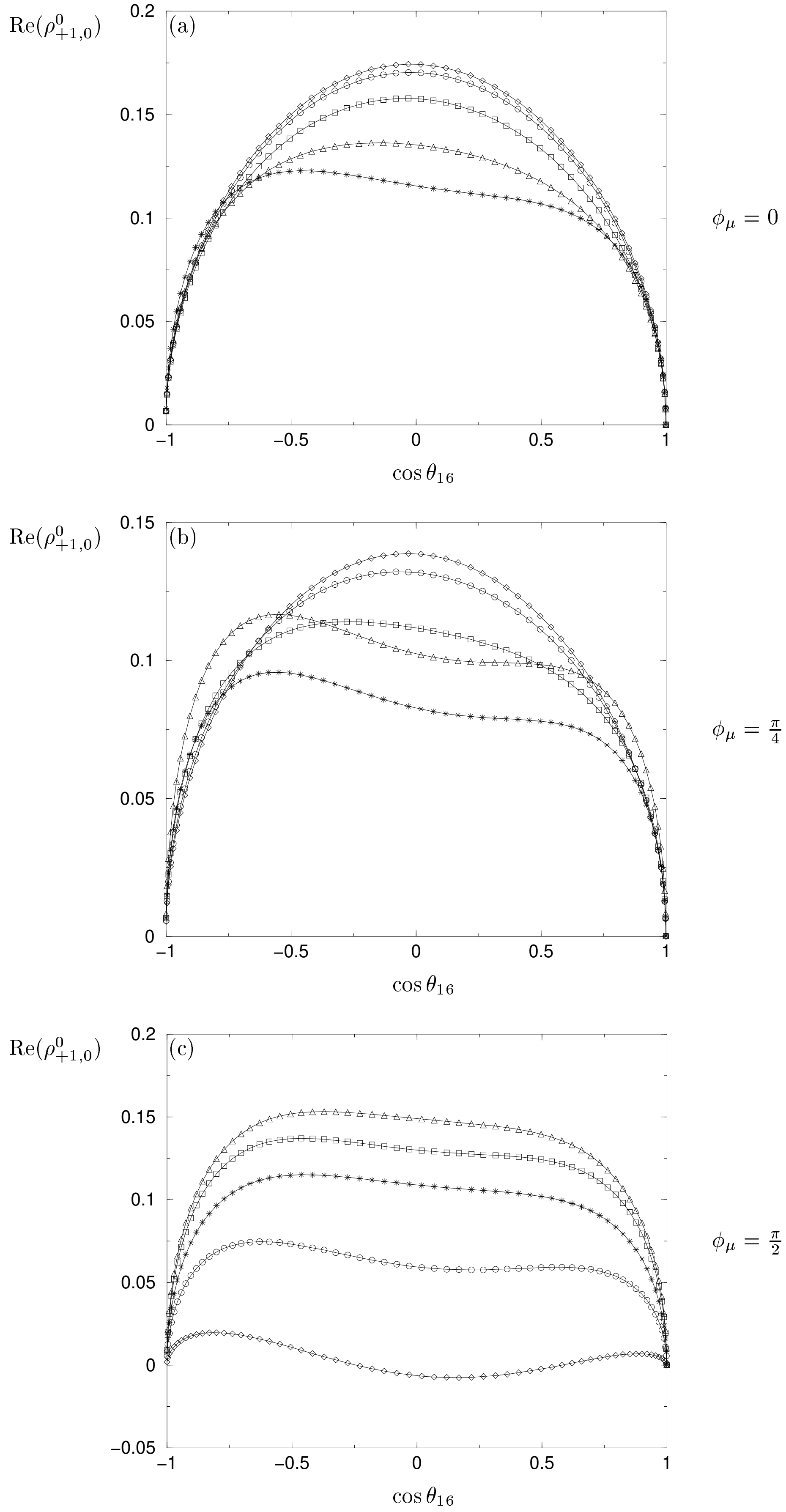
$\diamond$: $\phi_1 = 0$

$\bigcirc$: $\phi_1 = \frac{\pi}{4}$

$\square$: $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$

$\triangle$: $\phi_1 = \frac{3\pi}{4}$

$*$: $\phi_1 = \pi$



$\mathrm{Re}(\rho^0_{+1,0})$
(a)
$\phi_\mu = 0$
$\cos\theta_{16}$
$\mathrm{Re}(\rho^0_{+1,0})$
(b)
$\phi_\mu = \frac{\pi}{4}$
$\cos\theta_{16}$
$\mathrm{Re}(\rho^0_{+1,0})$
(c)
$\phi_\mu = \frac{\pi}{2}$
$\cos\theta_{16}$

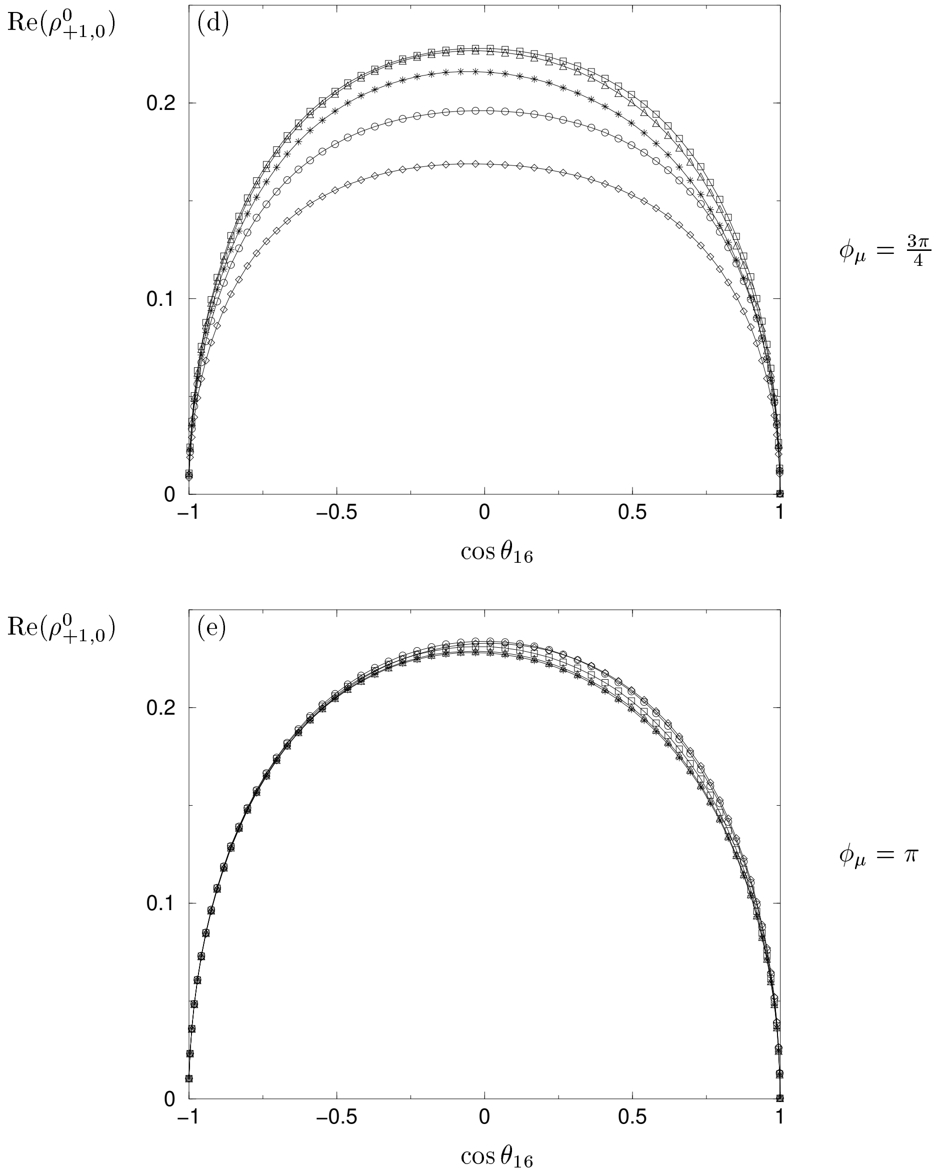
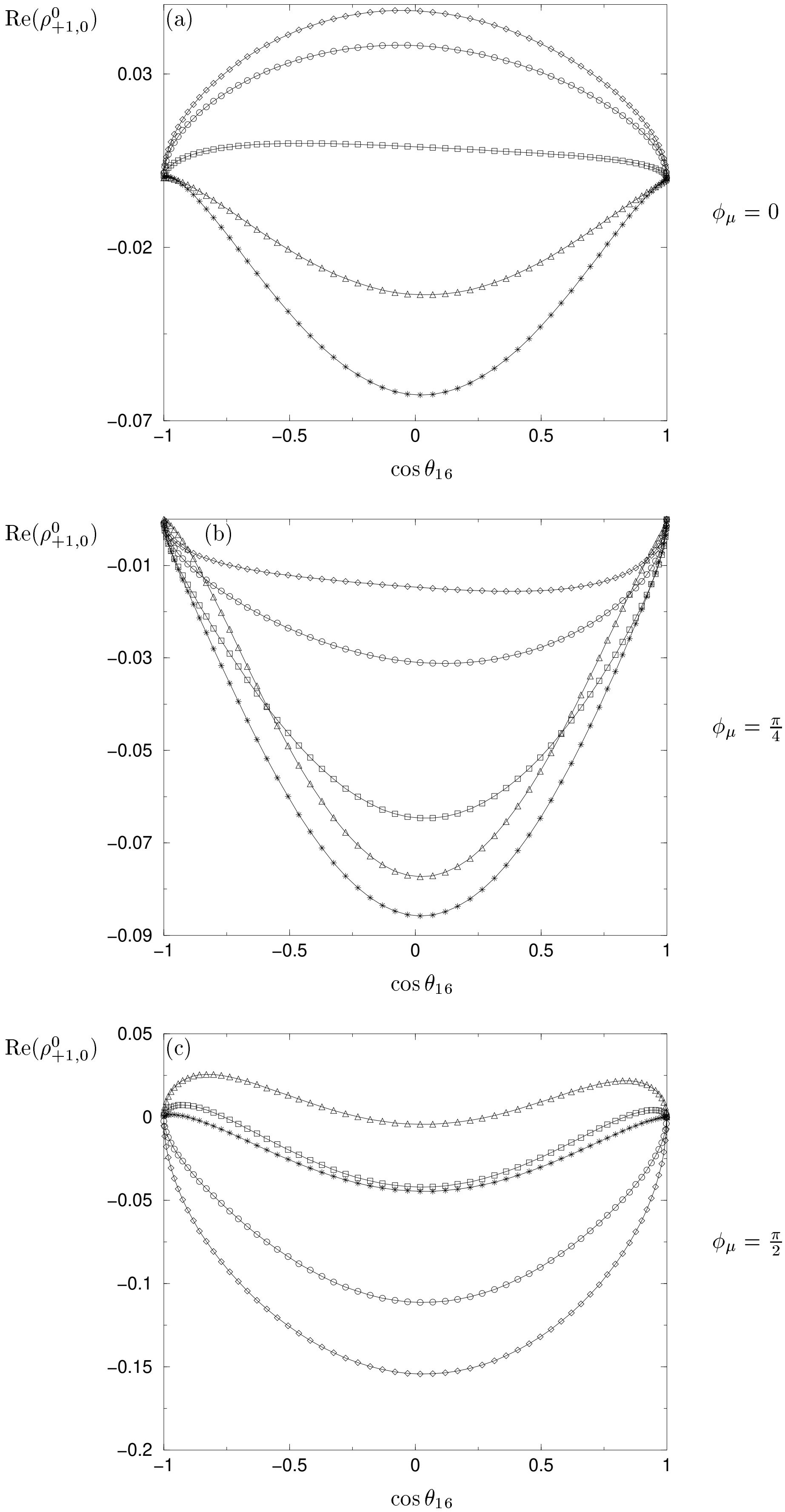


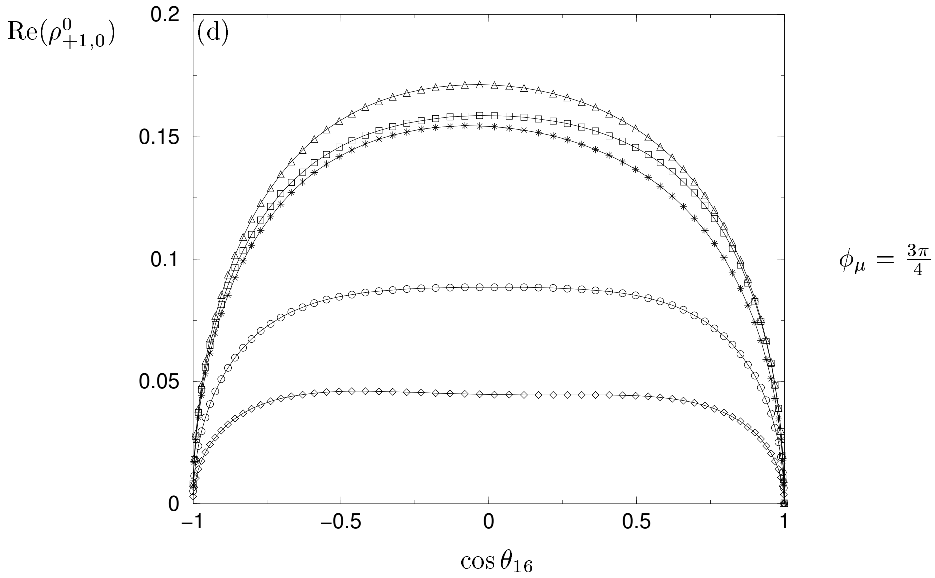
Abbildung A.6: Realteil des normierten Dichtematrixelements $\rho^0_{+1,0}$ des Z-Bosons für die Konfiguration $(-+)$

Den Symbolen sind jeweils folgende Phasen von M_1 zugeordnet:

$$\begin{aligned} \diamond &: \quad \phi_1 = 0 \\ \bigcirc &: \quad \phi_1 = \frac{\pi}{4} \\ \square &: \quad \phi_1 = \frac{\pi}{2} \\ \triangle &: \quad \phi_1 = \frac{3\pi}{4} \\ * &: \quad \phi_1 = \pi \end{aligned}$$



$\mathrm{Re}(\rho^0_{+1,0})$
(a)
0.03
−0.02
−0.07
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = 0$
$\mathrm{Re}(\rho^0_{+1,0})$
(b)
−0.01
−0.03
−0.05
−0.07
−0.09
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = \frac{\pi}{4}$
$\mathrm{Re}(\rho^0_{+1,0})$
(c)
0.05
0
−0.05
−0.1
−0.15
−0.2
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = \frac{\pi}{2}$



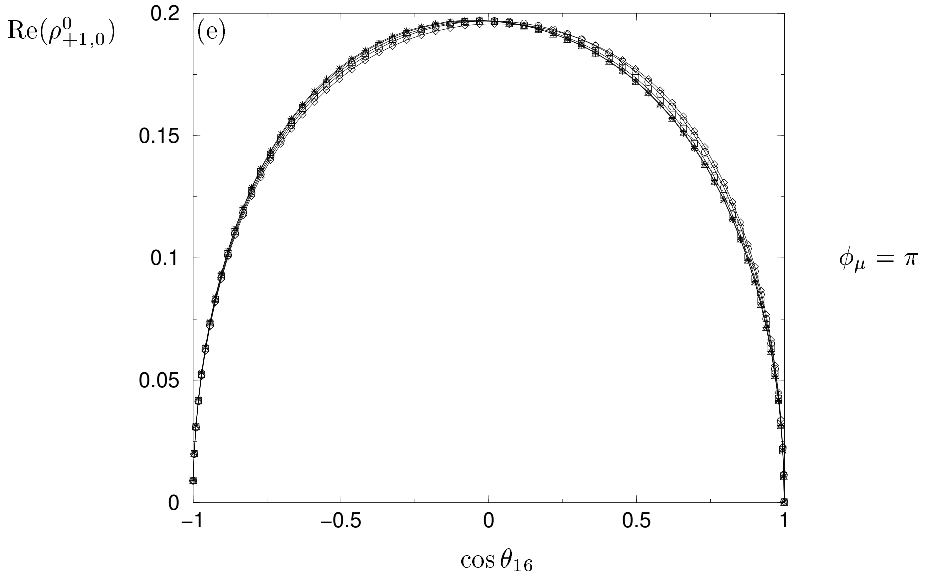
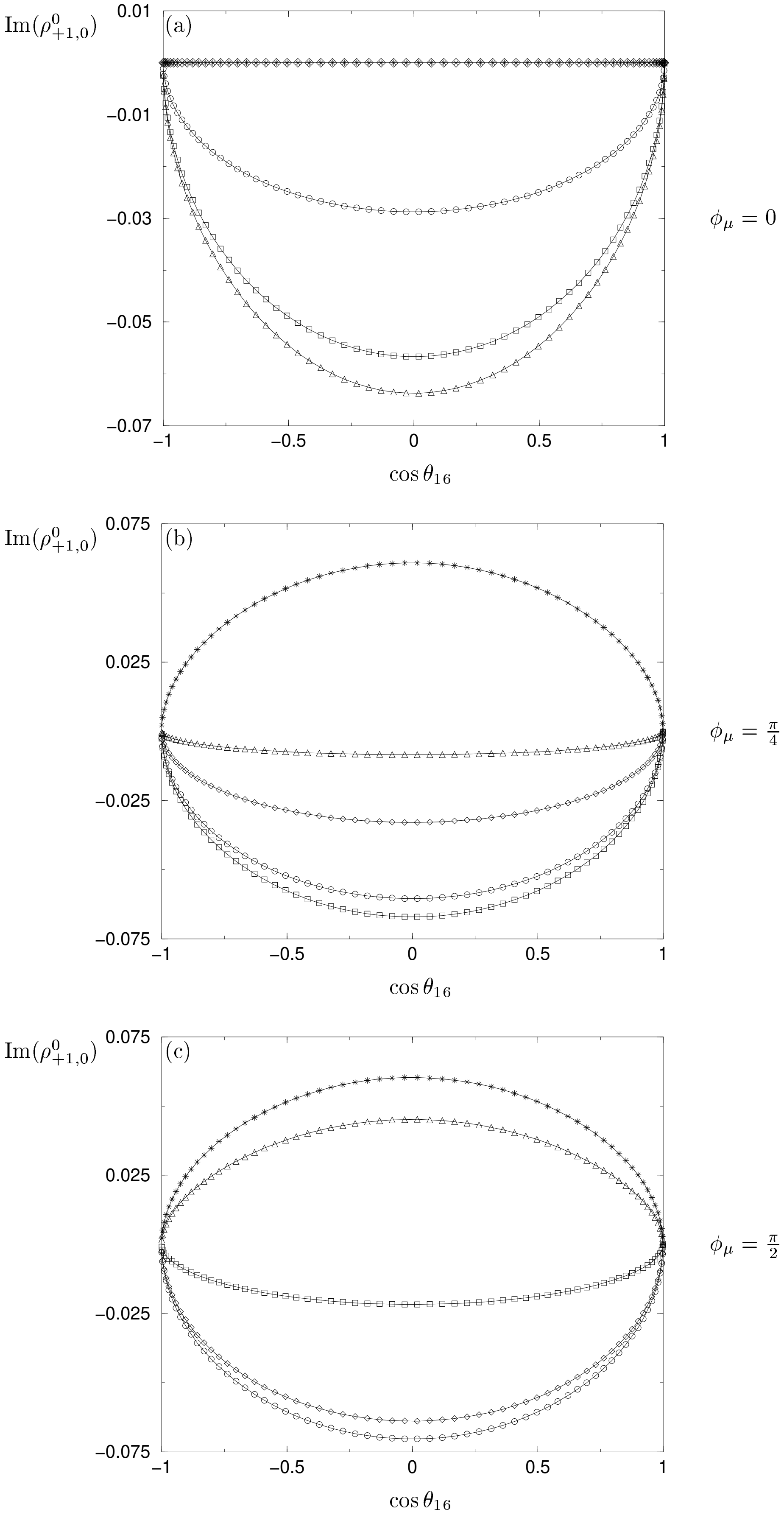


Abbildung A.7: Realteil des normierten Dichtematrixelements $\rho^0_{+1,0}$ des Z-Bosons für die Konfiguration (-0)

Den Symbolen sind jeweils folgende Phasen von M_1 zugeordnet:

$$\begin{array}{ccl} \diamond & : & \phi_1 = 0 \\ \bigcirc & : & \phi_1 = \dfrac{\pi}{4} \\ \square & : & \phi_1 = \dfrac{\pi}{2} \\ \triangle & : & \phi_1 = \dfrac{3\pi}{4} \\ * & : & \phi_1 = \pi \end{array}$$


(a)
$\mathrm{Im}(\rho^0_{+1,0})$
0.01
−0.01
−0.03
−0.05
−0.07
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = 0$
(b)
$\mathrm{Im}(\rho^0_{+1,0})$
0.075
0.025
−0.025
−0.075
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = \frac{\pi}{4}$
(c)
$\mathrm{Im}(\rho^0_{+1,0})$
0.075
0.025
−0.025
−0.075
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = \frac{\pi}{2}$

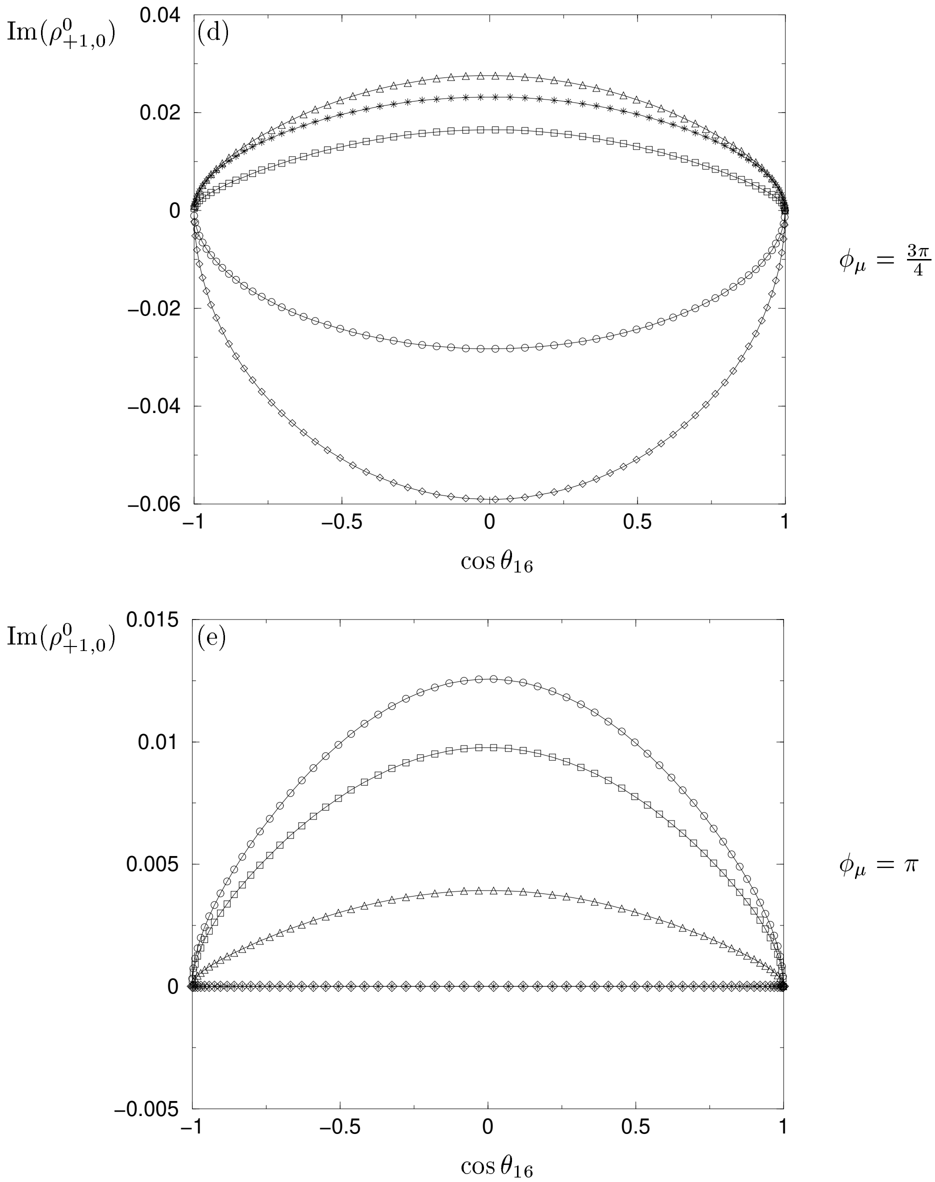
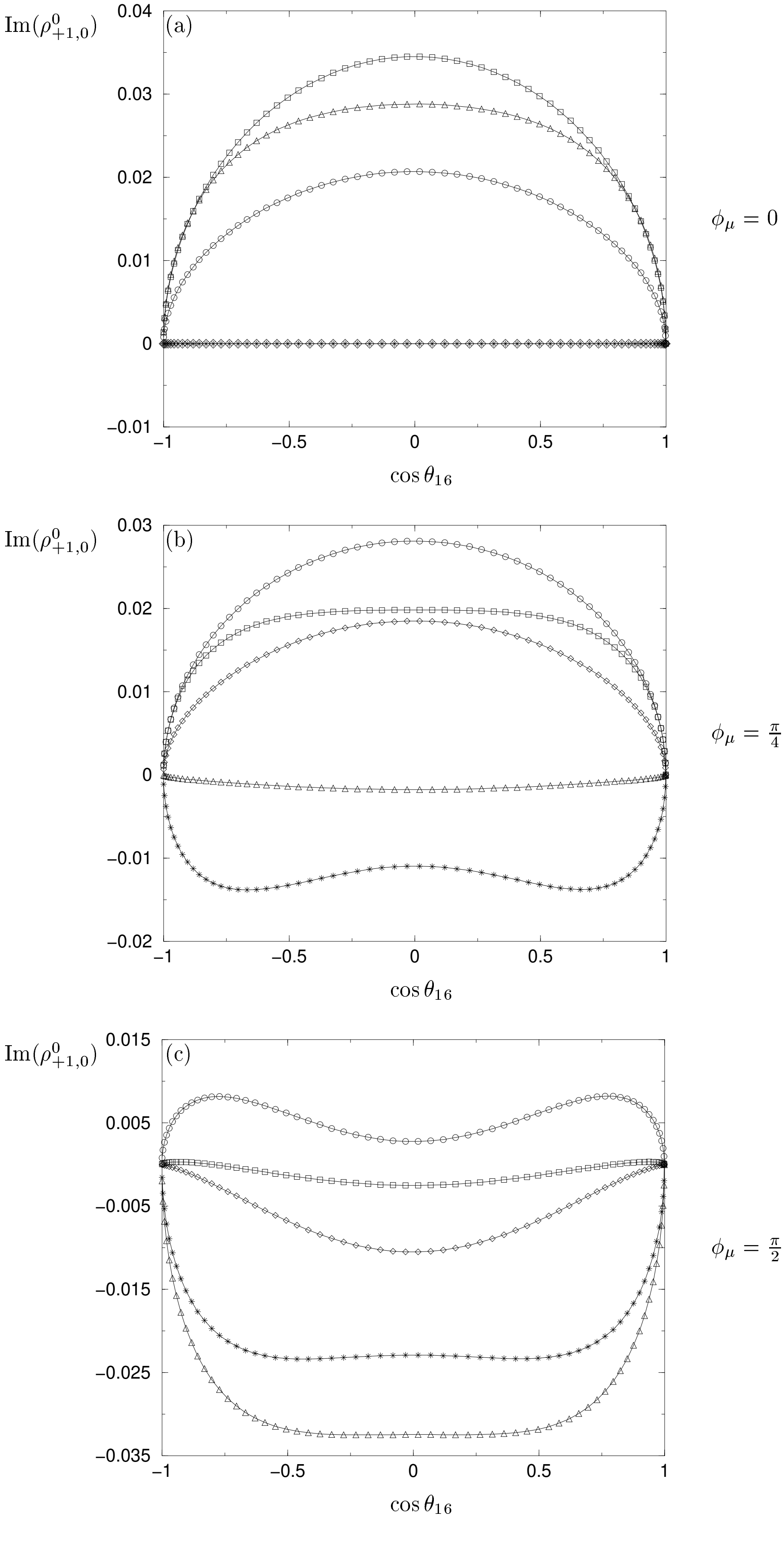


Abbildung A.8: Imaginärteil des normierten Dichtematrixelements $\rho^0_{+1,0}$ des Z-Bosons für die Konfiguration (00)

Den Symbolen sind jeweils folgende Phasen von M_1 zugeordnet:

$$\begin{array}{ccl}
\diamond & : & \phi_1 = 0 \\
\bigcirc & : & \phi_1 = \dfrac{\pi}{4} \\
\square & : & \phi_1 = \dfrac{\pi}{2} \\
\triangle & : & \phi_1 = \dfrac{3\pi}{4} \\
* & : & \phi_1 = \pi
\end{array}$$



Im($\rho^0_{+1,0}$)
(a)
0.04
0.03
0.02
0.01
0
–0.01
–1
–0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = 0$
Im($\rho^0_{+1,0}$)
(b)
0.03
0.02
0.01
0
–0.01
–0.02
–1
–0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = \frac{\pi}{4}$
Im($\rho^0_{+1,0}$)
(c)
0.015
0.005
–0.005
–0.015
–0.025
–0.035
–1
–0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = \frac{\pi}{2}$

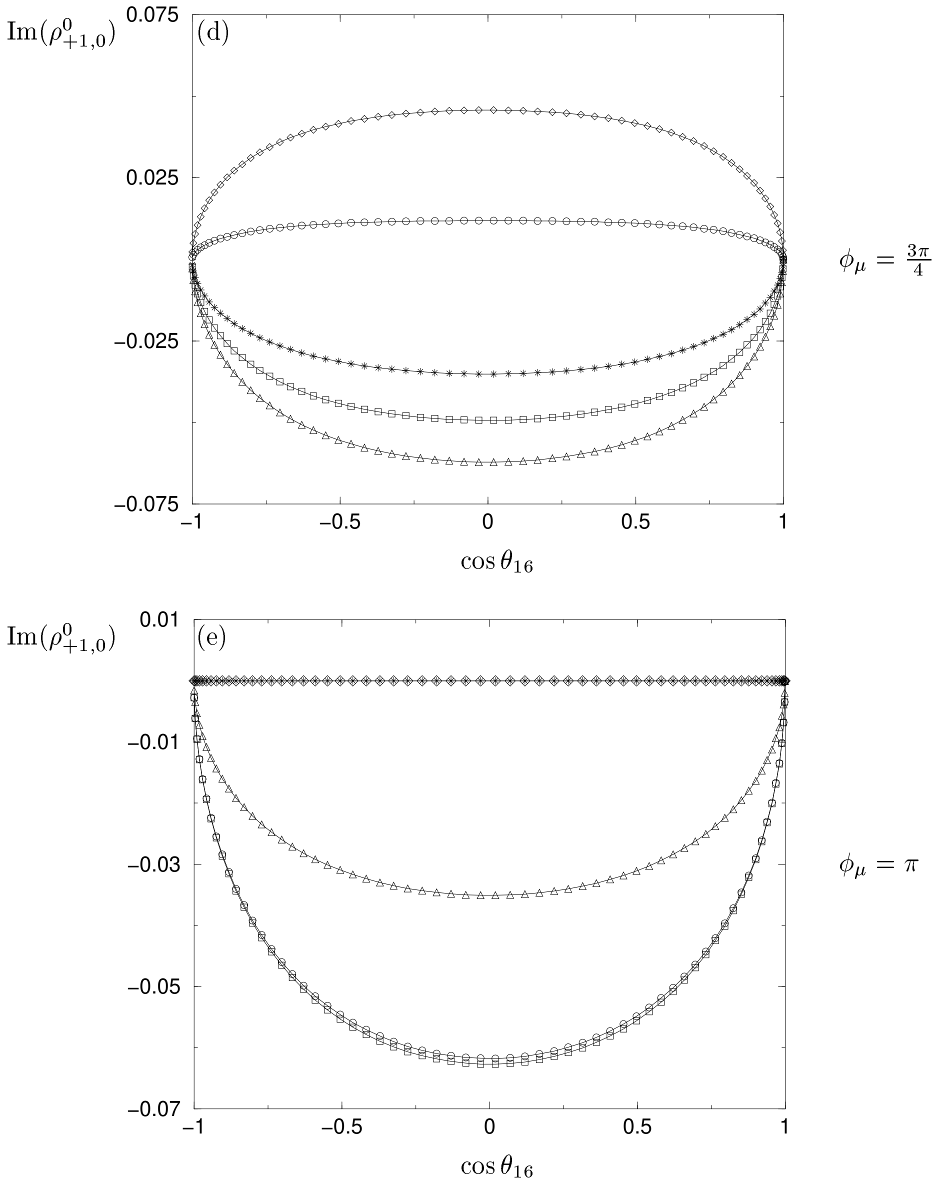
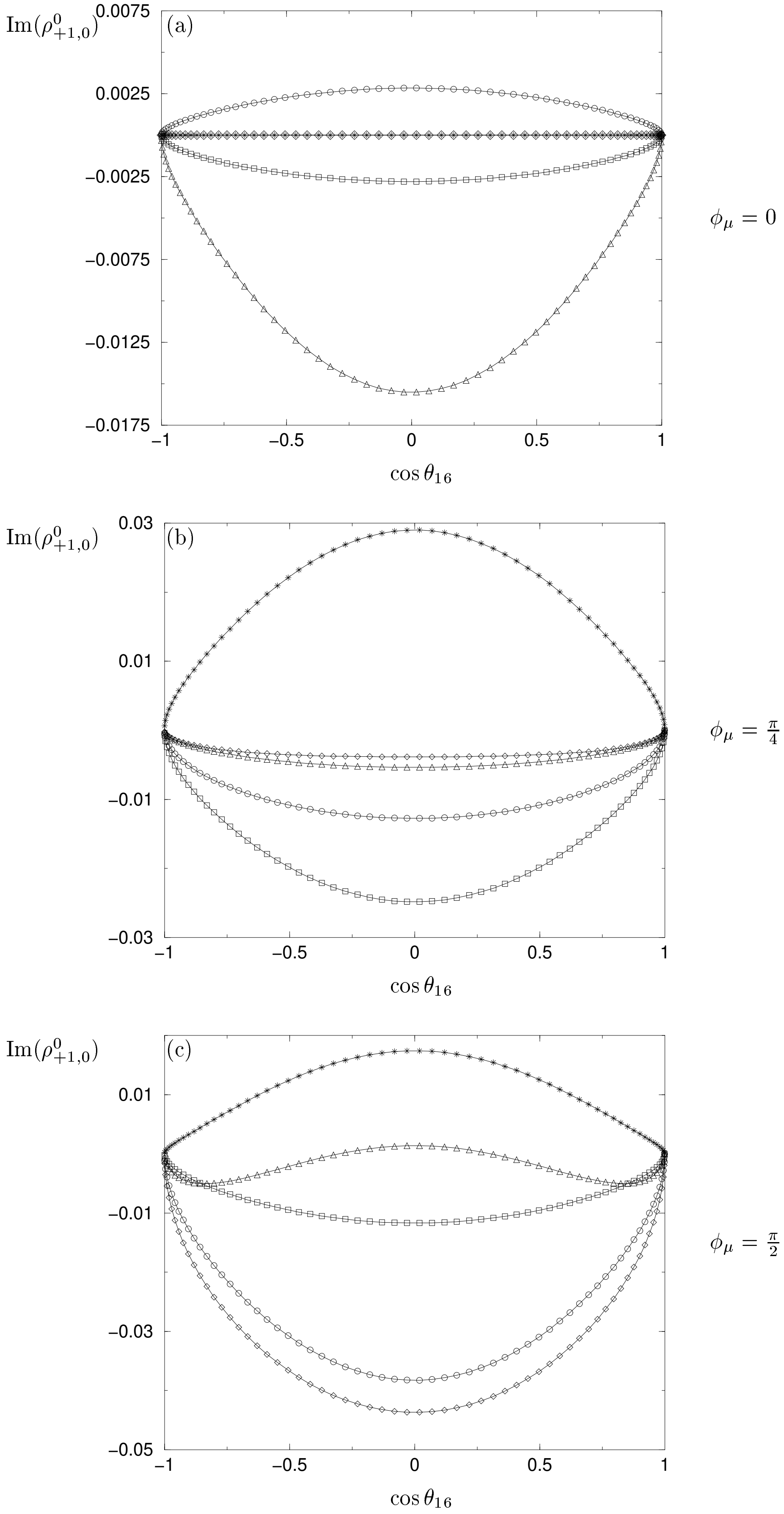


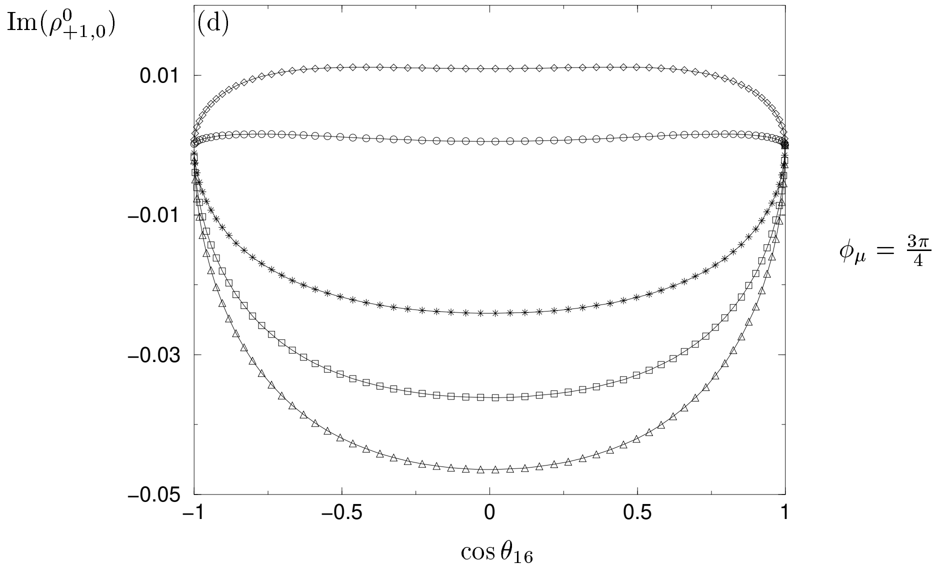
Abbildung A.9: Imaginärteil des normierten Dichtematrixelements $\rho^0_{+1,0}$ des Z-Bosons für die Konfiguration $(-+)$

Den Symbolen sind jeweils folgende Phasen von M_1 zugeordnet:

$$
\begin{array}{ccl}
\diamond & : & \phi_1 = 0 \\
\bigcirc & : & \phi_1 = \dfrac{\pi}{4} \\
\square & : & \phi_1 = \dfrac{\pi}{2} \\
\triangle & : & \phi_1 = \dfrac{3\pi}{4} \\
* & : & \phi_1 = \pi
\end{array}
$$



$\mathrm{Im}(\rho^0_{+1,0})$
(a)
0.0075
0.0025
−0.0025
−0.0075
−0.0125
−0.0175
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = 0$
$\mathrm{Im}(\rho^0_{+1,0})$
(b)
0.03
0.01
−0.01
−0.03
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = \frac{\pi}{4}$
$\mathrm{Im}(\rho^0_{+1,0})$
(c)
0.01
−0.01
−0.03
−0.05
−1
−0.5
0
0.5
1
$\cos\theta_{16}$
$\phi_\mu = \frac{\pi}{2}$



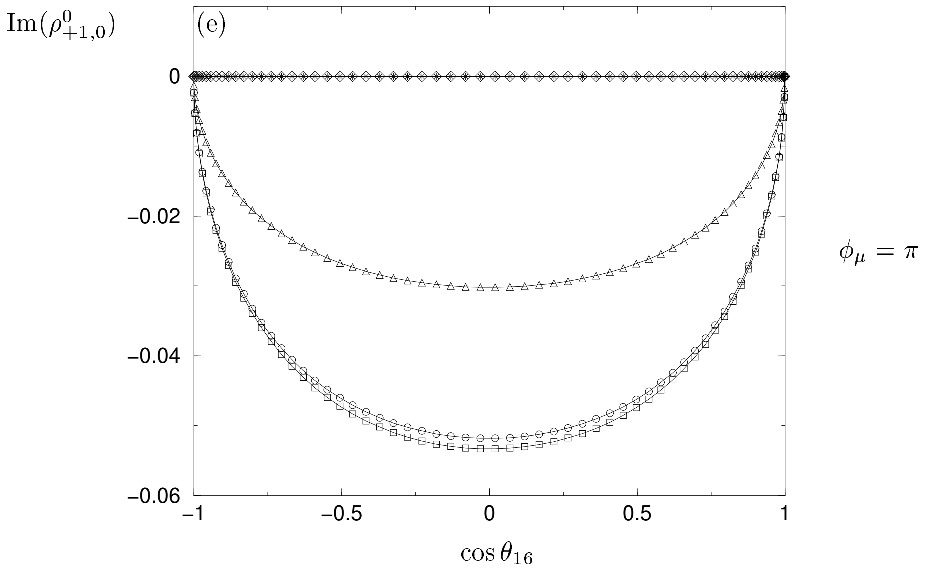


Abbildung A.10: Imaginärteil des normierten Dichtematrixelements $\rho^0_{+1,0}$ des Z-Bosons für die Konfiguration (-0)

Den Symbolen sind jeweils folgende Phasen von M_1 zugeordnet:

$$\begin{array}{ccl}
\diamond & : & \phi_1 = 0 \\
\bigcirc & : & \phi_1 = \dfrac{\pi}{4} \\
\square & : & \phi_1 = \dfrac{\pi}{2} \\
\triangle & : & \phi_1 = \dfrac{3\pi}{4} \\
* & : & \phi_1 = \pi
\end{array}$$

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Zuallererst will ich mich bei Herrn Prof. Dr. H. Fraas für die interessante Themenstellung und die geduldigen Erklärungen, die hilfreichen Anregungen und Korrekturen bedanken.

Wichtig für das Gelingen dieser Diplomarbeit war auch das sehr angenehme Arbeitsklima, zu dem außer Herrn Prof. Dr. H. Fraas auch die übrigen Mitglieder seiner Arbeitsgruppe, die Sekretärinnen Nicole Blumhöfer und Brigitte Wehner, sowie meine Zimmerkollegen Christoph Bunzmann, Tobias Mayer, Richard Metzler und Stephan Vidi beigetragen haben. Insbesondere an die oft unterhaltsamen Tischkonversationen in der Mensa oder bei Seminarnachsitzungen werde ich mich gerne zurückerinnern.

Bei Olaf Kittel und insbesondere bei Federico von der Pahlen möchte ich mich für viele Anregungen und Diskussionen bedanken.

Vielen Dank auch an Thomas Gajdosik, der mir seine Diagonalisierungsroutine zur Verfügung gestellt hat, und insbesondere an Werner Porod, der sich trotz anderer Verpflichtungen die Zeit genommen hat, die von mir benötigten totalen Neutralino-Zerfallsbreiten auszurechnen.

Außerdem möchte ich mich bei Claus Blöchinger und Federico von der Pahlen für das kritische und sorgfältige Korrekturlesen des Manuskripts bedanken.

Dank gebührt auch Tobias Mayer, der mir bei der Überwindung zahlreicher Hürden, mit denen man bei dem Einstieg in LaTeX konfrontiert wird, geholfen hat. Auch für die Bedienung von Mathematica hat er mir - wie auch Richard Metzler - viele nützliche Tips gegeben.

Special thanks an Christian Horn, ohne dessen gut bestücktes Teesortiment und unsere gemeinsamen Abendessen ich die Endphase der Diplomarbeit vermutlich nicht überlebt hätte.

Unentbehrlich und deshalb nicht unerwähnt seien die Systembetreuer Chris Dahnken, Ansgar Freking, Dr. Georg Reents und Andreas Vetter, die nach einem Server-Crash auch schon mal eine Nacht durcharbeiteten, um den Rechnerbetrieb wieder zu ermöglichen.

Last, but not least, ein herzliches Dankeschön an meine Eltern und meine Schwester, die mir immer - und nicht nur in finanzieller Hinsicht - zur Seite gestanden haben.

Erklärung

Ich versichere hiermit, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Würzburg, den 28. Februar 2001

Reimer Selle