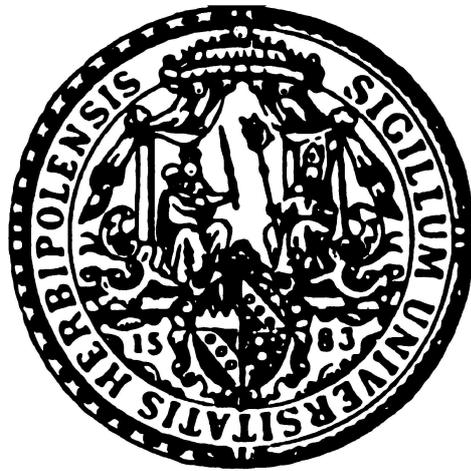


Die Produktion schwerer Quarks an Hadron-Collidern in nichtkommutativer QCD

Diplomarbeit
von
Johannes Rauh



vorgelegt bei
Professor Dr. Reinhold Rückl

am
Institut für Theoretische Physik und Astrophysik
der
Bayerischen Julius-Maximilians-Universität
Würzburg

25. April 2006

(leicht veränderte Fassung vom 22. Oktober 2007)

Inhaltsverzeichnis

Überblick	1
1 Quantenfeldtheorien in nichtkommutativer Raumzeit	2
1.1 Historisches	2
1.2 Kanonische Vertauschungsrelationen	4
2 Allgemeines über Eichtheorien	6
2.1 Kommutative Yang-Mills-Theorien	6
2.2 Quantisierung von Eichtheorien: Geister und die BRST-Symmetrie	8
3 Nichtkommutative Eichtheorien: Die Seiberg-Witten-Abbildungen	12
3.1 Der naive Ansatz	12
3.2 Die Seiberg-Witten-Abbildungen	13
3.3 Entwicklung in ϑ	16
4 Entwicklung der Seiberg-Witten-Abbildung in A	18
4.1 Benötigte Ordnungen	19
4.2 Rekursionsformeln	20
4.3 Berechnung der Entwicklung	24
4.3.1 Die Multiindexschreibweise	25
4.4 Ergebnisse der Entwicklung	26
4.4.1 $h^{[2]}$ - erste Korrektur für das Geistfeld	26
4.4.2 $f_\mu^{[2]}$ - erste Korrektur für das Eichboson	28
4.4.3 Alternative Lösung für $f_\mu^{[2]}$	29
4.4.4 $m^{[2]}$ - erste Korrektur für das Materiefeld	31
4.4.5 $h^{[3]}$ - zweite Korrektur für das Geistfeld	31
4.4.6 $m^{[3]}$ - zweite Korrektur für das Materiefeld	33
4.4.7 Ausdruck der Seiberg-Witten-Abbildungen durch analytische Funktionen	34
5 Störungstheorie: Feynmanregeln	38
5.1 Die Lagrangedichte \mathcal{L}	38
5.2 Der Tensor d_{ABC}	42
5.3 Die Feynmanregeln	43
5.3.1 Die Eichwechselwirkung	45

5.3.2	Der $\rho^{[0]}$ -Drei-Bosonen-Vertex	47
5.3.3	Der alternative Drei-Bosonen-Vertex	48
5.3.4	Der $\rho^{[0]}$ -Kontaktvertex	49
5.3.5	Der alternative Kontaktvertex	50
5.3.6	Die Boson-Geist-Wechselwirkung	51
6	Vergleich mit dem kommutativen Modell: $gg \rightarrow q\bar{q}$	53
6.1	Der kommutative Wirkungsquerschnitt	54
6.2	Der nichtkommutative Wirkungsquerschnitt	57
6.2.1	Eichinvarianz des Ergebnisses	58
6.2.2	Die Verwendung von O'Mega	60
6.3	Ergebnisse	61
6.3.1	Winkelabhängigkeit	63
6.3.2	Energieabhängigkeit	74
6.3.3	Mittelung des differentiellen Wirkungsquerschnitts	77
7	Zusammenfassung	81
A	Notation und Konventionen	83
B	Beweise der Rekursionsformeln aus Abschnitt 4.2	86
B.1	Beweis von Proposition 2	86
B.2	Beweis von Proposition 3	87
B.3	Berechnung von $\{\gamma^{[0]}, \rho^{[0]}\}$	88
C	Die Berechnungen der Seiberg-Witten-Abbildung im Detail	90
C.1	$f_\mu^{[2]}$ - erste Korrektur für das Eichboson	90
C.2	$h^{[3]}$ - zweite Korrektur für das Geistfeld	96
C.3	$m^{[3]}$ - zweite Korrektur für das Materiefeld	106
D	Überprüfung der Seiberg-Witten-Abbildung	123
D.1	Überprüfung des Geistfeldes	123
D.2	Überprüfung des Eichbosons	138
D.3	Überprüfung des Materiefeldes	140
E	Rechnungen zu den Feynmanregeln	144
E.1	Der Drei-Bosonen-Vertex	144
E.2	Der Kontaktvertex	147
F	Gruppentheoretische Gewichte	156
G	Abbildungen zu Unterabschnitt 6.3.1: Winkelverteilung des differentiellen Wirkungsquerschnittes	158

Überblick

Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung der ersten Ordnungen der Seiberg-Witten-Abbildung in einer Entwicklung nach den Eichfeldern. Diese Abbildung erlaubt die Übertragung von Yang-Mills-Theorien mit beliebiger Eichgruppe auf eine nichtkommutative Raumzeit mit „kanonischen“ Vertauschungsrelationen

$$[x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}. \quad (0.1)$$

Die Resultate sollen dazu verwendet werden, um Feynman-Regeln für nichtkommutative QCD herzuleiten. Als Beispiel wird der Prozess $gg \rightarrow q\bar{q}$ untersucht.

Die Bestimmungsgleichungen für die Seiberg-Witten-Abbildung sind nicht eindeutig lösbar. In dieser Arbeit wird eine Formel von Barnich et al.[22] verwendet, um eine spezielle Lösung zu konstruieren. Daneben wird für die Seiberg-Witten-Abbildung des Eichfeldes durch heuristische Argumente eine weitere Lösung gewonnen. Beide Lösungen führen zu unterschiedlichen Feynmanregeln und auch zu physikalisch unterschiedlichen Theorien, die miteinander verglichen werden.

Zunächst soll in den ersten drei Kapiteln eine kurze Einführung und Zusammenfassung zu Quantenfeldtheorien in nichtkommutativer Raumzeit, Yang-Mills-Theorien sowie zu den Eigenschaften der Seiberg-Witten-Abbildung gegeben werden. Im Kapitel 4 werden die Formeln zur rekursiven Berechnung der Seiberg-Witten-Abbildung angegeben und bewiesen. Anschließend werden die Resultate für die ersten Terme vorgestellt. Die Herleitung der Feynman-Regeln aus der Lagrangedichte befindet sich im Kapitel 5. Im letzten Kapitel werden die Ergebnisse angewendet auf ein Beispiel der nichtkommutativen QCD, nämlich den Wirkungsquerschnitt $gg \rightarrow q\bar{q}$.

1 Quantenfeldtheorien in nichtkommutativer Raumzeit

1.1 Historisches

Die wahrscheinlich erste Veröffentlichung zu einer Quantentheorie auf einer nichtkommutativen Raumzeit stammt aus dem Jahre 1947 von Hartland S. Snyder[1]. Snyder ersetzte in seiner Arbeit sowohl die Ortskoordinaten als auch die Zeitkoordinate durch Operatoren, wobei das Spektrum der Ortskoordinaten diskret wird. Die Motivation für Snyder lag in den Problemen, die man seinerzeit mit Divergenzen bei der Quantisierung von Feldtheorien hatte. Allerdings stellt die Interpretation der Zeit als Operator in der Quantenmechanik ein Problem dar, üblicherweise wird die Zeit als Parameter behandelt. Dieses Problem sowie die Tatsache, dass es gelang, die Divergenzen der Quantenfeldtheorien unter Kontrolle zu bringen, führten dazu, dass Snyders Ansatz nicht weiterverfolgt wurde.

Viel später führten Untersuchungen über die Deformationsquantisierung sowie die Entwicklung der nichtkommutativen Geometrie in der Mathematik zur Entdeckung einer Möglichkeit, nichtkommutative Koordinaten in eine Quantenfeldtheorie zu integrieren. Ausgangspunkt ist die Tatsache, dass die Nichtkommutativität bislang noch nicht beobachtet wurde. Daher ist eine Beschreibung wünschenswert, bei der die Nichtkommutativität proportional zu einem Parameter ϑ ist, so dass man im Grenzwert $\vartheta \rightarrow 0$ die kommutative Theorie erhält. Diesen Übergang realisiert man dadurch, dass man auf der Menge der Phasenraumfunktionen neben der gewöhnlichen punktweisen Multiplikation ein weiteres Produkt einführt, das sogenannte *Sternprodukt* (auch Moyal-Weyl-Produkt genannt), welches so konstruiert ist, dass es die gewünschten Kommutatoreigenschaften hat¹:

$$[x^\mu, x^\nu] := x^\mu x^\nu - x^\nu x^\mu = 0 \iff [x^\mu * x^\nu] := x^\mu * x^\nu - x^\nu * x^\mu \sim \vartheta \quad (1.1)$$

Zusätzlich verlangt man, dass das Sternprodukt assoziativ ist, und dass es für $\vartheta \rightarrow 0$ in das gewöhnliche, kommutative Produkt übergeht.

Mit Hilfe des Sternproduktes gelang nun die Konstruktion von Quantenfeldtheorien auf nichtkommutativer Raumzeit. Einen großen Impuls für diese Klasse von

¹Der gleiche Weg wird auch in der Deformationsquantisierung gegangen. Dort definiert man auf dem klassischen Phasenraum ein Sternprodukt, welches so gewählt ist, dass die Algebra der Phasenraumfunktionen mit dem Sternprodukt die Operatoralgebra der Quantenmechanik widerspiegelt. Die Planck'sche Konstante \hbar übernimmt dort die Rolle des Nichtkommutativitätsparameters ϑ .

Theorien in der Hochenergiephysik gab die Entdeckung, dass gewisse Stringtheorien im Niederenergielimes nichtkommutative Feldtheorien ergeben[11]. Dabei tritt die Nichtkommutativität in der Form

$$[x^\mu, x^\nu] = i\vartheta\Theta^{\mu\nu} \quad (1.2)$$

auf. Die Größe $\Theta^{\mu\nu}$ ist ein antisymmetrischer Tensor und wird als Hintergrundfeld von gewissen Stringfreiheitsgraden interpretiert². Also würde man erwarten, dass $\Theta^{\mu\nu}$ ortsabhängig ist. In erster Näherung nimmt man jedoch an, dass das Feld lokal konstant ist.

Allerdings blieben einige Probleme, insbesondere bei der Konstruktion nichtabelscher Eichtheorien. Zum Beispiel ist es nicht ohne weiteres möglich, beliebige Lie-Gruppen zu verwenden. Nur wenn die entsprechende Lie-Algebra auch unter dem Antikommutator abgeschlossen ist, erhält man eine konsistente Theorie, doch ist dies nicht der Fall, der bei einer Verallgemeinerung des Standardmodells auftritt. Außerdem ergab sich für die elektromagnetische Wechselwirkung die Konsequenz, dass alle Fermionen die gleiche Ladung tragen müssten. Auf diese Probleme wird in Abschnitt 3.1 näher eingegangen.

Für die Lösung dieser Probleme war ein Artikel von großer Bedeutung, in dem Seiberg und Witten eine Korrespondenz zwischen kommutativer und nichtkommutativer Yang-Mills-Theorie herstellen konnten, genannt *Seiberg-Witten-Abbildung*[12]. Diese drückt die nichtkommutativen Felder \hat{A} und $\hat{\Psi}$ sowie den nichtkommutativen Eichparameter $\hat{\Lambda}$ durch die entsprechenden kommutativen Analoga aus³:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} &= \hat{\Lambda}(A, \Lambda) \\ \hat{A}_\mu &= \hat{A}_\mu(A) \\ \hat{\Psi} &= \hat{\Psi}(A, \Psi) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Durch Einsetzen der Seiberg-Witten-Abbildung in die nichtkommutative Lagrange-dichte erhält man eine Theorie von *kommutativen* Feldern, die nun mit gewöhnlichen Methoden behandelt werden kann, d. h. über die Lagrange-dichte erhält man Feynmanregeln, die zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten verwendet werden können. Die Seiberg-Witten-Abbildungen werden im Abschnitt 3.2 besprochen.

Leider ist es nicht möglich, für die Seiberg-Witten-Abbildungen eine geschlossene Form anzugeben. Allerdings gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Seiberg-Witten-Abbildungen als formale Reihe zu entwickeln. Es bietet sich dabei an, als Entwicklungsparameter die Felder A_μ zu nehmen. Der Vorteil dieser Entwicklung liegt darin, dass zur störungstheoretischen Berechnung eines Wirkungsquerschnitts

²Diese Interpretation erklärt auch, warum Gleichung (1.2) nicht Lorentz-kovariant sein muss.

³Hier wird die Hutnomenklatur verwendet: Beim Vergleich einer nichtkommutativen Theorie mit einer entsprechenden kommutativen Theorie erhalten die Größen der nichtkommutativen Theorie zur Unterscheidung ein $\hat{\cdot}$. Dies ist in Analogie zur Quantenmechanik zu sehen, wo die (nichtkommutativen) Operatoren zur Unterscheidung von den klassischen (kommutativen) Phasenraumfunktionen ebenfalls mit einem Hut gekennzeichnet werden.

in fester Schleifenordnung nur eine begrenzte Anzahl von Ordnungen in A_μ benötigt wird. Bei einer Entwicklung in ϑ hingegen würde die benötigte Ordnung der Seiberg-Witten-Abbildung von der betrachteten Energieskala abhängen.

Trotz des Fortschrittes in den letzten Jahren bleiben noch viele Fragen offen. Zum Einen gibt es Probleme bei Quantenfeldtheorien, in denen die zeitartigen Kommutatoren Θ^{0i} nicht verschwinden. Derartige Theorien sind entweder nicht unitär, oder sie verletzen die Wardidentitäten (siehe [23] und dortige Referenzen). Allerdings ist die Bedingung $\Theta^{0i} = 0$ nicht kovariant, d.h. sie bleibt bei Übergang in ein anderes Bezugssystem nicht erhalten. Dies lässt sich zwar in der Deutung des Stringtheorielimes rechtfertigen, da das Hintergrundfeld $\Theta^{\mu\nu}$ ein ausgezeichnetes Bezugssystem definiert. Das \vec{E} -Feld wird dann erst bei solchen Lorentz-Transformationen bedeutsam, die einer so hohen Energie entsprechen, dass der Limes der Stringtheorie keine gute Näherung mehr ist. Trotzdem ist dieses Ergebnis unbefriedigend.

Eine weitere offene Frage ist die nach der Interpretation der Mehrdeutigkeiten in der Seiberg-Witten-Abbildung. Diese sind durch ihre Bestimmungsgleichungen (die „Seiberg-Witten-Gleichungen“) nicht eindeutig festgelegt. Bichl et al. konnten am Beispiel der nichtkommutativen QED zeigen, dass die Freiheit in der Wahl der Lösung notwendig ist für die Renormierung[16]. Dies bedeutet aber auch, dass die Wahl der Lösung physikalische Konsequenzen hat. Auch in dieser Arbeit wird sich zeigen, dass sich Theorien, die mit unterschiedlichen Seiberg-Witten-Abbildungen konstruiert werden, fundamental unterscheiden können.

1.2 Kanonische Vertauschungsrelationen

In dieser Arbeit sollen die folgenden „kanonischen“ Kommutatorrelationen zwischen den Raumzeitkoordinaten angenommen werden⁴:

$$[x^\mu, x^\nu] = i\vartheta\Theta^{\mu\nu} \quad (1.4)$$

Dabei ist $\Theta^{\mu\nu}$ ein reeller antisymmetrischer raumzeitunabhängiger Tensor, aus dem ein Skalenfaktor ϑ ausgeklammert wurde, der die Dimension einer Fläche hat. Oft gibt man die Größenordnung der Nichtkommutativität auch durch eine Energieskala $\Lambda_{\text{NC}} := 1/\sqrt{\vartheta}$ an. In der Interpretation des Stringlimes würde man erwarten, dass Λ_{NC} von der Größenordnung der Planckskala wäre. Es gibt jedoch auch Mechanismen, die Nichtkommutativitätsskala zu geringeren Werten herunterzubrechen. Experimentell direkt ausgeschlossen ist der Bereich, der aktuellen Beschleunigern zugänglich ist. Daher wird später $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$ angenommen werden, um die Effekte möglichst gut sichtbar zu machen.

In Analogie zur Elektrodynamik parametrisiert man die Einträge von $\Theta^{\mu\nu}$ durch

⁴Alternative Kommutatorrelationen werden z. B. in [14] besprochen.

zwei 3er-Vektoren \vec{E} und \vec{B} :

$$\Theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Wie im vorigen Abschnitt erwähnt, wird häufig $\vec{E} = 0$ verlangt, da sonst nicht sicher ist, ob die Theorie unitär ist. Für die meisten Rechnungen in dieser Arbeit ist die Frage, ob $\vec{E} = 0$ ist, allerdings nicht wichtig, daher werden sie in voller Allgemeinheit ausgeführt werden. Erst bei der Berechnung des Wirkungsquerschnitts im Abschnitt 6 wird $\vec{E} = 0$ gesetzt werden.

Oft tritt der Tensor $\Theta^{\mu\nu}$ kontrahiert mit zwei Raumzeitvektoren auf. Dafür soll die Schreibweise

$$p\Theta q := \frac{\vartheta}{2} p_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu = \frac{\vartheta}{2} \left(p_0(\vec{E} \cdot \vec{q}) - q_0(\vec{E} \cdot \vec{p}) - \vec{B} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) \right) \quad (1.6)$$

stehen.

Als Sternprodukt erhält man⁵

$$\begin{aligned} (A * B)(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i \frac{\vartheta}{2} \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu^x \partial_\nu^y)^k}{k!} A(x) B(y) \Big|_{x=z, y=z} \\ &= \exp(i \partial^x \Theta \partial^y) A(x) B(y) \Big|_{x=z, y=z} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Eine kurze Rechnung ergibt, dass dieses Sternprodukt assoziativ ist und Gleichung (1.4) erfüllt. Mit Hilfe des Bidifferentialoperators \wedge_{12} , der über

$$\wedge_{12} AB = \frac{\theta \Theta^{\mu\nu}}{2} (\partial_\mu A) (\partial_\nu B) \quad (1.8)$$

jeweils auf das Produkt zweier Funktionen wirkt, lässt sich das Sternprodukt knapp schreiben als

$$A * B = \exp(i \wedge_{12}) AB. \quad (1.9)$$

Wie man sieht, verliert man beim Übergang zum Sternprodukt die Lokalität im strengen Sinne, da bei der Sternmultiplikation beliebig hohe Raumzeitableitungen der Felder auftreten:

$$e^{ikx} * f(x^\mu) * e^{-ikx} = f(x^\mu + \vartheta \Theta^{\mu\nu} k_\nu). \quad (1.10)$$

Allerdings wird diese Nichtlokalität kontrolliert dadurch, dass höhere Ableitungen nur im Zusammenhang mit höheren Ordnungen von ϑ auftreten. Daher ist die Verschiebung in Formel (1.10) proportional zu ϑ .

⁵Dies ist nicht die einzige mögliche Wahl für das Sternprodukt. Im Falle der flachen Raumzeit gibt es andere Möglichkeiten, die in gewisser Weise hierzu äquivalent sind[10]. Eine Herleitung von (1.7) findet sich z. B. in [14].

2 Allgemeines über Eichtheorien

Die in dieser Diplomarbeit behandelten Eichtheorien gehören alle zur Klasse der Yang-Mills-Theorien. Es wird davon ausgegangen, dass der Leser mit den Grundlagen dieser Theorien und ihrer Quantisierung vertraut ist (siehe z.B. [9] oder jedes andere einführende Buch über Quantenfeldtheorien). Dennoch soll in diesem Kapitel eine kurze Zusammenfassung gegeben werden, um die Notation festzulegen.

2.1 Kommutative Yang-Mills-Theorien

Ausgangspunkt zur Konstruktion einer Yang-Mills-Theorie ist ein i. a. komplexes vektorwertiges Spin-1/2-Feld $\Psi(x)$, dessen Komponenten sich zu Dirac-Spinoren $\Psi_a(x)$ zusammenfassen lassen. Man nimmt an, dass das Feld $\Psi(x)$ selbst keine physikalische Observable ist. Nur die „Skalarprodukte“ verschiedener Felder $\Psi_1^* \Psi_2$, insbesondere der Betrag $\Psi^* \Psi$ eines Feldes, werden als messbar angenommen. Dies führt zu der Forderung, dass die Theorie invariant unter Multiplikation der Felder mit einer beliebigen „Phase“ sein soll:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha} \Psi. \quad (2.1)$$

Im allgemeinen Fall kann α matrixwertig und raumzeitabhängig sein. Da Ψ und Ψ' für alle Observablen die selben Messergebnisse liefern, sind zwei Zustände, die durch eine Transformation (2.1) auseinander hervorgehen, physikalisch äquivalent. Gleichung (2.1) beschreibt also eine *Eichtransformation*.

Die Menge aller Eichtransformationen bildet eine Lie-Gruppe \mathcal{G} . Sie wird erzeugt von der Lie-Gruppe G der lokalen Eichtransformationen an einem Ort x : Wenn $U: x \mapsto U(x) \in G$ eine Abbildung von der Raumzeit in die lokale Eichgruppe G ist, so ist durch $\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = U(x)\Psi(x)$ eine allgemeine Eichtransformation gegeben, und jede Eichtransformation in \mathcal{G} lässt sich auf diese Weise schreiben. Daher lässt sich ein Studium der großen (unendlichdimensionalen) Lie-Gruppe \mathcal{G} auf eine Untersuchung der kleinen (endlichdimensionalen) Lie-Gruppe G zurückführen.

Viele Eigenschaften von G lassen sich wiederum aus der zu G gehörenden Lie-Algebra \mathfrak{g} ableiten, die als \mathbb{R} -Vektorraum von den $n = \dim(G)$ Generatoren T_A erzeugt wird. Dabei soll hier die „physikalische“ Konvention verwendet werden, nach der aus den Generatoren stets ein Faktor i ausgeklammert wird. Es ist dann

$$G = \{ \exp(i\lambda^A T_A) \mid \lambda_A \in \mathbb{R} \} = \exp(i\mathfrak{g}), \quad (2.2)$$

und die Strukturkonstanten f sind definiert über

$$[T_A, T_B] = if_{AB}{}^C T_C. \quad (2.3)$$

Für halbeinfache kompakte Lie-Gruppen (bzw. Lie-Algebren) ist es möglich, die Generatoren so zu wählen, dass

$$\text{Tr } T_A T_B = \frac{1}{2} \delta_{AB} \quad (2.4)$$

gilt. In diesem Falle sind die Strukturkonstanten vollständig antisymmetrisch¹. Daher ist eine Unterscheidung zwischen oberen und unteren Indizes nicht nötig. Dennoch soll sie in manchen Rechnungen beibehalten werden, um eine schnelle Überprüfung der Indexstruktur der Resultate zu ermöglichen.

Die Dynamik von Ψ muss nun ebenfalls eichinvariant sein. Dies ist beispielsweise gewährleistet, wenn die Lagrangedichte \mathcal{L} selbst eichinvariant ist. Allerdings ist die Dirac-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\Psi}(i\rlap{\not{D}} - m)\Psi \quad (2.5)$$

nicht invariant unter (2.1), wenn α ortsabhängig ist, da die Ableitungsoperatoren $\rlap{\not{D}}$ nun auch auf die Ortsabhängigkeit von α wirken.

Die Eichinvarianz der Lagrangedichte lässt sich reparieren, indem man zu jedem der n Generatoren T_B ein zusätzliches vektorielles Feld A_μ^B einführt, für das man gewisse Transformationsgesetze postuliert. Mit diesen Feldern definiert man eine kovariante Ableitung von Ψ wie folgt:

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi - ig A_\mu^C T_C \Psi = \partial_\mu \Psi - ig A_\mu \Psi. \quad (2.6)$$

Dabei wurden über

$$A_\mu := A_\mu^C T_C \quad (2.7)$$

die n Felder A_μ^C zu einem einzigen matrixwertigen Feld zusammengefasst. Die Konstante g hat die physikalische Bedeutung einer Kopplungskonstante.

Ersetzt man nun in der Lagrangedichte die partiellen Ableitungen durch die kovariante Ableitung, so erhält man eine Lagrangedichte

$$\mathcal{L}'_{\text{Dirac}} = \bar{\Psi}(i\rlap{\not{D}} - m)\Psi, \quad (2.8)$$

die invariant ist unter den Eichtransformationen

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha} \Psi \quad (2.9a)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = e^{i\alpha} \left(A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha \right) e^{-i\alpha}. \quad (2.9b)$$

Nützlich ist auch die infinitesimale Form dieser Eichtransformation

$$\delta \Psi = i\alpha \Psi \quad (2.10a)$$

$$\delta A_\mu = \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha + i[\alpha, A_\mu] \quad (2.10b)$$

¹Wegen $if_{AB}{}^C = 2\text{Tr } [T_A, T_B] T_C = 2\text{Tr } T_A [T_B, T_C] = if_{BC}{}^A$.

Der letzte Schritt in der Herleitung der Yang-Mills-Lagrangedichte besteht darin, einen kinetischen Term für die Felder A hinzuzufügen. Diesen konstruiert man im einfachsten Fall aus dem (Lorentz-)kovarianten Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}^C T_C. \quad (2.11)$$

Unter Eichtransformationen transformiert er sich wie folgt:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = e^{i\alpha} F_{\mu\nu} e^{-i\alpha}. \quad (2.9c)$$

Der einfachste eichinvariante Lorentzskalar, der sich aus dem matrixwertigen Lorentztensor $F_{\mu\nu}$ konstruieren lässt, ist

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^C F_C^{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

Insgesamt hat die Lagrangedichte der Yang-Mills-Theorie die Form

$$\mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}} = \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi - \frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

2.2 Quantisierung von Eichtheorien: Geister und die BRST-Symmetrie

Eichtheorien müssen bei der Quantisierung besonders behandelt werden[3, 8]. Eine sture Anwendung der Methoden der kanonischen Quantisierung ist nicht möglich: So gibt es Zwangsbedingungen („constraints“), die die Impulse einschränken. Beispielsweise verschwinden in der Yang-Mills-Theorie die kanonischen konjugierten Impulse zu den Zeitkomponenten der Eichbosonen:

$$\Pi_A^0 := \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}}}{\delta(\partial_0 A_0^A)} = 0.$$

Die Forderung von kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[A_0^A(x), \Pi_B^0(x')] := i\hbar \delta_B^A \delta(x - x')$$

würde daher zu Widersprüchen führen.

Die Pfadintegralquantisierung stößt ebenfalls auf Probleme. Formal sieht man dies daran, dass es zu jedem Pfad unendlich viele eichäquivalente Pfade gibt. Dadurch erhält man in jedem Pfadintegral einen Faktor unendlich.

Desweiteren ist es nicht möglich, einen Propagator für die Eichbosonen auszurechnen. Der quadratische Anteil des kinetischen Termes für die Eichbosonen ist

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu}^{[1]} F_{[1]}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu^A (\partial^\mu A_A^\nu - \partial^\nu A_A^\mu) \\ &= \frac{1}{2} A_\nu^A \partial_\alpha (\delta_\beta^\alpha \delta_\mu^\nu - \delta_\mu^\alpha \delta_\beta^\nu) \partial^\beta A_A^\mu, \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt partiell integriert wurde. Fouriertransformation führt auf die Matrix

$$P_\mu^\nu := k^2 \delta_\mu^\nu - k_\mu k^\nu,$$

die nicht invertierbar ist².

Daher führt man in die Lagrangedichte einen zusätzlichen Term ein, der die Eichsymmetrie bricht. Man spricht von Eichfixierung. Eine mögliche Wahl ist die *kovariante Eichung*

$$\mathcal{L}_{\text{Eichfix}} = -\frac{1}{2\lambda} (\partial^\mu A_\mu^A)(\partial_\mu A_A^\mu) = -\frac{1}{\lambda} \text{Tr} (\partial^\mu A_\mu)^2. \quad (2.14)$$

Die Konstante λ heißt Eichparameter. In manchen Fällen vereinfacht sich die Rechnung für bestimmte Werte von λ . Es ist aber üblich, diesen Parameter nach Möglichkeit unbestimmt zu lassen. Ein physikalisches Endergebnis sollte dann unabhängig von λ sein, und diese Tatsache liefert eine Möglichkeit, das Ergebnis zu überprüfen.

Wie der Name schon andeutet, hat die kovariante Eichung (2.14) den Vorteil, dass Zwischenergebnisse in sämtlichen Rechnungen Lorentz-kovariant sind. Dafür hat sie den Nachteil, dass es schwierig ist, von den vier Freiheitsgraden jedes Eichbosons die beiden unphysikalischen Freiheitsgrade zu separieren. Um die überschüssigen Freiheitsgrade zu eliminieren, werden zu jedem Eichboson zwei weitere skalare Felder $C = C^A T_A$ und $C^* = C^{A*} T_A$ eingeführt, die man Geist- und Antigeistfeld nennt, und von denen man verlangt, dass sie der Fermistatistik genügen^{3,4}. Geist und Antigeist wechselwirken über die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{Geist}} = \partial_\mu C^* (D^\mu C) \quad (2.15)$$

mit dem Eichboson. Dabei ist die *kovariante Ableitung* für das Geistfeld definiert über

$$D_\mu C = \partial_\mu C - ig[A, C]. \quad (2.16)$$

Eine Herleitung dieser Lagrangedichte ist z. B. nach Faddeev und Popov über die Pfadintegralmethode möglich. Dabei taucht $\mathcal{L}_{\text{Geist}}$ als Jacobi-Determinante auf[9, Kapitel 16.2].

Obgleich durch die Eichfixierung die Eichinvarianz gebrochen wird, besitzt die so konstruierte Theorie eine daraus abgeleitete fermionische Symmetrie, die sogenannte BRST-Symmetrie⁵. Der antigeistfreie Anteil γ des BRST-Differentials s dieser Symmetrie ist definiert über

$$\gamma A = D_\mu C = \partial_\mu C - ig[A_\mu, C],$$

²Wegen $P_\mu^\nu k^\mu = k^2 k^\nu - k^\nu k^2 = 0$.

³Dies widerspricht nicht dem Spin-Statistik-Theorem, da es sich bei Geist- und Antigeistfeldern um unphysikalische Hilfsfelder handelt, die in keinem Anfangs- und Endzustand auftauchen.

⁴Die Notation C^* ist historisch bedingt und bedeutet *nicht*, dass die Antigeister zu den Geistern hermitesch konjugiert sind: Geister und Antigeister sind unabhängig voneinander.

⁵nach Becchi, Rouet, Stora und Tyutin[6].

$$\begin{aligned}\gamma C &= \frac{i}{2}g[C, C] = igCC, \\ \gamma \Psi &= igC\Psi.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Auf Produkte von Feldern wird γ durch die Produktregel fortgesetzt. Für allgemeine Funktionen der Felder schreibt sich dies

$$\begin{aligned}\gamma f[A, C, \Psi] &= \sum_{k=0} \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} (D_\mu C)^B \frac{\partial^L f[A, C, \Psi]}{\partial(\partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} A_\mu^B)} \\ &\quad -g \sum_{k=0} \frac{1}{2} \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} (f_{DE}{}^B C^D C^E) \frac{\partial^L f[A, C, \Psi]}{\partial(\partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} C^B)} \\ &\quad +ig \sum_{k=0} \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} (C^A T_A \Psi) \frac{\partial^L f[A, C, \Psi]}{\partial(\partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} \Psi)} \\ &= \sum_{k=0} \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} (\partial_\mu C^B) \frac{\partial^L f[A, C, \Psi]}{\partial(\partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} A_\mu^B)} \\ &\quad -ig \sum_{k=0} \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} [A_\mu, C]^B \frac{\partial^L f[A, C, \Psi]}{\partial(\partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} A_\mu^B)} \\ &\quad -g \sum_{k=0} \frac{1}{2} \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} (f_{DE}{}^B C^D C^E) \frac{\partial^L f[A, C, \Psi]}{\partial(\partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} C^B)} \\ &\quad +ig \sum_{k=0} \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} (C^A T_A \Psi) \frac{\partial^L f[A, C, \Psi]}{\partial(\partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} \Psi)}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Die Zerlegung von γ in einen Term $\gamma^{[0]}$, der die Anzahl der Felder erhält, und einen Term $\gamma^{[1]}$, der die Anzahl der Felder um 1 erhöht, lautet also

$$\gamma^{[0]} f[A, C, \Psi] = \sum_{k=0} \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} \partial_\mu C^B \frac{\partial^L f[A, C, \Psi]}{\partial(\partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} A_\mu^B)}\tag{2.19a}$$

$$\begin{aligned}\gamma^{[1]} f[A, C, \Psi] &= +g \sum_{k=0} \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} (f_{DE}{}^B A_\mu^D C^E) \frac{\partial^L f[A, C, \Psi]}{\partial(\partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} A_\mu^B)}, \\ &\quad -g \sum_{k=0} \frac{1}{2} \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} (f_{DE}{}^B C^D C^E) \frac{\partial^L f[A, C, \Psi]}{\partial(\partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} C^B)} \\ &\quad +ig \sum_{k=0} \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} (C^A T_A \Psi) \frac{\partial^L f[A, C, \Psi]}{\partial(\partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_k} \Psi)}.\end{aligned}\tag{2.19b}$$

Später wird, aus Gründen der Übersichtlichkeit, eine Multiindexschreibweise verwendet, in der die Indizes $\rho_1 \dots \rho_k$ zu einem einzigen Multiindex $\boldsymbol{\rho}$ zusammengefasst werden (vgl. Unterabschnitt 4.3.1). Damit schreibt sich die Zerlegung von γ :

$$\gamma^{[0]} f[A, C, \Psi] = \sum_{\boldsymbol{\rho}} \partial_{\boldsymbol{\rho}} (\partial_\mu C^B) \frac{\partial^L f[A, C, \Psi]}{\partial(\partial_{\boldsymbol{\rho}} A_\mu^B)}\tag{2.20a}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{[1]}f[A, C, \Psi] &= +g \sum_{\rho} \partial_{\rho}(f_{DE}{}^B A_{\mu}^D C^E) \frac{\partial^L f[A, C]}{\partial(\partial_{\rho} A_{\mu}^B)} \\
&\quad -g \sum_{\rho} \frac{1}{2} \partial_{\rho}(f_{DE}{}^B C^D C^E) \frac{\partial^L f[A, C, \Psi]}{\partial(\partial_{\rho} C^B)} \\
&\quad +ig \sum_{\rho} \partial_{\rho}(C\Psi) \frac{\partial^L f[A, C, \Psi]}{\partial(\partial_{\rho} \Psi)} \tag{2.20b}
\end{aligned}$$

Die wichtigste Eigenschaft von γ ist $\gamma^2 = 0$. Insbesondere ist auch $\gamma^{[0]2} = 0$, und diese algebraische Eigenschaft ermöglichte es, die Rekursionsformeln für die Seiberg-Witten-Abbildung mittels homologischer Methoden zu finden. Damit auch das gesamte BRST-Differential s diese Eigenschaft besitzt und damit gleichzeitig die eichfixierte Lagrangedichte⁶ invariant ist unter s , muss man ein weiteres bosonisches Hilfsfeld $B = B^A T_A$ einführen, genannt Nakanishi-Lautrup-Feld. Damit setzt man

$$sC^* = B, \tag{2.21a}$$

$$sB = 0. \tag{2.21b}$$

Für diese Arbeit spielt der Antigeistsektor allerdings keine große Rolle, und seine Kenntnis ist für das Verständnis der Rechnungen nicht nötig.

Die BRST-Symmetrie lässt eine anschauliche Interpretation der Geister zu, wenn man (bis auf die Statistik) das Geistfeld mit dem Eichparameter identifiziert. Indem man den Eichparameter somit zu einem Feld macht und ihm eine Dynamik gibt, wird die Zeitentwicklung des Systems eindeutig. Dabei geht natürlich die Eichsymmetrie verloren, aber man erhält als Ersatz eine globale Symmetrie.

⁶Genaugenommen ist auch eine kleine Modifikation der Lagrangedichte nötig: Über $\mathcal{L}_{\text{Eich}} \rightarrow -\frac{1}{2\lambda} B^A B^A + B^A (\partial^{\mu} A_{\mu}^A)$ wird das Hilfsfeld B in die Lagrangedichte eingeführt, vgl [9, Kapitel 16.4].

3 Nichtkommutative Eichtheorien: Die Seiberg-Witten-Abbildungen

3.1 Der naive Ansatz

Das einfachste Verfahren, eine Quantenfeldtheorie von der gewöhnlichen Raumzeit auf eine nichtkommutative Raumzeit zu übertragen, ist, in der Lagrangedichte sämtliche kommutativen Produkte durch Sternprodukte zu ersetzen. Im Falle der Yang-Mills-Theorie erhält man als Lagrangedichte

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{Yang-Mills}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} + \sum_{a,b} \bar{\hat{\Psi}}_a * (i\hat{D} - m)_{ab} * \hat{\Psi}_b. \quad (3.1)$$

Dabei ist

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - ig[\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu], \quad (3.2a)$$

$$(\hat{D}_\mu)_{ab} * \hat{\Psi}_b = \partial_\mu \hat{\Psi}_a - ig(\hat{A}_\mu)_{ab} * \hat{\Psi}_b. \quad (3.2b)$$

Nun ist die Frage, ob sich die Eichsymmetrien der Yang-Mills-Theorie in der modifizierten Lagrangedichte $\hat{\mathcal{L}}$ für $\vartheta \neq 0$ wiederfinden. Im Allgemeinen ist dies nicht so: Betrachtet man das nichtkommutative Analogon der kommutativen Eichtransformation

$$\begin{aligned} \hat{\delta}\hat{\Psi} &= i\hat{\alpha} * \hat{\Psi}, \\ \hat{\delta}\hat{A}_\mu &= \frac{i}{g} \partial_\mu \hat{\alpha} + i[\hat{\alpha} * \hat{A}_\mu], \end{aligned} \quad (3.3)$$

so erkennt man, dass wegen

$$[\hat{\alpha} * \hat{A}_\mu] = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}^A * \hat{A}_\mu^B + \hat{A}_\mu^B * \hat{\alpha}^A)[T_A, T_B] + \frac{1}{2}(\hat{\alpha}^A * \hat{A}_\mu^B - \hat{A}_\mu^B * \hat{\alpha}^A)\{T_A, T_B\}$$

die Transformation $\hat{\delta}$ für \hat{A} im Allgemeinen aus der Lie-Algebra \mathfrak{g} herausführt. Nur wenn \mathfrak{g} auch in Bezug auf den Antikommutator abgeschlossen ist, ergibt (3.3) eine erlaubte Eichtransformation, die die Lagrangedichte invariant lässt. Eine äquivalente Bedingung ist, dass die Matrizenmultiplikation nicht aus \mathfrak{g} herausführt. Dies bedeutet, dass \mathfrak{g} ihre eigene einhüllende Algebra ist. Offensichtlich bereitet dies Schwierigkeiten bei Übertragung der elektroschwachen ($\mathfrak{g} = su(2) \oplus \mathbb{R}$) und starken Wechselwirkung ($\mathfrak{g} = su(3)$).

Selbst in einer abelschen Theorie, wie der Elektrodynamik, kann es zu Schwierigkeiten kommen: Wenn Q der Generator der elektromagnetischen Wechselwirkung ist, so fordert die obige Bedingung, dass $\{Q, Q\} = 2Q^2 \sim Q$ ist. Im Falle mehrerer Felder mit verschiedenen Ladungen hat Q jedoch die Form $Q = Q_1 \oplus Q_2$, und im Allgemeinen gilt $\{Q, Q\} = 2(Q_1^2 \oplus Q_2^2) \approx Q$.

Nun ist es immer möglich, zur Lie-Algebra \mathfrak{g} eine einhüllende Algebra zu finden. Im Falle der Matrizen Gruppen gibt es endlichdimensionale einhüllende Algebren, und im Beispiel der QCD genügt es sogar, einen einzigen Generator hinzuzufügen¹. Dennoch führen die zusätzlichen Generatoren zu zusätzlichen Freiheitsgraden des Systems und damit zu einer fundamentalen Änderung des Modells.

Von diesen Problemen abgesehen, lässt sich auf diese Weise eine ganze Klasse von nichtkommutativen Yang-Mills-Theorien konstruieren. Um Quantisieren zu können, ist es nötig, die Eichung zu fixieren und Geister einzuführen. Dazu kann man der Lagrangedichte einfach die üblichen beiden Terme der Eichfixierung und der Geistdynamik hinzufügen, in denen man, wie oben, die gewöhnlichen Produkte durch Sternprodukte ersetzt. Dies wird im Kapitel 5 explizit durchgeführt. Das nichtkommutative BRST-Differential $\hat{\gamma}$ ist in diesem Fall gegeben durch [22, 3.1]:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}\hat{A}_\mu &= \hat{D}_\mu\hat{C} = \partial_\mu\hat{C} - ig[\hat{A}_\mu * \hat{C}], \\ \hat{\gamma}\hat{C} &= \frac{ig}{2}[\hat{C} * \hat{C}] = ig\hat{C} * \hat{C}, \\ \hat{\gamma}\hat{\Psi} &= ig\hat{C} * \hat{\Psi}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

3.2 Die Seiberg-Witten-Abbildungen

In einem vielbeachteten Artikel kamen N. Seiberg und E. Witten zu dem Ergebnis, dass sich gewissen Stringtheorien auf zwei verschiedene Art und Weisen regularisieren lassen[12]. In einem Fall entsteht dabei eine nichtkommutative Eichtheorie, im anderen Fall erhält man eine gewöhnliche kommutative Eichtheorie. Seiberg und Witten schlossen daraus, dass es eine Abbildung zwischen der kommutativen Eichtheorie und ihrem nichtkommutativen Analogon geben müsse, die die Eichparameter Λ , die Materiefelder Ψ und die Eichbosonfelder A_μ ineinander überführt und dabei die Eichgruppe erhält. Wenn man die Größen der nichtkommutativen Theorie mit einem Hut $\hat{}$ versieht, so schreibt sich die Seiberg-Witten-Abbildung

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda} &= \hat{\Lambda}(A, \Lambda), \\ \hat{A}_\mu &= \hat{A}_\mu(A), \\ \hat{\Psi} &= \hat{\Psi}(A, \Psi).\end{aligned}\tag{3.5}$$

¹Schließlich ist der Antikommutator zweier hermiteschen Matrizen wieder hermitesch, nur die Eigenschaft der Spurfreiheit geht verloren, d.h. es genügt z.B. die Einheitsmatrix hinzuzufügen.

Die Erhaltung der Eichgruppe bedeutet nun, dass Eichtransformationen und Seiberg-Witten-Abbildung vertauschen:

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}} \hat{A} = \delta_{\Lambda} \hat{A}(A), \quad (3.6a)$$

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}} \hat{\Psi} = \delta_{\Lambda} \hat{\Psi}(A, \Psi), \quad (3.6b)$$

wobei Λ eine Eichtransformation parametrisieren soll, die durch die Seiberg-Witten-Abbildung auf $\hat{\Lambda}$ abgebildet wird. Zudem muss auch der Kommutator zweier Eichtransformationen auf den Kommutator der nichtkommutativen Transformationen abgebildet werden, und die Abbildung muss linear in Λ sein:

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}} = [\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}_1} * \hat{\delta}_{\hat{\Lambda}_2}] \iff \delta_{\Lambda} = [\delta_{\Lambda_1}, \delta_{\Lambda_2}] \quad (3.6c)$$

$$\hat{\Lambda}(A, \alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2) = \alpha\hat{\Lambda}(A, \Lambda_1) + \beta\hat{\Lambda}(A, \Lambda_2) \quad (3.6d)$$

Alternativ lassen sich diese Bedingungen auch mit den entsprechenden BRST-Differentialen γ und $\hat{\gamma}$ formulieren:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}\hat{C} &= \gamma\hat{C}(A, C), \\ \hat{\gamma}\hat{A} &= \gamma\hat{A}(A), \\ \hat{\gamma}\hat{\Psi} &= \gamma\hat{\Psi}(A, \Psi). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aus der Bedingung (3.6c), dass die Seiberg-Witten-Abbildung den Kommutator erhält, wird hier die Forderung, dass die BRST-Symmetrie mit der Seiberg-Witten-Abbildung auch für das Geistfeld \hat{C} kommutiert. Ausgeschrieben führt dies auf die *Seiberg-Witten-Gleichungen*:

$$\frac{ig}{2}[\hat{C} * \hat{C}]^A = \gamma\hat{C}^A. \quad (3.8a)$$

$$(\partial_{\mu}\hat{C} - ig[\hat{A}_{\mu} * \hat{C}])^A = \gamma\hat{A}_{\mu}^A, \quad (3.8b)$$

$$ig\hat{C} * \hat{\Psi} = \gamma\hat{\Psi}, \quad (3.8c)$$

Diese Gleichungen haben keine eindeutige Lösung. Zwar ergeben sich einige Randbedingungen: Für $\vartheta \rightarrow 0$ sollen die nichtkommutativen Felder in die kommutativen Felder übergehen. Auch sollte die Seiberg-Witten-Abbildung so gewählt sein, dass sie die Statistik erhält. Doch dies alleine macht die Lösung immer noch nicht eindeutig: Einerseits ist es natürlich möglich, die Seiberg-Witten-Abbildung mit einer beliebigen (kommutativen oder nichtkommutativen) Eichtransformation zu verknüpfen. Daneben gibt es aber weitere nichttriviale Mehrdeutigkeiten. Diese werden beispielsweise erkennbar, wenn man die Seiberg-Witten-Gleichungen nach ϑ oder A entwickelt (siehe Abschnitt 4.2).

Die Seiberg-Witten-Abbildung kann nun verwendet werden, um eine nichtkommutative Eichtheorie aus einer kommutativen Eichtheorie zu konstruieren. Dazu ersetzt man in der Lagrangedichte einer nichtkommutativen Yang-Mills-Theorie die

nichtkommutativen Felder durch die Abbildungen. Es zeigt sich, dass durch diesen Ansatz die Probleme, die im vorhergehenden Abschnitt angesprochen wurden, umgangen werden können:

Wenn man mit einer Lie-Gruppe \mathcal{G} startet, deren Lie-Algebra \mathfrak{G} nicht unter dem Antikommutator abschließt, so erhält man eine nichtkommutative Theorie mit der gleichen Anzahl von Freiheitsgraden, indem man zunächst formal zu einer einhüllenden Algebra $\overline{\mathfrak{G}}$ übergeht, dann aber in der Seiberg-Witten-Abbildung die zu den überzähligen Freiheitsgraden gehörenden Generatoren gleich Null setzt. Man erhält dann als Bild eines kommutativen Eichfeldes in der Lie-Algebra \mathfrak{G} ein nichtkommutatives Eichfeld aus der einhüllenden Algebra $\widehat{\mathfrak{G}}$. Die Seiberg-Witten-Abbildung \mathcal{S} liefert als Bild der gesamten Algebra \mathfrak{G} allerdings nicht die gesamte einhüllende Algebra, sondern nur eine Unteralgebra, *die genau die gleiche Anzahl von Freiheitsgraden besitzt, wie die ursprüngliche Lie-Algebra \mathfrak{G}* :

$$\mathfrak{G} \cong \mathcal{S}(\mathfrak{G}) \subset \widehat{\mathfrak{G}} \quad (3.9)$$

Da auf der kommutativen Seite die Eichtransformationen nie aus der Lie-Algebra herausführen, ist gewährleistet, dass auch die nichtkommutativen Eichtransformationen nie aus dieser Unteralgebra herausführt.

Nun ist noch zu überlegen, was bei der Seiberg-Witten-Abbildung mit dem Antigeist und dem Nakanishi-Lautrup-Feld passiert. Die entsprechende Seiberg-Witten-Gleichung lautet

$${}_s\hat{C}^* = \hat{s}\hat{C}^* = \hat{B}, \quad (3.8d)$$

$${}_s\hat{B} = \hat{s}\hat{B}^* = 0. \quad (3.8e)$$

Da diese beiden Gleichungen völlig unabhängig von den anderen Seiberg-Witten-Gleichungen sind, ist es möglich, hierfür die triviale Lösung

$$\hat{C}^* = C^*, \quad (3.10a)$$

$$\hat{B} = B \quad (3.10b)$$

zu wählen.

Zuguterletzt ist noch die Frage zu klären, was bei der Verwendung der Seiberg-Witten-Abbildung mit dem Eichfixierungsterm $\mathcal{L}_{\text{Eich}}$ und dem Geist-Antigeist-Wechselwirkungsterm $\mathcal{L}_{\text{Geist}}$ geschieht. Zunächst erscheint es erforderlich, auch in diesen beiden Termen der Lagrangedichte die Produkte durch Sternprodukte zu ersetzen und die Seiberg-Witten-Abbildungen einzusetzen. Es ist aber auch möglich, mit der folgenden Argumentation stattdessen die einfacheren kommutativen Terme zu behalten:

Zwar werden zur Herleitung der Seiberg-Witten-Abbildung (in dem Algorithmus nach Barnich et al.) die BRST-Symmetrie und die Geister benötigt, doch ist die Seiberg-Witten-Abbildung selbst unabhängig davon. Insbesondere treten in den Seiberg-Witten-Abbildungen der physikalischen Felder selbst keine Geister auf. Es ist

also möglich, nach der Konstruktion der Seiberg-Witten-Abbildung den Übergang von der Eichsymmetrie zur BRST-Symmetrie wieder rückgängig zu machen. Dies bedeutet, man verwendet nur den physikalischen Anteil der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}}$ und setzt dort die Seiberg-Witten-Abbildungen ein. Man erhält dann eine Theorie von kommutativen Feldern mit einer effektiven Lagrangedichte, die nach Konstruktion die gleichen Symmetrien besitzt wie die ursprüngliche Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}}$. Für die Quantisierung ist es also nötig, die Eichung wieder zu fixieren und Geister einzuführen. Da die Symmetrie die gleiche geblieben ist, ist es möglich, auch den gleichen Eichfixierungs- und Geist-Antigeist-Wechselwirkungsterm wie im kommutativen Modell zu verwenden.

Das Argument, dass Eichfixierung und Geister nur mathematische Hilfsmittel sind und die Details ihrer Anwendung physikalische Aussagen nicht beeinflussen können, führt zu dem Schluss, dass beide Wege (die Verwendung der kommutativen Terme oder die Übertragung der nichtkommutativen Terme) äquivalent sind. Die Übertragung der nichtkommutativen Terme entspricht einfach einer anderen Eichung, die zwangsweise auch zu einer Veränderung im Geistsektor führt, unter anderem auch zu anderen Feynmanregeln, die aber physikalische Ergebnisse nicht verändert. Für den Wirkungsquerschnitt $gg \rightarrow q\bar{q}$ wird diese Unabhängigkeit von der Wahl der Eichfixierung im Unterabschnitt 6.2.1 gezeigt werden.

3.3 Entwicklung in ϑ

Leider lassen sich die Seiberg-Witten-Abbildung nicht geschlossen analytisch darstellen. Daher ist es nötig, die Seiberg-Witten-Abbildungen in einem kleinen Parameter zu entwickeln.

Als erste Möglichkeit bietet sich natürlich an, die Theorie nach dem Nichtkommutativitätsparameter $\vartheta = 1/\Lambda_{NC}^2$ zu entwickeln. Da bislang keine experimentellen Hinweise auf eine nichtkommutative Raumzeit existieren, muss eine nichtkommutative Teilchentheorie postulieren, dass ϑ sehr klein ist. Später wird Λ_{NC} auf 1 TeV gesetzt werden, d. h. auf eine Energie jenseits der heutigen Beschleunigerenergien (aber durchaus im Bereich zukünftiger Beschleuniger, z. B. des LHC).

Die erste Ordnung in ϑ der Seiberg-Witten-Abbildung ist schon einige Jahre bekannt (siehe z. B. [18]), so dass es bereits viele Untersuchungen an nichtkommutativen Eichtheorien mit Hilfe der Seiberg-Witten-Abbildungen gab. Calmet et al. konstruierten 2002 auf diese Weise eine komplette Erweiterung des Standardmodells[19].

Eine charakteristische phänomenologische Eigenschaft von nichtkommutativen Modellen ist eine ausgeprägte Richtungsabhängigkeit von Wirkungsquerschnitten. Insbesondere mitteln sich häufig die Effekte erster Ordnung heraus, wenn der Wirkungsquerschnitt über den gesamten Raumwinkel integriert wird. In der Winkelabhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitt hingegen tauchen im Vergleich zum Standardmodell zusätzliche Oszillationen auf. Als Beispiel sei hier der Prozess $\gamma\gamma \rightarrow f\bar{f}$ genannt, der in [24] diskutiert wird.

Während ursprünglich die Entwicklung der Seiberg-Witten-Abbildungen immer

durch einen mühsamen Koeffizientenvergleich in einem geschickten Ansatz gefunden werden mussten, gelang es schließlich, Methoden zur systematischen rekursiven Lösung der Seiberg-Witten-Gleichungen in jeder Ordnung in ϑ zu entwickeln[21, 22]. Damit ist es nun also im Prinzip möglich, eine beliebige nichtkommutative Eichtheorie in jeder Ordnung in ϑ auf eine effektive kommutative Theorie abzubilden.

4 Entwicklung der Seiberg-Witten-Abbildung in A

Eine Entwicklung der Seiberg-Witten-Abbildungen nach ϑ hat den Nachteil, dass sie nur in einem bestimmten Energiebereich gültig ist. Für Energien größer als Λ_{NC} müssen höhere Ordnungen berücksichtigt werden. Auf diese Weise ist es nicht möglich, das Hochenergieverhalten der Theorie zu untersuchen.

Einen Ausweg bietet die Entwicklung der Seiberg-Witten-Abbildung in der Homogenität in den Vektorbosonenfeldern A_μ^A , d. h. für ein beliebiges Feld $F \in \{C, A_\mu, \Psi\}$ setzt man

$$\begin{aligned}\hat{F} &= \hat{F}^{[1]} + \hat{F}^{[2]} + \hat{F}^{[3]} + \dots \\ \hat{F}^{[1]} &= F \\ \hat{F}^{[2]} &= \mathbf{M}^\mu A_\mu F \\ \hat{F}^{[3]} &= \mathbf{M}^{\mu\nu} A_\mu A_\nu F \\ &\vdots\end{aligned}\tag{4.1}$$

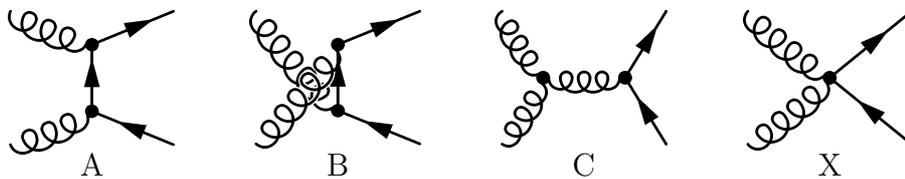
Dabei sind $\mathbf{M}^\mu, \mathbf{M}^{\mu\nu}, \dots$ analytische Funktionen von Differentialoperatoren $\wedge_{12}, \wedge_{13}, \wedge_{23}, \dots$ (vgl. Gleichung (1.8)), d. h. in den Ausdrücken $F^{[i]} (i \neq 1)$ treten insbesondere sämtliche Ableitungen der i Felder auf. Hier richtet sich die benötigte Ordnung nicht nach dem gewünschten Energiebereich, sondern nach dem Prozess und der gewünschten Schleifenordnung des betrachteten Wirkungsquerschnittes: Jede Ordnung der Seiberg-Witten-Abbildung führt zu Termen in der Lagrangedichte und damit zu Feynmanregeln. Höhere Ordnungen führen zu komplizierteren Vertizes, die in einem gegebenen Prozess erst ab einer gewissen Schleifenordnung relevant sind.

Indem man andererseits sämtliche Ordnungen von ϑ mitnimmt, ist es möglich, das Hochenergieverhalten und die Unitariät der Theorie zu untersuchen. Die Formeln, die man gewinnt, gelten für alle Energien (soweit man annimmt, dass die Kopplungskonstante als Funktion von der Energie genügend klein bleibt, was in der kommutativen QCD zumindest gewährleistet ist). Wenn die Motivation für die nichtkommutative Theorie aus der Regularisierung der UV-Divergenzen kommt, so ist es zwingend notwendig, sämtliche Ordnungen in ϑ zu berücksichtigen. Wenn andererseits die Theorie als reiner Limes einer Stringtheorie interpretiert wird, genügt es natürlich, sich auf die untersten Ordnungen in ϑ zu beschränken, da man von vorneherein eine Energieskala vorgegeben hat, ab der die Theorie durch eine allgemeinere Theorie ersetzt werden muss.

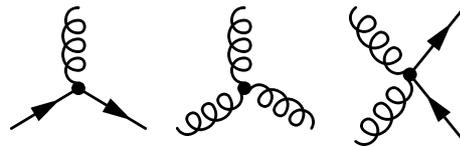
Mit der Entwicklung nach A lässt sich unter anderem die sogenannte Froissart-Schranke überprüfen[2]: Diese besagt, dass in einer unitären Theorie der Wirkungsquerschnitt als Funktion der Energie \sqrt{s} nicht stärker steigen kann als $\log(s)^2$. Dies soll am Wirkungsquerschnitt $gg \rightarrow q\bar{q}$ in der nichtkommutativen QCD getestet werden. Es zeigt sich, dass die Erfüllung der Froissart-Schranke von der Wahl der Seiberg-Witten-Abbildung abhängig ist.

4.1 Benötigte Ordnungen

In dieser Arbeit soll die Seiberg-Witten-Abbildung dazu verwendet werden, den Wirkungsquerschnitt der Quarkpaarerzeugung durch Gluonfusion $gg \rightarrow q\bar{q}$ in Baumnäherung zu berechnen. Für diesen Prozess gibt es vier verschiedene Diagramme



Die benötigten Vertizes sind



1. der Eichwechselwirkungsvertex,
2. der Drei-Gluonen-Vertex,
3. sowie ein Kontaktvertex, den es in der kommutativen Theorie nicht gibt.

Dazu genügt es,

- eine Korrektur $\hat{A}_\mu^{[2]}$ für die Seiberg-Witten-Abbildung des Eichbosons \hat{A}_μ
- und zwei Korrekturen $\hat{\Psi}_\mu^{[2]}$ und $\hat{\Psi}_\mu^{[3]}$ für die Seiberg-Witten-Abbildung des Fermionfeldes $\hat{\Psi}$

zu berechnen. Setzt man die zweite Korrektur $\hat{A}_\mu^{[3]}$ für das Eichboson \hat{A} in die Lagrangedichte der Yang-Mills-Theorie $\mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}}$ ein, so führt dies zu Feynmanregeln mit drei Eichbosonen und mindestens einem weiteren Feld (da sämtliche Terme in $\mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}}$ mindestens quadratisch in den Feldern sind). $\hat{\Psi}_\mu^{[3]}$ hingegen liefert Terme mit zwei Eichbosonen, einem Fermion und mindestens einem weiteren Feld, und dies gibt einen Beitrag zu dem Kontaktvertex.

Eine genauere Analyse zeigt, dass der Wirkungsquerschnitt auch unabhängig von $\hat{\Psi}^{[3]}$ ist. Dies liegt daran, dass der von $\hat{\Psi}^{[3]}$ stammende Anteil der Feynmanregel für den Kontaktvertex proportional zu den Bewegungsgleichungen des Quarks bzw. Antiquarks ist (siehe Kapitel 5). Daher hängt der Wirkungsquerschnitt effektiv nur von der Wahl der ersten Ordnungen $\hat{A}^{[2]}$ und $\hat{\Psi}^{[2]}$ der Seiberg-Witten-Abbildungen von Eichboson- und Materiefeld ab. Dennoch soll $\hat{\Psi}^{[3]}$ berechnet werden, um die vollständige Feynmanregel für den Kontaktvertex angeben zu können.

Eine vollständige Auflistung aller Terme, die zu den jeweiligen Vertizes beitragen, befindet sich vor der Herleitung der Feynmanregeln im Abschnitt 5.3

4.2 Rekursionsformeln

In diesem Abschnitt sollen die Formeln von Barnich et al.[22] zur rekursiven Berechnung der Seiberg-Witten-Abbildung vorgestellt werden. Neben den hier erwähnten Formeln für die Entwicklung nach Homogenität in A gibt es noch weitere, ähnliche Formeln, die die Seiberg-Witten-Gleichungen Ordnung für Ordnung in ϑ lösen.

Zur Übersichtlichkeit werden in diesem Kapitel den gehuteten nichtkommutativen Größen andere Namen gegeben. Das Ergebnis für die Geister ist¹:

Proposition 1. *Eine spezielle rekursive Lösung $\hat{C} = \sum_{k=1} h^{[k]}$ für Gleichung (3.8a) mit $h^{[1]} = C$ ist gegeben durch*

$$h^{[k]} = -\rho^{[0]} \left(\gamma^{[1]} h^{[k-1]} - ig \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{2} [h^{[l]} * h^{[k-l]}] \right) \quad (4.2)$$

Für die Eichbosonen erhält man²:

Proposition 2. *Sei $\hat{C} = \sum_{k=1} h^{[k]}$ wie in Proposition 1. Dann ist durch $h_{\mu}^{[1]} = A_{\mu}$,*

$$f_{\mu}^{[k]} = -\rho^{[0]} \left(\gamma^{[1]} f_{\mu}^{[k-1]} - \partial_{\mu} h^{[k]} + ig \sum_{l=1}^{k-1} [f_{\mu}^{[l]} * h^{[k-l]}] \right) \quad (4.3)$$

eine spezielle rekursive Lösung $\hat{A}_{\mu} = \sum_{k=1} f_{\mu}^{[k]}$ für Gleichung (3.8b) gegeben.

Die entsprechende Rekursion für das Materiefeld ist in [22] nicht angegeben. In Analogie findet man jedoch leicht:

Proposition 3. *Sei $\hat{C} = \sum_{k=1} h^{[k]}$ wie in Proposition 1. Dann ist durch $m^{[1]} = \Psi$,*

$$m^{[k]} = -\rho^{[0]} \left(\gamma^{[1]} m^{[k-1]} - ig \sum_{l=1}^{k-1} h^{[l]} * m^{[k-l]} \right) \quad (4.4)$$

eine spezielle rekursive Lösung $\hat{\Psi} = \sum_{k=1} m^{[k]}$ für Gleichung (3.8c) gegeben.

¹Proposition 3 aus [22]

²Proposition 4 aus [22]

Dabei ist $\rho^{[0]}$ wie folgt definiert³:

$$\rho^{[0]}f(y, z, w) = \int_0^1 \frac{dt}{t} [y^\alpha \frac{\partial^L}{\partial z^\alpha} f](ty, tz, w) \quad (4.5)$$

mit

$$\{y^\alpha\} = \{\partial_{(\nu_1 \dots \nu_l} A_\mu^A)\} \quad (4.6a)$$

$$\begin{aligned} \{z^\alpha\} &= \{\partial_{(\nu_1 \dots \nu_l} \partial_\mu C^A\} \\ &= \{\partial_{\nu_1 \dots \nu_l} \partial_\mu C^A\} \end{aligned} \quad (4.6b)$$

$$\{w^i\} = \{C^A, \chi_\Delta^{[1]A}, \Psi, \partial_{\nu_1 \dots \nu_l} \Psi\} \quad (4.6c)$$

$$\chi_\Delta^{[1]A} = \partial_{(\nu_1 \dots \nu_l} F_{\mu\lambda}^{[1]A} \quad (4.6d)$$

$$F_{\mu\nu}^{[1]A} = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A \quad (4.6e)$$

Die runden Klammern bei den Indizes bedeuten die (normierte) Symmetrisierung der Terme, also:

$$\begin{aligned} \partial_{(\nu_1 \dots \nu_l} A_{\nu_{l+1})} &:= \frac{1}{(l+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} \partial_{\nu_{\sigma(1)}} \dots \partial_{\nu_{\sigma(l)}} A_{\nu_{\sigma(l+1)}} \\ &= \frac{1}{l+1} \sum_{k=1}^{l+1} \partial_{\nu_1} \dots \widehat{\partial_{\nu_k}} \dots \partial_{\nu_{l+1}} A_{\nu_k} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Oben wurde verwendet, dass die partiellen Ableitungen selbst nicht mehr symmetrisiert werden müssen, da sie vertauschen.

Die Wirkung von $\rho^{[0]}$ lässt sich so zusammenfassen, dass es Ableitungen vom Geistfeld $\partial_\alpha C$ durch symmetrisierte Ableitungen des Eichbosonenfeldes $\partial_{(\alpha k} A_{\alpha k)}$ ersetzt. Damit kehrt es in gewisser Weise den Operator $\gamma^{[0]}$ um. Genau erfüllt $\rho^{[0]}$ die Identität

$$\{\gamma^{[0]}, \rho^{[0]}\}f(y, z, w) = f(y, z, w) - f(0, 0, w), \quad (4.8)$$

die im Anhang B.3 bewiesen wird. Bis auf den Term $f(0, 0, w)$ ist $\rho^{[0]}$ also eine *kontraktierende Homotopie* zu $\gamma^{[0]}$.

In den Berechnungen wird es nötig sein, die unsymmetrisierten Variablen durch symmetrisierte zu ersetzen und umgekehrt. Dies geschieht nach folgender Formel:

$$\begin{aligned} \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_l} A_{\nu_{l+1}}^A &= \partial_{(\nu_1 \dots \nu_l} A_{\nu_{l+1})} + \frac{1}{l+1} \sum_{k=1}^l \partial_{\nu_1} \dots \widehat{\partial_{\nu_k}} \dots \partial_{\nu_l} F_{\nu_k \nu_{l+1}}^{[1]} \\ &= \partial_{(\nu_1 \dots \nu_l} A_{\nu_{l+1})} + \frac{l}{l+1} \partial_{(\nu_1 \dots \nu_{l-1}} F_{\nu_l \nu_{l+1}}^{[1]} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aus den Formeln folgt nun induktiv, dass die so konstruierte Seiberg-Witten-Abbildung die Form (3.5) bzw. (4.1) hat. Außerdem ist gewährleistet, dass die Statistik unter der Seiberg-Witten-Abbildung erhalten bleibt.

³ $\frac{\partial^L}{\partial z^\alpha}$ bezeichnet die Linksableitung nach z^α .

Der Beweis für die drei Propositionen ist recht ähnlich und geschieht durch Induktion. Für den Induktionsschritt wird die entsprechende Seiberg-Witten-Gleichung für die Ordnung k aufgestellt. Diese hat die Gestalt

$$\gamma^{[0]}X^{[k]} = F. \quad (4.10)$$

Nun wird (in den Variablen (4.6)) $F(0, 0, w) = 0$ und $\gamma^{[0]}F = 0$ gezeigt. Damit erhält man mit (4.8) $X^{[k]} = \rho^{[0]}F$ als eine Lösung von (4.10).

Im Folgenden wird der Beweis für Proposition 1 ausgeführt. Die Beweise für die anderen beiden Propositionen sind ähnlich und werden im Anhang B skizziert.

Beweis von Proposition 1 (nach [22]). Der Beweis soll durch Induktion geschehen: In erster Ordnung ist Gleichung (3.8a) erfüllt wegen $\gamma^{[0]}C = 0$:

$$\frac{ig}{2}[C * C] - \gamma C = igC * C + \frac{g}{2}f_{DE}{}^B C^D C^E T_B = igC * C - igCC =: r^{[2]} \quad (4.11)$$

Insbesondere hängt der Restterm zweiter Ordnung $r^{[2]}$ nur von abgeleiteten Geisfeldern ab.

Angenommen nun, die Formel (4.2) liefert eine Funktion $h^{k-1} = \sum_{l=1}^{k-1} h^{[l]}$, die die Gleichung (3.8a) bis zur Ordnung $k-1$ löst, d. h.:

$$\gamma h^{k-1} - ig \frac{1}{2}[h^{k-1} * h^{k-1}] = r^{[k]} + \sum_{m \geq 0} q^{[k+1+m]}, \quad (4.12)$$

wobei die Zahl in eckigen Klammern die Ordnung der entsprechenden Restterme angibt. Anwendung des Operators $\gamma - ig[h^{k-1} * \cdot]$ auf die linke Seite von Gleichung (4.12) liefert:

$$\gamma^2 h^{k-1} - ig[h^{k-1} * \gamma h^{k-1}] - \frac{ig}{2}\gamma[h^{k-1} * h^{k-1}] - \frac{g^2}{2}[h^{k-1} * [h^{k-1} * h^{k-1}]] = 0, \quad (4.13)$$

wegen:

1. $\gamma^2 = 0$,
2. $[X * [X * X]] = 0$ für beliebiges X , sowie
3. $\gamma[X * X] = 2\gamma(X * X) = 2(\gamma X) * X - 2X * \gamma X = -2[X * \gamma X]$ für fermionisches X .

Dies bedeutet für die rechte Seite in niedrigster Ordnung, dass $\gamma^{[0]}r^{[k]} = 0$ sein muss.

In Ordnung k verlangen die Gleichungen (3.8a) und (4.12):

$$\gamma^{[0]}h^{[k]} = -\gamma^{[1]}h^{[k-1]} + ig \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{2}[h^{[l]} * h^{[k-l]}] = -r^{[k]} \quad (4.14)$$

Falls $r^{[k]}(0,0,w) = 0$, so gilt also

$$-r^{[k]} = -(\rho^{[0]}\gamma^{[0]} + \gamma^{[0]}\rho^{[0]})r^{[k]} = \gamma^{[0]}(-\rho^{[0]}r^{[k]}), \quad (4.15)$$

und eine Lösung von (4.14) ist gegeben durch $h^{[k]} = -\rho^{[0]}r^{[k]}$, wie behauptet.

Nun muss man sich noch vergewissern, dass $r^{[k]}(0,0,w) = 0$. Dazu genügt es zu zeigen,

1. dass $r^{[k]}$ nur von differenzierten Geistern abhängt,
2. und dass $r^{[k]}$ verschwindet, wenn man die Geister auf Null setzt.

2. folgt leicht per Induktion, indem man zeigt, dass in der Reihenentwicklung jeder einzelne Summand proportional zu (mindestens) einem (differenzierten oder undifferenzierten) Geist ist (denn $\gamma^{[1]}$ fügt jedem Summand einen Geist hinzu, auch das Sternprodukt erhöht die Anzahl der Geister, und $\rho^{[0]}$ verringert die Anzahl der Geister um 1).

Es bleibt also noch 1. zu zeigen. Für $k = 2$ wurde diese Behauptung bereits explizit gezeigt. Für $k > 2$ argumentiert man wieder durch Induktion: Wenn $r^{[l]}$ für $l < k$ nur von differenzierten Geistern abhängt, so hängt auch $h^{[l]} = -\rho^{[0]}r^{[l]}$ nur von differenzierten Geistern ab. Die einzige mögliche Abhängigkeit von nichtdifferenzierten Geistern in $r^{[k]}$ kommt also aus den Termen $\gamma^{[1]}h^{[k-1]} - ig[C, h^{[k-1]}]$, und diese hebt sich genau heraus:

$$\begin{aligned} \gamma^{[1]}f &\rightarrow +g \sum_{\rho} f_{DE}{}^B (\partial_{\rho} A_{\mu}^D) C^E \frac{\partial^L f}{\partial(\partial_{\rho} A_{\mu}^B)} \\ &\quad - \frac{g}{2} \sum_{\rho} f_{DE}{}^B [C^D (\partial_{\rho} C^E) + (\partial_{\rho} C^D) C^E] \frac{\partial^L f}{\partial(\partial_{\rho} C^B)} \\ &= ig \sum_{\rho} [C, \partial_{\rho} A_{\mu}]^B \frac{\partial^L f}{\partial(\partial_{\rho} A_{\mu}^B)} + ig \sum_{\rho} [C, \partial_{\rho} C]^B \frac{\partial^L f}{\partial(\partial_{\rho} C^B)} \\ &= ig[C, f], \end{aligned} \quad (4.16)$$

wobei in der Berechnung nur die relevanten Terme (mit nichtdifferenzierten Geistern) berücksichtigt wurden. \square

Wie oben bereits erwähnt, erkennt man an der expliziten Form der Seiberg-Witten-Gleichung in Ordnung k (4.14), dass die Lösung nicht eindeutig ist. Im Prinzip ist es möglich, in jeder Ordnung k zu $h^{[k]}$ einen Term $\Delta h^{[k]}$ (der selbst wieder von der Ordnung k in den Feldern sein sollte) mit $\gamma^{[0]}\Delta h^{[k]} = 0$ zu addieren. Dabei muss allerdings beachtet werden, dass dieser zusätzliche Term mit $\rho^{[0]}$ verträglich ist, dass also die Rekursion in höheren Ordnungen nicht gestört wird. Dazu ist hinreichend, dass auch $\Delta h^{[k]}$ nicht von undifferenzierten Geistern abhängt.

Ähnliche Mehrdeutigkeiten erhält man auch bei den Seiberg-Witten-Abbildungen für das Eichboson- und das Materiefeld. Eine vollständige Analyse der Mehrdeutigkeiten findet sich im Abschnitt 3.6 von [22].

4.3 Berechnung der Entwicklung

Wie auch in Absatz 3.5 von [22] bemerkt wird, ist es möglich, die Seiberg-Witten-Abbildung allgemein und unabhängig von der Eichgruppe auszurechnen, indem man die Strukturkonstanten der Lie-Algebra in der Rechnung nicht durch ihre Werte ersetzt. Es stellt sich sogar heraus, dass das Einsetzen der Strukturkonstanten im allgemeinen Fall zu keiner analytischen Vereinfachung führt, wenn die Strukturkonstanten nicht durch eine einfache Formel gegeben sind. Erschwerend kommt hinzu, dass neben dem Kommutator zweier Generatoren in der Rechnung auch Antikommutatoren auftreten. Falls man diese ersetzen will, so muss man in die einhüllende Algebra gehen und einen weiteren Strukturtensor einführen. Ausnahmen sind natürlich abelsche Eichgruppen sowie die $SU(2)$, in denen man (zumindest in gewissen Darstellungen) einfache Formeln für den Kommutator und den Antikommutator kennt.

Mit den im vorhergehenden Abschnitt gegebenen Formeln wurden jeweils zwei Korrekturterme für das Geistfeld und das Materiefeld, sowie ein Korrekturterm für das Vektorbosonenfeld berechnet.

Die Berechnungen laufen immer nach dem selben Schema ab, werden aber schon in der zweiten Ordnung sehr länglich. Die Formeln des vorherigen Abschnittes lassen sich in die Form $X^{[k]} = \rho^{[0]} F$ bringen, wobei sich F normalerweise in wenigen Zeilen berechnen lässt. F ist eine Reihe von Produkten aus Raumzeitableitungen von $k + 1$ Feldern. Das zentrale Problem ist nun die Auswertung von $\rho^{[0]}$. Dafür ist es notwendig, eine „Variablentransformation“ in die symmetrisierten Variablen (4.6) zu machen. Ab der zweiten Ordnung muss F mit der Produktregel so umgeformt werden, dass jede Ableitung nur noch auf ein Feld wirkt. Dies führt zur Einführung von Binomialkoeffizienten. Anschließend können die Variablen symmetrisiert werden nach Gleichung (4.9). Hierbei kommt es zu „Randtermen“ in den Reihen über die abgeleiteten Felder, da das nicht differenzierte Feld A_μ nicht symmetrisiert werden muss. Dies bedeutet, dass die Anfangsterme der Reihe besonders beachtet werden müssen und bei den Indizes, über die summiert wird, aufgepasst werden muss. Nun wird $\rho^{[0]}$ nach der Produktregel angewendet. Dies führt zu weiteren Randtermen, da die undifferenzierten Geister von $\rho^{[0]}$ anders behandelt werden als die differenzierten Geister. Anschließend wird die Symmetrisierung rückgängig gemacht.

Man erkennt, dass sich die Anzahl der Terme in jedem Schritt vervielfältigt, und eine effektive Zusammenfassung ist im Allgemeinen kaum möglich. Man kann jedoch gewisse allgemeine Aussagen über die Form der auftretenden Terme machen. Dies soll am Beispiel von der zweiten Korrektur für das Materiefeld $m^{[3]}$ erläutert werden:

Nach Definition besteht $m^{[3]}$ aus Termen proportional zu $A_\mu A_\nu \Psi$. Die Raumzeitindizes μ, ν müssen nun kontrahiert werden. Aus den Rekursionsformeln (4.2) bis (4.4) folgt, dass dies nur über den Tensor $\Theta^{\rho\sigma}$ möglich ist⁴. Dieser Tensor führt weitere Raumzeitindizes ein, die nun ihrerseits entweder durch die Indizes der Eichbosonenfelder oder durch partielle Ableitungen kontrahiert werden müssen. Die Lösung ist also

⁴Die Felder A_μ und die partiellen Ableitungen ∂_ν treten stets mit unteren Indizes auf, während der Tensor $\Theta^{\rho\sigma}$ stets obere Indizes besitzt. Andere Größen mit Lorentz-Indizes treten nicht auf.

eine Linearkombination aller Möglichkeiten, die Indizes zu kontrahieren. Dabei ergibt sich aus dem Algorithmus noch die Randbedingung, dass ein Faktor $\Theta^{\rho\sigma}$ stets zwei verschiedene Felder miteinander verknüpft, d. h. Terme wie $\Theta^{\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma$ treten nicht auf. Man erhält also

$$\begin{aligned}
m^{[3]} &= \Theta^{\mu\nu} F_1[\wedge_{12}, \wedge_{13}, \wedge_{23}] A_\mu A_\nu \Psi \\
&+ \Theta^{\mu\nu} \Theta^{\rho\sigma} F_2[\wedge_{12}, \wedge_{13}, \wedge_{23}] \partial_\rho A_\mu \partial_\nu A_\sigma \Psi \\
&+ \Theta^{\mu\nu} \Theta^{\rho\sigma} F_{3a}[\wedge_{12}, \wedge_{13}, \wedge_{23}] \partial_\rho A_\mu A_\sigma \partial_\nu \Psi \\
&+ \Theta^{\mu\nu} \Theta^{\rho\sigma} F_{3b}[\wedge_{12}, \wedge_{13}, \wedge_{23}] A_\mu \partial_\nu A_\rho \partial_\sigma \Psi \\
&+ \Theta^{\mu\nu} \Theta^{\rho\sigma} F_4[\wedge_{12}, \wedge_{13}, \wedge_{23}] A_\mu A_\rho \partial_\nu \partial_\sigma \Psi
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Dabei sind F_1 bis F_4 Reihen der Differentialoperatoren \wedge_{12} , \wedge_{13} , und \wedge_{23} (siehe Gleichung (1.8)), d. h. analytische Funktionen von drei Variablen, in die diese Differentialoperatoren eingesetzt werden.

Die Liste der möglichen Terme für die zweite Korrektur des Geistfeldes $h^{[3]}$ ist wesentlich länger, da sich auf Grund der Matrixstruktur von $A_\mu A_\nu C$ eine größere Vielzahl von Kombinationsmöglichkeiten ergibt, während das Ψ in $m^{[3]}$ immer an der letzten Stelle stehen muss (vgl. das Resultat in 4.4.5).

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Rechnung dargestellt. Für die ersten Korrekturen von Geist- und Materiefeld $h^{[2]}$ bzw. $m^{[2]}$ ist die Rechnung mit angegeben, für die anderen Korrekturen $f_\mu^{[2]}$, $h^{[3]}$ und $m^{[3]}$ befindet sich die Rechnung im Anhang.

Natürlich ist es bei einer derartigen Rechnung von großer Bedeutung, eine Möglichkeit zu haben, die Ergebnisse zu verifizieren. Zunächst einmal gab es die Möglichkeit, diese Resultate mit den entsprechenden spezielleren Resultaten von Jörg Zeiner für die $U(1)$ -Eichtheorie zu vergleichen[25].

Eine weitere Verifikationsmöglichkeit liefert das Einsetzen in die Bestimmungsgleichungen (3.5). In der Notation von oben ist also $\gamma^{[0]} X^{[k]} = F$ zu bestätigen.

Beide Tests wurden für sämtliche Resultate ausgeführt und lieferten ein positives Ergebnis. Im ersten Falle konnte die Übereinstimmung im Spezialfall gezeigt werden. Die Rechnungen für den zweiten Test befinden sich im Anhang D.

4.3.1 Die Multiindexschreibweise

In den folgenden Rechnungen wird es nötig sein, mit sehr vielen Indizes zu arbeiten. Dabei kommt es oft vor, dass über Terme mit unterschiedlicher Anzahl von Indizes summiert wird (wie z. B. beim Sternprodukt). Aus diesem Grund empfiehlt sich eine Multiindexschreibweise, die im Folgenden erläutert werden soll.

Die Ergebnisse werden zwar – bis auf $h^{[3]}$ – stets auch in einer Form ohne Multiindizes dargestellt werden, doch zum Nachvollzug der Rechnungen ist eine Kenntnis der Multiindexschreibweise unabdingbar.

Ein Multiindex α ist definiert als ein k -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ für ein $k = |\alpha| \in \mathbb{N}_0$. Dabei sollen die folgenden Schreibweisen gelten:

$$\partial_\alpha f := \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_k} f \tag{4.18a}$$

$$\Theta^{\alpha\beta} := \prod_{i=1}^k \Theta^{\alpha_i\beta_i} \quad (4.18b)$$

Beim Übergang von den symmetrisierten Koordinaten zu den gewöhnlichen Feldern (4.7) sowie bei der Anwendung der Produktregel wird es nötig sein, einen Eintrag eines Multiindex zu entfernen oder einen Multiindex in zwei Multiindizes verschiedener Größe zu zerlegen. Dazu dienen die Schreibweisen

$$\begin{aligned} {}^a\alpha^b &:= (\alpha_{a+1}, \dots, \alpha_b) \\ \alpha^b &:= (\alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ {}^a\alpha &:= (\alpha_{a+1}, \dots, \alpha_k) \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\alpha_c := (\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_c, \dots, \alpha_k).$$

Der Hut zeigt dabei das Auslassen eines bestimmten Eintrages an. Insbesondere gilt also (bis auf eine Umordnung der Einträge in der zweiten Zeile)

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha^c, {}^c\alpha) \\ &\approx (\alpha_c, \alpha_c) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Bei den Umformungen mit den Multiindizes ist schließlich noch zu berücksichtigen, dass die Multiindizes selbst zwar immer geordnete Tupel sind, dass die Ordnung aber in vielen Fällen keine Rolle spielt. In der Regel treten Paare α, β von Multiindizes auf, z. B. in $\Theta^{\alpha\beta}$, bei denen es nur darauf ankommt, dass die paarweise Zuordnung der Elemente (α_k, β_k) nicht verloren geht.

Als Beispiel für die Multiindexschreibweise sei hier die Reihendarstellung für das Sternprodukt angeführt:

$$A * B = \sum_{\substack{k=0 \\ |\alpha|=|\beta|=k}}^{\infty} \frac{(i\frac{\partial}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \partial_{\alpha} A \partial_{\beta}. \quad (4.21)$$

Die Bedingung $|\alpha| = |\beta| = k$ für die Summation wird in den Berechnungen nicht jedes mal angegeben sondern stets implizit verlangt werden.

4.4 Ergebnisse der Entwicklung

4.4.1 $h^{[2]}$ - erste Korrektur für das Geistfeld

Nach Gleichung (4.2) ist

$$h^{[2]} = -\rho^{[0]} \left(\gamma^{[1]} C - \frac{ig}{2} [C * C] \right)$$

Mit $\gamma^{[1]}C = \frac{ig}{2} [C, C]$ folgt

$$\begin{aligned} h^{[2]} &= \rho^{[0]} \frac{ig}{2} ([C * C] - [C, C]) = ig\rho^{[0]}(C * C - CC) \\ &= ig\rho^{[0]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k}{k!} \Theta^{\alpha_1\beta_1} \dots \Theta^{\alpha_k\beta_k} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_k} C^A \partial_{\beta_1} \dots \partial_{\beta_k} C^B T_A T_B \end{aligned}$$

In der Multiindexschreibweise (vgl. 4.3.1) hat man:

$$\begin{aligned} h^{[2]} &= ig\rho^{[0]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \partial_{\alpha} C^A \partial_{\beta} C^B T_A T_B \\ &= ig\rho^{[0]} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k}{k!} (\Theta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} C^A \partial_{\beta} C^B - (-1)^k \Theta^{\beta\alpha} \partial_{\beta} C^B \partial_{\alpha} C^A) T_A T_B \\ &= ig\rho^{[0]} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \partial_{\alpha} C^A \partial_{\beta} C^B (T_A T_B - (-1)^k T_B T_A) \\ &= ig\rho^{[0]} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \partial_{\alpha} C^A \partial_{\beta} C^B [T_A, T_B]_k \end{aligned} \quad (4.22)$$

mit der Definition:

$$[T_A, T_B]_l = T_A T_B - (-1)^l T_B T_A = \begin{cases} [T_A, T_B] & \text{wenn } l \text{ gerade ist} \\ \{T_A, T_B\} & \text{wenn } l \text{ ungerade ist} \end{cases} \quad (4.23)$$

Dabei wurde die Antisymmetrie $\Theta^{\alpha\beta} = (-1)^k \Theta^{\beta\alpha}$ sowie $\partial_{\alpha} C^A \partial_{\beta} C^B = -\partial_{\beta} C^B \partial_{\alpha} C^A$ verwendet.

Nun muss $\rho^{[0]}$ ausgeführt werden. Die Wirkung von $\rho^{[0]}$ ist es, differenzierte Geister $\partial_{\alpha} C^A$ durch Eichbosonen $\partial_{(\alpha^k A_{\alpha_k}^A)}$ zu ersetzen. Das Integral in der Definition von $\rho^{[0]}$ liefert lediglich einen kombinatorischen Koeffizienten. Ausführen von $\rho^{[0]}$ liefert also mit $\alpha := (\alpha^k, \alpha_k)$, $\beta := (\beta^k, \beta_k)$

$$\begin{aligned} h^{[2]} &= ig \int_0^1 \frac{dt}{t} t^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \left(\partial_{(\alpha^k A_{\alpha_k}^A)} \partial_{\beta} C^B \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \partial_{\alpha} C^A \partial_{(\beta^k A_{\beta_k}^B)} \right) [T_A, T_B]_k \right] \\ &= ig \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \left(\partial_{(\alpha^k A_{\alpha_k}^A)} \partial_{\beta} C^B [T_A, T_B]_k \right. \\ &\quad \left. - (-1)^k \partial_{\beta} C^B \partial_{(\alpha^k A_{\alpha_k}^A)} [T_B, T_A]_k \right) \\ &= -\frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha^k A_{\alpha_k}^A)} \partial_{\beta} \partial_{\beta} C^B [T_A, T_B]_{k+1} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Symmetrisierung von $\partial_{(\alpha} A_{\alpha)}^A$ kann weggelassen werden, da der Koeffizient $\Theta^{\alpha\beta}\Theta^{\alpha\beta}$ diese Symmetrisierung automatisch übernimmt. Also kann man schreiben:

$$h^{[2]} = -\frac{g}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\Lambda_{12})^k}{(k+1)!} A_{\mu}^A \partial_{\nu} C^B [T_A, T_B]_{k+1} \quad (4.25)$$

Die Reihe in diesem Ausdruck lässt sich nun umschreiben, und dies liefert insgesamt⁵:

$$h^{[2]} = \frac{ig}{2} \left(\frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\cos \Lambda_{12} - 1}{\Lambda_{12}} A_{\mu}^A \partial_{\nu} C^B [T_A, T_B] + i \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\sin \Lambda_{12}}{\Lambda_{12}} A_{\mu}^A \partial_{\nu} C^B \{T_A, T_B\} \right) \quad (4.26)$$

4.4.2 $f_{\mu}^{[2]}$ - erste Korrektur für das Eichboson

Mit $h^{[2]}$ lässt sich nun der erste Korrekturterm für das Eichfeld berechnen. Man erhält (vgl. Anhang C.1):

$$\begin{aligned} f_{\mu}^{[2]} = & +g \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\sin(\Lambda_{12})}{\Lambda_{12}} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A A_{\beta}^B \{T_A, T_B\} \\ & - ig \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\cos(\Lambda_{12}) - 1}{\Lambda_{12}} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A A_{\beta}^B [T_A, T_B] \\ & - \frac{g}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{S^{(2)}(\Lambda_{12})}{\Lambda_{12}} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A A_{\beta}^B \{T_A, T_B\} \\ & + \frac{ig}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{C^{(2)}(\Lambda_{12})}{\Lambda_{12}} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A A_{\beta}^B [T_A, T_B] \\ & - \frac{g}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \frac{\sin(\Lambda_{12}) - S^{(2)}(\Lambda_{12})}{\Lambda_{12}^2} \partial_{\alpha'} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{\beta} A_{\beta'}^B \{T_A, T_B\} \\ & + \frac{ig}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \frac{\cos(\Lambda_{12}) - 1 - C^{(2)}(\Lambda_{12})}{\Lambda_{12}^2} \partial_{\alpha'} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{\beta} A_{\beta'}^B [T_A, T_B] \end{aligned} \quad (4.27)$$

mit⁶

$$\begin{aligned} S^{(2)}(z) &= \int_0^z \frac{\sin(t)}{t} dt = -i \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{(iz)^k}{k!k} \\ C^{(2)}(z) &= \int_0^z \frac{\cos(t) - 1}{t} dt = \sum_{k \text{ gerade}} \frac{(iz)^k}{k!k} \end{aligned}$$

Diese Lösung für die Seiberg-Witten-Abbildung soll von nun an die $\rho^{[0]}$ -Lösung heißen, um sie von der alternativen Lösung zu unterscheiden, die im nächsten Abschnitt definiert werden soll.

⁵Dies ist die Formel (3.39) in [22], bis auf einen Faktor $\frac{1}{2}$, der dort fehlt.

⁶ $S^{(2)}$ wird auch als Integralsinus Si bezeichnet. $C^{(2)}$ steht über die Euler'sche Konstante γ_E mit dem Integralkosinus Ci in der Beziehung $C^{(2)}(z) = \text{Ci}(z) - \log(|z|) - \gamma_E$.

4.4.3 Alternative Lösung für $f_\mu^{[2]}$

Es soll nun noch eine zweite Lösung der Seiberg-Witten-Abbildung für das Eichboson in zweiter Ordnung angegeben werden. Diese Lösung geht auf einen Artikel von Cerchiai et al. zurück, die mit Hilfe einer Differentialgleichung einen Algorithmus zur rekursiven Lösung der Seiberg-Witten-Gleichungen gefunden hatten[21], und zwar Ordnung für Ordnung in ϑ . Jörg Zeiner gelang es, diese Differentialgleichung für abelsche Eichtheorien in erster Ordnung A und allen Ordnungen in ϑ zu lösen[25].

Aus der abelschen Lösung

$$g \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\sin(\wedge_{12})}{\wedge_{12}} (2\partial_\alpha A_\mu A_\beta - \partial_\mu A_\alpha A_\beta) \quad (4.28)$$

ist es möglich, durch heuristische Überlegungen (gewonnen aus dem Vergleich der $\rho^{[0]}$ -Lösungen der Seiberg-Witten-Abbildungen für den abelschen und nichtabelschen Fall) aus der abelschen Lösung eine allgemeinere Lösung zu erraten. Dazu ersetzt man zunächst

$$A_\rho A_\sigma \rightarrow \frac{1}{2} A_\rho^A A_\sigma^B \{T_A, T_B\}$$

Im zweiten Schritt fügt man zu jedem Term einen weiteren Term hinzu, in dem man in den auftretenden analytischen Funktionen die Reihen, die sich vom Sinus ableiten, durch die entsprechenden analytischen Funktionen ersetzt, die sich vom Kosinus ableiten, wobei noch gewisse Faktoren i auftreten:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(z)}{z} &\rightarrow -i \frac{\cos(z)}{z} \\ \frac{S^{(2)}(z)}{z} &\rightarrow -i \frac{C^{(2)}(z)}{z} \end{aligned}$$

Außerdem wird in den „Kosinustermen“ der Antikommutator durch einen Kommutator ersetzt.

Die Lösung nach Cerchiai (im Folgenden *alternative Lösung* genannt) lautet

$$\begin{aligned} f_\mu^{[2]} = & +g \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\sin(\wedge_{12})}{\wedge_{12}} \partial_\alpha A_\mu^A A_\beta^B \{T_A, T_B\} \\ & - ig \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\cos(\wedge_{12}) - 1}{\wedge_{12}} \partial_\alpha A_\mu^A A_\beta^B [T_A, T_B] \\ & - \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\sin(\wedge_{12})}{\wedge_{12}} \partial_\mu A_\alpha^A A_\beta^B \{T_A, T_B\} \\ & + \frac{ig}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\cos(\wedge_{12}) - 1}{\wedge_{12}} \partial_\mu A_\alpha^A A_\beta^B [T_A, T_B] \end{aligned}$$

Die wichtige Eigenschaft dieser Lösung ist, dass es keinen Term proportional zu Θ^2 gibt. Wie sich später zeigen wird, ist es dieser letzte Term von $f_\mu^{[2]}$ (4.27), der die Froissart-Schranke verletzt.

Da f'_μ nicht berechnet wurde, muss die Eichäquivalenzbedingung nachgerechnet werden:

$$\begin{aligned}
\gamma^{[0]} f'_\mu{}^{[2]} &= +g \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \sin(\wedge_{12})}{2 \wedge_{12}} \partial_\alpha \partial_\mu C^A A_\beta^B \{T_A, T_B\} \\
&\quad + g \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \sin(\wedge_{12})}{2 \wedge_{12}} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_\beta C^B \{T_A, T_B\} \\
&\quad - ig \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \cos(\wedge_{12}) - 1}{2 \wedge_{12}} \partial_\alpha \partial_\mu C^A A_\beta^B [T_A, T_B] \\
&\quad - ig \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \cos(\wedge_{12}) - 1}{2 \wedge_{12}} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_\beta C^B [T_A, T_B] \\
&\quad - \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \sin(\wedge_{12})}{2 \wedge_{12}} \partial_\mu \partial_\alpha C^A A_\beta^B \{T_A, T_B\} \\
&\quad - \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \sin(\wedge_{12})}{2 \wedge_{12}} \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta C^B \{T_A, T_B\} \\
&\quad + \frac{ig}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \cos(\wedge_{12}) - 1}{2 \wedge_{12}} \partial_\mu \partial_\alpha C^A A_\beta^B [T_A, T_B] \\
&\quad + \frac{ig}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \cos(\wedge_{12}) - 1}{2 \wedge_{12}} \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta C^B [T_A, T_B] \\
&= -g \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \sin(\wedge_{12})}{2 \wedge_{12}} A_\alpha^A \partial_\mu C_\beta^B \{T_A, T_B\} \\
&\quad + g \sin(\wedge_{12}) A_\mu^A C^B \{T_A, T_B\} \\
&\quad + ig \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \cos(\wedge_{12}) - 1}{2 \wedge_{12}} A_\alpha^A \partial_\mu C_\beta^B [T_A, T_B] \\
&\quad - ig (\cos(\wedge_{12}) - 1) A_\mu^A C^B [T_A, T_B] \\
&\quad + \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \sin(\wedge_{12})}{2 \wedge_{12}} A_\alpha^A \partial_\mu C_\beta^B \{T_A, T_B\} \\
&\quad - \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \sin(\wedge_{12})}{2 \wedge_{12}} \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta C^B \{T_A, T_B\} \\
&\quad - \frac{ig}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \cos(\wedge_{12}) - 1}{2 \wedge_{12}} \partial_\alpha A^A \partial_\mu C_\beta^B [T_A, T_B] \\
&\quad + \frac{ig}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \cos(\wedge_{12}) - 1}{2 \wedge_{12}} \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta C^B [T_A, T_B] \\
&= -ig (\cos(\wedge_{12}) - 1) A_\mu^A C^B [T_A, T_B] \\
&\quad + g \sin(\wedge_{12}) A_\mu^A C^B \{T_A, T_B\} \\
&\quad - \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \partial_\mu \left(\frac{\sin(\wedge_{12})}{\wedge_{12}} A_\alpha^A C_\beta^B \right) \{T_A, T_B\} \\
&\quad + \frac{ig}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \partial_\mu \left(\frac{\cos(\wedge_{12}) - 1}{\wedge_{12}} A_\alpha^A C_\beta^B \right) [T_A, T_B] \\
&= -ig[A * C] - \gamma^{[1]} A_\mu + \partial_\mu h^{[2]}
\end{aligned}$$

(vgl. Gleichung (C.4)). Damit erfüllt f' die Seiberg-Witten-Gleichung (3.8b) in zweiter Ordnung.

4.4.4 $m^{[2]}$ - erste Korrektur für das Materiefeld

Die Rekursionsformel für $m^{[2]}$ lautet:

$$m^{[2]} = -\rho^{[0]} (\gamma^{[1]}\Psi - igC * \Psi) = -\rho^{[0]} (igC\Psi - igC * \Psi) \quad (4.29)$$

Man erhält also

$$\begin{aligned} m^{[2]} &= ig\rho^{[0]}(C * \Psi - C\Psi) \\ &= ig\rho^{[0]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \partial_{\alpha} C^A T_A \partial_{\beta} \Psi \\ &= ig \int_0^1 \frac{dt}{t} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} t \partial_{(\alpha_k} A_{\alpha_k}^A T_A \partial_{\beta} \Psi \right] \\ &= -g \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} A_{\alpha} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \\ &= -g \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} A_{\alpha} \partial_{\beta} \Psi \end{aligned} \quad (4.30a)$$

$$= +ig \frac{i\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \exp(i\wedge_{12}) - 1}{2 i\wedge_{12}} A_{\alpha} \partial_{\beta} \Psi \quad (4.30b)$$

Dabei konnte die Symmetrisierung von $\partial_{\alpha} A_{\alpha}$ weggelassen werden, da der restliche Term bereits symmetrisch ist.

4.4.5 $h^{[3]}$ - zweite Korrektur für das Geistfeld

Nach langer Rechnung (siehe C.2) erhält man als zweiten Korrekturterm für den Eichparameter:

$$\begin{aligned} h^{[3]} &= + \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+5}{m+k+2} \\ &\quad \partial_{\gamma} A_{\rho}^C \partial_{\delta}^m \partial_{\alpha} \partial_{\sigma} A_{\mu}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\ &+ \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\ &\quad \partial_{\gamma} A_{\rho}^C \partial_{\delta}^m \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\sigma} \partial_{\nu} C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\ &+ \frac{ig^2}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \frac{1}{l-m+k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{m\delta} \partial_\beta A_\nu^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& - \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
& \quad \frac{l+1-m}{l-m+k+2} \partial_\gamma \partial_\rho C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\nu A_\sigma^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\
& - \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+4}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+k+2} \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\rho A_\mu^A \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\nu A_\sigma^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_l \\
& + \frac{ig^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma A_\rho^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma^A \partial_{m\delta} \partial_\beta C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
& - \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho A_\kappa^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\lambda A_\sigma^A \partial_{m\delta} \partial_\beta C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+2} \\
& - \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho A_\kappa^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma^A \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\lambda C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+2} \\
& + \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+1+k} \partial_\gamma \partial_\rho C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\mu A_\sigma^A \partial_{m\delta} \partial_\beta A_\nu^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\
& + \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+2}{m+1} \frac{m+1}{m+k+1} \\
& \quad \frac{l+1-m}{l-m+1+k} \partial_\gamma \partial_\rho \partial_\kappa C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma^A \partial_{m\delta} \partial_\beta A_\lambda^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+2} \\
& + \frac{g^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \\
& \quad \partial_{\alpha'} A_\mu^D \partial_\alpha A_\rho^E \partial_\beta \partial_\sigma \partial_\nu C^B [[T_D, T_E], T_B]_k \\
& + \frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \binom{k}{l} \frac{k-l}{(k+1)(l+1)} \\
& \quad \partial_\alpha A_\rho^A \partial_{\beta'} A_\sigma^D \partial_{l\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{g^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \binom{k+1}{l+1} \frac{(k-l)(l+1)}{(k+2)(l+2)} \\
& \qquad \qquad \qquad \partial_\alpha \partial_\rho A_\kappa^A \partial_{\beta'} \partial_\lambda A_\sigma^D \partial_{l\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_k \\
& -\frac{g^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \binom{k+1}{l+1} \frac{k-l+1}{k+2} \\
& \qquad \qquad \qquad \partial_\alpha \partial_\rho A_\mu^A \partial_{\beta'} A_\sigma^D \partial_{l\beta} \partial_\nu C^E [T_A, [T_D, T_E]]_k
\end{aligned}$$

Dabei ist es wichtig, auf den Wertebereich der Indizes zu achten. Man erkennt, dass, wie im Beweis von Proposition 1 behauptet wurde, nur noch Terme mit differenzierten Geistern auftauchen (beachte dazu die Grenzen an den Summen).

Diese Reihen lassen sich im Prinzip durch bekannte analytische Funktionen ausdrücken (vgl. Abschnitt 4.4.7). Dies führt jedoch zu keinen schönen Ausdrücken. Insbesondere muss hierzu die Matrixstruktur ausgeklammert werden, d.h. jede Summe proportional zu $[[T_A, T_B]_x, T_C]_y$ müsste zunächst aufgespalten werden in vier Summen proportional zu $[[T_A, T_B], T_C]$, $\{[T_A, T_B], T_C\}$, $\{[T_A, T_B], T_C\}$ und $\{\{T_A, T_B\}, T_C\}$, deren Vorfaktoren dann analytische Funktionen wären. Dies führt zu einer Vervielfältigung der Anzahl der Terme und macht den Ausdruck noch unübersichtlicher.

4.4.6 $m^{[3]}$ - zweite Korrektur für das Materiefeld

Die zweite Korrektur für das Materiefeld ist

$$\begin{aligned}
m^{[3]} &= \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+1)!b!c!} \frac{a-b+c+1}{(a+c+1)(a+b+1)} \\
& \qquad \qquad \qquad A_\mu A_\nu \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!c!(a+2)} \frac{a-b+c+2}{(a+c+2)(a+b+2)} \\
& \qquad \qquad \qquad \partial_\rho A_\mu \partial_\nu A_\sigma \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!c!} \left(\frac{2}{(a+b+1)(c+1)} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{1}{(a+b+1)(a+c+2)} + \frac{1}{(a+c+2)(a+1)} \right) A_\mu \partial_\nu A_\alpha \partial_\beta \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+1)!b!c!} \frac{2a+c+2}{(a+c+1)(a+b+2)} \\
& \qquad \qquad \qquad \partial_\rho A_\mu A_\sigma \partial_\nu \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+1)!(c+1)!} \frac{(b-c)}{(b+c+2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_\alpha A_\rho \partial_\sigma \partial_\beta \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!(c+1)!} \frac{2a+c+1}{(a+c+1)(a+b+1)} \\
& A_\mu A_\alpha \partial_\nu \partial_\beta \Psi \\
= & \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} M_I^{[3]}(i\wedge_{12}, i\wedge_{13}, i\wedge_{23}) A_\mu A_\nu \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{II}^{[3]}(i\wedge_{12}, i\wedge_{13}, i\wedge_{23}) \partial_\rho A_\mu \partial_\nu A_\sigma \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} M_{IIIa}^{[3]}(i\wedge_{12}, i\wedge_{13}, i\wedge_{23}) A_\mu \partial_\nu A_\alpha \partial_\beta \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIb}^{[3]}(i\wedge_{12}, i\wedge_{13}, i\wedge_{23}) \partial_\rho A_\mu A_\sigma \partial_\nu \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IV}^{[3]}(i\wedge_{12}, i\wedge_{13}, i\wedge_{23}) A_\alpha A_\rho \partial_\sigma \partial_\beta \Psi, \tag{4.31}
\end{aligned}$$

wobei die Funktionen $M^{[3]}$ durch die entsprechenden Reihen definiert werden. Es ist möglich, diese Reihen (und damit die Funktionen $M^{[3]}$) durch bekannte analytische Funktionen auszudrücken. Dies wird im folgenden Unterabschnitt erläutert (siehe Formeln (4.37)).

4.4.7 Ausdruck der Seiberg-Witten-Abbildungen durch analytische Funktionen

Der Algorithmus zur Berechnung der Seiberg-Witten-Abbildung liefert diese zunächst in der Form einer Reihe über Potenzen von ϑ . Diese Reihen leiten sich über den Algorithmus direkt von der Exponentialfunktion aus der Entwicklung des Sternproduktes ab. Daher sind die auftretenden Reihen allesamt gutartig: Ihr Konvergenzradius ist ∞ , d. h. sie definieren ganze analytische Funktionen.

Es ist nun wünschenswert, diese Reihen durch bekannte Funktionen, eben wie die Exponentialfunktion, auszudrücken, denn dadurch lässt sich z. B. das analytische Verhalten der Seiberg-Witten-Abbildungen im Grenzfall hoher Energien untersuchen.

In der ersten Ordnung ist dies, wie oben gesehen wurde, ohne Probleme möglich. Die auftretenden analytischen Reihen lassen sich ausdrücken durch

$$C^{(0)}(z) = \cos(z) = \sum_k^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!}, \tag{4.32a}$$

$$C^{(1)}(z) = \frac{\cos(z) - 1}{z} = i \sum_k^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+2)!}, \tag{4.32b}$$

$$C^{(2)}(z) = \int_0^z C^{(1)}(z') dz' = \int_0^z \frac{\cos(z') - 1}{z'} dz' = \sum_{k>0}^{\infty} \frac{(iz)^{k2}}{(2k)!2k}, \tag{4.32c}$$

$$S^{(0)}(z) = \sin(z) = -i \sum_k^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (4.32d)$$

$$S^{(1)}(z) = \frac{\sin(z) - 1}{z} = \sum_k^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k+1)!}, \quad (4.32e)$$

$$S^{(2)}(z) = -i \int_0^z S^{(1)}(z') dz' = \int_0^z \frac{\sin(z') - 1}{z'} dz' = \sum_k^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}, \quad (4.32f)$$

$$E^{(0)}(z) = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (4.32g)$$

$$= C^{(0)}(z) + iS^{(0)}(z),$$

$$E^{(1)}(z) = \frac{\exp(z) - 1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}, \quad (4.32h)$$

$$= S^{(1)}(z) - iC^{(1)}(z),$$

$$E^{(2)}(z) = \int_0^z E^{(1)}(z') dz' = \int_0^z \frac{\exp(z') - 1}{z'} dz' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!k} \quad (4.32i)$$

$$= C^{(2)}(z) + iS^{(2)}(z).$$

Mit diesen Funktionen ist es möglich, sämtliche auftretenden Reihen über Potenzen von zwei Variablen auszudrücken. Man erhält zum Beispiel:

$$\sum_{a,b=0}^{\infty} \frac{A^a B^b}{a!b!} \frac{1}{a+b+1} = E^{(1)}(A+B) \quad (4.33a)$$

$$\sum_{a,b=0}^{\infty} \frac{A^a B^b}{a!b!} \frac{1}{(a+1)(a+b+2)} = \frac{1}{A} (E^{(1)}(A+B) - E^{(1)}(B)) \quad (4.33b)$$

$$\sum_{\substack{a,b=0 \\ a+b>0}} \frac{A^a B^b}{a!b!} \frac{1}{a+b} = E^{(2)}(A+B) \quad (4.33c)$$

$$\sum_{a,b=0}^{\infty} \frac{A^a B^b}{a!b!} \frac{1}{(a+1)(a+b+1)} = \frac{1}{A} (E^{(2)}(A+B) - E^{(2)}(B)) \quad (4.33d)$$

$$\sum_{a,b=0}^{\infty} \frac{A^a B^b}{a!b!} \frac{1}{(a+2)(a+b+2)} = -\frac{1}{A^2} (E^{(2)}(A+B) - E^{(2)}(B) - AE^{(1)}(A+B)) \quad (4.33e)$$

Analoge Identitäten gelten für die vom Kosinus bzw. Sinus abgeleiteten Funktionen, wenn man den Summationsbereich auf gerade bzw. ungerade Werte von a oder b

einschränkt (dies passiert z. B., wenn in der Reihe noch ein Matrixterm $[T_A, T_B]_a$ auftaucht und man die Terme nach Kommutator und Antikommutator sortiert).

Um die auftretenden Potenzreihen mit drei Variablen durch Funktionen ausdrücken zu können, definiere

$$F(A, B, C) := \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{A^a B^b C^c}{a!b!c!} \frac{1}{(a+b+1)(a+c+1)}. \quad (4.34)$$

Einige Eigenschaften von F sind

$$F(A, B, C) = F(A, C, B) \quad (4.35a)$$

$$F(0, B, C) = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{B^b}{(b+1)!} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{C^c}{(c+1)!} = E^{(1)}(B)E^{(1)}(C) \quad (4.35b)$$

$$F(A, 0, C) = \sum_{a,c=0}^{\infty} \frac{A^a C^c}{(a+1)!(a+c+1)} = \frac{1}{A} (E^{(2)}(A+C) - E^{(2)}(C)) \quad (4.35c)$$

$$F(A, B, 0) = \sum_{a,b=0}^{\infty} \frac{A^a B^b}{(a+1)!(a+b+1)} = \frac{1}{A} (E^{(2)}(A+B) - E^{(2)}(B)) \quad (4.35d)$$

Außerdem erfüllt F die folgenden partiellen Differentialgleichungen:

$$\partial_A F = \sum_{a,b,c} \frac{A^a B^b C^c}{a!b!c!} \frac{1}{(a+b+2)(a+c+2)} = \partial_B \partial_C F \quad (4.36a)$$

$$A \partial_A F + B \partial_B F + F = \sum_{a,b,c} \frac{A^a B^b C^c}{a!b!c!} \frac{1}{a+c+1} = \exp(B) E^{(1)}(A+C) \quad (4.36b)$$

$$A \partial_A F + C \partial_C F + F = \sum_{a,b,c} \frac{A^a B^b C^c}{a!b!c!} \frac{1}{a+b+1} = \exp(C) E^{(1)}(A+B) \quad (4.36c)$$

Mit dieser Funktion F und ihren partiellen Ableitungen lassen sich die Funktionen $M_I^{[3]}$ bis $M_{IV}^{[3]}$ aus Gleichung (4.31) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} M_I^{[3]}(A, B, C) &= F(A, B, C) - \exp(B) \frac{1}{A} \left(E^{(2)}(A+C) - E^{(2)}(C) \right) \\ &\quad + \exp(C) \frac{1}{A} \left(E^{(2)}(A+B) - E^{(2)}(B) \right) \end{aligned} \quad (4.37a)$$

$$\begin{aligned} M_{II}^{[3]}(A, B, C) &= \partial_A F(A, B, C) \\ &\quad + \exp(B) \frac{1}{A^2} \left(E^{(2)}(A+C) - E^{(2)}(C) - A E^{(1)}(A+C) \right) \\ &\quad - \exp(C) \frac{1}{A^2} \left(E^{(2)}(A+B) - E^{(2)}(B) - A E^{(1)}(A+B) \right) \end{aligned} \quad (4.37b)$$

$$\begin{aligned} M_{IIIa}^{[3]}(A, B, C) &= 2E^{(1)}(A+B)E^{(1)}(C) - \partial_C F(A, B, C) \\ &\quad + \exp(B) \frac{1}{A} \left(E^{(1)}(A+C) - E^{(1)}(C) \right) \end{aligned} \quad (4.37c)$$

$$M_{\text{IIIb}}^{[3]}(A, B, C) = \partial_B F(A, B, C) + \exp(c) \frac{1}{A} (E^{(2)}(A+B) - E^{(2)}(B)) \quad (4.37d)$$

$$M_{\text{IV}}^{[3]}(A, B, C) = \frac{1}{B} (E^{(1)}(B+C) - E^{(1)}(C)) - \frac{1}{C} (E^{(1)}(B+C) - E^{(1)}(B)) \\ + 2E^{(1)}(C)E^{(1)}(A+B) - F(A, B, C) \quad (4.37e)$$

Es ist also nur noch nötig, F selbst durch bekannte Funktionen auszudrücken. Dies ist in der Tat möglich; es gilt:

$$F(A, B, C) = \frac{E^{(0)}(\frac{BC}{A})}{A} \left(E^{(2)}\left(\frac{(A+B)(A+C)}{A}\right) - E^{(2)}\left(\frac{(A+B)C}{A}\right) \right. \\ \left. - E^{(2)}\left(\frac{B(A+C)}{A}\right) + E^{(2)}\left(\frac{BC}{A}\right) \right) \quad (4.38)$$

Leider hat diese Darstellung das Problem, dass man à priori nicht sieht, dass F für $A = 0$ überhaupt definiert ist. Daher ist diese Darstellung von F auch für numerische Auswertungen für kleine A (insbesondere also für kleine ϑ) nicht verwendbar; stattdessen sollte die Reihendarstellung von F verwendet werden.

5 Störungstheorie: Feynmanregeln

In diesem Kapitel soll mit Hilfe der Seiberg-Witten-Abbildung eine nichtkommutative Yang-Mills-Theorie konstruiert werden. Zunächst wird die entsprechende Lagrangedichte angegeben, anschließend werden die Feynmanregeln hergeleitet.

Die Ergebnisse werden im nächsten Kapitel dafür verwendet, in der nichtkommutativen QCD den Wirkungsquerschnitt $gg \rightarrow q\bar{q}$ in Baumnäherung zu berechnen. Im Hinblick auf diese Anwendung werden nur die dafür benötigten Feynmanregeln angegeben.

Wie schon bei der Berechnung der Seiberg-Witten-Abbildungen ist auch hier die genaue Wahl der Eichgruppe unwesentlich für die formalen Berechnungen. Um eine spezielle Eichgruppe zu wählen, müssen nur die entsprechenden Strukturkonstanten f_{ABC} (die als komplett antisymmetrisch angenommen werden) eingesetzt werden. Zusätzlich ist die Wahl eines zweiten Tensors d_{ABC} nötig, um das Modell eindeutig zu bestimmen. Dies wird in Abschnitt 5.2 genauer erläutert.

5.1 Die Lagrangedichte \mathcal{L}

Ausgangspunkt zur Konstruktion einer nichtkommutativen Yang-Mills-Theorie ist eine Eichgruppe G sowie die kommutative Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}} + \mathcal{L}_{\text{Eichfix}} + \mathcal{L}_{\text{Geist}}, & (5.1) \\ \mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}} &= -\frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_{a,b} \bar{\Psi}_a (i\not{D} - m)_{ab} \Psi_b \\ \mathcal{L}_{\text{Eichfix}} &= -\frac{1}{\lambda} \text{Tr} (\partial^\mu A_\mu) (\partial^\nu A_\nu) \\ \mathcal{L}_{\text{Geist}} &= \partial_\mu C^{*A} (D_{AB}^\mu C^B) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \\ (D_\mu)_{ab} &= \partial_\mu \delta_{ab} - ig(A_\mu)_{ab}, \\ (D_\mu)_{AB} &= \partial_\mu \delta_{AB} + gf^{ABC} A_\mu^B = \partial_\mu \delta_{AB} - ig[A_\mu, \cdot]_{AB}. \end{aligned}$$

Dabei sind $(D_\mu)_{ab}$ und $(D_\mu)_{AB}$ die kovariante Ableitung in der fundamentalen bzw. adjungierten Darstellung von G .

Nun sind sämtliche gewöhnlichen Produkte durch Sternprodukte zu ersetzen:

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_{\text{Yang-Mills}} + \hat{\mathcal{L}}_{\text{Eichfix}} + \hat{\mathcal{L}}_{\text{Geist}}, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}_{\text{Yang-Mills}} &= -\frac{1}{2}\text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} + \sum_{a,b} \bar{\hat{\Psi}}_a * (i\hat{D} - m)_{ab} * \hat{\Psi}_b, \\ \hat{\mathcal{L}}_{\text{Eichfix}} &= -\frac{1}{\lambda}\text{Tr} (\partial^\mu \hat{A}_\mu) * (\partial^\nu \hat{A}_\nu) \\ \hat{\mathcal{L}}_{\text{Geist}} &= \partial_\mu \hat{C}^{*A} * (\hat{D}_{AB}^\mu * \hat{C}^B)\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\hat{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - ig[\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu], \\ (\hat{D}_\mu)_{ab} * \hat{\Psi}_b &= \partial_\mu \hat{\Psi}_a - ig(\hat{A}_\mu)_{ab} * \hat{\Psi}_b, \\ (\hat{D}_\mu)_{AB} * V^B &= \partial_\mu V^A - ig[A_\mu * V]_A.\end{aligned}$$

Eine kleine Vereinfachung lässt sich durch Verwendung der Formel

$$\int d^n x A(x) * B(x) = \int d^n x A(x) B(x) \quad (5.3)$$

erzielen, die man leicht durch partielle Integration beweist. Da in der Wirkung stets über die Lagrangedichte integriert werden wird, ist es möglich, in jedem Term der Lagrangedichte *ein* *-Produkt durch ein gewöhnliches Produkt zu ersetzen. Dabei ist zu beachten, dass die Reihenfolge von gewöhnlichem Produkt und Sternprodukt wichtig ist, d. h. $A * (BC) \neq (A * B)C$.

Man erhält also z. B.:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}} &= \hat{\mathcal{L}}_{\text{Yang-Mills}} + \hat{\mathcal{L}}_{\text{Eichfix}} + \hat{\mathcal{L}}_{\text{Geist}}, \\ \hat{\mathcal{L}}_{\text{Yang-Mills}} &= -\frac{1}{2}\text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} + \sum_{a,b} \bar{\hat{\Psi}}_a [(i\hat{D} - m)_{ab} * \hat{\Psi}_b], \\ \hat{\mathcal{L}}_{\text{Eichfix}} &= -\frac{1}{\lambda}\text{Tr} (\partial^\mu \hat{A}_\mu)(\partial^\nu \hat{A}_\nu) \\ \hat{\mathcal{L}}_{\text{Geist}} &= \partial_\mu \hat{C}^{*A} (\hat{D}_{AB}^\mu * \hat{C}^B).\end{aligned} \quad (5.4)$$

Es folgt sofort, dass die Propagatoren der nichtkommutativen Theorie mit den Propagatoren der kommutativen Theorie übereinstimmen, da die quadratischen Terme beider Theorien identisch sind.

Im letzten Schritt verwendet man die Seiberg-Witten-Abbildungen, um die nichtkommutativen Felder $\hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu(A, \Psi, C)$, $\hat{\Psi} = \hat{\Psi}(A, \Psi, C)$ und $\hat{C} = \hat{C}(A, \Psi, C)$ durch ihre kommutativen Entsprechungen auszudrücken. Will man einen Wirkungsquerschnitt störungstheoretisch berechnen, so hängt die Anzahl der Terme der Entwicklung der Seiberg-Witten-Abbildung, die man wirklich einsetzen muss, vom Prozess und der gewünschten Schleifenordnung ab.

In diesem Falle ist das Ziel die Berechnung des Wirkungsquerschnitts $gg \rightarrow q\bar{q}$. Dementsprechend sollen hier in die effektive¹ Lagrangedichte nur Terme aufgenom-

¹Das Attribut „effektiv“ bezieht sich keinesfalls darauf, dass es sich bei der Theorie insgesamt um eine effektive Theorie handelt im Sinne einer Theorie, die nur bei gewissen Energien gültig ist. Vielmehr soll ausgedrückt werden, dass die Lagrangedichte nur die relevanten Terme für den gesuchten Prozess enthält.

men werden, die in diesem Prozess eine Rolle spielen. Insbesondere werden alle Terme mit mehr Feldern als drei Eichbosonen ignoriert, wie zum Beispiel Vertizes mit vier Eichbosonen oder Vertizes mit drei Eichbosonen und einem Fermion-Antifermion-Paar (vgl. Abschnitt 4.1). Also ist

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{eff,Yang-Mills}} + \mathcal{L}_{\text{eff,Eichfix}} + \mathcal{L}_{\text{eff,Geist}} \quad (5.5)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff,Yang-Mills}} &= -\frac{1}{2}\text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu}^{[1]} \hat{F}^{[1]\mu\nu} - \frac{1}{2}\text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu}^{[1]} \hat{F}^{[2]\mu\nu} - \frac{1}{2}\text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu}^{[2]} \hat{F}^{[1]\mu\nu} \\ &+ \sum_{a,b} \overline{\hat{\Psi}_a^{[1]}} [(i\hat{D}^{[0]} - m)_{ab} * \hat{\Psi}_b^{[1]}] \\ &+ \sum_{a,b} \overline{\hat{\Psi}_a^{[1]}} [(i\hat{D}^{[0]} - m)_{ab} * \hat{\Psi}_b^{[2]}] + \sum_{a,b} \overline{\hat{\Psi}_a^{[2]}} [(i\hat{D}^{[0]} - m)_{ab} * \hat{\Psi}_b^{[1]}] \\ &+ \sum_{a,b} \overline{\hat{\Psi}_a^{[1]}} [i\hat{D}_{ab}^{[1]} * \hat{\Psi}_b^{[1]}] + \sum_{a,b} \overline{\hat{\Psi}_a^{[2]}} [(i\hat{D}^{[0]} - m)_{ab} * \hat{\Psi}_b^{[2]}] \\ &+ \sum_{a,b} \overline{\hat{\Psi}_a^{[1]}} [(i\hat{D}^{[0]} - m)_{ab} * \hat{\Psi}_b^{[3]}] + \sum_{a,b} \overline{\hat{\Psi}_a^{[3]}} [(i\hat{D}^{[0]} - m)_{ab} * \hat{\Psi}_b^{[1]}] \\ &+ \sum_{a,b} \overline{\hat{\Psi}_a^{[1]}} [i\hat{D}_{ab}^{[1]} * \hat{\Psi}_b^{[2]}] + \sum_{a,b} \overline{\hat{\Psi}_a^{[1]}} [i\hat{D}_{ab}^{[2]} * \hat{\Psi}_b^{[1]}] + \sum_{a,b} \overline{\hat{\Psi}_a^{[2]}} [i\hat{D}_{ab}^{[1]} * \hat{\Psi}_b^{[1]}] \\ &= -\frac{1}{2}\text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu}^{[1]} \hat{F}^{[1]\mu\nu} - \text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu}^{[1]} \hat{F}^{[2]\mu\nu} \\ &+ \sum_a \overline{\Psi}_a (i\hat{\not{D}} - m) \Psi_a + \sum_a \overline{\hat{\Psi}_a^{[2]}} (i\hat{\not{D}} - m) \hat{\Psi}_a^{[2]} \\ &+ g \sum_{a,b} \overline{\Psi}_a [\hat{A}_{ab} * \Psi_b] \\ &+ \sum_a \overline{\Psi}_a (i\hat{\not{D}} - m) \hat{\Psi}_a^{[2]} + \sum_a \overline{\hat{\Psi}_a^{[2]}} (i\hat{\not{D}} - m) \Psi_a \\ &+ \sum_a \overline{\Psi}_a (i\hat{\not{D}} - m) \hat{\Psi}_a^{[3]} + \sum_a \overline{\hat{\Psi}_a^{[3]}} (i\hat{\not{D}} - m) \Psi_a \\ &+ g \sum_{a,b} \overline{\Psi}_a [\hat{A}_{ab} * \hat{\Psi}_b^{[2]}] + g \sum_{a,b} \overline{\Psi}_a [\hat{A}_{ab}^{[2]} * \Psi_b] + g \sum_{a,b} \overline{\hat{\Psi}_a^{[2]}} [\hat{A}_{ab} * \Psi_b] \\ \\ \mathcal{L}_{\text{eff,Eichfix}} &= -\frac{1}{\lambda} \text{Tr} (\partial^\mu \hat{A}_\mu^{[1]})(\partial^\nu \hat{A}_\nu^{[1]}) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \text{Tr} (\partial^\mu \hat{A}_\mu^{[1]})(\partial^\nu \hat{A}_\nu^{[2]}) - \frac{1}{\lambda} \text{Tr} (\partial^\mu \hat{A}_\mu^{[2]})(\partial^\nu \hat{A}_\nu^{[1]}) \\ &= -\frac{1}{\lambda} \text{Tr} (\partial^\mu A_\mu)(\partial^\nu A_\nu) - \frac{2}{\lambda} \text{Tr} (\partial^\mu A_\mu)(\partial^\nu \hat{A}_\nu^{[2]}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{eff,Geist}} &= \partial_\mu \hat{C}^{*A} (\hat{D}_{AB}^{[0]\mu} * \hat{C}^{[1]B}) + \partial_\mu \hat{C}^{*A} (\hat{D}_{AB}^{[1]\mu} * \hat{C}^{[1]B}) \\
&\quad + \partial_\mu \hat{C}^{*A} (\hat{D}_{AB}^{[0]\mu} * \hat{C}^{[2]B}) \\
&= \partial_\mu C^{*A} \partial^\mu C^A - ig \partial_\mu C^{*A} [A^\mu * C]_A \\
&\quad + \partial_\mu C^{*A} \partial^\mu \hat{C}^{[2]A}
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{\mu\nu}^{[1]} &= \partial_\mu \hat{A}_\nu^{[1]} - \partial_\nu \hat{A}_\mu^{[1]}, = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\
\hat{F}_{\mu\nu}^{[2]} &= \partial_\mu \hat{A}_\nu^{[2]} - \partial_\nu \hat{A}_\mu^{[2]} - ig [\hat{A}_\mu^{[1]} * \hat{A}_\nu^{[1]}], \\
&= \partial_\mu \hat{A}_\nu^{[2]} - \partial_\nu \hat{A}_\mu^{[2]} - ig [A_\mu * A_\nu], \\
(\hat{D}_\mu^{[0]})_{ab} * \hat{\Psi}_b &= \partial_\mu \hat{\Psi}_a, \\
(\hat{D}_\mu^{[1]})_{ab} * \hat{\Psi}_b &= -ig (\hat{A}_\mu^{[1]})_{ab} * \hat{\Psi}_b = -ig (A_\mu)_{ab} * \hat{\Psi}_b, \\
(\hat{D}_\mu^{[2]})_{ab} * \hat{\Psi}_b &= -ig (\hat{A}_\mu^{[2]})_{ab} * \hat{\Psi}_b, \\
(\hat{D}_\mu^{[0]}) * V &= \partial_\mu V, \\
(\hat{D}_\mu^{[1]}) * V &= -ig [A_\mu^{[1]} * V] = -ig [A_\mu * V].
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Terme, in denen die zweite Korrektur für das Materiefeld $\hat{\Psi}^{[3]}$ auftaucht, proportional zu den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
(i\hat{\not{D}} - m)\Psi &= 0 \\
(-i\hat{\not{D}} - m)\bar{\Psi} &= 0
\end{aligned}$$

sind. Dies wird dazu führen, dass der Wirkungsquerschnitt $gg \rightarrow q\bar{q}$ unabhängig von $\hat{\Psi}^{[3]}$ ist.

Wie in Abschnitt 3.2 erläutert, gibt es neben dem hier ausgeführten Verfahren eine zweite Möglichkeit: An Stelle des nichtkommutativen Eichfixierungsterms $-\frac{1}{\lambda} \text{Tr} (\partial^\mu \hat{A}_\mu) (\partial^\nu \hat{A}_\nu)$ kann auch der gewöhnliche kommutative Eichfixierungsterm $-\frac{1}{\lambda} \text{Tr} (\partial^\mu A_\mu) (\partial^\nu A_\nu)$ verwendet werden. Dies führt dazu, dass die Terme

$$-\frac{2}{\lambda} \text{Tr} (\partial^\mu A_\mu) (\partial^\nu \hat{A}_\nu^{[2]}) \quad \text{in} \quad \mathcal{L}_{\text{eff,Eichfix}}$$

und

$$\partial_\mu C^{*A} \partial^\mu \hat{C}^{[2]A} \quad \text{in} \quad \mathcal{L}_{\text{eff,Geist}}$$

in Gleichung (5.5) nicht auftreten.

Dieser alternative Weg („kommutative Eichfixierung“) ist möglich, da die Lagrangedichte der durch die Seiberg-Witten-Abbildung abgebildeten Theorie die gleiche Symmetrie besitzt wie die Yang-Mills-Lagrangedichte. Dies führt zwar zu unterschiedlichen Feynmanregeln, doch darf dies nicht zu unterschiedlichen physikalischen Observablen führen. Im Falle des Wirkungsquerschnitts $gg \rightarrow q\bar{q}$ lässt sich dies auch recht einfach überprüfen (siehe Unterabschnitt 6.2.1).

Im Folgenden wird zunächst der Weg der „nichtkommutativen Eichfixierung“ gegangen. Dieser liefert die komplizierteren Feynmanregeln, und die Feynmanregeln der kommutativen Eichfixierung ergeben sich daraus durch Weglassen bestimmter Terme.

5.2 Der Tensor d_{ABC}

Der kinetische Term und der Selbstwechselwirkungsterm der Eichbosonen in der Yang-Mills-Theorie beinhaltet eine Spur $-\frac{1}{2}\text{Tr } F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Diese Spur gewährleistet, dass die Lagrangedichte invariant ist unter Basistransformationen der Darstellung. Zur Auswertung aller vorkommenden Spuren genügen in der kommutativen Theorie zwei Relationen:

$$\text{Tr } T_A T_B = \frac{1}{2}\delta_{AB}, \quad (5.6a)$$

$$[T_A, T_B] = if_{ABC}T_C. \quad (5.6b)$$

In der nichtkommutativen Yang-Mills-Theorie treten zusätzliche Spuren auf, die sich nicht durch diese Relationen alleine auswerten lassen:

$$\text{Tr } \{T_A, T_B\}T_C, \quad \text{Tr } \{T_A, T_B\}\{T_C, T_D\}, \quad \text{Tr } \{\{T_A, T_B\}T_C\}T_D, \quad \dots$$

Die Argumente dieser Spuren befinden sich nicht mehr in der ursprünglichen Lie-Algebra \mathfrak{G} , sondern bereits in einer einhüllenden Algebra $\bar{\mathfrak{G}}$. Demnach hängen diese Spuren davon ab, welche einhüllende Algebra man verwendet bzw. wie man die Funktion Tr auf diese einhüllende Algebra fortsetzt.

Im Falle der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(N)$ der hermiteschen $n \times n$ -Matrizen mit Spur 0 kann man als einhüllende Algebra die Lie-Algebra $\mathfrak{u}(N)$ aller hermiteschen $n \times n$ -Matrizen wählen; in diesem Fall gibt es eine natürliche Wahl für die Spur Tr . In $\mathfrak{u}(N)$ gilt

$$\{T_A, T_B\} = \frac{1}{3}\delta_{AB}\mathbf{1} + d_{ABC}T_C \quad (5.6c)$$

mit einem gewissen Tensor d_{ABC} , und diese Relation gestattet die Auswertung der Spuren $\text{Tr } \{T_A, T_B\}T_C$. Schließlich benötigt man noch die „Normierung“ der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ und die „Skalarprodukte“ mit den anderen Generatoren

$$\text{Tr } \mathbf{1} \mathbf{1} = N, \quad (5.6d)$$

$$\text{Tr } \mathbf{1} T_A = 0, \quad T_A \neq \mathbf{1}, \quad (5.6e)$$

um wirklich alle Spuren ausrechnen zu können.

Neben dieser einfachsten Wahl, gibt es andere Möglichkeiten, einhüllende Algebren zu wählen und die Spur auf diesen einhüllenden Algebren zu wählen. Für den Wirkungsquerschnitt $gg \rightarrow q\bar{q}$ genügt es, einen weiteren „Strukturtensor“

$$d'_{ABC} := 2 \text{Tr } \{T_A, T_B\}T_C \quad (5.7)$$

anzugeben, um alle auftretenden Spuren zu berechnen: Dabei laufen T_A , T_B und T_C nur über die Generatoren der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(N)$. Spuren mit mehr als drei Generatoren treten erst bei Vertizes mit mehr als drei Eichbosonen auf und werden daher für den Prozess $gg \rightarrow q\bar{q}$ in Baumnäherung nicht benötigt.

Im Falle der Wahl $\vec{\mathfrak{G}} = \mathfrak{u}(N)$ gilt nun $d'_{ABC} = d_{ABC}$, und es stellt sich die Frage, ob es noch andere Möglichkeiten gibt, den Tensor d'_{ABC} zu wählen. Aus der zyklischen Invarianz der Spur folgt zunächst, dass d'_{ABC} vollständig symmetrisch ist. Außerdem ist d'_{ABC} ein *invarianter Tensor unter der adjungierten Darstellung der Lie-Algebra*, d. h.

$$\begin{aligned} f_{DCE}d_{EAB} + f_{DAE}d_{CEB} + f_{DBE}d_{CAE} \\ = \frac{2}{i}(\text{Tr} [T_D, T_C]\{T_A, T_B\} + \text{Tr} T_C\{[T_D, T_A], T_B\} + \text{Tr} T_C\{T_A, [T_D, T_B]\}) \\ = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Man kann zeigen, dass es, abhängig von der Lie-Algebra, nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger invarianter Tensoren gibt[4]. Insbesondere gibt es im Falle der $\mathfrak{su}(3)$ nur zwei linear unabhängige Tensoren, nämlich f_{ABC} (dies folgt aus der Jacobi-Identität) sowie d_{ABC} , ausgewertet in der definierenden Darstellung. Aus Symmetriegründen folgt daher, dass d'_{ABC} bis auf einen multiplikativen Faktor d eindeutig ist:

$$d'_{ABC} = d d_{ABC}, \quad d \in \mathbb{R}. \quad (5.9)$$

In der Auswertung des Wirkungsquerschnitts im Kapitel 6 soll stets die „natürlichste“ Wahl $d = +1$ verwendet werden.

5.3 Die Feynmanregeln

Aus der im vorhergehenden Paragraphen entwickelten effektiven Lagrangedichte sollen nun die Feynmanregeln abgeleitet werden. Wie bereits oben erwähnt wurde, sind die Propagatoren die selben wie in der gewöhnlichen Yang-Mills-Theorie. Für den Eichwechselwirkungsverstex, den Drei-Eichbosonen-Vertex sowie den Geist-Eichbosonen-Vertex erhält man neue, kompliziertere Regeln, die ihren Ursprung jeweils in mehreren verschiedenen Termen in der Lagrangedichte haben. Außerdem erhält man einen zusätzlichen Boson-Boson-Fermion-Fermion-Vertex, der im Folgenden Kontaktvertex genannt werden soll.

Es ist demnach sinnvoll, die Terme der Lagrangedichte wie folgt umzusortieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{prop}} = & -\frac{1}{2}\text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu}^{[1]} \hat{F}^{[1]\mu\nu} \\ & -\frac{1}{\lambda}\text{Tr} (\partial^\mu A_\mu)(\partial^\nu A_\nu) \\ & + \sum_a \bar{\Psi}_a (i\not{\partial} - m)\Psi_a \\ & + \partial_\mu C^{*A} \partial^\mu C^A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{f}\bar{\text{f}}\text{b}} &= +g \sum_{a,b} \bar{\Psi}_a [A_{ab} * \Psi_b] \\ &\quad + \sum_a \bar{\Psi}_a (i\hat{\not{D}} - m) \hat{\Psi}_a^{[2]} + \sum_a \overline{\hat{\Psi}_a^{[2]}} (i\hat{\not{D}} - m) \Psi_a\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{\text{bbb}} = -\text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu}^{[1]} \hat{F}^{[2]\mu\nu} - \frac{2}{\lambda} \text{Tr} (\partial^\mu A_\mu) (\partial^\nu \hat{A}_\nu^{[2]})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{c}\bar{\text{c}}\text{b}} &= -ig \partial_\mu C^{*A} [A^\mu * C]_A \\ &\quad + \partial_\mu C^{*A} \partial^\mu \hat{C}^{[2]A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{f}\bar{\text{f}}\text{bb}} &= + \sum_a \overline{\hat{\Psi}_a^{[2]}} (i\hat{\not{D}} - m) \hat{\Psi}_a^{[2]} \\ &\quad + \sum_a \bar{\Psi}_a (i\hat{\not{D}} - m) \hat{\Psi}_a^{[3]} + \sum_a \overline{\hat{\Psi}_a^{[3]}} (i\hat{\not{D}} - m) \Psi_a \\ &\quad + g \sum_{a,b} \bar{\Psi}_a [A_{ab} * \hat{\Psi}_b^{[2]}] + g \sum_{a,b} \bar{\Psi}_a [\hat{A}_{ab}^{[2]} * \Psi_b] + g \sum_{a,b} \overline{\hat{\Psi}_a^{[2]}} [A_{ab} * \Psi_b]\end{aligned}$$

Im vorherigen Abschnitt wurden für das Eichboson zwei verschiedene Seiberg-Witten-Abbildungen $A_\mu^{[2]}$ und $A_\mu'^{[2]}$ angegeben. Dies führt zu jeweils zwei verschiedenen Feynmanregeln für den Drei-Bosonen-Vertex und den Kontaktvertex. Für diese Vertizes werden beide Regeln angegeben.

Die Übersetzung in Feynmanregeln (im Impulsraum) geschieht nun nach dem folgenden Prinzip: Die einzelnen Terme werden ausgeschrieben als Funktionen der kommutativen Felder und ihrer Raumzeitableitungen. Die Raumzeitableitungen einzelner Felder werden dann mittels Fouriertransformation durch die Impulse der entsprechenden Felder ersetzt vermöge

$$\partial_\mu X(x) \rightsquigarrow (-ik_\mu) \tilde{X}(k).$$

Die Tilde deutet hier den Übergang zu den fouriertransformierten Feldern und wird in Folge weggelassen. Diese Vorzeichenkonvention entspricht Impulsen, die in den entsprechenden Vertex einlaufen. Für den Differentialoperator \wedge_{12} bedeutet dies die Ersetzung

$$\begin{aligned}\wedge_{12} XY &= \frac{\vartheta}{2} \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu X \partial_\nu Y \rightarrow (-ik_\mu) \frac{\vartheta}{2} \Theta^{\mu\nu} (-il_\nu) X(k) Y(l) \\ &= -\frac{\vartheta}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} l_\nu X(k) Y(l) = -(k\Theta l) X(k) Y(l).\end{aligned}$$

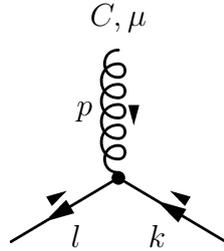
Im nächsten Schritt muss gegebenenfalls (z. B. beim Drei-Eichbosonen-Vertex 5.3.2) über sämtliche Permutationen von identischen Teilchen summiert werden. Schließlich wird noch mit einem Faktor i multipliziert.

Der hier beschriebene Algorithmus liefert die sogenannten „naiven“ Feynmanregeln. Diese liefern allerdings im Falle $\vec{E} \neq 0$ eine Theorie, die nicht unitär ist. Es ist zwar möglich, andere Feynmanregeln anzugeben, die unitär sind, doch verliert man dabei die Eichinvarianz[23]. Gegenwärtig ist nicht klar, ob es möglich ist, eine Störungsentwicklung zu machen, die sowohl unitär als auch eichinvariant ist. Daher werden hier die einfacheren naiven Feynmanregeln verwendet. Diese liefern eine eichinvariante Theorie, d. h. die Ergebnisse können mit Hilfe der Ward-Identitäten überprüft werden (vgl. Unterabschnitt 6.2.2).

Im den folgenden Abschnitten befinden sich die Ergebnisse. Für die Eichwechselwirkung und die Boson-Geist-Wechselwirkung ist die Rechnung ausgeführt, für die anderen Vertizes befindet sie sich im Anhang E. Die kommutativen Feynmanregeln sind in Tabelle 6.2 auf Seite 56 zusammengefasst.

5.3.1 Die Eichwechselwirkung

Die relevanten Terme für den Vertex



in der Lagrangedichte (5.5) sind

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{q}\bar{\text{q}}\text{g}} = & +g \sum_{a,b} \bar{\Psi}_a [A_{ab} * \Psi_b] \\ & + \sum_a \bar{\Psi}_a (i\hat{\not{\partial}} - m) \hat{\Psi}_a^{[2]} + \sum_a \overline{\hat{\Psi}_a^{[2]}} (i\hat{\not{\partial}} - m) \Psi_a \end{aligned}$$

Der erste Term ist

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\text{q}\bar{\text{q}}\text{g}})_1 &= g \sum_{a,b} \bar{\Psi}_a [A_{ab} * \Psi_b] \\ &= g \bar{\Psi} T_C \gamma^\mu (A_\mu^C * \Psi) \\ &= g \bar{\Psi} T_C \gamma^\mu \exp(i\wedge_{12}) (A_\mu^C \Psi) \\ &\rightsquigarrow g \bar{\Psi} T_C \gamma^\mu \exp(-i(p\Theta l)) A_\mu^C \Psi \end{aligned}$$

und entspricht also der Feynmanregel

$$ig T_C \gamma^\mu \exp(il\Theta p) = ig T_C \gamma^\mu \exp(ip\Theta k) = ig T_C \gamma^\mu \exp(ik\Theta l).$$

Die alternativen Darstellungen erhält man mittels Impulserhaltung $p + k + l = 0$ und $p\Theta p = 0$ bzw. $k\Theta k = 0$.

Im Limes $\vartheta \rightarrow 0$ ergibt dieser erste Term die bekannte kommutative Feynmanregel $igT_C\gamma^\mu$ (vgl. Tabelle 6.2 im Abschnitt 6).

Der zweite Term ist

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\text{q}\bar{\text{q}}\text{g}})_2 &= \sum_a \bar{\Psi}_a(i\cancel{\partial} - m)\Psi_a^{[2]} \\
&= +ig\bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}\exp(i\wedge_{12}) - 1}{2\wedge_{12}}A_\alpha\partial_\beta\Psi \\
&= -img\bar{\Psi}\frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}\exp(i\wedge_{12}) - 1}{2\wedge_{12}}A_\alpha\partial_\beta\Psi \\
&\quad + ig\bar{\Psi}\frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}\exp(i\wedge_{12}) - 1}{2\wedge_{12}}(i\cancel{\partial}A_\alpha)\partial_\beta\Psi \\
&\quad + ig\bar{\Psi}\frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}\exp(i\wedge_{12}) - 1}{2\wedge_{12}}A_\alpha\partial_\beta(i\cancel{\partial}\Psi) \\
&\rightsquigarrow -img\bar{\Psi}\frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}\exp(-ip\Theta l) - 1}{2-p\Theta l}A_\alpha(-il_\beta)\Psi \\
&\quad + ig\bar{\Psi}\frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}\exp(-ip\Theta l) - 1}{2-p\Theta l}\cancel{\not{p}}A_\alpha(-il_\beta)\Psi \\
&\quad + ig\bar{\Psi}\frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}\exp(-ip\Theta l) - 1}{2-p\Theta l}A_\alpha(-il_\beta)\cancel{\not{l}}\Psi \\
&= -g\bar{\Psi}(m - \cancel{\not{p}} - \cancel{\not{l}})\frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}\exp(-ip\Theta l) - 1}{2-p\Theta l}l_\beta T_C A_\alpha^C \Psi
\end{aligned}$$

und entspricht der Feynmanregel

$$-ig\frac{\vartheta\Theta^{\mu\beta}}{2}l_\beta(m - \cancel{\not{p}} - \cancel{\not{l}})\frac{\exp(il\Theta p) - 1}{l\Theta p}T_C. \quad (5.10)$$

Mit der Impulserhaltung $k + l + p = 0$ lässt sie sich schreiben als:

$$-ig\frac{\vartheta\Theta^{\mu\beta}}{2}l_\beta(\cancel{\not{k}} + m)\frac{\exp(ik\Theta l) - 1}{k\Theta l}T_C. \quad (5.11)$$

Mit

$$\begin{aligned}
\overline{\hat{\Psi}^{[2]}} &= -ig\frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}\exp(-i\wedge_{12}) - 1}{2\wedge_{12}}A_\alpha\partial_\beta\bar{\Psi} \\
&= -ig\frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}\exp(i\wedge_{12}) - 1}{2-\wedge_{12}}(\partial_\beta\bar{\Psi})A_\alpha \\
&= +ig\frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}\exp(i\wedge_{12}) - 1}{2\wedge_{12}}(\partial_\beta\bar{\Psi})A_\alpha
\end{aligned}$$

führt der dritte Term

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\text{q}\bar{\text{q}}\text{g}})_3 &= + \sum_a \overline{\hat{\Psi}}_a^{[2]}(i\not{\partial} - m)\Psi_a \\
&= +ig \frac{\not{\partial}\Theta^{\alpha\beta} \exp(i\wedge_{12}) - 1}{2 \wedge_{12}} \partial_\beta \bar{\Psi} A_\alpha (i\not{\partial} - m)\Psi_a \\
&\rightsquigarrow +ig \frac{\not{\partial}\Theta^{\alpha\beta} \exp(-ik\Theta p) - 1}{2 -k\Theta p} (-ik_\beta) \bar{\Psi} A_\alpha (\not{l} - m)\Psi_a \\
&= +g \frac{\not{\partial}\Theta^{\alpha\beta} \exp(-ik\Theta p) - 1}{2 -k\Theta p} k_\beta \bar{\Psi} (\not{l} - m) T_C A_\alpha^C \Psi_a
\end{aligned}$$

zur Feynmanregel

$$ig \frac{\not{\partial}\Theta^{\mu\beta} k_\beta \exp(-il\Theta k) - 1}{2 -l\Theta k} (\not{l} - m) T_C. \quad (5.12)$$

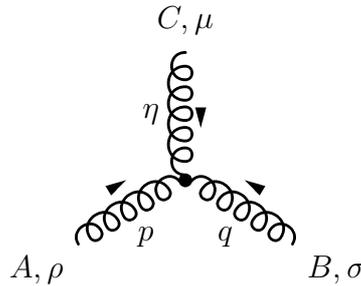
Insgesamt erhält man also als Feynmanregel:

$$\begin{aligned}
&ig T_C \gamma^\mu \exp(ik\Theta l) \\
&- ig \frac{\not{\partial}\Theta^{\mu\beta} l_\beta \exp(ik\Theta l) - 1}{2 k\Theta l} (\not{k} + m) T_C \\
&+ ig \frac{\not{\partial}\Theta^{\mu\beta} k_\beta \exp(-il\Theta k) - 1}{2 -l\Theta k} (\not{l} - m) T_C \\
&= ig T_C \left(\exp(ik\Theta l) \gamma^\mu + \frac{i\not{\partial}\Theta^{\mu\beta} \exp(ik\Theta l) - 1}{2 ik\Theta l} (k_\beta (\not{l} - m) - l_\beta (\not{k} + m)) \right) \\
&= ig T_C \left(E^{(0)}(ik\Theta l) \gamma^\mu + \frac{i\not{\partial}\Theta^{\mu\beta}}{2} E^{(1)}(ik\Theta l) (k_\beta (\not{l} - m) - l_\beta (\not{k} + m)) \right), \quad (5.13)
\end{aligned}$$

wobei die Bezeichnungen aus dem Unterabschnitt 4.4.7 verwendet wurden.

5.3.2 Der $\rho^{[0]}$ -Drei-Bosonen-Vertex

Die Feynmanregel für den Drei-Eichbosonen-Vertex



lautet (Rechnung siehe E.1)

$$g(f_{ABC} \cos(p\Theta q) - d_{ABC} \sin(p\Theta q))$$

$$\begin{aligned}
& (g^{\mu\rho}(\eta - p)^\sigma + g^{\rho\sigma}(p - q)^\mu + g^{\sigma\mu}(q - \eta)^\rho) \\
& - \frac{g}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \left\{ \left(2 \frac{\sin(p\Theta q)}{(p\Theta q)} (p_\alpha \delta_\beta^\sigma \delta_\nu^\rho + q_\alpha \delta_\beta^\rho \delta_\nu^\sigma) - \frac{S^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)} (p_\nu - q_\nu) \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{zykl. Perm.} \right) d_{CAB} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \left(2 \frac{\cos(p\Theta q) - 1}{(p\Theta q)} (p_\alpha \delta_\beta^\sigma \delta_\nu^\rho + q_\alpha \delta_\beta^\rho \delta_\nu^\sigma) - \frac{C^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)} (p_\nu - q_\nu) \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{zykl. Perm.} \right) f_{CAB} \right\} \\
& \qquad \qquad \qquad (\eta^2 g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\lambda}) \eta^\mu \eta^\nu) \\
& + \frac{g}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} p_{\alpha'} (p_\nu - q_\nu) q_\beta \delta_\alpha^\rho \delta_{\beta'}^\sigma \\
& \qquad \qquad \qquad \left\{ \frac{\sin(p\Theta q) - S^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} d_{CAB} - \frac{\cos(p\Theta q) - 1 - C^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} f_{CAB} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \text{zykl. Perm.} \right\} \\
& \qquad \qquad \qquad (\eta^2 g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\lambda}) \eta^\mu \eta^\nu). \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Die Funktionen $S^{(2)}$ und $C^{(2)}$ sind im Unterabschnitt 4.4.7 definiert. Die zyklischen Permutationen beziehen sich dabei auf die Vertauschung der drei Eichbosonen $A_\rho^A(p)$, $A_\sigma^B(q)$ und $A_\mu^C(\eta)$.

Die Terme, die proportional zur freien (eichfixierten) Bewegungsgleichung $(\eta^2 g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\lambda}) \eta^\mu \eta^\nu)$ sind, verschwinden, wenn sie auf ein äußeres Boson (d. h. ein Boson auf der Massenschale) treffen. Dies führt dazu, dass im Falle des Wirkungsquerschnitts $gg \rightarrow q\bar{q}$ die Symmetrisierung nicht ausgeführt werden muss, da sowieso nur der eine Term übrig bleibt, bei dem die Bewegungsgleichung auf das virtuelle Photon trifft (Diagramm C in Tabelle 6.1).

Für den Fall der kommutativen Eichfixierung erhält man im Wesentlichen die gleiche Feynmanregel. Allerdings ist die freie eichfixierte Bewegungsgleichung durch die freie eichinvariante Bewegungsgleichung ersetzt, d. h. die Terme proportional zu $\frac{1}{\lambda}$ verschwindet. Im Abschnitt 6.2.1 wird gezeigt, dass beide Feynmanregeln zumindest für den Wirkungsquerschnitt $gg \rightarrow q\bar{q}$ das gleiche Ergebnis liefern.

5.3.3 Der alternative Drei-Bosonen-Vertex

Mit der alternativen Form für $\hat{A}^{[2]}$ ergeben sich einige Änderungen in den Feynmanregeln. Die Rechnung ist jedoch ähnlich; es fallen lediglich die komplizierten Terme proportional zu $\frac{\sin(z) - S^{(2)}(z)}{z^2}$ bzw. $\frac{\cos(z) - C^{(2)}(z)}{z^2}$ weg, und die Funktionen $C^{(2)}$ und $S^{(2)}$

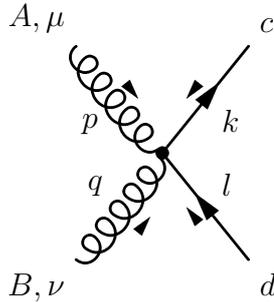
werden durch \cos bzw. \sin ersetzt. Man erhält:

$$\begin{aligned}
& g(f_{ABC} \cos(p\Theta q) - d_{ABC} \sin(p\Theta q)) \\
& \quad (g^{\mu\rho}(\eta - p)^\sigma + g^{\rho\sigma}(p - q)^\mu + g^{\sigma\mu}(q - \eta)^\rho) \\
& - \frac{g}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \left\{ \left(2 \frac{\sin(p\Theta q)}{(p\Theta q)} (p_\alpha \delta_\beta^\sigma \delta_\nu^\rho + q_\alpha \delta_\beta^\rho \delta_\nu^\sigma) - \frac{\sin(p\Theta q)}{(p\Theta q)} (p_\nu - q_\nu) \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \text{zykl. Perm.} \right) d_{CAB} \right. \\
& \quad \left. - \left(2 \frac{\cos(p\Theta q) - 1}{(p\Theta q)} (p_\alpha \delta_\beta^\sigma \delta_\nu^\rho + q_\alpha \delta_\beta^\rho \delta_\nu^\sigma) - \frac{\cos(p\Theta q) - 1}{(p\Theta q)} (p_\nu - q_\nu) \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \text{zykl. Perm.} \right) f_{CAB} \right\} \\
& \quad (\eta^2 g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\lambda}) \eta^\mu \eta^\nu) \\
& = g(f_{ABC} \cos(p\Theta q) - d_{ABC} \sin(p\Theta q)) \\
& \quad (g^{\mu\rho}(\eta - p)^\sigma + g^{\rho\sigma}(p - q)^\mu + g^{\sigma\mu}(q - \eta)^\rho) \\
& - \frac{g}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} (2(p_\alpha \delta_\beta^\sigma \delta_\nu^\rho + q_\alpha \delta_\beta^\rho \delta_\nu^\sigma) - (p_\nu - q_\nu) \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma) \\
& \quad \left(\frac{\sin(p\Theta q)}{(p\Theta q)} d_{CAB} - \frac{\cos(p\Theta q) - 1}{(p\Theta q)} f_{CAB} + \text{zykl. Perm.} \right) \\
& \quad (\eta^2 g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\lambda}) \eta^\mu \eta^\nu). \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Für den Fall der kommutativen Eichfixierung muss die freie eichfixierte Bewegungsgleichung wieder durch die freie eichinvariante Bewegungsgleichung ersetzt, d. h. die Terme proportional zu $\frac{1}{\lambda}$ verschwindet.

5.3.4 Der $\rho^{[0]}$ -Kontaktvertex

Die Feynmanregel für den Vertex



lautet (siehe Anhang E.2)

$$i g^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \delta_\alpha^\mu \delta_{\alpha'}^\nu$$

$$\begin{aligned}
& \left(k_\beta l_{\beta'} (\not{q} + \not{l} - m) \frac{\exp(-i(q\Theta l)) - 1}{(q\Theta l)} \frac{\exp(-i(k\Theta p)) - 1}{(k\Theta p)} T_A T_B \right. \\
& \quad \left. + l_\beta k_{\beta'} (\not{p} + \not{l} - m) \frac{\exp(-i(p\Theta l)) - 1}{(p\Theta l)} \frac{\exp(-i(k\Theta q)) - 1}{(k\Theta q)} T_B T_A \right) \\
& - ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} l_\beta \left(\exp(-ik\Theta p) \frac{\exp(-iq\Theta l) - 1}{q\Theta l} \delta_\alpha^\nu \gamma^\mu T_A T_B \right. \\
& \quad \left. + \exp(-ik\Theta q) \frac{\exp(-ip\Theta l) - 1}{p\Theta l} \delta_\alpha^\mu \gamma^\nu T_B T_A \right) \\
& - ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} k_\beta \left(\delta_\alpha^\mu \gamma^\nu \frac{\exp(-ik\Theta p) - 1}{k\Theta p} \exp(-iq\Theta l) T_A T_B \right. \\
& \quad \left. + \delta_\alpha^\nu \gamma^\mu \frac{\exp(-ik\Theta q) - 1}{k\Theta q} \exp(-ip\Theta l) T_B T_A \right) \\
& + ig^2 \exp(ik\Theta l) \\
& \quad \left(-\frac{i}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \left(2(p_\alpha \delta_\beta^\nu \gamma^\mu + q_\alpha \delta_\beta^\mu \gamma^\nu) \frac{\sin(p\Theta q)}{p\Theta q} \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu (\not{p} - \not{q}) \frac{S^{(2)}(p\Theta q)}{p\Theta q} \right) \{T_A, T_B\} \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \left(2(p_\alpha \delta_\beta^\nu \gamma^\mu + q_\alpha \delta_\beta^\mu \gamma^\nu) \frac{\cos(p\Theta q) - 1}{p\Theta q} \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu (\not{p} - \not{q}) \frac{C^{(2)}(p\Theta q)}{p\Theta q} \right) [T_A, T_B] \right. \\
& \quad + \frac{i}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} p_{\alpha'} (\not{p} - \not{q}) q_\beta \delta_\alpha^\mu \delta_{\beta'}^\nu \left(\frac{\sin(p\Theta q) - S^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} \{T_A, T_B\} \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + i \frac{\cos(p\Theta q) - 1 - C^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} [T_A, T_B] \right) \right) \\
& + i \frac{g^2}{2} (\not{k} + m) (\mathcal{V}^{\mu\nu}(l, p, q) T_A T_B + \mathcal{V}^{\nu\mu}(l, q, p) T_B T_A) \\
& - i \frac{g^2}{2} (\not{l} - m) (\overline{\mathcal{V}^{\nu\mu}(k, q, p)} T_A T_B + \overline{\mathcal{V}^{\mu\nu}(k, p, q)} T_B T_A). \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Die Funktion $\mathcal{V}^{\mu\nu}$ ist im Anhang E.2 definiert und stammt aus dem Beitrag von $\hat{\Psi}^{[3]}$. Wie man sieht ist dieser Beitrag proportional zu den Bewegungsgleichungen des Fermionfeldes, also trägt er nicht zu dem Wirkungsquerschnitt $gg \rightarrow q\bar{q}$ bei.

5.3.5 Der alternative Kontaktvertex

Aus (5.16) ergibt sich (durch ähnliche Überlegungen wie im Unterabschnitt 5.3.3) die Feynmanregel für den Vierervertex mit der alternativen Seiberg-Witten-Abbildung:

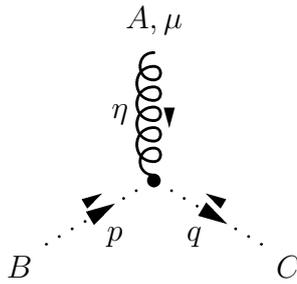
$$ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \delta_\alpha^\mu \delta_{\alpha'}^\nu$$

$$\begin{aligned}
& \left(k_\beta l_{\beta'} (\not{q} + \not{l} - m) \frac{\exp(-i(q\Theta l)) - 1}{(q\Theta l)} \frac{\exp(-i(k\Theta p)) - 1}{(k\Theta p)} T_A T_B \right. \\
& \quad \left. + l_\beta k_{\beta'} (\not{p} + \not{l} - m) \frac{\exp(-i(p\Theta l)) - 1}{(p\Theta l)} \frac{\exp(-i(k\Theta q)) - 1}{(k\Theta q)} T_B T_A \right) \\
& - ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} l_\beta \left(\exp(-ik\Theta p) \frac{\exp(-iq\Theta l) - 1}{q\Theta l} \delta_\alpha^\nu \gamma^\mu T_A T_B \right. \\
& \quad \left. + \exp(-ik\Theta q) \frac{\exp(-ip\Theta l) - 1}{p\Theta l} \delta_\alpha^\mu \gamma^\nu T_B T_A \right) \\
& - ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} k_\beta \left(\delta_\alpha^\mu \gamma^\nu \frac{\exp(-ik\Theta p) - 1}{k\Theta p} \exp(-iq\Theta l) T_A T_B \right. \\
& \quad \left. + \delta_\alpha^\nu \gamma^\mu \frac{\exp(-ik\Theta q) - 1}{k\Theta q} \exp(-ip\Theta l) T_B T_A \right) \\
& + \frac{g^2}{2} \exp(ik\Theta l) \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \left(2(p_\alpha \delta_\beta^\nu \gamma^\mu + q_\alpha \delta_\beta^\mu \gamma^\nu) - \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu (\not{p} - \not{q}) \right) \\
& \quad \left(\frac{\sin(p\Theta q)}{p\Theta q} \{T_A, T_B\} + i \frac{\cos(p\Theta q) - 1}{p\Theta q} [T_A, T_B] \right) \\
& + i \frac{g^2}{2} (\not{k} + m) (\mathcal{V}^{\mu\nu}(l, p, q) T_A T_B + \mathcal{V}^{\nu\mu}(l, q, p) T_B T_A) \\
& - i \frac{g^2}{2} (\not{l} - m) (\overline{\mathcal{V}^{\nu\mu}(k, q, p)} T_A T_B + \overline{\mathcal{V}^{\mu\nu}(k, p, q)} T_B T_A). \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Wie schon im $\rho^{[0]}$ -Fall sind die letzten zwei Terme proportional zu den Bewegungsgleichungen des Fermionfeldes und tragen daher zum Wirkungsquerschnitt nicht bei.

5.3.6 Die Boson-Geist-Wechselwirkung

Eine veränderte Feynmanregel für den Vertex



gibt es nur für den Fall der nichtkommutativen Eichfixierung. Die relevanten Terme in der Lagrangedichte (5.5) sind in diesem Fall

$$\mathcal{L}_{\text{c\ddot{c}g}} = -ig \partial_\mu C^{*A} [A^\mu * C]_A + \partial_\mu C^{*A} \partial^\mu \hat{C}^{[2]A} \tag{5.18}$$

Betrachte zunächst die erste Zeile

$$\begin{aligned}
& -ig\partial^\mu C^{*C}[A_\mu, C]_C \\
& = -ig\partial^\mu C^{*C} \cos(\Lambda_{12})[A_\mu, C]_C + g\partial^\mu C^{*C} \sin(\Lambda_{12})[A_\mu, C]_C \\
& = -ig\partial^\mu C^{*C} \cos(\Lambda_{12})A_\mu^A C^B [T_A, T_B]_C + g\partial^\mu C^{*C} \sin(\Lambda_{12})A_\mu^A C^B \{T_A, T_B\}_C \\
& = +gf_{ABC}\partial^\mu C^{*C} \cos(\Lambda_{12})A_\mu^A C^B + gd_{ABC}\partial^\mu C^{*C} \sin(\Lambda_{12})A_\mu^A C^B \\
& \rightsquigarrow gf_{ABC}(-iq^\mu)C^{*C} \cos(-(\eta\Theta p))A_\mu^A C^B \\
& \quad + gd_{ABC}(-iq^\mu)C^{*C} \sin(-(\eta\Theta p))A_\mu^A C^B \\
& = -igf_{ABC}q^\mu C^{*C} \cos(\eta\Theta p)A_\mu^A C^B \\
& \quad + igd_{ABC}q^\mu C^{*C} \sin(\eta\Theta p)A_\mu^A C^B
\end{aligned}$$

Dies liefert für $\vartheta \rightarrow 0$ den kommutativen Vertex zurück (vgl. Tabelle 6.2 im Kapitel 6).

Der zweite Term aus Gleichung (5.18) ergibt nach partieller Integration

$$\begin{aligned}
& -\partial^\mu \partial_\mu C^{*C} \partial^\mu \hat{C}^{[2]C} \\
& = -\frac{ig}{2} \partial^\mu \partial_\mu C^{*C} \left(\frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu} \cos \Lambda_{12} - 1}{2 \Lambda_{12}} A_\mu^A \partial_\nu C^B [T_A, T_B]_C \right. \\
& \quad \left. + i \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu} \sin \Lambda_{12}}{2 \Lambda_{12}} A_\mu^A \partial_\nu C^B \{T_A, T_B\}_C \right) \\
& \rightsquigarrow -\frac{ig}{2} (-q^2) C^{*C} \left(\frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu} \cos(-(\eta\Theta p)) - 1}{2 -(\eta\Theta p)} A_\mu^A (-ip_\nu) C^B i f_{CAB} \right. \\
& \quad \left. + i \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu} \sin(-(\eta\Theta p))}{2 -(\eta\Theta p)} A_\mu^A (-ip_\nu) C^B d_{CAB} \right) \\
& = -\frac{ig}{2} q^2 C^{*C} \left(\frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu} \cos(\eta\Theta p) - 1}{2 (\eta\Theta p)} A_\mu^A p_\nu C^B f_{CAB} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu} \sin(\eta\Theta p)}{2 (\eta\Theta p)} A_\mu^A p_\nu C^B d_{CAB} \right)
\end{aligned}$$

Dies liefert die Feynmanregel

$$\frac{g}{2} q^2 p_\nu \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \left(\frac{\cos(\eta\Theta p) - 1}{(\eta\Theta p)} f_{CAB} - \frac{\sin(\eta\Theta p)}{(\eta\Theta p)} d_{CAB} \right) \quad (5.19)$$

Insgesamt erhält man also als Feynmanregel

$$\begin{aligned}
& -igf_{ABC}q^\mu C^{*C} \cos(\eta\Theta p)A_\mu^A C^B + igd_{ABC}q^\mu C^{*C} \sin(\eta\Theta p)A_\mu^A C^B \\
& \frac{g}{2} q^2 p_\nu \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \left(\frac{\cos(\eta\Theta p) - 1}{(\eta\Theta p)} f_{CAB} - \frac{\sin(\eta\Theta p)}{(\eta\Theta p)} d_{CAB} \right). \quad (5.20)
\end{aligned}$$

6 Vergleich mit dem kommutativen Modell: $gg \rightarrow q\bar{q}$

In diesem Kapitel sollen die Eigenschaften des nicht-kommutativen Modells an Hand eines Wirkungsquerschnittes beispielhaft untersucht werden. Dazu wurde der Wirkungsquerschnitt $gg \rightarrow t\bar{t}$ ausgewählt, also Paarerzeugung von Topquarks aus Gluonen. Es wird die Baumniveaunäherung der Standard-QCD mit der Baumniveaunäherung des effektiven nichtkommutativen $SU(3)$ -Modells verglichen.

Das Topquark ist mit $m_t \approx 172,5 \text{ GeV}$ das schwerste Quark. Durch seine große Masse besitzt es einige charakteristische Eigenschaften, durch die es möglich sein wird, die Topquarkpaarproduktion von anderen Prozessen, wie Gluonproduktion oder Paarproduktion von leichteren Quarks, z. B. am Large Hadron Collider zu unterscheiden.

Das Topquark ist extrem instabil und zerfällt quasi instantan. Der Hauptzerfallsweg führt über ein Bottomquark und ein W-Boson. Das Bottomquark kann nun identifiziert werden durch eine Technik, die *b-tagging* genannt wird:

Das Bottomquark besitzt im Gegensatz zum Topquark eine relativ große Lebensdauer und hadronisiert daher. Wegen der großen Lebensdauer des Bottomquarks zerfällt das Hadron, das das Bottomquark mit anderen Quarks gebildet hat, erst, nachdem es eine gewisse Strecke zurückgelegt hat. Die Messung diese Strecke liefert ein Indiz für einen Bottom-Zerfall.

Wenn das Bottomquark identifiziert ist, ist es möglich, an Hand der Zerfallsprodukte des W-Bosons den Prozess als Topquarkpaarproduktion einzuordnen. Da bei hohen Energien der Anteil von Gluonen in Protonen überwiegt, wird der dominante Beitrag zur Topquarkproduktion am LHC von der Gluonenfusion stammen.

Da die Nichtkommutativitätsskala $\Lambda_{\text{NC}} \geq 1 \text{ TeV}$ immerhin knapp dreimal größer ist als die Topquarkproduktionsschwelle $2m \approx 340 \text{ GeV}$, sind die Ergebnisse in dem Bereich, wo die Nichtkommutativität bedeutend wird, nicht sehr sensibel auf Änderungen in der Masse. Insbesondere werden die Aussagen über den Limes großer Energien, die die Unitarität der Theorie betreffen, unabhängig von der Quarkmasse sein und daher auch auf die leichten Quarks zutreffen. In den Abbildungen soll aber, um den Parameterbereich einzuschränken, stets nur der Wirkungsquerschnitt mit der Topmasse dargestellt werden, da der Beitrag des Topquarks am ehesten experimentell relevant ist.

6.1 Der kommutative Wirkungsquerschnitt

In der QCD gibt es drei Diagramme A, B und C, die auf Baumniveau zum Wirkungsquerschnitt beitragen (siehe Tabelle 6.1). Für den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt muss noch ein viertes Diagramm G, ein Geistdiagramm berücksichtigt werden, das dazu dient, die nichtphysikalischen Freiheitsgrade aus dem Diagramm C aufzuheben. Es wird nur dann benötigt, wenn man über alle Polarisierungen der einfallenden Gluonen mittelt. Bei der Mittelung kann man wählen, ob man entweder nur über die physikalischen Freiheitsgrade summiert, oder ob man auch über die unphysikalischen Freiheitsgrade mittelt und den fehlerhaften zusätzlichen Beitrag durch das Geistdiagramm ausgleicht. Der zweite Weg ist oft einfacher, wenn man an einem analytischen Ergebnis interessiert ist. Daher wurde diese Technik für die Berechnung des kommutativen Matrixelements verwendet.

Die Feynmanregeln, nach denen diese Diagramme auszuwerten sind, sind in Tabelle 6.2 zusammengestellt. Für die ersten drei Graphen erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_A &= \bar{u}_{\sigma_1}^{si}(k) i g \gamma_{ij}^{\mu} T_{sr}^A \frac{i(\delta_{\alpha} \gamma_{jk}^{\alpha} + m \delta_{jk}) \delta_{rt}}{\delta^2 - m^2} i g \gamma_{kl}^{\nu} T_{tu}^B v_{\sigma_2}^{lu}(l) \epsilon_{\mu, \pi_1}^A(p) \epsilon_{\nu, \pi_2}^B(q) \\ \mathcal{F}_B &= \bar{u}_{\sigma_1}^{si}(k) i g \gamma_{ij}^{\nu} T_{sr}^B \frac{i(\zeta_{\alpha} \gamma_{jk}^{\alpha} + m \zeta_{jk}) \delta_{rt}}{\zeta^2 - m^2} i g \gamma_{kl}^{\mu} T_{tu}^A v_{\sigma_2}^{lu}(l) \epsilon_{\mu, \pi_1}^A(p) \epsilon_{\nu, \pi_2}^B(q) \\ \mathcal{F}_C &= \bar{u}_{\sigma_1}^{si}(k) i g \gamma_{ij}^{\sigma} T_{sr}^C v_{\sigma_2}^{rj}(l) \frac{i}{\eta^2} (-g_{\rho\sigma} + (1 - \lambda) \frac{\eta_{\rho} \eta_{\sigma}}{\eta^2}) \\ &\quad g f^{ABC} [g^{\mu\nu} (p - q)^{\rho} + g^{\nu\rho} (q + \eta)^{\mu} - g^{\rho\mu} (\eta + p)^{\nu}] \epsilon_{\mu, \pi_1}^A(p) \epsilon_{\nu, \pi_2}^B(q)\end{aligned}$$

Dabei ist λ der Eichparameter.

Das Produkt der Matrixelemente mit den konjugierten Matrixelementen führt bei Summation über die Helizitäten der einlaufenden Gluonen und über den Spin der auslaufenden Fermionen auf Spuren von γ -Matrizen und Generatormatrizen. Die auftretenden Spuren über die Generatormatrizen sind

$$\begin{aligned}\text{Tr } T^A T^B T^A T^B &= -\frac{2}{3} \\ \text{Tr } T^A T^B T^B T^A &= \frac{16}{3} \\ \text{Tr } T^A T^A &= \delta^{AA} = 8.\end{aligned}$$

Die Auswertung geschieht dabei nach Cvitanović[5] und ist im Anhang F ausgeführt. Die Spur über die γ -Matrizen wurde durch ein FORM-Programm berechnet[15].

Da es 8 verschiedene Gluonen mit jeweils zwei verschiedenen (physikalischen) Polarisierungen gibt, ist nach Spurbildung durch $E = 8 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 2 = 256$ zu teilen.

Das Ergebnis für das gemittelte Betragsquadrat des Matrixelements ist

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}|_s^2 &= g^4 \left(-\frac{3}{16} + \frac{1}{u - m^2} (1/6t - 5/6m^2) + \frac{1}{t - m^2} (1/6u - 5/6m^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} m^4 \left(\frac{1}{(u - m^2)^2} + \frac{1}{(t - m^2)^2} \right) + \frac{1}{6} \frac{m^4}{(t - m^2)(u - m^2)} \right) \quad (6.1)\end{aligned}$$

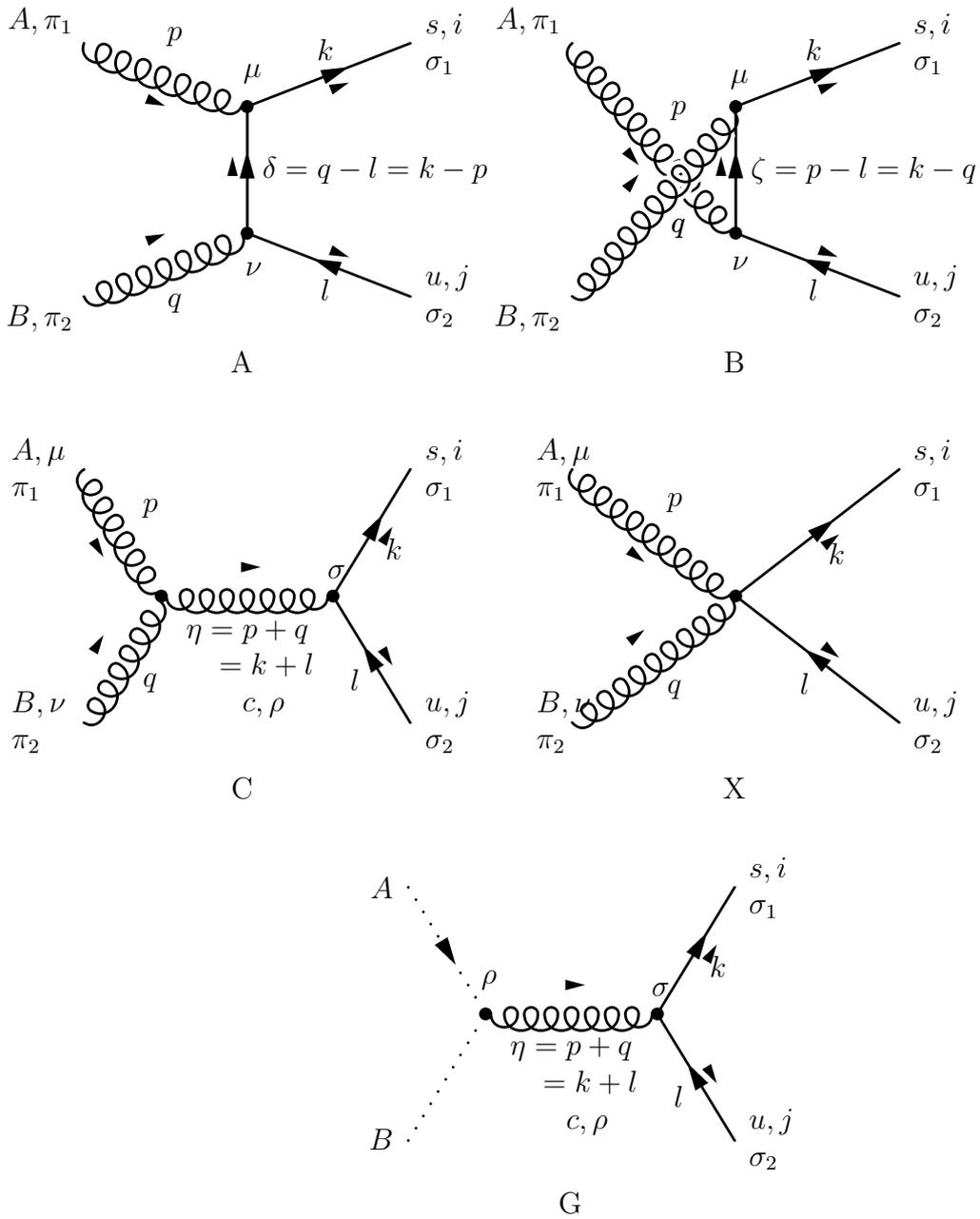


Tabelle 6.1: Die relevanten Feynmandiagramme für $gg \rightarrow q\bar{q}$ in Baumnäherung. Der Kontaktvertex X tritt nur der nichtkommutativen QCD auf. Das Geistdiagramm G spielt nur bei der analytischen Berechnung des spingemittelten Wirkungsquerschnittes eine Rolle und wird für die numerische Auswertung des nichtkommutativen Wirkungsquerschnitts nicht benötigt werden.

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram 1: } = ig\gamma^\mu T^A \\
& \text{Diagram 2: } = gf^{ABC} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu] \\
& \text{Diagram 3: } = -ig^2 [f^{ABE} f^{CDE} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ACE} f^{BDE} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ADE} f^{BCE} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})] \\
& \text{Diagram 4: } = gf^{ABC} q^\mu
\end{aligned}$$

Tabelle 6.2: Die Feynmanregeln für kommutative QCD. Die Konventionen entsprechen denen von [9].

$$-\frac{3}{2} \frac{m^2}{s} - \frac{3}{16} \frac{1}{s^2} (u-t)^2$$

Das kleine s erinnert an die Spin- und Polarisationsmittelung. Dabei sind

$$\begin{aligned} s &= (p+q)^2 \\ t &= (p-k)^2 \\ u &= (p-l)^2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

die drei Mandelstamvariablen. Für den Fall verschwindender Fermionenmasse $m = 0$ erhält man die einfache Formel

$$|\mathcal{M}|_s^2 = g^4 \left(\frac{1}{6} \frac{t^2 + u^2}{tu} - \frac{3}{8} \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right). \tag{6.3}$$

Wie man sieht, ist (6.3) homogen in der Energie. Aus dem Matrixelement ergibt sich für vernachlässigbare Massen der differentielle Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem nach der Formel[9]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|_s^2}{64\pi s}. \tag{6.4}$$

Die Winkelabhängigkeit steckt also alleine im Matrixelement \mathcal{M} , und diese ist für hohe Energien (also für vernachlässigbare Masse m) unabhängig von der Energie. Der kommutative Wirkungsquerschnitt besitzt also für hohe Energien eine Energieabhängigkeit $\sim 1/s$ und eine Winkelverteilung unabhängig von der Energie.

Die Winkelabhängigkeit des kommutativen Wirkungsquerschnittes ist in Abbildung 6.1 gezeigt. Für die starke Kopplungskonstante $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$ wurde 0,09 verwendet (siehe Diskussion im Abschnitt 6.3).

6.2 Der nichtkommutative Wirkungsquerschnitt

Der nichtkommutative Wirkungsquerschnittes wurde numerisch untersucht. Es ist zwar möglich, z. B. mit FORM[15] einen analytischen Ausdruck für den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt zu gewinnen, doch besteht dieser selbst bei $m = 0$ aus über 1000 Termen.

Zur numerischen Berechnung wurden die Fortran-Bibliotheken von O'Mega verwendet[20]. Bei O'Mega ist es nicht nötig, das Geist-Diagramm G zu berücksichtigen, da explizit nur über die physikalischen Freiheitsgrade summiert wird.

Im nächsten Unterabschnitt soll zunächst gezeigt werden, dass das Ergebnis für den Wirkungsquerschnitt eichinvariant ist (im Sinne der Unabhängigkeit vom Eichparameter λ), und dass es keinen Unterschied zwischen der kommutativen und nichtkommutativen Eichfixierung gibt. Danach wird erklärt, wie O'Mega zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes verwendet wird. Schließlich wird der nichtkommutative Wirkungsquerschnitt dargestellt und mit seinem kommutativen Analogon verglichen.

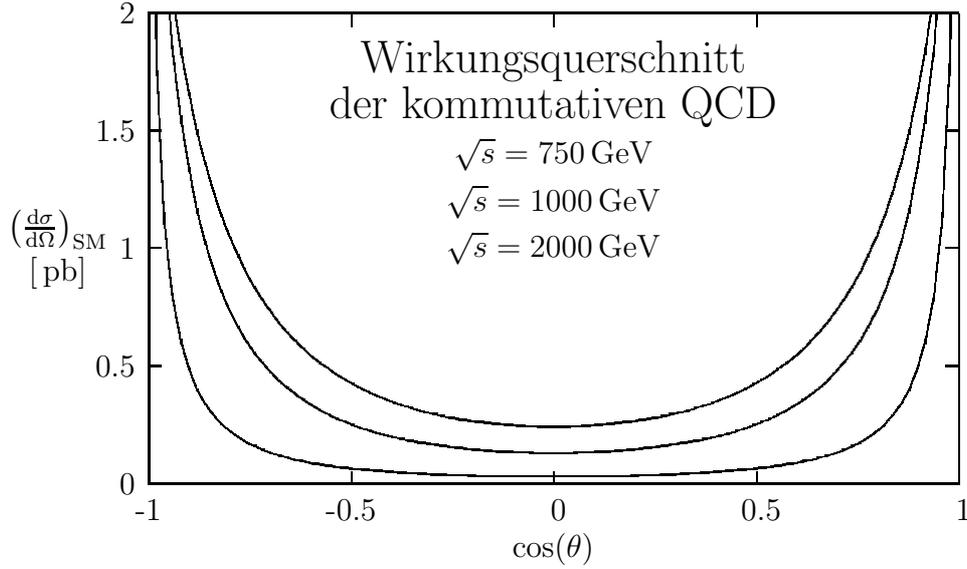


Abbildung 6.1: Der kommutative Wirkungsquerschnitt $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{SM}}$ bei verschiedenen Energien. Für große Energien (in Bezug auf die Produktionsschwelle $2m \approx 350 \text{ GeV}$) verhält sich $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{SM}}$ wie $\frac{1}{s}$, d. h. die tieferen Linien entsprechen höheren Energien.

6.2.1 Eichinvarianz des Ergebnisses

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden,

- dass der Wirkungsquerschnitt unabhängig vom Eichparameter λ ist,
- und dass das Ergebnis unabhängig ist davon, ob man die kommutative oder die nichtkommutative Eichfixierung wählt.

Beide Aussagen sind miteinander verknüpft und beziehen sich auf das Diagramm C (vgl. Tabelle 6.1), denn nur in diesem Diagramm tritt (im Gluonpropagator und im Dreibosonenvertex) der Eichparameter λ auf, und nur in diesem Diagramm gibt es einen Unterschied zwischen kommutativer und nichtkommutativer Eichfixierung.

Betrachte zunächst den Fall der nichtkommutativen Eichfixierung. Schreibe die Feynmanregel für den Dreibosonenvertex als

$$\begin{aligned}
& g(f_{ABC} \cos(p\Theta q) - d_{ABC} \sin(p\Theta q)) \\
& \quad (g^{\mu\rho}(\eta - p)^\sigma + g^{\rho\sigma}(p - q)^\mu + g^{\sigma\mu}(q - \eta)^\rho) \\
& \quad + gV_{ABC}^{\rho\sigma\nu}(p, q, \eta)(\eta^2 g_\nu^\mu - (1 - \frac{1}{\lambda})\eta_\nu \eta^\mu)
\end{aligned}$$

(die zyklischen Vertauschungen tragen, wie in Unterabschnitt 5.3.2 erwähnt, nicht bei). Dieser Vertex ist nun mit dem Propagator

$$\frac{1}{\eta^2}(g_\mu^\kappa - (1 - \lambda)\frac{\eta_\mu\eta^\kappa}{\eta^2}) \quad (6.5)$$

zu multiplizieren. Nach Definition ist der Propagator das Inverse der Bewegungsgleichung, daher verschwindet die Abhängigkeit von λ im zweiten Term:

$$\begin{aligned} & g(f_{ABC} \cos(p\Theta q) - d_{ABC} \sin(p\Theta q)) \\ & (g^{\mu\rho}(\eta - p)^\sigma + g^{\rho\sigma}(p - q)^\mu + g^{\sigma\mu}(q - \eta)^\rho) \\ & \frac{1}{\eta^2}(g_\mu^\kappa - (1 - \lambda)\frac{\eta_\mu\eta^\kappa}{\eta^2}) \\ & + gV_{ABC}^{\rho\sigma\kappa}(p, q, \eta) \end{aligned}$$

Die bleibende Abhängigkeit von λ ist also proportional zu η^κ .

Der Index κ wird nun mit dem Eichwechselwirkungsvertex (man beachte die Impulskonventionen)

$$igT_C \left(E^{(0)}(ik\Theta l)\gamma_\kappa + g_{\kappa\mu} \frac{i\vartheta\Theta^{\mu\beta}}{2} E^{(1)}(ik\Theta l)(-k_\beta(-l - m) + l_\beta(-k + m)) \right), \quad (6.6)$$

kontrahiert. Dieser verbindet die beiden äußeren Fermionlinien. Daher tragen die beiden Terme proportional zu den Bewegungsgleichungen der äußeren Fermionen nicht bei:

$$\begin{aligned} (l + m)v(l) &= 0 \\ \bar{u}(k)(k - m) &= 0 \end{aligned}$$

Ebenso verschwindet die verbleibende Abhängigkeit von λ

$$\lambda\eta_\kappa\gamma^\kappa = \lambda\eta = \lambda((k - m) + (l + m)) \rightarrow 0 \quad (6.7)$$

(dies ist die Stromerhaltung $\partial^\mu j_\mu^C = 0$ für $j_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu T^C\Psi$). Damit ist die Eichinvarianz gezeigt.

Betrachte nun das Diagramm in der kommutativen Eichfixierung. Der Unterschied zur nichtkommutativen Eichfixierung besteht in dem Term proportional zu

$$gV_{ABC}^{\rho\sigma\nu}(p, q, \eta)\frac{1}{\lambda}\eta_\nu\eta^\mu \quad (6.8)$$

Multiplikation mit dem Propagator liefert

$$gV_{ABC}^{\rho\sigma\nu}(p, q, \eta)\frac{\eta_\nu\eta^\kappa}{\eta^2}, \quad (6.9)$$

unabhängig von λ . Wie oben verschwindet dieser Term, wenn man η^κ mit dem Eichwechselwirkungsvertex kontrahiert: Es gibt also keinen Unterschied zwischen kommutativer und nichtkommutativer Eichfixierung.

Diese Überlegungen sind offensichtlich unabhängig davon, ob man die $\rho^{[0]}$ -Seiberg-Witten-Abbildung oder die alternative Seiberg-Witten-Abbildung verwendet.

Diagramm	Terme	Farbstruktur
A		$\mathcal{F}_A \sim T_A T_B$
B		$\mathcal{F}_B \sim T_B T_A$
C		$\mathcal{F}_{C1} \sim f_{ABC}$ $\mathcal{F}_{C2} \sim d_{ABC}$
X		$\mathcal{F}_{X1} \sim T_A T_B$ $\mathcal{F}_{X2} \sim T_B T_A$

Tabelle 6.3: Aufspaltung der Matrixelemente: Jedes Matrixelement wird in Terme zerlegt, die eine eindeutige Farbstruktur besitzen.

6.2.2 Die Verwendung von O'Mega

Die Fortran-Bibliotheken von O'Mega bestehen aus Funktionen für die Feynmanregeln des Standardmodells. Weiter gibt es Funktionen, die Spinoren zu beliebigem Spin und Impuls liefern, sowie andere Funktionen, die Polarisationsvektoren für die Eichbosonen liefern. Das Matrixelement kann dann durch Multiplikation dieser Bausteine gewonnen werden.

Für die Umsetzung des nichtkommutativen Wirkungsquerschnittes war es also nötig, Funktionen für die nichtkommutativen Vertizes zu schreiben. Außerdem musste die Farbstruktur explizit berücksichtigt werden, da dies bei der verwendeten Version von O'Mega noch nicht automatisiert war. Dazu wurden die Diagramme in Summanden mit einer eindeutigen Farbstruktur zerlegt (vgl. Tabelle 6.3). Für jeden Summanden wurde dann das Matrixelemente zunächst einzeln berechnet. Anschließend wurden die Matrixelemente kombiniert und mit der passenden Farbspur gewichtet:

$$\begin{aligned}
|M|^2 = & \text{Tr}(T_B T_A T_A T_B) ((\mathcal{F}_A + \mathcal{F}_{X1})^* (\mathcal{F}_A + \mathcal{F}_{X1}) + (\mathcal{F}_B + \mathcal{F}_{X2})^* (\mathcal{F}_B + \mathcal{F}_{X2})) \\
& + \text{Tr}(T_B T_A T_B T_A) ((\mathcal{F}_A + \mathcal{F}_{X1})^* (\mathcal{F}_B + \mathcal{F}_{X2}) + (\mathcal{F}_B + \mathcal{F}_{X2})^* (\mathcal{F}_A + \mathcal{F}_{X1})) \\
& + f_{ABC} \text{Tr}(T_C T_A T_B) (\mathcal{F}_{C1}^* (\mathcal{F}_A + \mathcal{F}_{X1}) + (\mathcal{F}_B + \mathcal{F}_{X2})^* \mathcal{F}_{C1}) \\
& + f_{ABC} \text{Tr}(T_C T_B T_A) (\mathcal{F}_{C1}^* (\mathcal{F}_B + \mathcal{F}_{X2}) + (\mathcal{F}_A + \mathcal{F}_{X1})^* \mathcal{F}_{C1}) \\
& + d_{ABC} \text{Tr}(T_C T_A T_B) (\mathcal{F}_{C2}^* (\mathcal{F}_A + \mathcal{F}_{X1}) + (\mathcal{F}_A + \mathcal{F}_{X1})^* \mathcal{F}_{C2})
\end{aligned}$$

$$+ d_{ABC} \text{Tr}(T_C T_B T_A) (\mathcal{F}_{C2}^* (\mathcal{F}_B + \mathcal{F}_{X2}) + (\mathcal{F}_B + \mathcal{F}_{X2})^* \mathcal{F}_{C2}) \quad (6.10)$$

(beachte, dass sich bei komplexer Konjugation des Matrixelements die Reihenfolge der Matrizen umkehrt).

Um das Programm zu testen, wurde überprüft, ob es die Ward-Identitäten richtig berechnet (siehe z. B. Kapitel 7.4 in [9]). Die Ward-Identitäten verlangen, dass das Matrixelement für den Prozess $gg \rightarrow q\bar{q}$ verschwindet, wenn man den Polarisationsvektor eines einfallenden Gluons longitudinal (also unphysikalisch) wählt. Dies verhindert die Erzeugung von unphysikalischen Zuständen aus erlaubten Zuständen.

Für die Überprüfung der Ward-Identitäten ist es vorteilhaft, auch den Fall $\vec{E} \neq 0$ zu untersuchen, selbst wenn das Programm später nur für $\vec{E} = 0$ ausgewertet werden soll. Für $\vec{E} = 0$ gibt es im Bezugssystem des Masseschwerpunkts eine Auslöschung schon innerhalb gewisser Gruppen von Termen, und gewisse Terme verlieren ihre Abhängigkeit von ϑ : Dies liegt daran, dass in diesem Falle $p\Theta q = \frac{\vartheta}{2} \vec{B} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = 0$ ist, wegen $\vec{p} = -\vec{q}$ (vgl. Gleichung (1.6)). Nur für $\vec{E} \neq 0$ ist für die Auslöschung wirklich jeder Term relevant, und man erhält eine bessere Kontrolle des Ergebnisses.

Das Programm lieferte in jedem getesteten Fall für die Ward-Identität einen Wert von unter $10^{-10} \times \frac{d\sigma}{d\Omega}$ und bestand damit im Rahmen der Rechengenauigkeit den Test.

6.3 Ergebnisse

Der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega_{gg \rightarrow q\bar{q}}}$ ist im Schwerpunktsystem abhängig vom Tensor $\Theta^{\mu\nu}$ (d. h. von den Vektoren \vec{E} und \vec{B}), von den Richtungen der einfallenden Gluonen und der ausgehenden Quarks, sowie von der Energie \sqrt{s} des Prozesses. Im Folgenden wird $\vec{E} = 0$ vorausgesetzt, da die Theorie andernfalls nicht unitär ist (vgl. Abschnitt 1.2).

Wenn man \vec{B} so normiert, dass $|\vec{B}| = 1$ ist (bei $\Lambda_{NC} = 1 \text{ TeV}$), so bleiben (nach Ausnutzung der Rotationssymmetrie) vier Parameter α , ϕ , θ und s , von denen $\frac{d\sigma}{d\Omega_{gg \rightarrow q\bar{q}}}$ abhängig ist (vgl. Abbildung 6.2):

- der Winkel α zwischen einfallendem Strahl und \vec{B} -Feld,
- die Richtung des ausgehenden Strahls (θ , ϕ),
- und die Energie \sqrt{s} .

Unter Berücksichtigung der Symmetrien des Systems lässt sich der Wertebereich der vier Variablen einschränken: Auf Grund der Ununterscheidbarkeit der beiden einfallenden Gluonen kann man θ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ einschränken. Da die Situation symmetrisch ist zur x - z -Ebene, genügt es den Bereich $\phi \in [0, \pi]$ zu betrachten. Eine genaue Betrachtung der Feynmanregeln führt zu dem Ergebnis, dass man α auf das Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ beschränken kann: Für $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ersetze \vec{B} durch $-\vec{B}$. Dies führt zu einer komplexen Konjugation der Matrixelemente, die den Wirkungsquerschnitt invariant lässt.

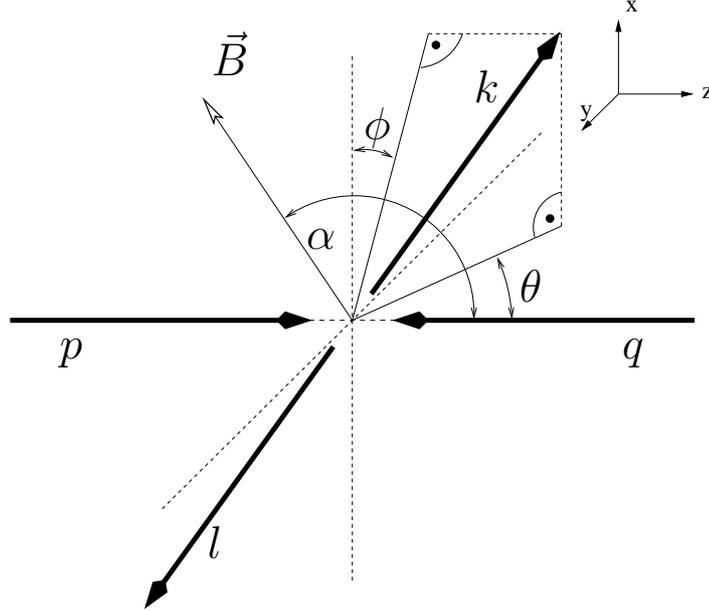


Abbildung 6.2: Das Bezugssystem. Der Vektor \vec{B} befindet sich in der x - z -Ebene.

Anschließend führt eine Spiegelung an der y - z -Ebene zu einem Wert von $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Insgesamt ist damit der Wertebereich der Parameter gegeben durch

$$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \phi \in [0, \pi], \quad s \in [4m^2, \infty].$$

Neben der direkten Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von s über die Impulse p, q, k, l gibt es auch noch die indirekte Abhängigkeit über die starke Kopplungskonstante $\alpha_s = \alpha_s(s)$. In der kommutativen QCD lässt sich diese für hohe Energien störungstheoretisch berechnen. Allerdings ist anzunehmen, dass das Verhalten von $\alpha_s(s)$ in der nichtkommutativen QCD vom kommutativen Verhalten abweicht. Da dies noch nicht untersucht ist, soll im Folgenden konstant

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi} = 0,09 \tag{6.11}$$

angenommen werden. Dies entspricht in etwa der starken Kopplungskonstanten der kommutativen QCD bei Energien von 1 TeV¹ (und dies ist die angenommene Nichtkommutativitätsskala Λ_{NC} in dieser Arbeit).

Zunächst soll die Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für verschiedene Energien um die Nichtkommutativitätsskala Λ_{NC} untersucht werden, die in dieser Arbeit bei 1 TeV liegen soll. Dabei wird stets nur der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt angegeben. Anschließend wird auf das Hochenergieverhalten eingegangen. Dazu wird der differentielle Wirkungsquerschnitt über einen Winkelbereich integriert.

¹Ein genauerer Wert ist $\alpha_s(1 \text{ TeV}) = 0,08778 \pm 0,00113$ [13].

6.3.1 Winkelabhängigkeit

In den Diagrammen 6.3 und 6.4 ist der differentielle $\rho^{[0]}$ -Wirkungsquerschnitt für $\sqrt{s} = 750 \text{ GeV}$ dargestellt. Für $\sqrt{s} < \Lambda_{NC} = 1 \text{ TeV}$ ist die Änderung des Wirkungsquerschnitts durch die Nichtkommutativität viel kleiner als der Wirkungsquerschnitt selbst (kleiner als 0,5% bei $\sqrt{s} = 750 \text{ GeV}$). Daher ist stets die relative Differenz

$$\Delta := \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{NC} - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SM}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SM}} \quad (6.12)$$

als Funktion von ϕ und θ aufgetragen für verschiedene Werte von $\alpha \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$. Im oberen Diagramm ist jeweils die ϕ -Abhängigkeit bei verschiedenen Werten von $\cos(\theta)$ gezeigt. Dabei nimmt $\cos(\theta)$ die Werte $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0, 0,25, 0,5, \cos(\frac{\pi}{4}) \approx 0,707$ und $\cos(\frac{\pi}{8}) \approx 0,924$ an. Insbesondere tritt auch der Fall $\vec{B} \parallel \vec{k}$ auf und ist durch einen ausgefüllten Kreis gekennzeichnet. Im unteren Diagramm ist die $\cos(\theta)$ -Abhängigkeit bei fünf verschiedenen Werten von ϕ gezeigt. Im Falle $\alpha = \frac{\pi}{2}$ liegen aus Symmetriegründen einige Linien übereinander. Die Skalierung der $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ -Achse ist zum Vergleich unabhängig von α gewählt. Die (ebenfalls mit O'Mega berechnete) Winkelverteilung für den kommutativen Fall befindet sich in Abbildung 6.1.

An den Diagrammen erkennt man, dass, wie behauptet, der Winkelbereich $\cos(\theta) < 0$ durch Symmetrie aus dem Bereich $\cos(\theta) > 0$ hervorgeht. Da sich bei der Spiegelung an $\theta = \frac{\pi}{2}$ auch der Winkel vom Vektor \vec{B} zum ausgehenden Quark ändert, handelt es sich allerdings nicht um eine einfache Spiegelsymmetrie, außer im Falle $\alpha = \frac{\pi}{2}$, sondern Kurven für verschiedene Werte von ϕ gehen bei dieser Spiegelung ineinander über.

In allen Fällen ist die nichtkommutative Korrektur positiv, d. h. $\Delta > 1$.

Auch bei $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV} = \Lambda_{NC}$ sind die nichtkommutativen Korrekturen klein (etwa 1,6%). Dies liegt daran, dass der Nichtkommutativitätsparameter meist mit in der Kombination $\frac{\theta}{2}\Theta^{\mu\nu}$ mit einem Faktor $\frac{1}{2}$ auftritt.

Dementsprechend sind die Korrekturen für $\sqrt{s} = 2 \text{ TeV} = 2\Lambda_{NC}$ (Abbildungen 6.5 und 6.6) schließlich bedeutend und für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ schon halb so groß wie der kommutative Wirkungsquerschnitt. Die Winkelverteilung von Δ ist jedoch ähnlich geblieben.

Zwischen $\sqrt{s} = 750 \text{ GeV}$ und $\sqrt{s} = 2 \text{ TeV}$ steigt Δ stetig an. Dies ist für $\cos(\theta) = 0, \phi = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{4}$ in Diagramm 6.7 gezeigt.

Bei $\sqrt{s} = 5 \text{ TeV}$ (Abbildung 6.8) schließlich ist der nichtkommutative Wirkungsquerschnitt wesentlich größer als der kommutative Wirkungsquerschnitt. Die Schwankungen im Betrag von Δ für verschiedene α sind sehr groß, doch bleibt die Winkelverteilung selbst unabhängig davon.

Auch bei $\sqrt{s} = 5 \text{ TeV}$ ist es interessant, statt des Wirkungsquerschnittes selbst die Größe Δ zu betrachten: Im Diagramm 6.9 ist der absolute Wirkungsquerschnitt als Funktion von $\cos(\theta)$ für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ dargestellt. Wie man erkennt, ist die Winkelabhängigkeit für $\cos(\theta) \rightarrow \pm 1$ immer noch ähnlich der Winkelabhängigkeit des kommutativen Wirkungsquerschnitts. Diese Winkelabhängigkeit wird herausvidiert, indem man zu Δ übergeht.

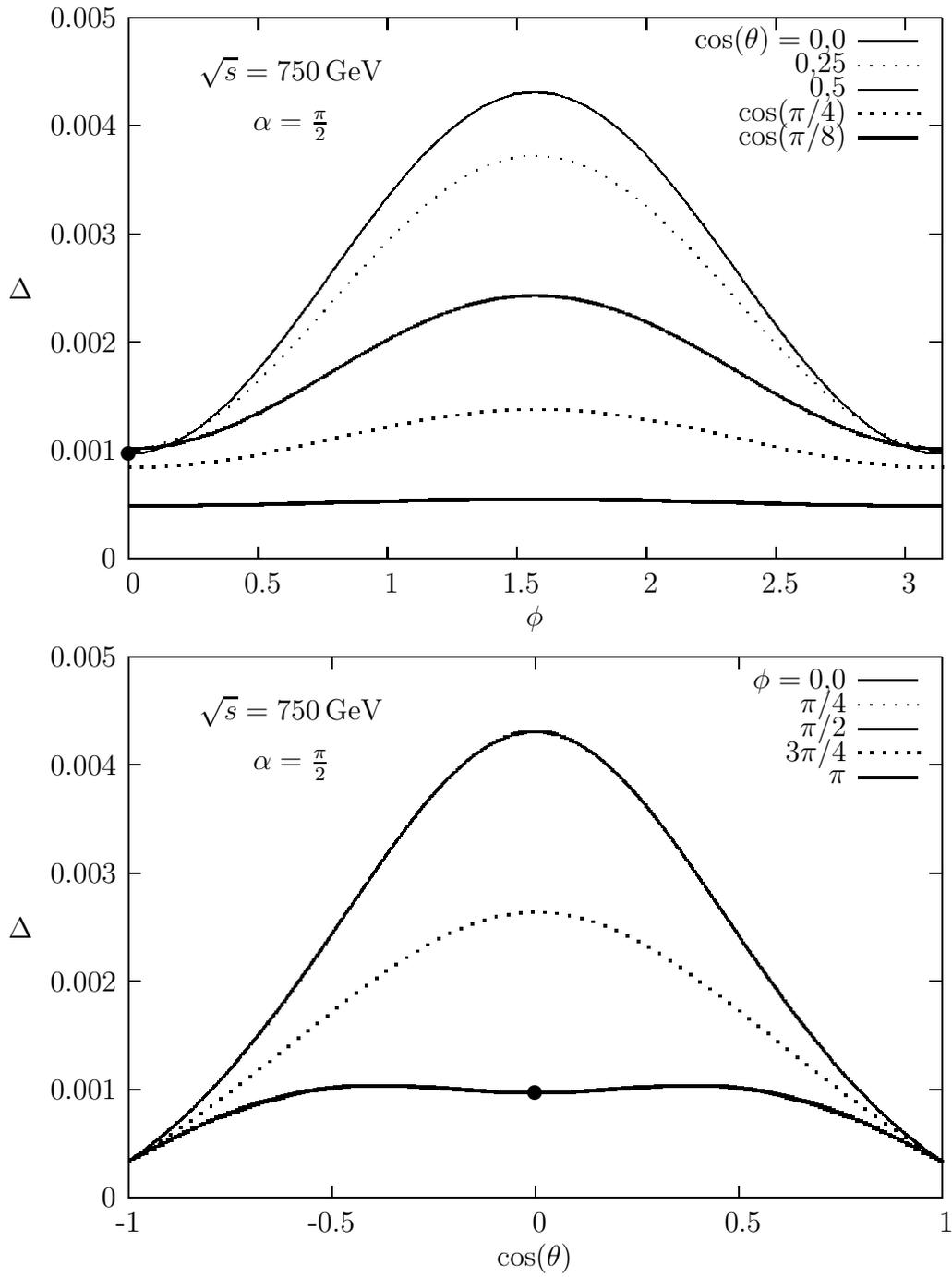


Abbildung 6.3: Die relative nichtkommutative Korrektur Δ (Gleichung (6.12)) für $\sqrt{s} = 750$ GeV, $\Lambda_{\text{NC}} = 1$ TeV, $\alpha_s = 0,09$. Der Punkt deutet Streuung parallel zu \vec{B} an.

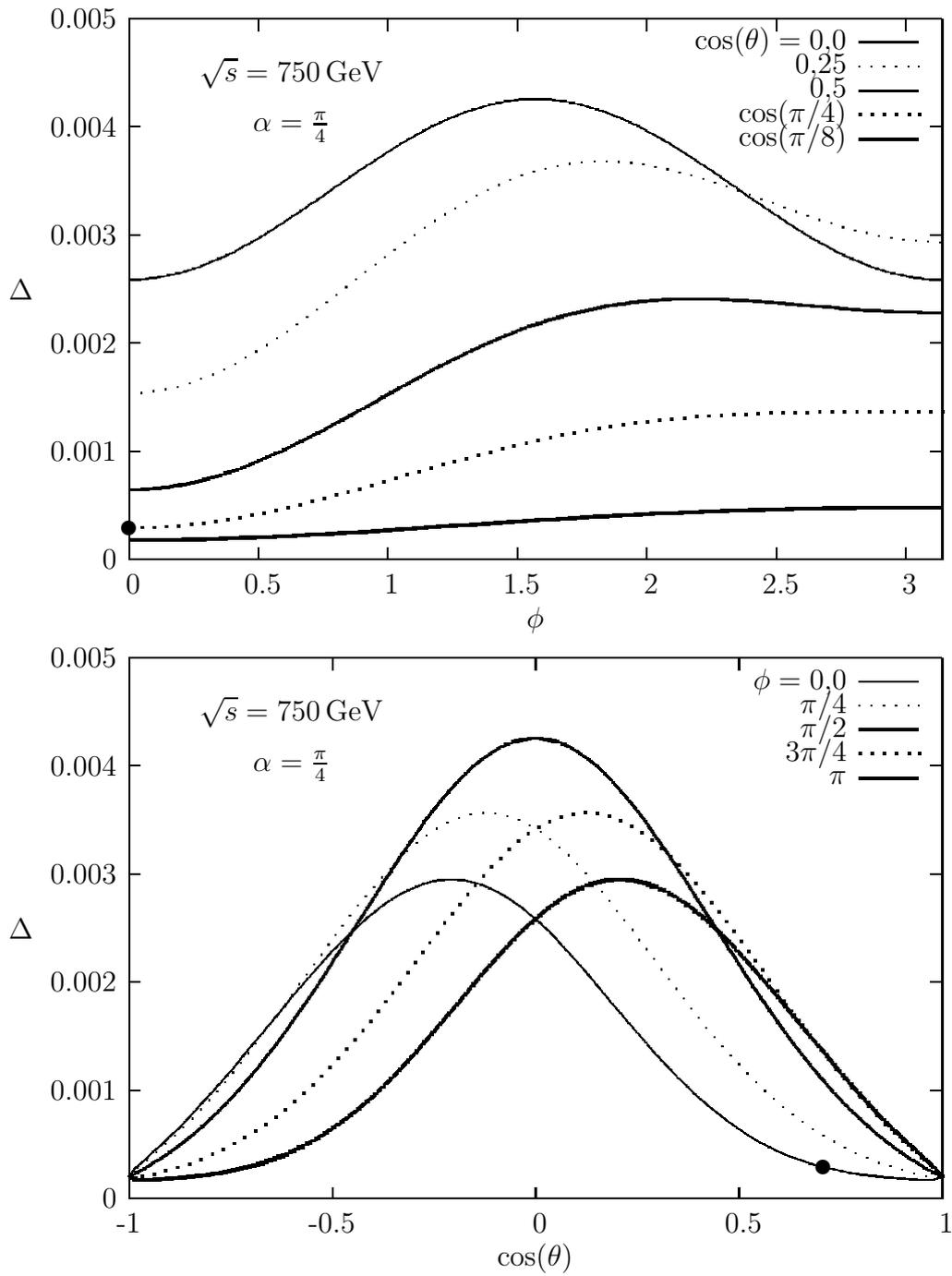


Abbildung 6.4: Δ (Gleichung (6.12)) für $\sqrt{s} = 750 \text{ GeV}$, $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$, $\alpha_s = 0,09$. Der Punkt deutet Streuung parallel zu \vec{B} an.

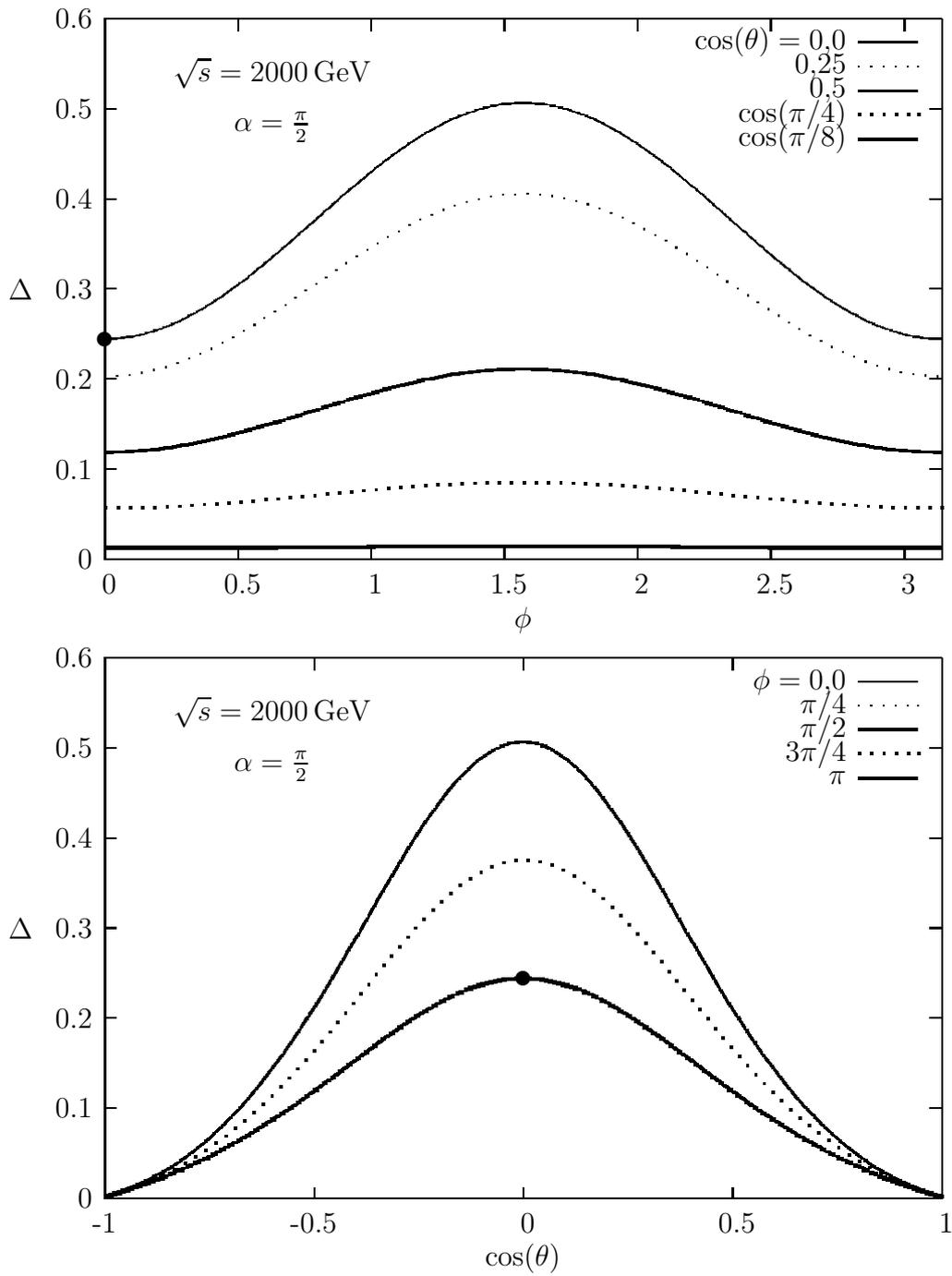


Abbildung 6.5: Δ (Gleichung (6.12)) für $\sqrt{s} = 2000 \text{ GeV}$, $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$, $\alpha_s = 0,09$.
Der Punkt deutet Streuung parallel zu \vec{B} an.

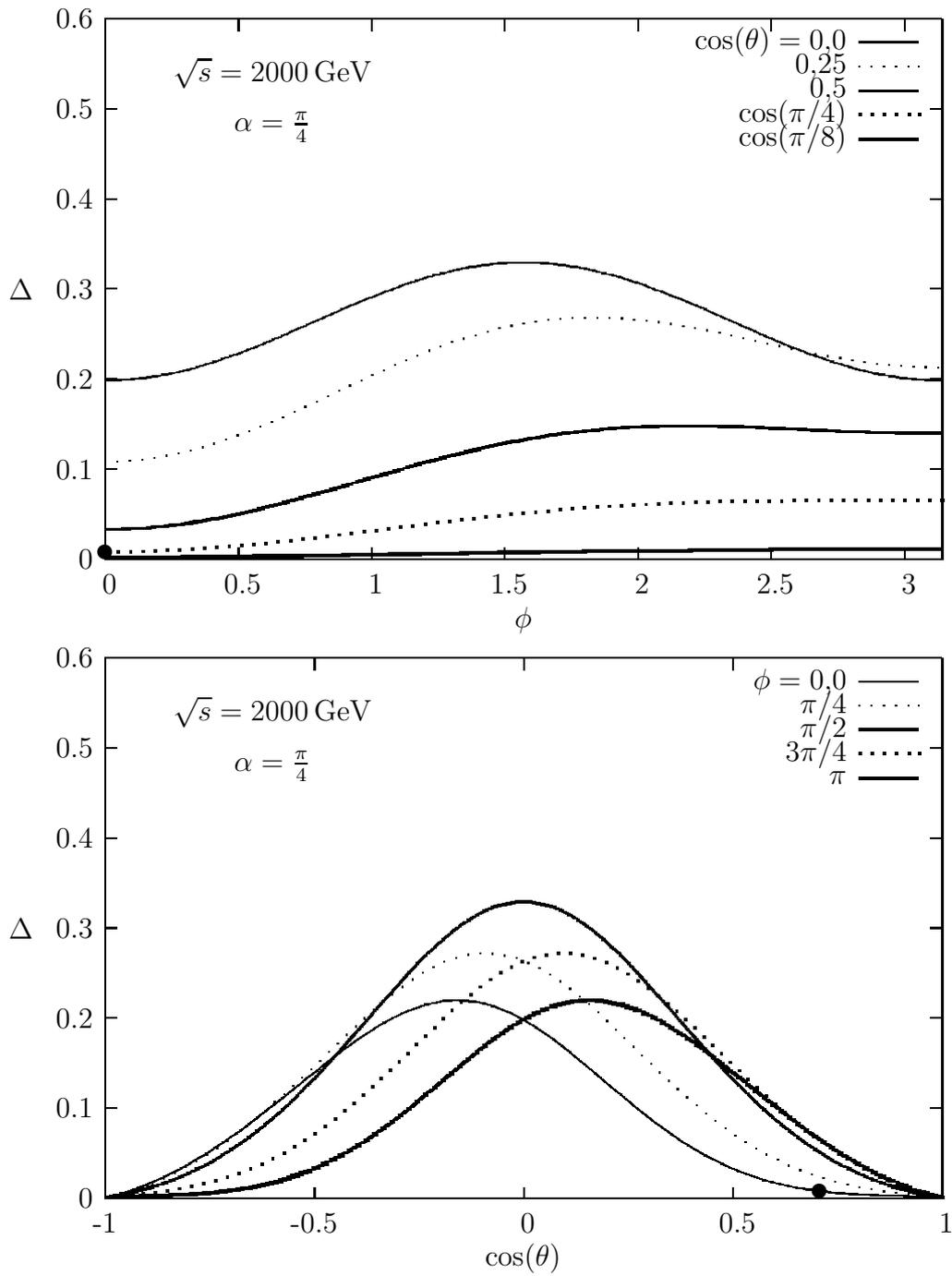


Abbildung 6.6: Δ (Gleichung (6.12)) für $\sqrt{s} = 2000 \text{ GeV}$, $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$, $\alpha_s = 0,09$. Der Punkt deutet Streuung parallel zu \vec{B} an.

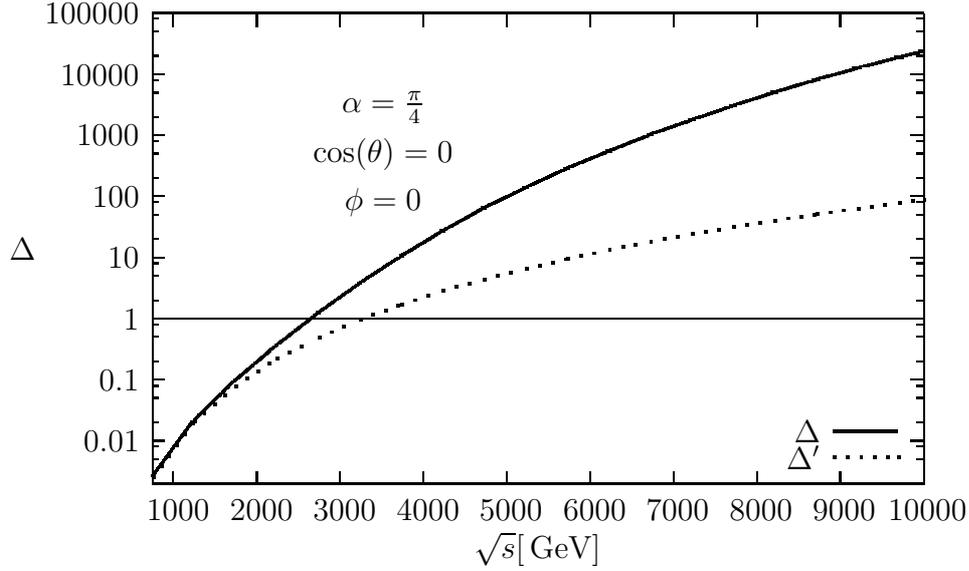


Abbildung 6.7: Der relative $\rho^{[0]}$ - bzw. alternative Wirkungsquerschnitt Δ bzw. Δ' (Gleichung (6.12)) für als Funktion von s bei $\cos(\theta) = 0$, $\phi = 0$. $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$, $\alpha_s = 0,09$.

Bei niedrigen Energien $\sqrt{s} < \Lambda_{\text{NC}}$ ist der alternative Wirkungsquerschnitt nicht vom $\rho^{[0]}$ -Wirkungsquerschnitt zu unterscheiden. Dies erkennt man an den Diagrammen 6.10 und 6.11, in denen die Größe

$$\tilde{\Delta} := \frac{\frac{d\sigma}{d\Omega} - \frac{d\sigma'}{d\Omega}}{\frac{d\sigma}{d\Omega}} \quad (6.13)$$

als Funktion von $\cos(\theta)$ dargestellt (die ϕ -Abhängigkeit von $\tilde{\Delta}$ ist gering). Sie misst die relative Abweichung des alternativen Wirkungsquerschnitts $\frac{d\sigma'}{d\Omega}$ vom $\rho^{[0]}$ -Wirkungsquerschnitt. Für niedrige Energien ist $\tilde{\Delta}$ gering, also stimmen $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und $\frac{d\sigma'}{d\Omega}$ überein. Der Unterschied von $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und $\frac{d\sigma'}{d\Omega}$ ist mit unter 0,01% sogar wesentlich geringer als die nichtkommutative Korrektur, d. h. in diesem Energiebereich gibt es keinen Unterschied zwischen den beiden Seiberg-Witten-Abbildungen. Für $\sqrt{s} = 5 \text{ TeV}$ ist jedoch $\tilde{\Delta} \rightarrow 1$, d. h. $\frac{d\sigma'}{d\Omega}$ ist wesentlich kleiner als $\frac{d\sigma}{d\Omega}$. Außerdem hängt $\frac{d\sigma'}{d\Omega}$ bei hohen Energien nicht so stark von α ab wie $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

Interessanterweise ist $\tilde{\Delta}$ für niedrige Energien symmetrisch zu $\cos(\theta) = 0$, obwohl $\alpha = \frac{\pi}{4}$ gewählt wurde.

Der absolute alternative Wirkungsquerschnitt ist im Diagramm 6.9 für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ unten eingezeichnet. Im Diagramm 6.12 ist die relative Korrektur dargestellt für $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Im Vergleich mit dem $\rho^{[0]}$ -Fall (Diagramm 6.5) erkennt man leichte Unterschiede in der Winkelverteilung. Die Winkelverteilungen sind ähnlicher für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (vgl. Diagramm G.3).

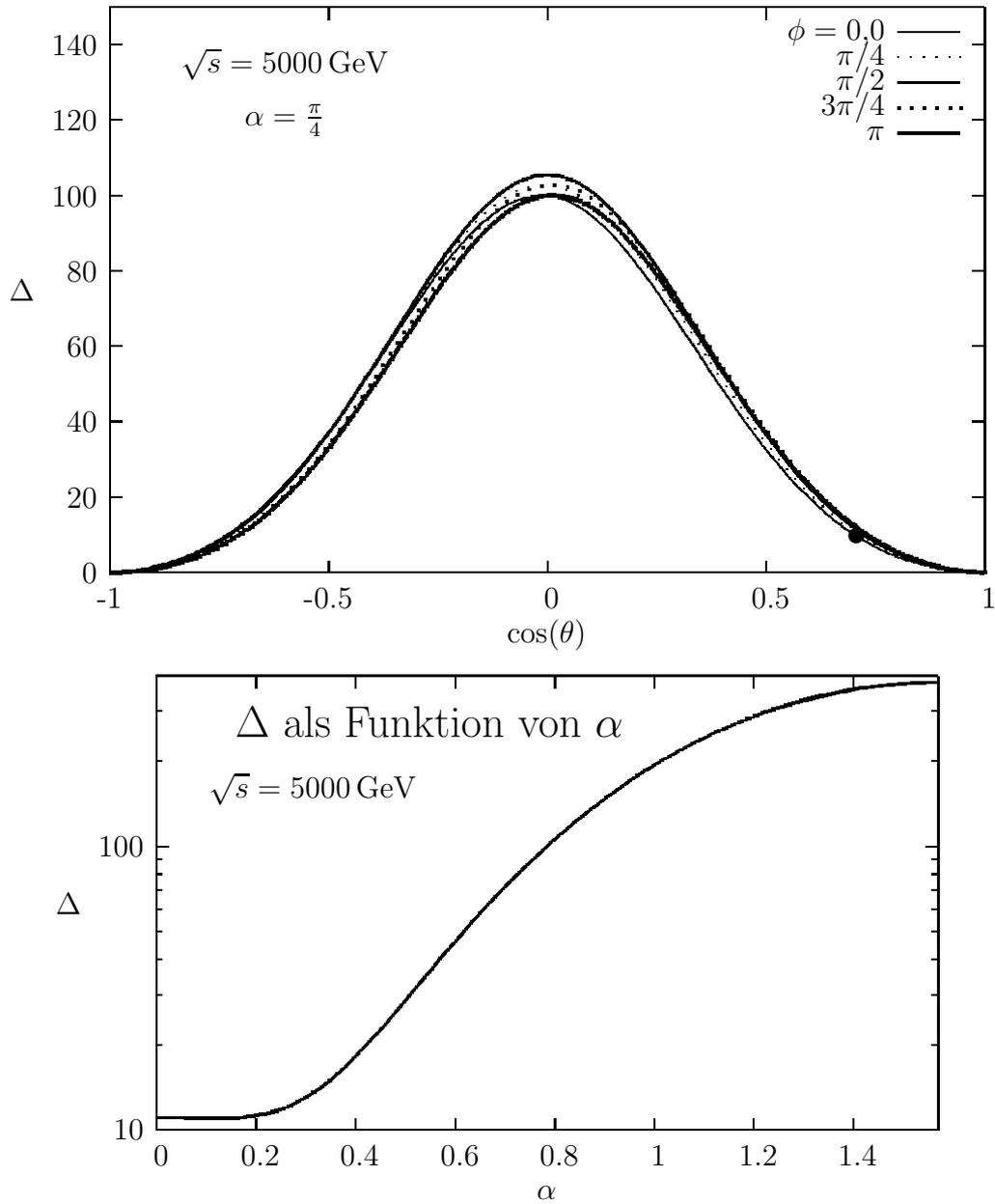


Abbildung 6.8: Oben: Δ (Gleichung (6.12)) für $\sqrt{s} = 5000$ GeV, $\Lambda_{\text{NC}} = 1$ TeV, $\alpha_s = 0,09$. Die Abhängigkeit von ϕ ist sehr gering. Unten: Δ ist stark von α abhängig. Allerdings bleibt die Form der Winkelabhängigkeit im Wesentlichen erhalten, lediglich der Betrag ändert sich wie dargestellt.

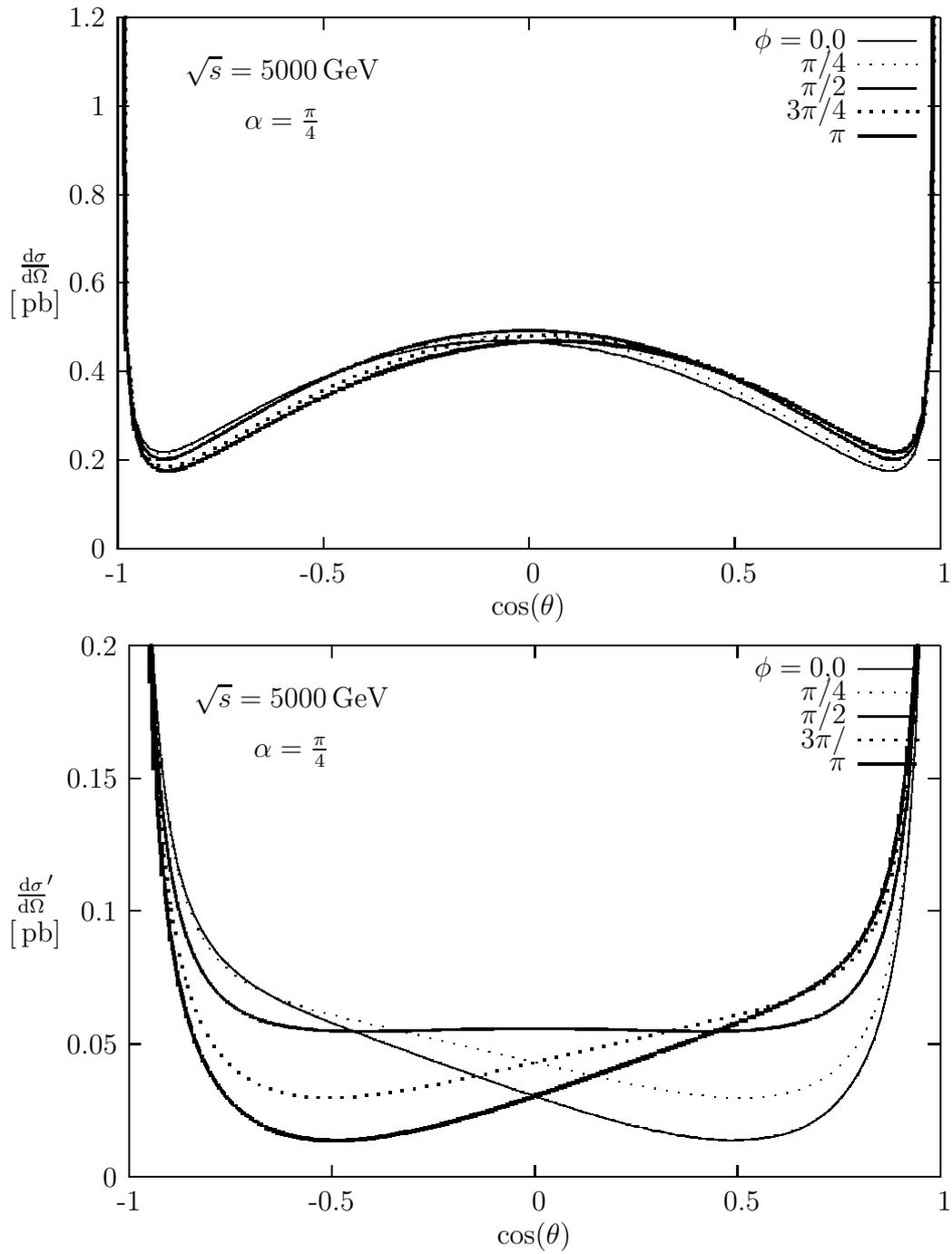


Abbildung 6.9: Der $\rho^{[0]}$ -Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und der alternative Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma'}{d\Omega}$ für $\sqrt{s} = 5000 \text{ GeV}$, $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und $\alpha_s = 0,09$.

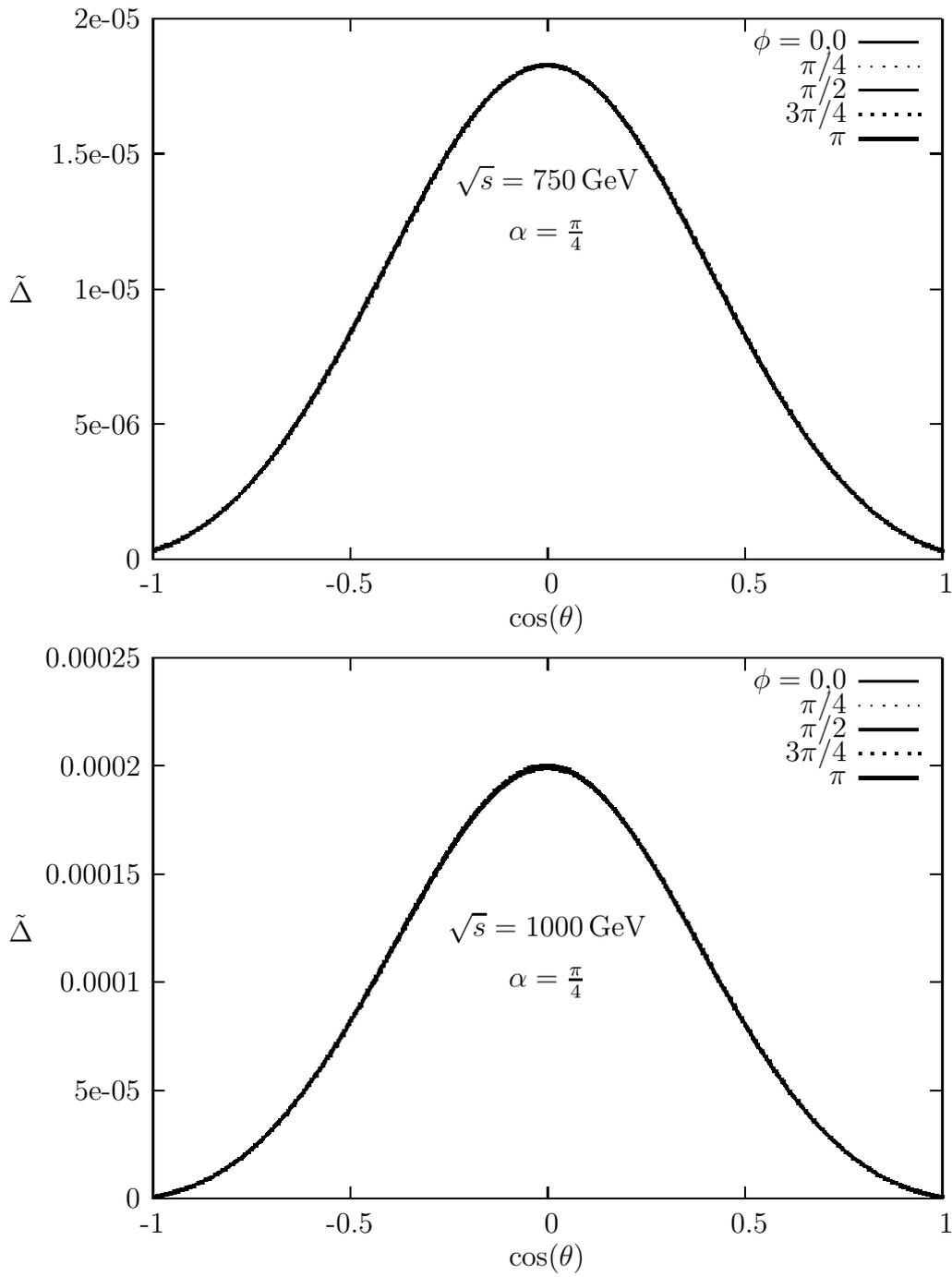


Abbildung 6.10: Die relative Abweichung des alternativen Wirkungsquerschnittes vom $\rho^{[0]}$ -Wirkungsquerschnitt $\tilde{\Delta}$ (Gleichung (6.13)). $\sqrt{s} = 5000 \text{ GeV}$, $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$, $\alpha_s = 0,09$.

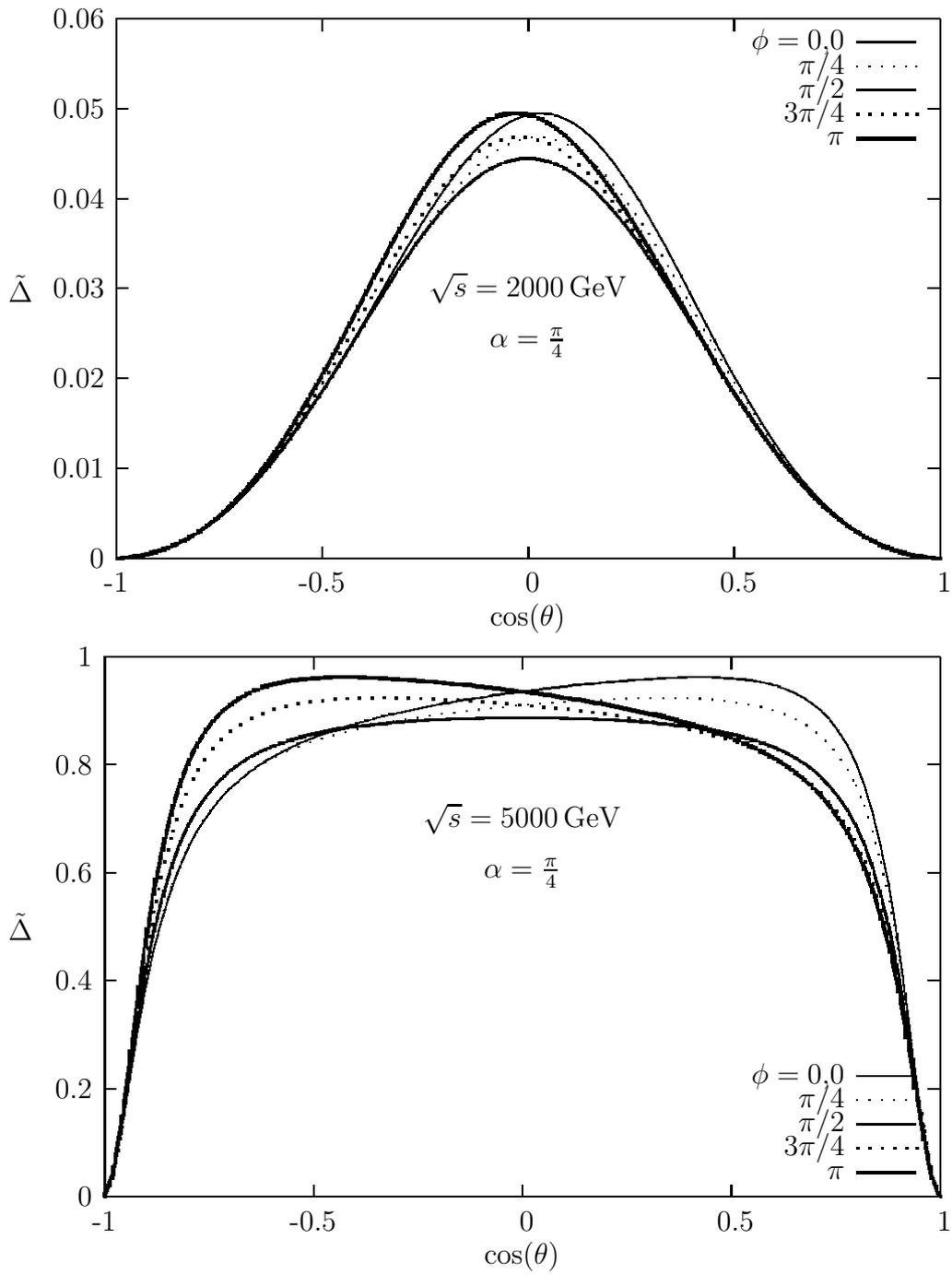


Abbildung 6.11: Die relative Abweichung des alternativen Wirkungsquerschnittes vom $\rho^{[0]}$ -Wirkungsquerschnitt $\tilde{\Delta}$ (Gleichung (6.13)). $\sqrt{s} = 5000$ GeV, $\Lambda_{\text{NC}} = 1$ TeV, $\alpha_s = 0,09$.

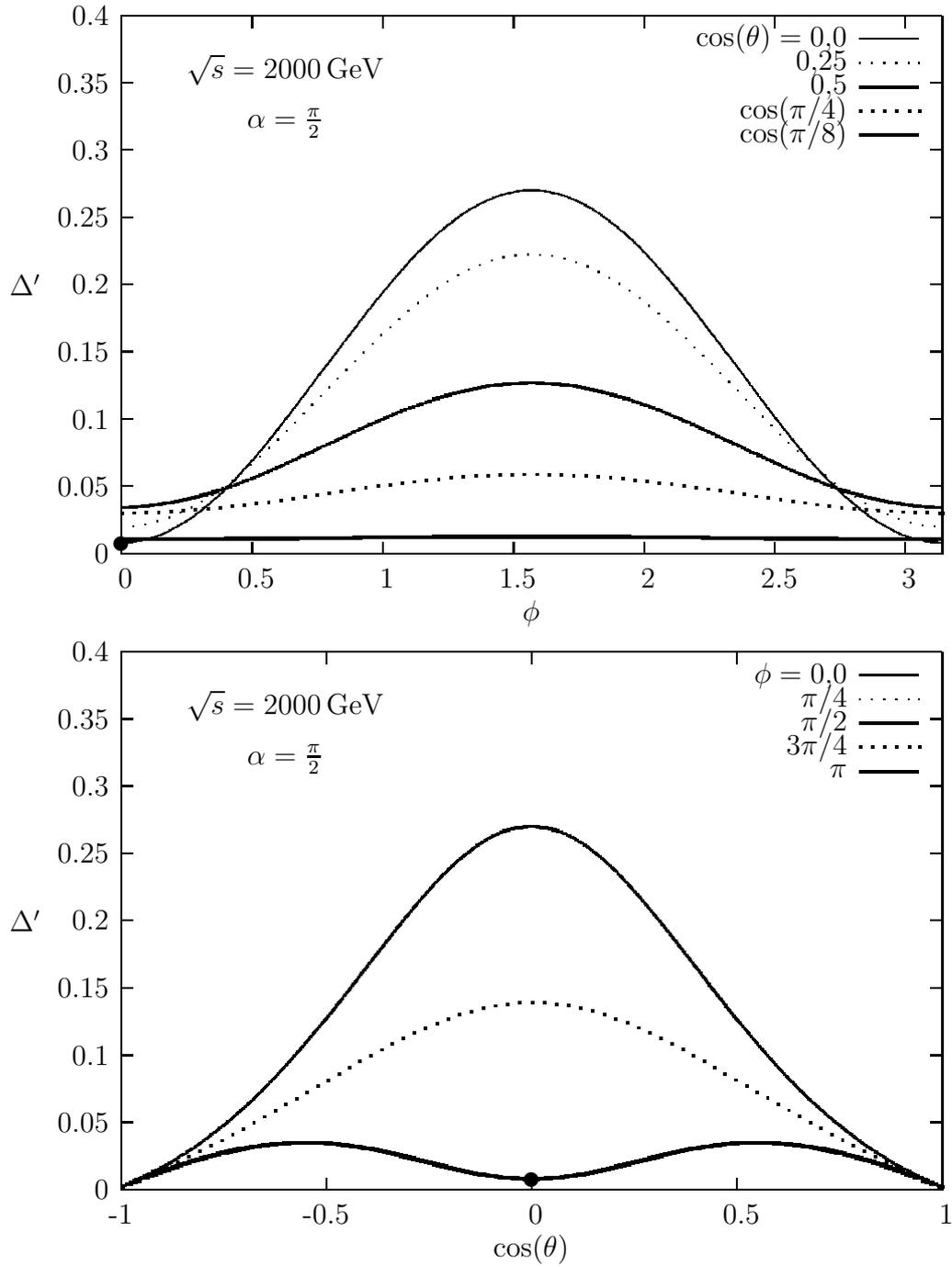


Abbildung 6.12: Δ' (Gleichung (6.12)) für $\sqrt{s} = 2000 \text{ GeV}$, $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$, $\alpha_s = 0,09$.

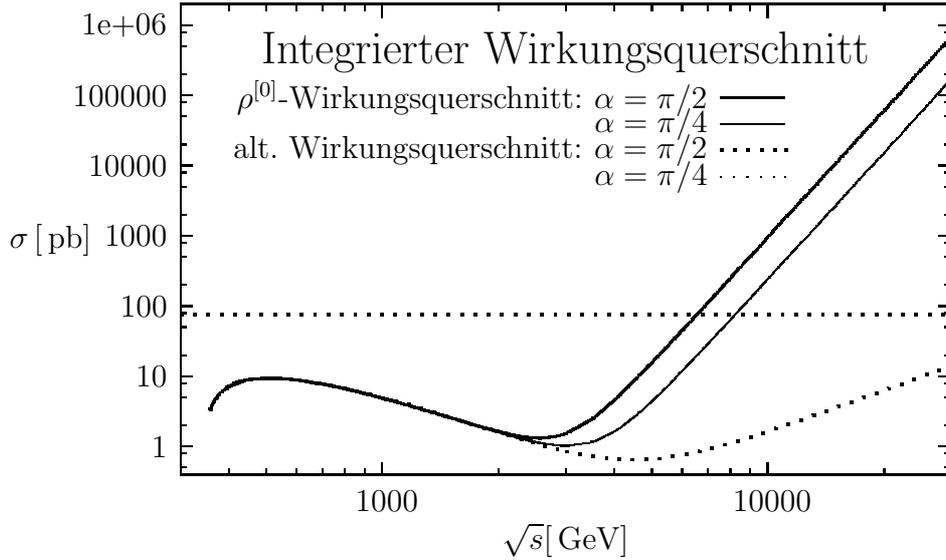


Abbildung 6.13: Die Energieabhängigkeit des nichtkommutativen Wirkungsquerschnitts in logarithmischer Auftragung. Die durchgezogenen Linien entsprechen dem $\rho^{[0]}$ -Wirkungsquerschnitt, die gestrichelten Linien dem alternativen Wirkungsquerschnitt. Die obere, dickere Linie gehört zu $\alpha = \frac{\pi}{2}$, die tiefere, feinere zu $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Im alternativen Fall sind ebenfalls beide Winkel eingezeichnet, doch es ist kein Unterschied zu erkennen. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist der Grenzwert des gemittelten alternativen Wirkungsquerschnitts $\frac{d\sigma'}{d\Omega}$ für $s \rightarrow \infty$ als waagrechte gepunktete Linie dargestellt. Dabei wurde $\Delta\theta = 1$ mrad gesetzt. Λ_{NC} ist 1 TeV, α_s ist 0,09.

Wie auch im $\rho^{[0]}$ -Fall ist die nichtkommutative Korrektur stets positiv. Für alle Energien ergibt sich in den Diagrammen die Hierarchie

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} > \frac{d\sigma'}{d\Omega} > \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{SM}}. \quad (6.14)$$

Im Anhang G befinden sich weitere Graphen. Abbildungen G.1 und G.2 zeigen die Winkelabhängigkeit bei $\alpha = \frac{\pi}{8}$. Da der Vektor \vec{B} näher an die Strahlachse rutscht, wird die Abhängigkeit vom Winkel ϕ geringer.

6.3.2 Energieabhängigkeit

In der Abbildung 6.13 ist der Wirkungsquerschnitt für $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ als Funktion der Energie \sqrt{s} aufgetragen. Dabei wurde der differentielle Wirkungsquerschnitt über den Winkelbereich

$$\phi \in [0, 2\pi], \quad \cos(\theta) \in [-0,95, +0,95]$$

integriert². Wie schon im vorherigen Unterabschnitt bemerkt, ist der alternative Wirkungsquerschnitt dabei vom Winkel α weitgehend unabhängig.

Sowohl der $\rho^{[0]}$ - als auch der alternative Wirkungsquerschnitt gehen für $s \rightarrow \infty$ gegen unendlich, und zwar mit der Potenz s^3 bzw. s^1 . Nach Froissart kann der totale Wirkungsquerschnitt in einer Theorie, deren Baumgraphennäherung unitär ist, jedoch maximal wie $\log(s)^2$ ansteigen[2].

Die Verletzung der Froissart-Schranke durch den differentiellen Wirkungsquerschnitt ist schon aus der abelschen Eichtheorie bekannt[25, 26]. Dort tritt die Verletzung jedoch nur in gewissen Richtungen auf, die *irregulär* genannt werden. Weicht man von diesen Richtungen ab, so erhält man für genügend große s einen beschränkten Wirkungsquerschnitt. Es zeigt sich sogar, dass sich das Problem löst, wenn man den differentiellen Wirkungsquerschnitt über einen kleinen Raumwinkelbereich mittelt. Durch diese Integration gewinnt man eine Potenz von s .

Es zeigt sich, dass im nichtabelschen Fall weitere irreguläre Richtungen hinzukommen. Während im abelschen Fall allerdings die irregulären Richtungen durch die Winkel zwischen einfallendem und ausfallendem Strahl sowie \vec{E} - und \vec{B} -Feld bestimmt sind, treten im nichtabelschen Fall irreguläre Richtungen auf, die den Winkel zwischen den beiden einfallenden Strahlen betreffen, der im Schwerpunktsystem konstant π ist. Diese irregulären Richtungen sind definiert durch $p\Theta q = 0$, und dies ist im Schwerpunktsystem (für $\vec{E} = 0$) unabhängig von s erfüllt.

Der problematische Beitrag zum Wirkungsquerschnitt stammt aus der Seiberg-Witten-Abbildung $\hat{A}_\mu^{[2]}$ und macht sich in den Feynmandiagrammen \mathcal{F}_C und \mathcal{F}_X bemerkbar. Betrachte zunächst den $\rho^{[0]}$ -Fall: Der relevante Term ist proportional zu

$$\frac{\not{\partial}\Theta^{\alpha\beta} \not{\partial}\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} p_{\alpha'}(\not{p} - \not{q})q_\beta \delta_\alpha^\mu \delta_{\beta'}^\nu \frac{\cos(p\Theta q) - 1 - C^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} [T_A, T_B] \quad (6.15)$$

Für $p\Theta q = 0$ ist $\frac{\cos(p\Theta q) - 1 - C^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} \equiv \frac{1}{2}$, also erhält man

$$\frac{1}{2} \frac{\not{\partial}\Theta^{\alpha\beta} \not{\partial}\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} p_{\alpha'}(\not{p} - \not{q})q_\beta \delta_\alpha^\mu \delta_{\beta'}^\nu [T_A, T_B] \quad (6.16)$$

Bei fester Richtung und vernachlässigbarer Masse ist jede Impulskomponente proportional zur Energie \sqrt{s} . Da die Normierung der Spinoren proportional zur Wurzel aus der Energie ist, erhält man insgesamt für das Matrixelement eine Potenz von $s^{\frac{3}{2}}s^{\frac{1}{2}} = s^2$. Der Wirkungsquerschnitt ist proportional zum Quadrat des Matrixelements und einem Phasenraumfaktor, der proportional zu $\frac{1}{s}$ ist. Also ist $\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim s^3$.

Man sieht auch, dass das Problem für $p\Theta q \neq 0$ nicht auftritt: In diesem Fall ist $\frac{\cos(p\Theta q) - 1 - C^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} \sim \frac{1}{s^2}$, d. h. der Wirkungsquerschnitt bleibt beschränkt. Der Grund, warum man im abelschen Fall keine Probleme hat, ist der Kommutator

²Für $|\cos(\theta)| \rightarrow 1$ erreicht der differentielle Wirkungsquerschnitt sein Maximum, für $m \rightarrow 0$ divergiert er sogar (dies liegt an den Fermionpropagatoren in den Diagrammen A und B). Andererseits ist der Punkt $|\cos(\theta)| \rightarrow 1$ experimentell nicht erreichbar. Daher ist es üblich, diesen Bereich auszusparen.

$[T_A, T_B]$. Es gibt war in $\hat{A}_\mu^{[2]}$ einen weiteren Term proportional zum Antikommutator, doch dieser ist

$$\sim \frac{\sin(p\Theta q) - S^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} \{T_A, T_B\} \quad (6.17)$$

und verschwindet für $p\Theta q = 0$.

Glücklicherweise ist für das Eichboson eine andere Seiberg-Witten-Abbildung bekannt, und in dieser tritt der problematische Term nicht auf. Allerdings kommt es zu einem ähnlichen, jedoch leicht entschärften Phänomen: Der Term in den Matrixelementen proportional zu

$$\frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \left(2(p_\alpha \delta_\beta^\nu \gamma^\mu + q_\alpha \delta_\beta^\mu \gamma^\nu) - \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \right) (\not{p} - \not{q}) \frac{\sin(p\Theta q)}{p\Theta q} \{T_A, T_B\} \quad (6.18)$$

steigt, nach den selben Argumenten wie oben, wegen $\frac{\sin(p\Theta q)}{p\Theta q} \equiv 1$ für große Energien linear an mit s . Daher ist auch der differentielle Wirkungsquerschnitt proportional zu s .

Wie erwähnt kann man zeigen, dass bei der Mittelung des differentiellen Wirkungsquerschnitts über einen kleinen Raumwinkelbereich für $s \rightarrow \infty$ eine Potenz von s gewonnen werden kann. Während es im abelschen Fall allerdings genügt, über die ausgehenden Impulse zu mitteln, ist es im nichtabelschen Fall nötig, auch über die Unschärfe der eingehenden Impulse zu mitteln. Nach dieser Mittelung erfüllt der alternative Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma'}{d\Omega}$ die Froissart-Schranke. Für die $\rho^{[0]}$ -Lösung genügt dies jedoch nicht³; es bleibt ein Anstieg mit s^2 .

Das Mitteln ergibt auch physikalisch Sinn, da in realen Beschleunigerexperimenten der einfallende Strahl stets eine gewisse Richtungsunschärfe hat. Dies muss erst recht berücksichtigt werden, wenn der Strahl aus zusammengesetzten Teilchen besteht, z. B. Protonen im Falle des LHC. Man kann sich auch überlegen, ab welcher Energie die experimentellen Gegebenheiten diese Mittelung erforderlich machen. Dies ist jedoch bei einer realistischen Unschärfe $\Delta\theta$ von etwa 1 mrad erst bei sehr hohen Energien der Fall.

Im nächsten Unterabschnitt 6.3.3 wird diese Mittelung unter vereinfachenden Annahmen ausgeführt. Sie liefert als Ergebnis den Hochenergielimes $\frac{d\sigma}{d\Omega}(s \rightarrow \infty)$, der nun aber von der Winkelunschärfe $\Delta\theta$ der Gluonen abhängt: Die Mittelung liefert einen Faktor proportional zu $\frac{1}{\Delta\theta s}$. Das Ergebnis liegt z. B. für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\Delta\theta = 1$ mrad bei

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega}(s \rightarrow \infty) = 76,9 \text{ pb.} \quad (6.19)$$

Dieses Ergebnis ist in Abbildung 6.13 als waagrechte gestrichelte Linie eingezeichnet.

Allerdings ist das Ergebnis – wie man auch am Diagramm erahnen kann – für $\frac{d\sigma}{d\Omega}(s \rightarrow \infty)$ erst ab sehr großen Energien gültig (etwa 100 TeV für $\Lambda_{\text{NC}} = 1$ TeV), die jenseits aller heute absehbaren Beschleunigerenergien sind. Für die theoretische Bestätigung der Froissart-Schranke ist die Rechnung allerdings ausreichend.

³Eine Ausnahme ist der abelsche Fall. Hier sind sowohl $\rho^{[0]}$ -Lösung als auch alternative Lösung linear in s für $s \rightarrow \infty$.

Streng genommen ist ein Anstieg des Wirkungsquerschnittes in Baumnäherung alleine noch kein Beweis dafür, dass die Theorie nicht unitär sein kann. Schließlich gilt die Froissart-Schranke nur für den totalen Wirkungsquerschnitt. Es ist zu vermuten, dass die höheren Ordnungen in g des Wirkungsquerschnittes Terme enthalten, die ein ähnliches polynomiales Verhalten in s enthalten: In den höheren Ordnungen in g treten ebenfalls höhere Ordnungen in $\Theta^{\mu\nu}$ auf, und obige Rechnung zeigt, dass jede Potenz von $\Theta^{\mu\nu}$ einen Faktor \sqrt{s} bringen kann. Selbst wenn g also für alle Energien klein ist, heißt dies, dass für große Energien Terme höherer Ordnung nicht mehr vernachlässigbar sind.

Umgekehrt bedeutet dies natürlich, dass die Bestätigung der Froissart-Schranke für den alternativen Wirkungsquerschnitt in der Baumnäherung keine Garantie liefert, dass die Theorie tatsächlich unitär ist. Dennoch ist es wünschenswert, in jeder Ordnung eine Seiberg-Witten-Abbildung zu finden, die einen beschränkten Wirkungsquerschnitt liefert.

Schließlich ist noch zu bemerken, dass auch das Verhalten von g in Abhängigkeit der Energie in der nichtkommutativen Theorie nicht bekannt ist. In der kommutativen Theorie ist für große Energien $g(s) \sim 1/\log(s)$, d. h. das polynomiale Anwachsen der Wirkungsquerschnitte wird dadurch nicht verhindert. Trotzdem würde die Berücksichtigung einer solchen Abhängigkeit zu einem Abfall des gemittelten alternativen Wirkungsquerschnittes für große Energien führen.

6.3.3 Mittelung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

In diesem Unterabschnitt soll der Grenzwert des differentiellen Wirkungsquerschnitts $\frac{d\sigma}{d\Omega}(s \rightarrow \infty)$ für hohe Energien unter Berücksichtigung der endlichen Winkelverteilung der einfallenden Gluonen berechnet werden (vgl. vorhergehender Unterabschnitt 6.3.2). Dabei wird die alternative Seiberg-Witten-Abbildung verwendet.

Wie gehabt sei $\vec{E} = 0$. Für kleine Auslenkungen θ_p, θ_q von \vec{p} und \vec{q} von der z -Richtung schreibe

$$\vec{p} = +E_p \begin{pmatrix} \sin(\theta_p) \cos(\phi_p) \\ \sin(\theta_p) \sin(\phi_p) \\ \cos(\theta_p) \end{pmatrix} \doteq +E_p \begin{pmatrix} \theta_p \cos(\phi_p) \\ \theta_p \sin(\phi_p) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

$$\vec{q} = -E_q \begin{pmatrix} \sin(\theta_q) \cos(\phi_q) \\ \sin(\theta_q) \sin(\phi_q) \\ \cos(\theta_q) \end{pmatrix} \doteq -E_q \begin{pmatrix} \theta_q \cos(\phi_q) \\ \theta_q \sin(\phi_q) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Im Ruhesystem gilt $E_q = E_p = \sqrt{s}/2$. Wenn man allerdings über die endliche Winkelverteilung der einfallenden Strahlen mittelt, so sollte auch die endliche Energieverteilung berücksichtigt werden. Dies ist gerade bei Gluonen, die in den Protonen

eine gewisse Energieverteilung besitzen, von Bedeutung. Dann gilt

$$\vec{p} \times \vec{q} \doteq E_p E_q \begin{pmatrix} \theta_q \sin(\phi_q) - \theta_p \sin(\phi_p) \\ \theta_p \cos(\phi_p) - \theta_q \cos(\phi_q) \\ 0 \end{pmatrix},$$

und mit

$$\vec{B} = B \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ 0 \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

folgt

$$p\Theta q \doteq \frac{\vartheta}{2} E_p E_q B \sin(\alpha) (\theta_p \sin(\phi_p) - \theta_q \sin(\phi_q)). \quad (6.23)$$

Nun soll der differentielle Wirkungsquerschnitt über alle Winkel $|\theta_p|, |\theta_q| < \Delta\theta$ gemittelt werden. Dies soll bei so großen Energien geschehen, dass sämtliche Terme vernachlässigbar sind, außer dem Term proportional zu $\left(\frac{\sin(p\Theta q)}{p\Theta q}\right)^2$. Die Abhängigkeit des Proportionalitätsfaktors von den Winkeln wird vernachlässigt⁴. Betrachte dann

$$\begin{aligned} I_{\Delta\theta} &:= \frac{1}{(\pi\Delta\theta^2)^2} \int_0^{\Delta\theta} d\theta_p \int_0^{\Delta\theta} d\theta_q \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi_p \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi_q \sin(\theta_p) \sin(\theta_q) \left(\frac{\sin(p\Theta q)}{p\Theta q}\right)^2 \\ &\doteq \frac{1}{(\pi\Delta\theta^2)^2} \int_0^{\Delta\theta} d\theta_p \int_0^{\Delta\theta} d\theta_q \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi_p \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi_q \theta_p \theta_q \left(\frac{\sin(p\Theta q)}{p\Theta q}\right)^2. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Durch

$$\delta_{\frac{1}{s'}}(x) := \frac{s'}{\pi} \left(\frac{\sin(s'x)}{(s'x)}\right)^2 \quad (6.25)$$

ist für $s' \rightarrow \infty$ eine Approximation der Dirac'schen δ -Funktion gegeben. Das Integral $I_{\Delta\theta}$ soll nun für so große Energien ausgewertet werden, dass $\left(\frac{\sin(p\Theta q)}{p\Theta q}\right)^2$ durch eine δ -Funktion approximiert werden kann. Dann gilt

$$\begin{aligned} I_{\Delta\theta} &\approx \frac{\pi}{E_p E_q (\pi\Delta\theta^2)^2} \int_0^{\Delta\theta} d\theta_p \int_0^{\Delta\theta} d\theta_q \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi_p \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi_q \theta_p \theta_q \delta\left(\frac{p\Theta q}{E_p E_q}\right) \\ &= \frac{4\pi}{E_p E_q (\pi\Delta\theta^2)^2} \int_0^{\Delta\theta} d\theta_p \int_0^{\Delta\theta} d\theta_q \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\phi_p \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\phi_q \theta_p \theta_q \\ &\quad \delta\left(\frac{\theta}{2} B \sin(\alpha) (\theta_p \sin(\phi_p) - \theta_q \sin(\phi_q))\right) \end{aligned}$$

⁴Der Proportionalitätsfaktor enthält Terme proportional zu $p\Theta\epsilon(q)$ und $q\Theta\epsilon(p)$, wobei $\epsilon(p)$ und $\epsilon(q)$ die Polarisationsvektoren der beiden Gluonen sind. Diese relative Änderung dieser Faktoren für kleine θ_p und θ_q ist vernachlässigbar, solange diese Faktoren nicht verschwinden. Falls diese Faktoren aber verschwinden, gibt es auch kein Problem mit dem Anstieg des Wirkungsquerschnitts.

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\pi}{E_p E_q \frac{\theta}{2} B \sin(\alpha) (\pi \Delta \theta^2)^2} \int_0^{\Delta \theta} d\theta_p \int_0^{\Delta \theta} d\theta_q \int_{-1}^{+1} ds_p \int_{-1}^{+1} ds_q \\
&\quad \frac{\theta_p}{\sqrt{1-s_p^2}} \frac{\theta_q}{\sqrt{1-s_q^2}} \delta(\theta_p s_p - \theta_q s_q). \quad (6.26)
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Integration über ϕ_p und ϕ_q zunächst auf das halbe Intervall reduziert und anschließend in eine Integration über $s_p := \sin(\phi_p)$ bzw. $s_q := \sin(\phi_q)$ umgewandelt.

Werte nun die δ -Funktion aus und eliminiere s_p :

$$\theta_p s_p - \theta_q s_q = 0 \implies s_p = \frac{\theta_q}{\theta_p} s_q \quad (6.27)$$

Dabei ändert sich der Integrationsbereich der anderen Variablen:

$$s_p \in [-1, +1] \implies |\theta_q s_q| \leq \theta_p \implies |\theta_p| \in [|\theta_q s_q|, \Delta \theta] \quad (6.28)$$

Erhalte also

$$\begin{aligned}
I_{\Delta \theta} &\approx \frac{4\pi}{E_p E_q \frac{\theta}{2} B \sin(\alpha) (\pi \Delta \theta^2)^2} \int_0^{\Delta \theta} d\theta_q \int_{-1}^{+1} ds_q \int_{|\theta_q s_q|}^{\Delta \theta} d\theta_p \frac{\theta_p}{\sqrt{1-\frac{\theta_q^2}{\theta_p^2} s_q^2}} \frac{\theta_q}{\sqrt{1-s_q^2}} \frac{1}{\theta_p} \\
&= \frac{8\pi}{E_p E_q \frac{\theta}{2} B \sin(\alpha) (\pi \Delta \theta^2)^2} \int_0^{\Delta \theta} d\theta_q \int_0^{+1} ds_q \int_{\theta_q s_q}^{\Delta \theta} d\theta_p \frac{\theta_p}{\sqrt{\theta_p^2 - \theta_q^2 s_q^2}} \frac{\theta_q}{\sqrt{1-s_q^2}}, \quad (6.29)
\end{aligned}$$

wobei die Symmetrie des Integranden bezüglich s_q ausgenutzt wurde, um die Betragsstriche zu entfernen. Das Integral über θ_p liefert

$$\int_{\theta_q s_q}^{\Delta \theta} d\theta_p \frac{\theta_p}{\sqrt{\theta_p^2 - \theta_q^2 s_q^2}} = \sqrt{\theta_p^2 - \theta_q^2 s_q^2} \Big|_{\theta_q s_q}^{\Delta \theta} = \sqrt{\Delta \theta^2 - \theta_q^2 s_q^2}. \quad (6.30)$$

Damit ist

$$I_{\Delta \theta} \approx \frac{8\pi}{E_p E_q \frac{\theta}{2} B \sin(\alpha) (\pi \Delta \theta^2)^2} \int_0^{\Delta \theta} d\theta_q \int_0^{+1} ds_q \frac{\theta_q}{\sqrt{1-s_q^2}} \sqrt{\Delta \theta^2 - \theta_q^2 s_q^2}. \quad (6.31)$$

Das Integral über θ_q lässt sich nun ausführen:

$$\int_0^{\Delta \theta} d\theta_q \theta_q \sqrt{\Delta \theta^2 - \theta_q^2 s_q^2} = -\frac{1}{3} (\Delta \theta^2 - \theta_q^2 s_q^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\Delta \theta} = \frac{\Delta \theta^3}{3} (1 - (1 - s_q^2)^{\frac{3}{2}}). \quad (6.32)$$

Damit erhält man schließlich

$$I_{\Delta \theta} \approx \frac{8\pi}{E_p E_q \frac{\theta}{2} B \sin(\alpha) (\pi \Delta \theta^2)^2} \frac{\Delta \theta^3}{3} \int_0^{\Delta \theta} d\theta_q \int_0^{+1} ds_q \left(\frac{1}{\sqrt{1-s_q^2}} - (1-s_q^2) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{3\pi} \frac{1}{\Delta\theta E_p E_q \frac{\theta}{2} B \sin(\alpha)} \left(\arcsin s_q \Big|_0^1 - 1 + \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{8}{3\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{\Delta\theta E_p E_q \frac{\theta}{2} B \sin(\alpha)} \\
&= \left(\frac{4}{3} - \frac{16}{9\pi} \right) \frac{1}{\Delta\theta E_p E_q \frac{\theta}{2} B \sin(\alpha)}. \tag{6.33}
\end{aligned}$$

Dieses letzte Ergebnis soll $I'_{\Delta\theta}$ heißen.

Also führt die Mittelung zu dem benötigten Faktor $\frac{1}{E_p E_q} \approx \frac{4}{s}$. Allerdings ist diese Rechnung sehr stark vereinfacht, daher gelten die Approximationen erst bei sehr hohen Energien. Vor allem die Ersetzung von $\left(\frac{\sin(p\Theta q)}{p\Theta q}\right)^2$ durch die δ -Funktion ist sehr einschränkend, denn sie verlangt, dass s so groß ist, dass $\left(\frac{\sin(p\Theta q)}{p\Theta q}\right)^2 \approx 0$ für $\theta_p, \theta_q > \Delta\theta$. Eine Abschätzung für den Gültigkeitsbereich der obigen Rechnung erhält man, wenn man untersucht, für welche $s \approx 4E_p E_q I'_{\Delta\theta} < 1$ wird, denn aus Gleichung (6.24) folgt leicht $I_{\Delta\theta} < 1$. Man berechnet

$$s \geq s_0 = 4 \left(\frac{4}{3} - \frac{16}{9\pi} \right) \frac{1}{\Delta\theta \frac{\theta}{2} B \sin(\alpha)} \geq \left(\frac{4}{3} - \frac{16}{9\pi} \right) \frac{4}{\Delta\theta \frac{\theta}{2} B} \approx (56 \text{ TeV})^2, \tag{6.34}$$

für $\Delta\theta = 1 \text{ mrad}$.

Ein Problem bei einer genaueren Abschätzung für $s < 60 \text{ TeV}$ ist die Abhängigkeit der anderen Terme von den Streuwinkeln: Wenn s so groß ist, dass die Näherung angebracht ist, oszilliert $\left(\frac{\sin(p\Theta q)}{p\Theta q}\right)^2$ im Intervall $\theta_p, \theta_q < \Delta\theta$ sehr stark. Auch die anderen Terme fangen dann jedoch an zu oszillieren und müssen gemittelt werden.

Da die Mittelung erst bei sehr hohen Energien nötig wird, ist sie für die Auswertung von Experimenten bei Werten von $\Delta\theta \approx 1 \text{ mrad}$ nicht von Bedeutung. Die Bedeutung der Mittelung liegt alleine in der theoretischen Erkenntnis, dass der berechnete Wirkungsquerschnitt auf diese Weise doch die Froissart-Schranke erfüllt.

7 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden die ersten Ordnungen der Seiberg-Witten-Abbildungen einer nichtkommutativen Yang-Mills-Theorie in einer Entwicklung in Homogenität der Eichbosonen mit Hilfe eines Algorithmus von Barnich et al.[22] berechnet. Für das Eichboson wurde ein Korrekturterm bestimmt, und jeweils zwei für den Eichparameter und das Materiefeld. Außerdem wurde für das Eichboson eine weitere alternative Seiberg-Witten-Abbildung angegeben. Im Unterschied zur alternativen Lösung wird die erste Lösung $\rho^{[0]}$ -Lösung genannt werden.

Aus den Seiberg-Witten-Abbildungen wurden die Feynmanregeln abgeleitet, wobei die verschiedenen Seiberg-Witten-Abbildungen für das Eichboson zu jeweils zwei verschiedenen Regeln für den Drei-Eichbosonen-Vertex und den Kontaktvertex führen. Zu Herleitung der Regeln ist es nötig, eine Eichfixierung zu wählen. Die Feynmanregeln wurden für zwei verschiedene Eichfixierungen angegeben.

Mit Hilfe der Feynmanregeln wurde der Wirkungsquerschnitt $gg \rightarrow q\bar{q}$ der nichtkommutativen QCD in Baumnäherung untersucht. Zunächst wurde die Unabhängigkeit des Ergebnis von der Eichfixierung und vom Eichparameter λ gezeigt. Anschließend wurden die Winkelverteilung des differentiellen Wirkungsquerschnitts und die Energieabhängigkeit des integrierten Wirkungsquerschnitts analysiert.

Für niedrige Energien bis in den Bereich der Nichtkommutativitätsskala $\sqrt{s} \approx \Lambda_{\text{NC}}$ ist der Beitrag der Nichtkommutativität klein (weniger als ein Prozent) aber strikt positiv. Auch der relative Unterschied zwischen den beiden verschiedenen Seiberg-Witten-Abbildungen ist in diesem Bereich gering.

Erst ab ca. $2\Lambda_{\text{NC}}$ wird der nichtkommutative Beitrag bedeutend. Gleichzeitig gibt sich im Hochenergieverhalten ein gravierender Unterschied zwischen den beiden verschiedenen Seiberg-Witten-Abbildungen: Während der differentielle Wirkungsquerschnitt der $\rho^{[0]}$ -Lösung für große Energien $\sqrt{s} \gg \Lambda_{\text{NC}}$ wie s^3 steigt, liefert die alternative Seiberg-Witten-Abbildung eine Asymptotik des Wirkungsquerschnitts $\sim s$. Beides widerspricht der sogenannten Froissart-Schranke, die besagt, dass der Wirkungsquerschnitt einer unitären Theorie mit der Energie nicht schneller als $\log(s)^2$ ansteigen darf.

Es zeigt sich, dass die Unbeschränktheit des Wirkungsquerschnitts für $s \rightarrow \infty$, wie auch im abelschen Fall, mit bestimmten *irregulären Punkten* im Phasenraum zusammenhängen, d. h. die Unbeschränktheit tritt auf bei bestimmten Konstellationen zwischen ein- und ausfallenden Strahlen und der Nichtkommutativität. Im Vergleich zum abelschen Fall gibt es jedoch zusätzliche irreguläre Punkte, die alleine von dem Winkel zwischen den beiden einfallenden Strahlen abhängen, und Prozesse, die bei $\vec{E} = 0$ im Schwerpunktssystem ablaufen liegen automatisch auf einem irregulären Punkt.

Im Falle der alternativen Seiberg-Witten-Abbildung lässt sich die Theorie retten, wenn man die endliche Richtungsunschärfe der einfallenden Gluonen berücksichtigt. Die Mittelung über die einfallenden Gluonen liefert insgesamt für den unbeschränkten Term einen Faktor $1/s$ und führt damit im Limes $s \rightarrow \infty$ zu einem beschränkten Wirkungsquerschnitt. Die Energieskala, ab der diese Mittelung notwendig wird, liegt allerdings sehr hoch ($\approx 60\Lambda_{\text{NC}}$). Daher ist die Tatsache, dass die Theorie die Froissart-Schranke erfüllt, experimentell nicht relevant, sondern lediglich theoretisch interessant.

Auch beim $\rho^{[0]}$ -Wirkungsquerschnitt lässt sich durch Mittelung in der Asymptotik eine Potenz von s gewinnen, doch dies reicht nicht aus: Es bleibt ein Anstieg mit s^2 . Es zeigt sich also, dass die Wahl der Seiberg-Witten-Abbildung eine gravierende Auswirkung auf die physikalischen Eigenschaften einer Theorie haben kann.

Der logische nächste Schritt wäre die genaue Untersuchung der physikalischen Bedeutung der Mehrdeutigkeiten der Seiberg-Witten-Abbildung. Es hat sich gezeigt, dass die Seiberg-Witten-Gleichungen (also die Eichäquivalenzbedingung) nicht genügen, um die Theorie eindeutig festzulegen. Lediglich im Bereich niedriger Energien $\sqrt{s} < \Lambda_{\text{NC}}$ stimmen die Theorien überein, d. h. als effektive Theorie für niedrige Energien ist das Modell eindeutig definiert. Ein mögliches zusätzliches Auswahlkriterium könnte nun die Unitarität sein. Es bleibt die Frage offen, in welchen anderen Eigenschaften sich die Modelle für verschiedene Seiberg-Witten-Abbildungen unterscheiden, und wie zwischen den verschiedenen Möglichkeiten unterschieden werden kann.

Ein möglicher Zwischenschritt zur Klärung dieser Frage wäre die Suche nach alternativen Seiberg-Witten-Abbildungen auch für den Eichparameter und das Materiefeld. Außerdem wäre es wünschenswert, eine zusätzliche Ordnung für die Seiberg-Witten-Abbildung des Eichbosons zu kennen. Damit hätte man alle Feynmanregeln zur Verfügung, um sämtliche zwei-nach-zwei-Prozesse der nichtkommutativen QCD in Baumnäherung zu untersuchen.

A Notation und Konventionen

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Konventionen und Notationen in den Rechnungen und Formeln zusammengefasst werden. Für die Wahl der Vorzeichen in der Definition der Yang-Mills-Theorie siehe Abschnitt 2.1. Die Multiindexschreibweise wird im Unterabschnitt 4.3.1 erklärt.

Wie in der Hochenergiephysik üblich, werden Einheiten mit $\hbar = c = 1$ gewählt.

Zur Unterscheidung von nichtkommutativen Größen und ihren kommutativen Analoga wird die Hutnomenklatur verwendet: Nichtkommutative Größen $\hat{A}, \hat{\Psi}, \hat{\Lambda}$ unterscheiden sich durch ein $\hat{}$ von den entsprechenden Größen der kommutativen Theorie A, Ψ, Λ .

Die gesamte Eichgruppe der kommutativen Yang-Mills-Theorie wird mit \mathcal{G} bezeichnet, die lokale Eichgruppe mit G (vgl. Abschnitt 2.1). Die entsprechenden Lie-Algebren sind \mathfrak{G} und \mathfrak{g} . Die einhüllenden Algebren werden durch $\bar{\mathfrak{G}}$ bzw. $\bar{\mathfrak{g}}$ gekennzeichnet. Die entsprechenden Algebren der deformierten nichtkommutativen Theorie tragen einen Hut $\hat{}$, z. B. $\hat{\mathfrak{G}}$.

Die Kommutatorklammer $[\cdot, \cdot]$ sowie die *-Kommutatorklammer $[\cdot; \cdot]$ stehen für einen graduierten Kommutator

$$[A; B] := A * B - (-1)^{|A||B|} B * A, \quad (\text{A.1})$$

mit

$$|X| := \begin{cases} 0 & \text{für bosonische Größen } X, \\ 1 & \text{für fermionische Größen } X. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Weiter sei

$$[T_A, T_B]_l = T_A T_B - (-1)^l T_B T_A = \begin{cases} [T_A, T_B] & \text{wenn } l \text{ gerade ist} \\ \{T_A, T_B\} & \text{wenn } l \text{ ungerade ist} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Für die Basismatrizen T_A der betrachteten Algebra sollen die folgenden Beziehungen gelten:

$$\text{Tr } T_A T_B = \frac{1}{2} \delta_{AB} \quad (\text{A.4a})$$

$$[T_A, T_B] = i f_{AB}{}^C T_C \quad (\text{A.4b})$$

$$\text{Tr } T_C \{T_A, T_B\} = \frac{1}{2} d_{AB}{}^C \quad (\text{A.4c})$$

Für die konkreten Berechnungen des Wirkungsquerschnitts, d. h. im Falle der $SU(3)$ als Eichgruppe, sind die Generatoren z. B. gegeben über die Gell-Man-Matrizen:

$$T_A = \frac{1}{2}\lambda_A$$

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Die Strukturkonstanten f_{AB}^C sind völlig antisymmetrisch und insbesondere zyklisch:

$$f_{AB}^C = f_{BC}^A = f_{CA}^B. \quad (\text{A.6})$$

Weiter gilt

$$\{T_A, T_B\} = \frac{1}{3}\delta_{AB}\mathbf{1} + d_{AB}^C T_C \quad (\text{A.4c}')$$

Die Wirkung des Differentialoperators \wedge_{12} auf Produkte zweier Funktionen ist

$$\wedge_{12}AB := \frac{\vartheta}{2}\Theta^{\mu\nu}\partial_\mu A \partial_\nu B. \quad (\text{A.7})$$

Analog wirken \wedge_{12} , \wedge_{13} und \wedge_{23} über

$$\wedge_{12}ABC = \frac{\vartheta}{2}\Theta^{\mu\nu}\partial_\mu A \partial_\nu B C. \quad (\text{A.8a})$$

$$\wedge_{13}ABC = \frac{\vartheta}{2}\Theta^{\mu\nu}\partial_\mu A B \partial_\nu C. \quad (\text{A.8b})$$

$$\wedge_{23}ABC = A \frac{\vartheta}{2}\Theta^{\mu\nu}\partial_\mu B \partial_\nu C. \quad (\text{A.8c})$$

auf Produkte von drei Funktionen. Damit schreibt sich z. B. das Sternprodukt

$$A * B = \exp(i\wedge_{12})AB = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \wedge_{12}^k AB}{k!} \quad (\text{A.9})$$

Das Gleichheitszeichen mit Punkt \doteq bedeutet Gleichheit bis auf Terme höherer Ordnung.

Komplexe Konjugation wird mit einem Stern $*$ gekennzeichnet. Eine Ausnahme ist das Antigeistfeld C^* , welches i. a. nicht das komplex konjugierte Geistfeld ist. Der Strich $\bar{\Psi}$ ist für Spinoren definiert über

$$\bar{\Psi} := \Psi^\dagger \gamma^0 \tag{A.10}$$

mit der nullten Dirac'schen Gamma-Matrix γ^0 . Dabei steht das Kreuz \dagger für hermitesche Konjugation.

B Beweise der Rekursionsformeln aus Abschnitt 4.2

B.1 Beweis von Proposition 2

Beweis von Proposition 2 (nach [22]). In 1. Ordnung ist Gleichung (3.8b) erfüllt wegen $\gamma^{[0]}A_\mu = \partial_\mu C$:

$$\partial_\mu C + \partial_\mu h^{[2]} - ig[A_\mu * C] - \gamma A_\mu = \partial_\mu h^{[2]} + ig[A_\mu, C] - ig[A_\mu * C] =: t_\mu^{[2]} \quad (\text{B.1})$$

Insbesondere hängt $t_\mu^{[2]}$ nur von abgeleiteten Geistfeldern ab.

Angenommen nun, die Formel (4.3) liefert eine Funktion $f_\mu^{k-1} = \sum_{l=1}^{k-1} f_\mu^{[l]}$, die die Gleichung (3.8b) bis zur Ordnung $k-1$ löst, d. h.:

$$\gamma f_\mu^{k-1} - \partial_\mu h + ig[f_\mu^{k-1} * h] = t_\mu^{[k]} + \sum_{m \geq 0} v_\mu^{[k+1+m]}, \quad (\text{B.2})$$

wobei der Restterm $t_\mu^{[k]}$ nur von differenzierten Geistern abhängen soll. Letzteres bedeutet insbesondere $t_\mu^{[k+1]}(0, 0, w) = 0$, da t_μ linear in den Geistfeldern ist. Anwendung des Operators $\gamma - ig[h * \cdot]$ auf (B.2) liefert:

$$\begin{aligned} & \gamma^2 f_\mu^{k-1} - \partial_\mu \gamma h + ig\gamma[f_\mu^{k-1} * h] \\ & \quad - ig[h * \gamma f_\mu^{k-1}] + ig[h * \partial_\mu h] + g^2[h * [f_\mu^{k-1} * h]] \\ & = -ig\partial_\mu(h * h) + ig[\gamma f_\mu^{k-1} * h] + ig[f_\mu^{k-1} * \gamma h] \\ & \quad - ig[\gamma f_\mu^{k-1} * h] + ig\partial_\mu(h * h) + g^2[h * [f_\mu^{k-1} * h]] \\ & = \frac{g^2}{2}([f_\mu^{k-1} * [h * h]] + [h * [f_\mu^{k-1} * h]] + [[f_\mu^{k-1} * h] * h]) = 0, \end{aligned}$$

auf Grund der verallgemeinerten Jacobi-Identität. Daraus folgt $\gamma^{[0]}t_\mu^{[k]} = 0$.

In Ordnung k verlangen die Gleichungen (3.8b) und (B.2):

$$\gamma^{[0]}f_\mu^{[k]} = -\gamma^{[1]}f_\mu^{[k-1]} + \partial_\mu h^{[k]} + ig \sum_{l=1}^{k-1} [f_\mu^{[l]} * h^{[k-l]}] = -t_\mu^{[k]} \quad (\text{B.3})$$

Wegen $t_\mu^{[k]}(0, 0, w) = 0$ und $\gamma^{[0]}t_\mu^{[k]} = 0$ ist $f_\mu = -\rho^{[0]}t_\mu^{[k]}$ eine Lösung, wie behauptet.

Um den Induktionsschritt zu vervollständigen bleibt zu zeigen, dass auch $t_\mu^{[k+1]}(0, 0, w) = 0$, und dazu genügt es zu zeigen, dass $t_\mu^{[k+1]}$ nur von differenzierten Geistern abhängt.

Für $k = 1$ wurde diese Behauptung bereits explizit gezeigt. Für $k > 1$ argumentiert man wieder durch Induktion: Die einzige mögliche Abhängigkeit von nichtdifferenzierten Geistern in $t_\mu^{[k+1]}$ kommt aus den Termen $\gamma^{[1]}f_\mu^{[k]} - ig[f_\mu^{[k]}, C]$, und diese hebt sich, wie im Beweis von Proposition 1, genau heraus. \square

B.2 Beweis von Proposition 3

Beweis von Proposition 3. In 1. Ordnung ist Gleichung (3.8c) erfüllt wegen $\gamma^{[0]}\Psi = 0$:

$$igC * \Psi - \gamma\Psi = ig(C * \Psi - C\Psi) =: s^{[2]} \quad (\text{B.4})$$

Insbesondere hängt $s^{[2]}$ nur von abgeleiteten Geistfeldern ab.

Angenommen nun, (4.4) liefert eine Funktion $m^{k-1} = \sum_{l=1}^{k-1} m^{[l]}$, die die Gleichung (3.8c) bis zur Ordnung $k-1$ löst, d. h.:

$$\gamma m^{k-1} - igh * m^{k-1} = s^{[k]} + \sum_{m \geq 0} u^{[k+1+m]}, \quad (\text{B.5})$$

wobei der Restterm $s^{[k]}$ nur von differenzierten Geistern abhängen soll, d. h. $s^{[k+1]}(0, 0, w) = 0$. Anwendung von $(\gamma \cdot -igh * \cdot)$ auf (B.5) liefert:

$$\begin{aligned} & \gamma^2 m^{k-1} - ig\gamma(h * m^{k-1}) - igh * \gamma m^{k-1} - g^2 h * h * m^{k-1} \\ & = g^2(h * h) * m^{k-1} + igh * (\gamma m^{k-1}) - igh * \gamma m^{k-1} - g^2 h * h * m^{k-1} = 0, \end{aligned}$$

also $\gamma^{[0]}s^{[k]} = 0$ (man beachte, dass γ und h antivertauschen).

In Ordnung k verlangen die Gleichungen (3.8c) und (B.5):

$$\gamma^{[0]}m^{[k]} = -\gamma^{[1]}m^{[k-1]} + ig \sum_{l=1}^{k-1} h^{[l]} * m^{[k-l]} = -s^{[k]} \quad (\text{B.6})$$

Wegen $s^{[k]}(0, 0, w) = 0$ und $\gamma^{[0]}s^{[k]} = 0$ ist $m = -\rho^{[0]}s^{[k]}$ eine Lösung, wie behauptet.

Um den Induktionsschritt zu vervollständigen bleibt zu zeigen, dass auch $s^{[k+1]}(0, 0, w) = 0$, und dazu genügt es zu zeigen, dass $s^{[k+1]}$ nur von differenzierten Geistern abhängt.

Für $k = 1$ wurde diese Behauptung bereits explizit gezeigt. Für $k > 1$ kommt die einzige mögliche Abhängigkeit von nichtdifferenzierten Geistern in $s^{[k+1]}$ aus den Termen $\gamma^{[1]}m^{[k]} - igCm^{[k]}$, und diese hebt sich genau heraus, wegen

$$\begin{aligned} \gamma^{[1]}(A_\mu A_\nu \dots A_\rho \Psi) &= ig(A_\mu A_\nu \dots A_\rho C \Psi \\ & \quad + A_\mu A_\nu \dots [C, A_\rho] \Psi \\ & \quad + \dots \\ & \quad + A_\mu [C, A_\nu] \dots A_\rho \Psi \\ & \quad + [C, A_\mu] A_\nu \dots A_\rho \Psi) \\ &= igC(A_\mu A_\nu \dots A_\rho \Psi) \end{aligned}$$

\square

B.3 Berechnung von $\{\gamma^{[0]}, \rho^{[0]}\}$

Lemma 1. *Es gilt $\{\gamma^{[0]}, \rho^{[0]}\}f(y, z, w) = f(y, z, w) - f(0, 0, w)$.*

Beweis. Der Beweis soll für den Fall geführt werden, dass f eine Summe von Termen der Form $y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_k} z^{\beta_1} \dots z^{\beta_l} g(w)$ ist. Dies ist auch der Fall, für den die Formel später benötigt wird. Da $\gamma^{[0]}$ und $\rho^{[0]}$ linear sind, kann man also o. B. d. A. $f(y, z, w) = y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_k} z^{\beta_1} \dots z^{\beta_l} g(w)$ annehmen.

Sei zunächst $kl > 0$. Man berechnet zunächst die Wirkung von $\gamma^{[0]}$ auf die symmetrisierten Variablen:

$$\begin{aligned}\gamma^{[0]}y^\alpha &= z^\alpha \\ \gamma^{[0]}z^\alpha &= 0 \\ \gamma^{[0]}w^i &= 0.\end{aligned}\tag{B.7}$$

Da $\gamma^{[0]}$ einer Produktregel genügt, erhält man also

$$\gamma^{[0]}f(y, z, w) = \sum_{i=1}^k z^{\alpha_i} y^{\alpha_1} \dots \widehat{y^{\alpha_i}} \dots y^{\alpha_k} z^{\beta_1} \dots z^{\beta_l} g(w),\tag{B.8}$$

wobei die Tilde das Weglassen des entsprechenden Faktors in dem Produkt symbolisiert. Anwendung von $\rho^{[0]}$ liefert

$$\begin{aligned}\rho^{[0]}\gamma^{[0]}f(y, z, w) &= \int_0^1 \frac{dt}{t} \sum_{i=1}^k \left[t^{k+l} y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_k} z^{\beta_1} \dots z^{\beta_l} g(w) \right. \\ &\quad \left. + t^{k+l} \sum_{j=1}^l (-1)^j y^{\beta_j} z^{\alpha_i} y^{\alpha_1} \dots \widehat{y^{\alpha_i}} \dots y^{\alpha_k} z^{\beta_1} \dots \widehat{z^{\beta_j}} \dots z^{\beta_l} g(w) \right] \\ &= \frac{k}{k+l} y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_k} z^{\beta_1} \dots z^{\beta_l} g(w) \\ &\quad + \frac{1}{k+l} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (-1)^j y^{\beta_j} z^{\alpha_i} y^{\alpha_1} \dots \widehat{y^{\alpha_i}} \dots y^{\alpha_k} z^{\beta_1} \dots \widehat{z^{\beta_j}} \dots z^{\beta_l} g(w).\end{aligned}\tag{B.9}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\rho^{[0]}f(y, z, w) &= \int_0^1 \frac{dt}{t} \sum_{j=1}^l (-1)^{j-1} t^{k+l} y^{\beta_j} y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_k} z^{\beta_1} \dots \widehat{z^{\beta_j}} \dots z^{\beta_l} g(w) \\ &= -\frac{1}{k+l} \sum_{j=1}^l (-1)^j y^{\beta_j} y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_k} z^{\beta_1} \dots \widehat{z^{\beta_j}} \dots z^{\beta_l} g(w)\end{aligned}\tag{B.10}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\gamma^{[0]}\rho^{[0]}f(y, z, w) &= -\frac{1}{k+l} \sum_{j=1}^l (-1)^j z^{\beta_j} y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_k} z^{\beta_1} \dots \widehat{z^{\beta_j}} \dots z^{\beta_l} g(w) \\
&\quad - \frac{1}{k+l} \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k (-1)^j z^{\alpha_i} y^{\beta_j} y^{\alpha_1} \dots \widehat{y^{\alpha_i}} \dots y^{\alpha_k} z^{\beta_1} \dots \widehat{z^{\beta_j}} \dots z^{\beta_l} g(w) \\
&\quad = \frac{l}{k+l} y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_k} z^{\beta_1} \dots z^{\beta_l} g(w) \\
&\quad - \frac{1}{k+l} \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k (-1)^j z^{\alpha_i} y^{\beta_j} y^{\alpha_1} \dots \widehat{y^{\alpha_i}} \dots y^{\alpha_k} z^{\beta_1} \dots \widehat{z^{\beta_j}} \dots z^{\beta_l} g(w) \quad (\text{B.11})
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also

$$\{\gamma^{[0]}, \rho^{[0]}\}f(y, z, w) = y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_k} z^{\beta_1} \dots z^{\beta_l} g(w) = f(y, z, w) - f(0, 0, w). \quad (\text{B.12})$$

Für den Fall, dass entweder $k = 0$ oder $l = 0$ ist, ist die selbe Rechnung auszuführen, wobei aber die beiden Terme mit der Doppelsumme entfallen. Im Falle $k = l = 0$ schließlich ist $\gamma^{[0]}f(y, z, w) = \rho^{[0]}f(y, z, w) = 0$, aber auch $f(y, z, w) - f(0, 0, w) = 0$. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

C Die Berechnungen der Seiberg-Witten-Abbildung im Detail

C.1 $f_\mu^{[2]}$ - erste Korrektur für das Eichboson

Gleichung (4.3) ergibt:

$$f_\mu^{[2]} = -\rho^{[0]} (\gamma^{[1]} A_\mu - \partial_\mu h^{[2]} + ig [A_\mu * C]) \quad (C.1)$$

Betrachte zunächst $\rho^{[0]} \partial_\mu h^{[2]}$. Vor der Anwendung von $\rho^{[0]}$ muss $\partial_\mu h^{[2]}$ symmetriert werden. Man erhält mit der Multiindexzerlegung $\alpha := (\alpha_l, \alpha_l)$, $\beta := (\beta_l, \beta_l)$:

$$\begin{aligned} \partial_\mu h^{[2]} &= -\frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i \wedge_{12})^k}{(k+1)!} \partial_\mu (A_\alpha^A \partial_\beta C^B) [T_A, T_B]_{k+1} \\ &= -\frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i \frac{\vartheta}{2})^k}{(k+1)!} \Theta^{\alpha\beta} [\partial_\alpha \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta \partial_\beta C^B \\ &\quad + \partial_\alpha A_\alpha^A \partial_\beta \partial_\mu \partial_\beta C^B] [T_A, T_B]_{k+1} \\ &= -\frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i \frac{\vartheta}{2})^k}{(k+1)!} \Theta^{\alpha\beta} [\partial_{(\alpha} \partial_\mu A_{\alpha)}^A \partial_\beta \partial_\beta C^B \\ &\quad + \frac{k+1}{k+2} \partial_{(\alpha} F_{\mu)\alpha}^{[0]A} \partial_\beta \partial_\beta C^B + \partial_{(\alpha} A_{\alpha)}^A \partial_\beta \partial_\mu \partial_\beta C^B \\ &\quad + \frac{k}{k+1} \partial_{(\alpha_k} F_{\alpha_k)\alpha}^{[0]A} \partial_{\beta_k} \partial_{\beta_k} \partial_\mu \partial_\beta C^B] [T_A, T_B]_{k+1} \quad (C.2) \end{aligned}$$

Der letzte Term verschwindet, da $F_{\alpha_l \alpha}^{[0]A}$ unter der Vertauschung $(\alpha_l, \beta_l) \leftrightarrow (\alpha, \beta)$ antisymmetrisch ist, während der Rest symmetrisch ist für alle l . Im ersten Term lässt sich der Faktor vor der Summe in die Summe integrieren, und man erhält insgesamt:

$$\begin{aligned} \partial_\mu h^{[2]} &= \frac{ig}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i \frac{\vartheta}{2})^k}{k!} \Theta^{\alpha\beta} \partial_{(\alpha} A_{\mu)}^A \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_k \\ &\quad - \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i \frac{\vartheta}{2})^k}{(k+1)!} \Theta^{\alpha\beta} \left[\frac{k+1}{k+2} \partial_{(\alpha} F_{\mu)\alpha}^{[0]A} \partial_\beta \partial_\beta C^B \right. \end{aligned}$$

$$+ \partial_{(\alpha A_\alpha^A)} \partial_\beta \partial_\mu \partial_\beta C^B \Big] [T_A, T_B]_{k+1} \quad (\text{C.3})$$

Weiter berechnet man:

$$\begin{aligned} & [A_\mu *; C] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{k!} (A_\mu^A C^B - C^A A_\mu^B) T_A T_B \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(i\wedge_{12})^k}{k!} A_\mu^A C^B T_A T_B - \frac{(-i\wedge_{12})^k}{k!} A_\mu^B C^A T_A T_B \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{k!} A_\mu^A C^B [T_A, T_B]_k \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \partial_{(\alpha A_\mu^A)} \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_k \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{k}{k+1} \partial_{(\hat{\alpha}_k F_{\alpha k}^{[0]A})} \partial_{\hat{\beta}_k} \partial_{\beta_k} C^B [T_A, T_B]_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \partial_{(\alpha A_\mu^A)} \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_k \\ &\quad + i \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{k+1}{k+2} \partial_{(\alpha F_{\alpha\mu}^{[0]A})} \partial_\beta \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_{k+1}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Zusammen mit $\gamma^{[1]} A_\mu = g f_{AB}^C A_\mu^A C^B T_C = -ig A_\mu^A C^B [T_A, T_B]$ folgt erhalt man also:

$$\begin{aligned} & -\gamma^{[1]} A_\mu + \partial_\mu h^{[2]} - ig [A_\mu *; C] \\ &= -\frac{ig}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \partial_{(\alpha A_\mu^A)} \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_k \\ &\quad + \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{k+1}{k+2} (2\partial_{(\alpha F_{\alpha\mu}^{[0]A})} - \partial_{(\alpha F_{\mu\alpha}^{[0]A})}) \partial_\beta \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_{k+1} \\ &\quad - \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha A_\alpha^A)} \partial_\mu \partial_\beta \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_{k+1} \end{aligned}$$

Diese drei Terme sollen nun einzeln untersucht werden:

$$-\rho^{[0]} \left[\frac{ig}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \partial_{(\alpha A_\mu^A)} \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_k \right]$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^1 \frac{dt}{t} \left[\frac{ig}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} t \partial_{(\hat{\alpha} \partial_{\alpha_k} A_{\mu}^A)} t \partial_{(\hat{\beta} A_{\beta_k}^B)} [T_A, T_B]_k \right] \\
&= - \frac{ig}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \partial_{(\hat{\alpha} \partial_{\alpha_k} A_{\mu}^A)} \partial_{(\hat{\beta} A_{\beta_k}^B)} [T_A, T_B]_k \\
&= \frac{g}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha \partial_{\alpha} A_{\mu}^A)} \partial_{(\beta A_{\beta}^B)} [T_A, T_B]_{k+1}
\end{aligned}$$

Nun zum zweiten Term:

$$\begin{aligned}
&\frac{g}{2} \rho^{[0]} \left[\frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{k+1}{k+2} \right. \\
&\quad \left. (2\partial_{(\alpha F_{\alpha\mu}^{[0]A}} - \partial_{(\alpha F_{\mu\alpha}^{[0]A}}) \partial_{\beta} \partial_{\beta} C^B [T_A, T_B]_{k+1} \right] \\
&= \frac{g}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t} \left[\frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{k+1}{k+2} \right. \\
&\quad \left. (2\partial_{(\alpha F_{\alpha\mu}^{[0]A}} - \partial_{(\alpha F_{\mu\alpha}^{[0]A}}) t \partial_{(\beta A_{\beta}^B)} [T_A, T_B]_{k+1} \right] \\
&= \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{k+1}{k+2} \\
&\quad (2\partial_{(\alpha F_{\alpha\mu}^{[0]A}} - \partial_{(\alpha F_{\mu\alpha}^{[0]A}}) \partial_{(\beta A_{\beta}^B)} [T_A, T_B]_{k+1} \\
&= \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{k+1}{k+2} \left(2\partial_{\alpha} F_{\alpha\mu}^{[0]A} - \frac{1}{k+1} \partial_{\alpha} F_{\mu\alpha}^{[0]A} \right. \\
&\quad \left. - \frac{k}{k+1} \partial_{\alpha_k} \partial_{\mu} F_{\alpha_k\alpha}^{[0]A} \right) \partial_{(\beta A_{\beta}^B)} [T_A, T_B]_{k+1} \\
&= g \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{2k+3}{2k+4} \partial_{\alpha} F_{\alpha\mu}^{[0]A} \partial_{(\beta A_{\beta}^B)} [T_A, T_B]_{k+1}
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt fällt der letzte Summand in der Klammer aus Symmetriegründen weg, und die ersten beiden Summanden lassen sich mit $F_{\mu\alpha}^{[0]A} = -F_{\alpha\mu}^{[0]A}$ zusammenfassen.

Schließlich zum dritten Term:

$$\begin{aligned}
&- \rho^{[0]} \left[\frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha A_{\alpha}^A)} \partial_{\mu} \partial_{\beta} \partial_{\beta} C^B [T_A, T_B]_{k+1} \right] \\
&= - \frac{g}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t} \left[\frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} t \partial_{(\alpha A_{\alpha}^A)} t \partial_{(\beta \partial_{\beta} A_{\mu}^B)} [T_A, T_B]_{k+1} \right] \\
&= - \frac{g}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha A_{\alpha}^A)} \partial_{(\beta \partial_{\beta} A_{\mu}^B)} [T_A, T_B]_{k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{g}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} A_{\beta}^B (-1)^{k+1} [T_B, T_A]_{k+1} \\
&= +\frac{g}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1}
\end{aligned}$$

Zusammenfassen liefert

$$\begin{aligned}
f_{\mu}^{[2]} &= \rho^{[0]} (-\gamma^{[1]} A_{\mu} + \partial_{\mu} h^{[2]} - ig [A_{\mu} *, C]) \\
&= \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \left(\partial_{(\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \frac{2k+3}{k+2} \partial_{\alpha} F_{\alpha\mu}^{[0]A} \right) \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&= \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} F_{\alpha\mu}^{[0]A} \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&= \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} F_{\alpha\mu}^{[0]A} \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&= \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} F_{\alpha\mu}^{[0]A} \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \quad (C.6)
\end{aligned}$$

Der letzte symmetrisierte Term soll nun noch umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
&+ \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} F_{\alpha\mu}^{[0]A} \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&= + \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \left(\partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} A_{\beta}^B - \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^k \partial_{\beta_l} F_{\beta_l \beta}^{[0]B} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. - \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{\beta} A_{\beta}^B + \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^k \partial_{\beta_l} F_{\beta_l \beta}^{[0]B} \right) [T_A, T_B]_{k+1} \\
&= + \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \left(\partial_{\alpha} A_{\mu}^A A_{\beta}^B - \partial_{\mu} A_{\alpha}^A A_{\beta}^B \right) [T_A, T_B]_{k+1}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{k}{k+1} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{\beta} F_{\beta_k \beta}^{[0]B} [T_A, T_B]_{k+1} \quad (\text{C.7})$$

Dabei kann der letzte Term wiederum wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} & + \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{k}{k+1} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{\beta} F_{\beta_k \beta}^{[0]B} [T_A, T_B]_{k+1} \\ & = + \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{k}{k+1} \left(\partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{\beta} \partial_{\beta_k} A_{\beta}^B \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{\beta} \partial_{\beta} A_{\beta_k}^B \right) [T_A, T_B]_{k+1} \\ & = + \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \frac{k}{k+1} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \\ & \quad - \frac{ig}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+2)!} \frac{k+1}{k+2} \partial_{\alpha'} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{\beta} A_{\beta'}^B [T_A, T_B]_k \quad (\text{C.8}) \end{aligned}$$

Schließlich erhält man also:

$$\begin{aligned} f_{\mu}^{[2]} & = \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \\ & \quad + \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \left(\partial_{\alpha} A_{\mu}^A A_{\beta}^B - \partial_{\mu} A_{\alpha}^A A_{\beta}^B \right) [T_A, T_B]_{k+1} \\ & \quad + \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \frac{k}{k+1} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \\ & \quad - \frac{ig}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+2)!} \frac{k+1}{k+2} \partial_{\alpha'} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{\beta} A_{\beta'}^B [T_A, T_B]_k \\ & = g \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \\ & \quad - \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \frac{1}{k+1} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \\ & \quad - \frac{ig}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+2)!} \frac{k+1}{k+2} \partial_{\alpha'} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{\beta} A_{\beta'}^B [T_A, T_B]_k \quad (\text{C.9}) \end{aligned}$$

Die Reihen lassen sich durch analytische Funktionen darstellen. Mit

$$S^{(2)}(z) = \int_0^z \frac{\sin(t)}{t} dt = -i \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{(iz)^k}{k!k}$$

$$C^{(2)}(z) = \int_0^z \frac{\cos(t) - 1}{t} dt = \sum_{k \text{ gerade}} \frac{(iz)^k}{k!k}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
f_\mu^{[2]} &= +g \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{i \sin(\Lambda_{12})}{i\Lambda_{12}} \partial_\alpha A_\mu^A A_\beta^B \{T_A, T_B\} \\
&+ g \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\cos(\Lambda_{12}) - 1}{i\Lambda_{12}} \partial_\alpha A_\mu^A A_\beta^B [T_A, T_B] \\
&- \frac{g}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{iS^{(2)}(\Lambda_{12})}{i\Lambda_{12}} \partial_\mu A_\alpha^A A_\beta^B \{T_A, T_B\} \\
&- \frac{g}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{C^{(2)}(\Lambda_{12}) - 1}{i\Lambda_{12}} \partial_\mu A_\alpha^A A_\beta^B [T_A, T_B] \\
&- \frac{ig}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \frac{i \sin(\Lambda_{12}) - i\Lambda_{12}}{(i\Lambda_{12})^2} \partial_{\alpha'} \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta A_{\beta'}^B \{T_A, T_B\} \\
&- \frac{ig}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \frac{\cos(\Lambda_{12}) - 1}{(i\Lambda_{12})^2} \partial_{\alpha'} \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta A_{\beta'}^B [T_A, T_B] \\
&+ \frac{ig}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \frac{iS^{(2)}(\Lambda_{12}) - i\Lambda_{12}}{(i\Lambda_{12})^2} \partial_{\alpha'} \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta A_{\beta'}^B \{T_A, T_B\} \\
&+ \frac{ig}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \frac{C^{(2)}(\Lambda_{12}) - 1}{(i\Lambda_{12})^2} \partial_{\alpha'} \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta A_{\beta'}^B [T_A, T_B] \\
&= +g \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\sin(\Lambda_{12})}{\Lambda_{12}} \partial_\alpha A_\mu^A A_\beta^B \{T_A, T_B\} \\
&- ig \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\cos(\Lambda_{12}) - 1}{\Lambda_{12}} \partial_\alpha A_\mu^A A_\beta^B [T_A, T_B] \\
&- \frac{g}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{S^{(2)}(\Lambda_{12})}{\Lambda_{12}} \partial_\mu A_\alpha^A A_\beta^B \{T_A, T_B\} \\
&+ \frac{ig}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{C^{(2)}(\Lambda_{12}) - 1}{\Lambda_{12}} \partial_\mu A_\alpha^A A_\beta^B [T_A, T_B] \\
&- \frac{g}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \frac{\sin(\Lambda_{12}) - S^{(2)}(\Lambda_{12})}{\Lambda_{12}^2} \partial_{\alpha'} \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta A_{\beta'}^B \{T_A, T_B\} \\
&+ \frac{ig}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \frac{\cos(\Lambda_{12}) - C^{(2)}(\Lambda_{12})}{\Lambda_{12}^2} \partial_{\alpha'} \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta A_{\beta'}^B [T_A, T_B]
\end{aligned}$$

Diese Lösung für die Seiberg-Witten-Abbildung soll von nun an die $\rho^{[0]}$ -Lösung heißen, um sie von der alternativen Lösung zu unterscheiden, die im nächsten Abschnitt definiert werden soll.

C.2 $h^{[3]}$ - zweite Korrektur für das Geistfeld

Einsetzen in die Rekursionsformel liefert als zweiten Korrekturterm für den Eichparameter:

$$\begin{aligned}
h^{[3]} &= -\rho^{[0]} \left(\gamma^{[1]} h^{[2]} - \frac{ig}{2} ([h^{[1]} * h^{[2]}] + [h^{[2]} * h^{[1]}]) \right) \\
&= -\rho^{[0]} (\gamma^{[1]} h^{[2]} - igC * h^{[2]} - igh^{[2]} * C) \\
&= -\rho^{[0]} \left(\frac{-g}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \left[(g\partial_{\alpha}(f_{DE}{}^A A_{\mu}^D C^E)) \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{g}{2} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} \partial_{\nu} (f_{DE}{}^B C^D C^E) \right) [T_A, T_B]_{k+1} \right. \\
&\quad \left. - ig \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \left(\partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta} (\partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B) T_C [T_A, T_B]_{k+1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \partial_{\gamma} (\partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B) \partial_{\delta} C^C [T_A, T_B]_{k+1} T_C \right) \right] \Big) \\
&= -\rho^{[0]} \left(\frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \left[\partial_{\alpha} (A_{\mu}^D C^E) \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B [[T_D, T_E], T_B]_{k+1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} \partial_{\nu} (C^D C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta} (\partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B) [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \right] \right) \quad (C.10)
\end{aligned}$$

Betrachte nun jeden der drei Terme einzeln. Dabei müssen in jedem Fall Terme der Form $\partial_{\alpha}(XY)$ nach der Produktregel ausmultipliziert werden. Mit der Schreibweise aus Unterabschnitt 4.3.1 gilt:

$$\partial_{\alpha}(XY) = \sum_{\alpha=(\rho,\sigma)} \partial_{\rho} X \partial_{\sigma} Y = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \partial_{\alpha^l} X \partial_{\alpha^l} Y. \quad (C.11)$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt allerdings nur dann, wenn der Ausdruck in einer Summe über alle α steht, in welcher eine Vertauschung der Einträge in α keine Rolle spielt. Dies ist in allen Termen aber der Fall.

Damit ist nun:

$$\begin{aligned}
& -\rho^{[0]} \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} (A_{\mu}^D C^E) \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B [[T_D, T_E], T_B]_{k+1} \\
&= -\rho^{[0]} \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha^l} A_{\mu}^D \partial_{\alpha^l} C^E \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B [[T_D, T_E], T_B]_{k+1} \\
&= -\rho^{[0]} \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha^l} A_{\mu}^D \partial_{\alpha^l} C^E \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B [[T_D, T_E], T_B]_{k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^1 \frac{dt}{t} \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha^l A_\mu^D} \partial_{\alpha^{k-l} A_{\alpha_k}^E} \partial_\beta \partial_\nu C^B t^3 \right. \\
&\quad - \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha^l A_\mu^D} \partial_\alpha C^E \partial_{(\beta A_\nu^B)} t^3 \\
&\quad \left. - \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha A_\mu^D} (C^E) \partial_{(\beta A_\nu^B)} t^2 \right] [[T_D, T_E], T_B]_{k+1} \\
&= \left[- \frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha^l A_\mu^D} \partial_{\alpha^{k-l} A_{\alpha_k}^E} \partial_\beta \partial_\nu C^B \right. \\
&\quad + \frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha^l A_\mu^D} \partial_\alpha C^E \partial_{(\beta A_\nu^B)} \\
&\quad \left. + \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha A_\mu^D} (C^E) \partial_{(\beta A_\nu^B)} \right] [[T_D, T_E], T_B]_{k+1} \\
&= + \frac{g^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \\
&\quad \partial_{\alpha^l A_\mu^D} \partial_\alpha A_\rho^E \partial_\beta \partial_\sigma \partial_\nu C^B [[T_D, T_E], T_B]_k \\
&\quad - \left[\frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha A_\mu^B} \partial_{\beta^l A_\nu^D} \partial_\beta C^E \right. \\
&\quad \left. + \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha A_\mu^B} (C^E) \partial_{(\beta A_\nu^D)} \right] [T_B, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&= + \frac{g^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \\
&\quad \partial_{\alpha^l A_\mu^D} \partial_\alpha A_\rho^E \partial_\beta \partial_\sigma \partial_\nu C^B [[T_D, T_E], T_B]_k \\
&\quad + \left[\frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha A_\mu^A} \partial_{\beta^l} C^D \partial_\beta A_\nu^E \right. \\
&\quad \left. + \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha A_\mu^B} (C^D) \partial_{(\beta A_\nu^E)} \right] [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1}
\end{aligned}$$

Betrachte nun den zweiten Term von Gleichung (C.10):

$$\begin{aligned}
&\frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \rho^{[0]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_\beta \partial_\nu (C^D C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&= \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \rho^{[0]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha A_\mu^A} \partial_\beta (\partial_\nu C^D C^E + C^D \partial_\nu C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \rho^{[0]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha} A_{\mu)}^A \partial_{\beta} (C^D \partial_{\nu} C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&= \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \rho^{[0]} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha} A_{\mu)}^A \partial_{\beta^l} C^D \partial_{l\beta} \partial_{\nu} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&= \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t} \left(- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha} A_{\mu)}^A C^D \partial_{(\beta} A_{\nu)}^E t^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha} A_{\mu)}^A \partial_{(l\beta^l} A_{\beta_1)}^D \partial_{l\beta} \partial_{\nu} C^E t^3 \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha} A_{\mu)}^A \partial_{\beta^l} C^D \partial_{(l\beta} A_{\nu)}^E t^3 \right) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&= \left(- \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha} A_{\mu)}^A C^D \partial_{\beta} A_{\nu)}^E \right. \\
&\quad \left. + \frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha} A_{\mu)}^A \partial_{\beta^l} A_{\beta_1)}^D \partial_{l\beta} \partial_{\nu} C^E \right. \\
&\quad \left. - \frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha} A_{\mu)}^A \partial_{\beta^l} C^D \partial_{\beta} A_{\nu)}^E \right) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1}
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalt man also fur die ersten beiden Terme aus Gleichung (C.10):

$$\begin{aligned}
h_1^{[3]} &:= -\rho^{[0]} \gamma^{[1]} h^{[2]} \\
&= + \frac{g^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \\
&\quad \partial_{\alpha^l} A_{\mu}^D \partial_{\alpha} A_{\rho}^E \partial_{\beta} \partial_{\sigma} \partial_{\nu} C^B [[T_D, T_E], T_B]_k \\
&\quad + \frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha} A_{\mu)}^A \partial_{\beta^l} A_{\beta_1)}^D \partial_{l\beta} \partial_{\nu} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&= + \frac{g^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \\
&\quad \partial_{\alpha^l} A_{\mu}^D \partial_{\alpha} A_{\rho}^E \partial_{\beta} \partial_{\sigma} \partial_{\nu} C^B [[T_D, T_E], T_B]_k \\
&\quad - \frac{g^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \\
&\quad \partial_{(\alpha} \partial_{\rho} A_{\mu)}^A \partial_{\beta^l} A_{\sigma}^D \partial_{l\beta} \partial_{\nu} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_k \\
&= + \frac{g^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_{\alpha^l} A_{\mu}^D \partial_{\alpha} A_{\rho}^E \partial_{\beta} \partial_{\sigma} \partial_{\nu} C^B [[T_D, T_E], T_B]_k \\
- & \frac{g^2}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \binom{k+1}{l+1} \frac{1}{k+2} \\
& \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\rho}^A \partial_{\beta^l} A_{\sigma}^D \partial_{l\beta} \partial_{\nu} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_k \\
- & \frac{g^2}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^k \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \binom{k+1}{l+1} \frac{l}{k+2} \\
& \partial_{\alpha_1} \partial_{\mu} \partial_{\rho} A_{\alpha_1}^A \partial_{\beta^l} A_{\sigma}^D \partial_{l\beta} \partial_{\nu} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_k \\
- & \frac{g^2}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \binom{k+1}{l+1} \frac{k-l+1}{k+2} \\
& \partial_{\alpha} \partial_{\rho} A_{\mu}^A \partial_{\beta^l} A_{\sigma}^D \partial_{l\beta} \partial_{\nu} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_k \\
= & + \frac{g^2}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \\
& \partial_{\alpha^l} A_{\mu}^D \partial_{\alpha} A_{\rho}^E \partial_{\beta} \partial_{\sigma} \partial_{\nu} C^B [[T_D, T_E], T_B]_k \\
+ & \frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \binom{k}{l+1} \frac{1}{k+1} \\
& \partial_{\alpha} A_{\rho}^A \partial_{\beta^l} A_{\sigma}^D \partial_{l\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
- & \frac{g^2}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \binom{k+1}{l+2} \frac{l+1}{k+2} \\
& \partial_{\alpha} \partial_{\rho} A_{\kappa}^A \partial_{\beta^l} \partial_{\lambda} A_{\sigma}^D \partial_{l\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_k \\
- & \frac{g^2}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \binom{k+1}{l+1} \frac{k-l+1}{k+2} \\
& \partial_{\alpha} \partial_{\rho} A_{\mu}^A \partial_{\beta^l} A_{\sigma}^D \partial_{l\beta} \partial_{\nu} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_k \\
= & + \frac{g^2}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \\
& \partial_{\alpha^l} A_{\mu}^D \partial_{\alpha} A_{\rho}^E \partial_{\beta} \partial_{\sigma} \partial_{\nu} C^B [[T_D, T_E], T_B]_k \\
+ & \frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \binom{k}{l} \frac{k-l}{(k+1)(l+1)} \\
& \partial_{\alpha} A_{\rho}^A \partial_{\beta^l} A_{\sigma}^D \partial_{l\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
- & \frac{g^2}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \binom{k+1}{l+1} \frac{(k-l)(l+1)}{(k+2)(l+2)} \\
& \partial_{\alpha} \partial_{\rho} A_{\kappa}^A \partial_{\beta^l} \partial_{\lambda} A_{\sigma}^D \partial_{l\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{g^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \binom{k+1}{l+1} \frac{k-l+1}{k+2} \\
& \qquad \qquad \qquad \partial_\alpha \partial_\rho A_\mu^A \partial_{\beta'} A_\sigma^D \partial_{l\beta} \partial_\nu C^E [T_A, [T_D, T_E]]_k \\
& = +\frac{g^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{b,c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!(c+1)!} \frac{1}{(b+c+2)} \\
& \qquad \qquad \qquad A_\mu^D A_\rho^E \partial_\sigma \partial_\nu C^B [[T_D, T_E], T_B]_{a+b} \\
& +\frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{b,c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!} \frac{c}{(b+c+1)^2(b+1)} \\
& \qquad \qquad \qquad A_\rho^A A_\sigma^D C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{b+c+1} \\
& -\frac{g^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{b,c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!} \frac{c}{(b+c+2)^2(b+2)} \\
& \qquad \qquad \qquad \partial_\rho A_\kappa^A \partial_\lambda A_\sigma^D C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{b+c} \\
& -\frac{g^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{b,c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!} \frac{c+1}{(b+c+2)^2(b+1)} \\
& \qquad \qquad \qquad \partial_\rho A_\mu^A A_\sigma^D \partial_\nu C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{b+c}
\end{aligned}$$

Schließlich zum dritten Term von Gleichung (C.10):

$$\begin{aligned}
h_2^{[3]} & := \\
& -\frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \rho^{[0]} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \partial_\gamma C^C \partial_\delta (\partial_\alpha A_\mu^A \partial_\beta \partial_\nu C^B) [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& = -\frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \rho^{[0]} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \\
& \qquad \qquad \qquad \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& = -\frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \rho^{[0]} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \\
& \qquad \qquad \qquad \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \partial_\gamma C^C \partial_{(\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\nu C^B \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m+k}{m+k+1} \partial_\gamma C^C \partial_{(\delta^m} \partial_\alpha F_{\delta_1}^{[0]A} \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\nu C^B \right) \\
& \qquad \qquad \qquad [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& = -\frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \partial_{(\iota\gamma} A_{\gamma_1}^C \partial_{(\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B t^3 \right. \\
& \quad - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \partial_{\gamma} C^C \partial_{(\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{(m\delta} \partial_{\beta} A_{\nu}^B t^3 \\
& \quad \left. - C^C \partial_{(\alpha} A_{\mu}^A \partial_{(\beta} A_{\nu}^B (t^2 - t^3) \right. \\
& + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m+k}{m+k+1} \partial_{(\iota\gamma} A_{\gamma_1}^C \partial_{(\delta^m} \partial_{\alpha} F_{\delta_1 \mu}^{[0]A} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B t^2 \\
& \quad \left. - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m+k}{m+k+1} \partial_{\gamma} C^C \partial_{(\delta^m} \partial_{\alpha} F_{\delta_1 \mu}^{[0]A} \partial_{(m\delta} \partial_{\beta} A_{\nu}^B t^2 \right) \\
& \hspace{20em} [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& = \left(- \frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \partial_{(\iota\gamma} A_{\gamma_1}^C \partial_{(\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B \right. \\
& \quad + \frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \partial_{\gamma} C^C \partial_{(\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{(m\delta} \partial_{\beta} A_{\nu}^B \\
& \quad - \frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \\
& \quad \quad \quad \frac{3}{2} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m+k}{m+k+1} \partial_{(\iota\gamma} A_{\gamma_1}^C \partial_{(\delta^m} \partial_{\alpha} F_{\delta_1 \mu}^{[0]A} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B \\
& \quad - \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \\
& \quad \quad \quad \frac{3}{2} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m+k}{m+k+1} \partial_{\gamma} C^C \partial_{(\delta^m} \partial_{\alpha} F_{\delta_1 \mu}^{[0]A} \partial_{(m\delta} \partial_{\beta} A_{\nu}^B \Big) \\
& \hspace{20em} [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& + \frac{ig^2}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} C^C \partial_{(\alpha} A_{\mu}^A \partial_{(\beta} A_{\nu}^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}] \quad (*) \\
& = \left(- \frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \partial_{(\iota\gamma} A_{\gamma_1}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B \right. \\
& \quad \left. + \frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{(m\delta} \partial_{\beta} A_{\nu}^B \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{ig^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m+k}{m+k+1} \\
& \qquad \qquad \qquad \partial_{(\iota\gamma} A_{\gamma_1)}^C \partial_{(\iota\delta^m} \partial_{\alpha} F_{\delta_1\mu}^{[0]A} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B \\
& + \frac{ig^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m+k}{m+k+1} \\
& \qquad \qquad \qquad \partial_{\gamma} C^C \partial_{(\iota\delta^m} \partial_{\alpha} F_{\delta_1\mu}^{[0]A} \partial_{(m\delta} \partial_{\beta} A_{\nu)}^B) \\
& \qquad \qquad \qquad [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& = -\frac{ig^2}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \\
& \left(\sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \partial_{(\iota\gamma} A_{\gamma_1)}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B \right. \\
& \quad - \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{(m\delta} \partial_{\beta} A_{\nu)}^B \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \partial_{(\iota\gamma} A_{\gamma_1)}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} F_{\delta_1\mu}^{[0]A} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B \\
& \quad - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} F_{\delta_1\mu}^{[0]A} \partial_{(m\delta} \partial_{\beta} A_{\nu)}^B \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{k}{m+k+1} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha_k} F_{\alpha_k\mu}^{[0]A} \partial_{(m\delta} \partial_{\beta} A_{\nu)}^B \right) \\
& \qquad \qquad \qquad [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& = -\frac{ig^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \\
& \left(\sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \partial_{(\iota\gamma} A_{\gamma_1)}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B \right. \\
& \quad - \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+3k+2}{m+k+1} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{(m\delta} \partial_{\beta} A_{\nu)}^B \\
& \quad - \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \partial_{(\iota\gamma} A_{\gamma_1)}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\delta_1}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B \\
& \quad \left. + \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\delta_1}^A \partial_{(m\delta} \partial_{\beta} A_{\nu)}^B \right)
\end{aligned}$$

$$[T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{ig^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{l!} \\
&\left(\sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \frac{m}{l} \partial_{\gamma_1} A_{\gamma_1}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B \right. \\
&\quad + \sum_{m=0}^{l-1} \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \frac{l-m}{l} \partial_{\gamma_l} A_{\gamma_l}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B \\
&\quad - \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \frac{1}{l-m+k+1} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} A_{\nu}^B \\
&\quad - \sum_{m=0}^{l-1} \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \frac{l-m}{l-m+k+1} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m+1\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} A_{\delta_{m+1}}^B \\
&\quad - \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \frac{k}{l-m+k+1} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta_k} \partial_{\nu} A_{\beta_k}^B \\
&\quad - \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \frac{1}{l} \partial_{\gamma} A_{\gamma_1}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\delta_1}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B \\
&\quad - \sum_{m=2}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \frac{m-1}{l} \partial_{\gamma_2} A_{\gamma_2}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\delta_1}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B \\
&\quad - \sum_{m=1}^{l-1} \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \frac{l-m}{l} \partial_{\gamma_l} A_{\gamma_l}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\delta_1}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B \\
&\quad + \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \frac{k+1}{l-m+1+k} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\delta_1}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} A_{\nu}^B \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{l-1} \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \frac{l-m}{l-m+1+k} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\delta_1}^A \partial_{m+1\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} A_{\delta_m}^B \right) \\
&[T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= +\frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+5}{m+k+2} \\
&\quad \partial_{\gamma} A_{\rho}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\sigma} A_{\mu}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\
&\quad + \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
&\quad \partial_{\gamma} A_{\rho}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\sigma} \partial_{\nu} C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ig^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta\gamma\delta}{l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \frac{1}{l-m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{n\delta} \partial_\beta A_\nu^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& - \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta\gamma\delta}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
& \quad \frac{l+1-m}{l-m+k+2} \partial_\gamma \partial_\rho C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{n\delta} \partial_\beta \partial_\nu A_\sigma^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\
& - \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \frac{\Theta\gamma\delta}{l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+4}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+k+2} \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\rho A_\mu^A \partial_{n\delta} \partial_\beta \partial_\nu A_\sigma^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_l \\
& - \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta\gamma\delta}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{1}{m+k+2} \\
& \quad \partial_\gamma A_\rho^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\mu A_\sigma^A \partial_{n\delta} \partial_\beta \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\
& - \frac{ig^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta\gamma\delta}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+3} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho A_\kappa^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\mu \partial_\lambda A_\sigma^A \partial_{n\delta} \partial_\beta \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+2} \\
& - \frac{ig^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta\gamma\delta}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho A_\kappa^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\mu A_\sigma^A \partial_{n\delta} \partial_\beta \partial_\lambda \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+2} \\
& + \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta\gamma\delta}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+1+k} \partial_\gamma \partial_\rho C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\mu A_\sigma^A \partial_{n\delta} \partial_\beta A_\nu^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\
& + \frac{ig^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta\gamma\delta}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+2}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \frac{l+1-m}{l-m+2+k} \partial_\gamma \partial_\rho \partial_\kappa C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\mu A_\sigma^A \partial_{n\delta} \partial_\beta \partial_\nu A_\lambda^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+2} \\
& = + \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta\gamma\delta}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+5}{m+k+2} \\
& \quad \partial_\gamma A_\rho^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\sigma A_\mu^A \partial_{n\delta} \partial_\beta \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma A_\rho^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\sigma \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\
& + \frac{ig^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \frac{1}{l-m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{m\delta} \partial_\beta A_\nu^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& - \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
& \quad \frac{l+1-m}{l-m+k+2} \partial_\gamma \partial_\rho C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\nu A_\sigma^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\
& - \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+4}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+k+2} \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\rho A_\mu^A \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\nu A_\sigma^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_l \\
& + \frac{ig^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma A_\rho^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma^A \partial_{m\delta} \partial_\beta C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
& - \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho A_\kappa^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\lambda A_\sigma^A \partial_{m\delta} \partial_\beta C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+2} \\
& - \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho A_\kappa^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma^A \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\lambda C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+2} \\
& + \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+1+k} \partial_\gamma \partial_\rho C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\mu A_\sigma^A \partial_{m\delta} \partial_\beta A_\nu^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\
& + \frac{g^2}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+2}{m+1} \frac{m+1}{m+k+1} \\
& \quad \frac{l+1-m}{l-m+1+k} \partial_\gamma \partial_\rho \partial_\kappa C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma^A \partial_{m\delta} \partial_\beta A_\lambda^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+2}
\end{aligned}$$

Dabei verschwindet der mit (*) gekennzeichnete Term aus Symmetriegründen:

$$\begin{aligned}
& \Theta^{\mu\nu} \Theta^{\alpha\beta} \partial_{(\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} A_{\nu}^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
& \quad = (-1)^{k+1} \Theta^{\nu\mu} \Theta^{\beta\alpha} \partial_{(\beta} A_{\nu}^B \partial_{\alpha} A_{\mu}^A [T_A, T_B]_{k+1} \\
& \quad = -\Theta^{\mu\nu} \Theta^{\alpha\beta} \partial_{(\alpha} A_{\mu}^B \partial_{\beta} A_{\nu}^A [T_B, T_A]_{k+1} \\
& \quad = -\Theta^{\mu\nu} \Theta^{\alpha\beta} \partial_{(\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} A_{\nu}^B [T_A, T_B]_{k+1} \quad (\text{C.12})
\end{aligned}$$

Diese Reihen lassen sich im Prinzip durch bekannte analytische Funktionen ausdrücken (vgl. Anhang 4.4.7). Dies führt jedoch zu keinen schönen Ausdrücken. Insbesondere muss hierzu die Matrixstruktur ausgeklammert werden, d.h. jede Summe proportional zu $[[T_A, T_B]_x, T_C]_y$ müsste zunächst aufgespalten werden in vier Summen proportional zu $[[T_A, T_B], T_C]$, $\{[T_A, T_B], T_C\}$, $\{[T_A, T_B], T_C\}$ und $\{\{T_A, T_B\}, T_C\}$, deren Vorfaktoren dann analytische Funktionen wären.

C.3 $m^{[3]}$ - zweite Korrektur für das Materiefeld

Einsetzen in die Rekursionsformel liefert als zweiten Korrekturterm für das Materiefeld

$$m^{[3]} = -\rho^{[0]} (\gamma^{[1]} m^{[2]} - igC * m^{[2]} - igh^{[2]} * \Psi). \quad (\text{C.13})$$

Der erste Term liefert dabei

$$\begin{aligned}
& -\rho^{[0]} \gamma^{[1]} m^{[2]} = \\
& = +g\rho^{[0]} \gamma^{[1]} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} A_{\alpha} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \\
& = g\rho^{[0]} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \left(g \partial_{\alpha} (f_{DE}{}^B A_{\alpha}^D C^E) T_B \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \right. \\
& \quad \left. + ig \partial_{\alpha} A_{\alpha} \partial_{\beta} \partial_{\beta} (C\Psi) \right)
\end{aligned}$$

Betrachte zunächst den ersten Summand:

$$\begin{aligned}
& -ig^2 \rho^{[0]} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} (A_{\alpha}^D C^E) [T_D, T_E] \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \\
& = -ig^2 \rho^{[0]} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \partial_{\alpha^m} A_{\alpha}^D \partial_{m\alpha} C^E [T_D, T_E] \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \\
& = -ig^2 \rho^{[0]} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \left(\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \partial_{(\alpha^m} A_{\alpha)}^D \partial_{m\alpha} C^E [T_D, T_E] \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=1}^k \binom{k}{m} \frac{m}{m+1} \partial_{(\alpha^{m-1}} F_{\alpha_m}^{[0]D} \partial_{m\alpha} C^E [T_D, T_E] \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -ig^2 \int_0^1 \frac{dt}{t} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k}{m} \partial_{(\alpha^m A_\alpha^D} \partial_{(m\alpha^{k-1} A_{\alpha_k}^E} t^2 \\
&\hspace{15em} [T_D, T_E] \partial_\beta \partial_\beta \Psi \\
&= -i \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k}{m} \partial_{(\alpha^m A_\alpha^D} \partial_{(m\alpha^{k-1} A_{\alpha_k}^E} \\
&\hspace{15em} [T_D, T_E] \partial_\beta \partial_\beta \Psi \\
&= -i \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k}{m} \partial_{\alpha^m A_\alpha^D} \partial_{m\alpha^{k-1} A_{\alpha_k}^E} \\
&\hspace{15em} [T_D, T_E] \partial_\beta \partial_\beta \Psi \\
&= + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \sum_{m=0}^k \binom{k+1}{m} \partial_{\alpha^m A_\alpha^D} \partial_{m\alpha A_\rho^E} \\
&\hspace{15em} [T_D, T_E] \partial_\beta \partial_\sigma \partial_\beta \Psi \\
&= \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+c+2)!} \binom{b+c+1}{b} A_\alpha^D A_\rho^E \\
&\hspace{15em} [T_D, T_E] \partial_\sigma \partial_\beta \Psi \\
&= \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+c+2)!} A_\alpha^D A_\rho^E \\
&\hspace{10em} \left(\binom{b+c+1}{b} - \binom{b+c+1}{c} \right) T_D T_E \partial_\sigma \partial_\beta \Psi \\
&= \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+c+2)!} \binom{b+c}{b} \frac{(b+c+1)(b-c)}{(b+1)(c+1)} \\
&\hspace{15em} A_\alpha^D A_\rho^E T_D T_E \partial_\sigma \partial_\beta \Psi \\
&= \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+1)!(c+1)!} \frac{b-c}{(b+c+2)} \\
&\hspace{15em} A_\alpha^D A_\rho^E T_D T_E \partial_\sigma \partial_\beta \Psi \\
&=: m_1^{[3]}
\end{aligned}$$

Der zweite Summand liefert nun

$$\begin{aligned}
&+ ig^2 \rho^{[0]} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_\alpha A_\alpha \partial_\beta \partial_\beta (C\Psi) \\
&= ig^2 \rho^{[0]} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha A_\alpha} \partial_\beta \partial_\beta (C\Psi) \\
&= ig^2 \rho^{[0]} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{(\alpha A_\alpha} \partial_\beta (\partial_\beta C\Psi + C\partial_\beta \Psi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ig^2 \rho^{[0]} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \partial_{(\alpha} A_{\alpha)} (\partial_{\beta^m} \partial_{\beta} C \partial_{m\beta} \Psi + \partial_{\beta^m} C \partial_{m\beta} \partial_{\beta} \Psi) \\
&= ig^2 \int_0^1 \frac{dt}{t} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \left(\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \partial_{(\alpha} A_{\alpha)} \partial_{(\beta^m} A_{\beta)} \partial_{m\beta} \Psi t^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^k \binom{k}{m} \partial_{(\alpha} A_{\alpha)} \partial_{(\beta^{m-1}} A_{\beta_m)} \partial_{m\beta} \partial_{\beta} \Psi t^2 \right) \\
&= i \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \left(\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \partial_{(\alpha} A_{\alpha)} \partial_{\beta^m} A_{\beta} \partial_{m\beta} \Psi \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^k \binom{k}{m} \partial_{(\alpha} A_{\alpha)} \partial_{\beta^{m-1}} A_{\beta_m} \partial_{m\beta} \partial_{\beta} \Psi \right) \\
&= i \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \left(\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{1}{k+1} \partial_{\alpha} A_{\alpha} \partial_{\beta^m} A_{\beta} \partial_{m\beta} \Psi \right. \\
&\quad + \sum_{m=1}^k \binom{k}{m} \frac{m}{k+1} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha} A_{\alpha_1} \partial_{\beta^m} A_{\beta} \partial_{m\beta} \Psi \\
&\quad + \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k}{m} \frac{k-m}{k+1} \partial_{\alpha_k} \partial_{\alpha} A_{\alpha_k} \partial_{\beta^m} A_{\beta} \partial_{m\beta} \Psi \\
&\quad + \sum_{m=1}^k \binom{k}{m} \frac{k-m+1}{k+1} \partial_{\alpha} A_{\alpha} \partial_{\beta^{m-1}} A_{\beta_m} \partial_{m\beta} \partial_{\beta} \Psi \\
&\quad + \sum_{m=2}^k \binom{k}{m} \frac{m-1}{k+1} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha} A_{\alpha_1} \partial_{\beta^{m-1}} A_{\beta_m} \partial_{m\beta} \partial_{\beta} \Psi \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^k \binom{k}{m} \frac{1}{k+1} \partial_{\alpha_m} \partial_{\alpha} A_{\alpha_m} \partial_{\beta^{m-1}} A_{\beta_m} \partial_{m\beta} \partial_{\beta} \Psi \right) \\
&= i \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{1}{k+1} \partial_{\alpha} A_{\alpha} \partial_{\beta^m} A_{\beta} \partial_{m\beta} \Psi \\
&\quad - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \sum_{m=0}^k \binom{k+1}{m+1} \frac{m+1}{k+2} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu} \partial_{\beta^m} \partial_{\nu} A_{\beta} \partial_{m\beta} \Psi \\
&\quad - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \sum_{m=0}^k \binom{k+1}{m} \frac{k+1-m}{k+2} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu} \partial_{\beta^m} A_{\beta} \partial_{m\beta} \partial_{\nu} \Psi \\
&\quad - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \sum_{m=0}^k \binom{k+1}{m+1} \frac{k-m+1}{k+2} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha} \partial_{\beta^m} A_{\nu} \partial_{m\beta} \partial_{\beta} \Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+3)!} \sum_{m=0}^k \binom{k+2}{m+2} \frac{m+1}{k+3} \partial_\alpha \partial_\rho \partial_\alpha A_\mu \partial_{\beta^m} \partial_\nu A_\sigma \partial_{m\beta} \partial_\beta \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \sum_{m=0}^k \binom{k+1}{m+1} \frac{1}{k+2} \partial_\alpha \partial_\alpha A_\mu \partial_{\beta^m} A_\nu \partial_{m\beta} \partial_\beta \Psi \\
= & i \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{1}{k+1} \partial_\alpha A_\alpha \partial_{\beta^m} A_\beta \partial_{m\beta} \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \sum_{m=0}^k \binom{k+1}{m+1} \frac{m+1}{k+2} \partial_\alpha \partial_\alpha A_\mu \partial_{\beta^m} \partial_\nu A_\beta \partial_{m\beta} \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \sum_{m=0}^k \binom{k+1}{m+1} \partial_\alpha \partial_\alpha A_\mu \partial_{\beta^m} A_\beta \partial_{m\beta} \partial_\nu \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k+1}{m+2} \frac{m+1}{k+2} \partial_\alpha \partial_\rho A_\mu \partial_{\beta^m} \partial_\nu A_\sigma \partial_{m\beta} \Psi \\
& + i \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k}{m+1} \frac{1}{k+1} \partial_\alpha A_\mu \partial_{\beta^m} A_\nu \partial_{m\beta} \Psi \\
= & i \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{1}{m+1} \partial_\alpha A_\alpha \partial_{\beta^m} A_\beta \partial_{m\beta} \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \sum_{m=0}^k \binom{k+1}{m+1} \frac{m+1}{m+2} \partial_\alpha \partial_\alpha A_\mu \partial_{\beta^m} \partial_\nu A_\beta \partial_{m\beta} \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \sum_{m=0}^k \binom{k+1}{m+1} \partial_\alpha \partial_\alpha A_\mu \partial_{\beta^m} A_\beta \partial_{m\beta} \partial_\nu \Psi \\
= & : m_2^{[3]}
\end{aligned}$$

Der zweite Term ist

$$\begin{aligned}
& ig\rho^{[0]} C * m^{[2]} = \\
& = -ig^2 \rho^{[0]} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_\gamma C \partial_\delta (\partial_\alpha A_\alpha \partial_\beta \partial_\beta \Psi) \\
& = -ig^2 \rho^{[0]} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \partial_\gamma C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\alpha \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\beta \Psi \\
& = -ig^2 \rho^{[0]} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \left(\sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \partial_\gamma C \partial_{(\delta^m \partial_\alpha A_\alpha)} \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\beta \Psi \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \partial_\gamma C \partial_{\delta^{m-1}} \partial_\alpha F_{\delta m \alpha}^{[0]} \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\beta \Psi \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -ig^2 \int_0^1 \frac{dt}{t} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
&\quad \left(\sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \partial_{(\gamma_l A_{\gamma_l})} \partial_{(\delta^m \partial_{\alpha} A_{\alpha})} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi t^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \partial_{(\gamma_l A_{\gamma_l})} \partial_{\delta^{m-1}} \partial_{\alpha} F_{\delta_m \alpha}^{[0]} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi t \right) \\
&= -ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
&\quad \left(\frac{1}{2} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \partial_{(\gamma_l A_{\gamma_l})} \partial_{(\delta^m \partial_{\alpha} A_{\alpha})} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \partial_{(\gamma_l A_{\gamma_l})} \partial_{\delta^{m-1}} \partial_{\alpha} F_{\delta_m \alpha}^{[0]} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \right) \\
&= -\frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{l} \\
&\quad \partial_{\gamma_l A_{\gamma_l}} \partial_{(\delta^m \partial_{\alpha} A_{\alpha})} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \\
&- \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^{l-1} \binom{l}{m} \frac{l-m}{l} \\
&\quad \partial_{\gamma_l A_{\gamma_l}} \partial_{(\delta^m \partial_{\alpha} A_{\alpha})} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \\
&- ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \\
&\quad \partial_{(\gamma_l A_{\gamma_l})} \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \\
&+ ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \\
&\quad \partial_{(\gamma_l A_{\gamma_l})} \partial_{\delta^{m-1}} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\delta_m} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \Big) \\
&= -\frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{l} \frac{k+1}{m+k+1} \\
&\quad \partial_{\gamma_l A_{\gamma_l}} \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \\
&- \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=2}^l \binom{l}{m} \frac{m}{l} \frac{m-1}{m+k+1} \\
&\quad \partial_{\gamma_l A_{\gamma_l}} \partial_{\delta^{m-1}} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\delta_m} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_{\gamma_1} A_{\gamma_1} \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\delta_1} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \\
& - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^{l-1} \binom{l-1}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma_1} A_{\gamma_1} \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \\
& + \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=1}^{l-1} \binom{l-1}{m-1} \frac{l-m}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma_1} A_{\gamma_1} \partial_{\delta^{m-1}} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\delta_m} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \\
& = + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+3}{m+k+2} \\
& \quad \partial_{\gamma} A_{\mu} \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\nu} A_{\alpha} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \\
& - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+3} \\
& \quad \partial_{\gamma} \partial_{\rho} A_{\mu} \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\nu} \partial_{\alpha} A_{\sigma} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{1}{m+k+2} \\
& \quad \partial_{\gamma} A_{\mu} \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\nu} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma} A_{\mu} \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} \partial_{\beta} \Psi \\
& - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \frac{l-m+1}{m+k+2} \\
& \quad \partial_{\gamma} \partial_{\rho} A_{\mu} \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\sigma} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} \partial_{\beta} \Psi \\
& = \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+3}{m+k+2} \\
& \quad \partial_{\gamma} A_{\mu} \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\nu} A_{\alpha} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\beta} \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \partial_{\gamma} \partial_{\rho} A_{\mu} \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\nu} A_{\sigma} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \Psi \\
& + \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma} A_{\mu} \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\nu} \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma A_\mu \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\alpha \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\nu \partial_\beta \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \frac{l-m+1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho A_\mu \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\nu \Psi \\
& = + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+3}{m+k+2} \\
& \quad \partial_\gamma A_\mu \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\nu A_\alpha \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\beta \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho A_\mu \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\nu A_\sigma \partial_{m\delta} \partial_\beta \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+2} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho A_\mu \partial_{\delta^m} \partial_\nu A_\sigma \partial_{m\delta} \Psi \\
& + \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma A_\mu \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\nu \partial_{m\delta} \partial_\beta \Psi \\
& - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{1}{m+1} \\
& \quad \partial_\gamma A_\mu \partial_{\delta^m} A_\nu \partial_{m\delta} \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma A_\mu \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\alpha \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\nu \partial_\beta \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \frac{l-m+1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho A_\mu \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\nu \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \frac{l-m+1}{m+1} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho A_\mu \partial_{\delta^m} A_\sigma \partial_{m\delta} \partial_\nu \Psi \\
& =: m_3^{[3]}
\end{aligned}$$

In der Summe $m_2^{[3]} + m_3^{[3]}$ heben sich also genau die „Randterme“ (d.h. die Summen

mit nur zwei Indizes) heraus, und man erhält insgesamt:

$$\begin{aligned}
& m_2^{[3]} + m_3^{[3]} = \\
& = \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+3}{m+k+2} \\
& \quad \partial_\gamma A_\mu \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\nu A_\alpha \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\beta \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho A_\mu \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\nu A_\sigma \partial_{m\delta} \partial_\beta \Psi \\
& + \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma A_\mu \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\nu \partial_{m\delta} \partial_\beta \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma A_\mu \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\alpha \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\nu \partial_\beta \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \frac{l-m+1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho A_\mu \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\nu \Psi \\
& = + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+b+1)!(c+1)!} \binom{a+b}{a} \frac{2a+c+3}{a+c+2} \\
& \quad A_\mu \partial_\nu A_\alpha \partial_\beta \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+b+2)!c!} \binom{a+b+1}{a+1} \frac{a+1}{a+c+2} \\
& \quad \partial_\rho A_\mu \partial_\nu A_\sigma \Psi \\
& + \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+b+1)!c!} \binom{a+b}{a} \frac{1}{a+c+1} \\
& \quad A_\mu A_\nu \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+b+1)!(c+1)!} \binom{a+b}{a} \frac{2a+c+1}{a+c+1} \\
& \quad A_\mu A_\alpha \partial_\nu \partial_\beta \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+b+2)!c!} \binom{a+b+1}{a} \frac{b+1}{a+c+1} \\
& \quad \partial_\rho A_\mu A_\sigma \partial_\nu \Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!(a+b+1)(c+1)!} \frac{2a+c+3}{a+c+2} \\
&\quad A_\mu \partial_\nu A_\alpha \partial_\beta \Psi \\
&- \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!c!} \frac{1}{(a+c+2)(a+b+2)} \\
&\quad \partial_\rho A_\mu \partial_\nu A_\sigma \Psi \\
&+ \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!c!} \frac{1}{(a+c+1)(a+b+1)} \\
&\quad A_\mu A_\nu \Psi \\
&+ \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!(c+1)!} \frac{2a+c+1}{(a+c+1)(a+b+1)} \\
&\quad A_\mu A_\alpha \partial_\nu \partial_\beta \Psi \\
&- \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!c!} \frac{1}{(a+c+1)(a+b+2)} \\
&\quad \partial_\rho A_\mu A_\sigma \partial_\nu \Psi
\end{aligned}$$

Der dritte Term liefert nun

$$\begin{aligned}
&ig\rho^{[0]}h^{[2]} * \Psi = \\
&= - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \rho^{[0]} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_\gamma (\partial_\alpha A_\alpha^A \partial_\beta \partial_\beta C^B) [T_A, T_B]_{k+1} \partial_\delta \Psi \\
&= - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \rho^{[0]} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \\
&\quad \partial_{\gamma^m} \partial_\alpha A_\alpha^A \partial_{m\gamma} \partial_\beta \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_\delta \Psi \\
&= - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \rho^{[0]} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \\
&\quad \partial_{(\gamma^m} \partial_\alpha A_\alpha^A) \partial_{m\gamma} \partial_\beta \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_\delta \Psi \\
&- \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \rho^{[0]} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \\
&\quad \partial_{\gamma^{m-1}} \partial_\alpha F_{\gamma m \alpha}^{[0]A} \partial_{m\gamma} \partial_\beta \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_\delta \Psi \\
&= -g^2 \int_0^1 \frac{dt}{t} \left[\frac{i}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \right. \\
&\quad \left. \partial_{(\gamma^m} \partial_\alpha A_\alpha^A) \partial_{(m\gamma} \partial_\beta A_\beta^B) [T_A, T_B]_{k+1} \partial_\delta \Psi \right] t^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \\
& \quad \left. \partial_{\gamma^{m-1}} \partial_{\alpha} F_{\gamma_m \alpha}^{[0]A} \partial_{(m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta)}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \Psi t \right] \\
= & - \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{k+1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha}^A \partial_{(m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta)}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \Psi \\
& - \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma^{m-1}} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\gamma_m}^A \partial_{(m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta)}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \Psi \\
& - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha}^A \partial_{(m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta)}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \Psi \\
& + \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma^{m-1}} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\gamma_m}^A \partial_{(m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta)}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \Psi \\
= & - \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha}^A \partial_{(m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta)}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \Psi \\
& + \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma^{m-1}} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\gamma_m}^A \partial_{(m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta)}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \Psi \\
= & - \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1} \frac{1}{l-m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \Psi \\
& - \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1} \frac{k}{l-m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta_k} \partial_{\beta} A_{\beta_k}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \Psi \\
& - \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1} \frac{l-m}{l-m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha}^A \partial_{m\gamma^{l-1}} \partial_{\beta} \partial_{\beta} A_{\gamma_l}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \frac{k+1}{l-m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma^{m-1}} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\gamma^m}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \Psi \\
& + \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \frac{l-m}{l-m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma^{m-1}} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\gamma^m}^A \partial_{m\gamma^{l-1}} \partial_{\beta} \partial_{\beta} A_{\gamma^l}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \Psi \\
= & - \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1} \frac{1}{l-m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \Psi \\
& + \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+2}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+k+2} \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} \partial_{\beta} A_{\nu}^B [T_A, T_B]_{k+2} \partial_{\delta} \Psi \\
& + \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1} \\
& \quad \frac{l+1-m}{l-m+k+2} \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} \partial_{\beta} A_{\mu}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \partial_{\nu} \Psi \\
& - \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+k+1} \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \partial_{\nu} \Psi \\
& - \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+2}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \frac{l+1-m}{l-m+k+2} \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} \partial_{\beta} A_{\rho}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \partial_{\nu} \partial_{\sigma} \Psi \\
= & - \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1} \frac{1}{l-m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \Psi \\
& + \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+2}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+k+2} \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} \partial_{\beta} A_{\nu}^B [T_A, T_B]_k \partial_{\delta} \Psi \\
& + \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{l+1-m}{l-m+k+2} \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} \partial_{\beta} A_{\mu}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \partial_{\nu} \Psi \\
& - \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+k+1} \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \partial_{\nu} \Psi \\
& - \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \sum_{m=0}^l \binom{l+2}{m+1} \frac{m+1}{m+k+1} \\
& \quad \frac{l+1-m}{l-m+k+1} \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} A_{\rho}^B [T_A, T_B]_k \partial_{\delta} \partial_{\nu} \partial_{\sigma} \Psi \\
= & - \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1} \frac{1}{l-m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \Psi \\
& + \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+2}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+k+2} \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} \partial_{\beta} A_{\nu}^B [T_A, T_B]_k \partial_{\delta} \Psi \\
& + \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1} \\
& \quad \frac{l+1-m}{l-m+k+2} \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} \partial_{\beta} A_{\mu}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \partial_{\nu} \Psi \\
& - \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+k+1} \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \partial_{\nu} \Psi \\
= & : m_4^{[3]}
\end{aligned}$$

Dabei verschwindet der letzte Term aus Symmetriegründen (betrachte die Vertauschung $A_{\mu}^A \leftrightarrow A_{\rho}^B$). $m_4^{[3]}$ lässt sich noch in die kanonische Form bringen:

$$\begin{aligned}
m_4^{[3]} & = \\
& = - \frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1} \frac{1}{l-m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \Psi \\
& + \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{l!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{2m+k+2}{m+k+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{k+1}{l-m+k+2} \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} \partial_{\beta} A_{\nu}^B [T_A, T_B]_k \partial_{\delta} \Psi \\
& + \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \frac{2m+k+1}{m+k+1} \\
& \quad \frac{l+1-m}{l-m+k+2} \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} A_{\alpha}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} \partial_{\beta} A_{\mu}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \partial_{\nu} \Psi \\
& - \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+k+1} \partial_{\gamma^m} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\gamma} \partial_{\beta} A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{k+1} \partial_{\delta} \partial_{\nu} \Psi \\
& = -\frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+c)!(a+1)!} \binom{b+c}{b} \frac{2b+a+1}{b+a+1} \frac{1}{c+a+1} \\
& \quad A_{\alpha}^A A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{a+1} \Psi \\
& + \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+c)!(a+2)!} \binom{b+c}{b} \frac{2b+a+2}{b+a+2} \\
& \quad \frac{a+1}{c+a+2} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{\beta} A_{\nu}^B [T_A, T_B]_a \Psi \\
& + \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+c+1)!(a+1)!} \binom{b+c+1}{b} \frac{2b+a+1}{b+a+1} \\
& \quad \frac{c+1}{c+a+2} A_{\alpha}^A \partial_{\beta} A_{\mu}^B [T_A, T_B]_{a+1} \partial_{\nu} \Psi \\
& - \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+c+1)!(a+1)!} \binom{b+c+1}{b+1} \frac{b+1}{b+a+2} \\
& \quad \frac{a+1}{c+a+1} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{a+1} \partial_{\nu} \Psi \\
& = -\frac{ig^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!(a+1)!} \frac{2b+a+1}{b+a+1} \frac{1}{c+a+1} \\
& \quad A_{\alpha}^A A_{\beta}^B [T_A, T_B]_{a+1} \Psi \\
& + \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!(a+2)!} \frac{2b+a+2}{b+a+2} \\
& \quad \frac{a+1}{c+a+2} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{\beta} A_{\nu}^B [T_A, T_B]_a \Psi \\
& + \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!(a+1)!} \frac{2b+a+1}{b+a+1} \\
& \quad \frac{1}{c+a+2} A_{\alpha}^A \partial_{\beta} A_{\mu}^B [T_A, T_B]_{a+1} \partial_{\nu} \Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{g^2}{4} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!a!} \frac{1}{b+a+2} \\
& \quad \frac{1}{c+a+1} \partial_\alpha A_\mu^A A_\beta^B [T_A, T_B]_{a+1} \partial_\nu \Psi \\
= & - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!(a+1)!} \frac{b-c}{(a+b+1)(a+c+1)} \\
& \quad A_\alpha^A A_\beta^B T_A T_B \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!(a+2)!} \frac{b-c}{a+b+2} \\
& \quad \frac{a+1}{a+c+2} \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta A_\nu^B T_A T_B \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!a!} \frac{1}{(a+c+2)(a+1)} \\
& \quad A_\alpha^A \partial_\beta A_\mu^B T_A T_B \partial_\nu \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!a!} \frac{1}{(a+b+2)(a+1)} \\
& \quad \partial_\alpha A_\mu^A A_\beta^B T_A T_B \partial_\nu \Psi
\end{aligned}$$

Die Summe der vier Terme lässt sich noch vereinfachen zu $m^{[3]} =$

$$\begin{aligned}
= & + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+1)!(c+1)!} \frac{(b-c)}{(b+c+2)} \\
& \quad A_\alpha A_\rho \partial_\sigma \partial_\beta \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!(a+b+1)(c+1)!} \frac{2a+c+3}{a+c+2} \\
& \quad A_\mu \partial_\nu A_\alpha \partial_\beta \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!c!} \frac{1}{(a+c+2)(a+b+2)} \\
& \quad \partial_\rho A_\mu \partial_\nu A_\sigma \Psi \\
& + \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!c!} \frac{1}{(a+c+1)(a+b+1)} \\
& \quad A_\mu A_\nu \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!(c+1)!} \frac{2a+c+1}{(a+c+1)(a+b+1)} \\
& \quad A_\mu A_\alpha \partial_\nu \partial_\beta \Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!c!} \frac{1}{(a+c+1)(a+b+2)} \\
& \quad \partial_\rho A_\mu A_\sigma \partial_\nu \Psi \\
& - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!(a+1)!} \frac{b-c}{(a+c+1)(a+b+1)} \quad (C.14) \\
& \quad A_\alpha A_\beta \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!(a+2)!} \frac{b-c}{a+b+2} \\
& \quad \frac{a+1}{a+c+2} \partial_\mu A_\alpha \partial_\beta A_\nu \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!a!} \frac{1}{(a+c+2)(a+1)} \\
& \quad A_\alpha^A \partial_\beta A_\mu^B T_A T_B \partial_\nu \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!a!} \frac{1}{(a+b+2)(a+1)} \\
& \quad \partial_\alpha A_\mu^A A_\beta^B T_A T_B \partial_\nu \Psi \\
& = \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+1)!b!c!} \frac{a-b+c+1}{(a+c+1)(a+b+1)} \\
& \quad A_\mu A_\nu \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!c!(a+2)} \frac{a-b+c+2}{(a+c+2)(a+b+2)} \\
& \quad \partial_\rho A_\mu \partial_\nu A_\sigma \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!c!} \left(\frac{2}{(a+b+1)(c+1)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{(a+b+1)(a+c+2)} + \frac{1}{(a+c+2)(a+1)} \right) A_\mu \partial_\nu A_\alpha \partial_\beta \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+1)!b!c!} \frac{2a+c+2}{(a+c+1)(a+b+2)} \\
& \quad \partial_\rho A_\mu A_\sigma \partial_\nu \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+1)!(c+1)!} \frac{(b-c)}{(b+c+2)} \\
& \quad A_\alpha A_\rho \partial_\sigma \partial_\beta \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!(c+1)!} \frac{2a+c+1}{(a+c+1)(a+b+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_\mu A_\alpha \partial_\nu \partial_\beta \Psi \\
= & \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} M_I^{[3]}(i\wedge_{12}, i\wedge_{13}, i\wedge_{23}) A_\mu A_\nu \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{II}^{[3]}(i\wedge_{12}, i\wedge_{13}, i\wedge_{23}) \partial_\rho A_\mu \partial_\nu A_\sigma \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} M_{IIIa}^{[3]}(i\wedge_{12}, i\wedge_{13}, i\wedge_{23}) A_\mu \partial_\nu A_\alpha \partial_\beta \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIb}^{[3]}(i\wedge_{12}, i\wedge_{13}, i\wedge_{23}) \partial_\rho A_\mu A_\sigma \partial_\nu \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IV}^{[3]}(i\wedge_{12}, i\wedge_{13}, i\wedge_{23}) A_\alpha A_\rho \partial_\sigma \partial_\beta \Psi
\end{aligned}$$

Die Funktionen $M_I^{[3]}$ bis $M_{IV}^{[3]}$ lassen sich noch durch analytische Funktionen darstellen. Die Ausdrücke, die man erhält, sind jedoch sehr unübersichtlich und auch für die numerische Auswertung (zumindest bei kleinen Impulsen) ungeeignet. Das Resultat befindet sich im Anhang 4.4.7.

D Überprüfung der Seiberg-Witten-Abbildung

D.1 Überprüfung des Geistfeldes

Einsetzen in die bestimmende Gleichung (3.8a) liefert (bis inklusive 3. Ordnung in den Feldern)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{ig}{2}[\hat{C} * \hat{C}] - \gamma\hat{C} \\
&\doteq \frac{ig}{2}[C * C] + \frac{ig}{2}[C * h^{[2]}] + \frac{ig}{2}[h^{[2]} * C] - \gamma C - \gamma h^{[2]} - \gamma^{[0]}h^{[3]} \\
&= igC * C + igC * h^{[2]} + igh^{[2]} * C - igCC - \gamma h^{[2]} - \gamma^{[0]}h^{[3]} \quad (\text{D.1})
\end{aligned}$$

Berechne zunächst:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{g^2}\gamma^{[0]}h_1^{[3]} = \\
&= - \frac{1}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \\
&\quad \partial_{\alpha^i} \partial_{\mu} C^D \partial_{\alpha^j} A_{\rho}^E \partial_{\beta} \partial_{\sigma} \partial_{\nu} C^B [[T_D, T_E], T_B]_k \\
& - \frac{1}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \\
&\quad \partial_{\alpha^i} A_{\mu}^D \partial_{\alpha^j} \partial_{\rho} C^E \partial_{\beta} \partial_{\sigma} \partial_{\nu} C^B [[T_D, T_E], T_B]_k \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l+1} \frac{1}{k+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
&\quad \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{\beta^i} A_{\nu}^D \partial_{\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l+1} \frac{1}{k+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
&\quad \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta^i} \partial_{\nu} C^D \partial_{\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& + \frac{1}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k+1}{l+2} \frac{l+1}{k+2} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \\
&\quad \partial_{\alpha} \partial_{\mu} \partial_{\rho} C^A \partial_{\beta^i} \partial_{\sigma} A_{\nu}^D \partial_{\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k+1}{l+2} \frac{l+1}{k+2} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \\
& \quad \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\rho}^A \partial_{\beta^i} \partial_{\sigma} \partial_{\nu} C^D \partial_{\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_k \\
& + \frac{1}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l+1} \frac{k+1-l}{k+2} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \\
& \quad \partial_{\alpha} \partial_{\mu} \partial_{\rho} C^A \partial_{\beta^i} A_{\nu}^D \partial_{\beta} \partial_{\sigma} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_k \\
& + \frac{1}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l+1} \frac{k+1-l}{k+2} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \\
& \quad \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\rho}^A \partial_{\beta^i} \partial_{\nu} C^D \partial_{\beta} \partial_{\sigma} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_k \\
& = \frac{i}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \binom{k}{l-1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \quad \partial_{\alpha^i} C^D \partial_{\alpha} A_{\rho}^E \partial_{\beta} \partial_{\sigma} C^B [[T_D, T_E], T_B]_{k+1} \\
& + \frac{i}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \quad \partial_{\alpha^i} A_{\mu}^D \partial_{\alpha} C^E \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B [[T_D, T_E], T_B]_{k+1} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l+1} \frac{1}{k+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \quad \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{\beta^i} A_{\nu}^D \partial_{\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l+1} \frac{1}{k+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \quad \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta^i} \partial_{\nu} C^D \partial_{\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l+1} \frac{l}{k+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \quad \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{\beta^i} A_{\nu}^D \partial_{\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l+1} \frac{l}{k+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \quad \partial_{\alpha} A_{\rho}^A \partial_{\beta^i} \partial_{\sigma} C^D \partial_{\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l+1} \frac{k-l}{k+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \quad \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{\beta^i} A_{\nu}^D \partial_{\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \frac{k-l+1}{k+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_\alpha A_\rho^A \partial_{\beta'} C^D \partial_{\beta} \partial_\sigma C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
= & + \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \binom{k}{l-1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \partial_\alpha \partial_\rho C^A \partial_{\beta'} C^D \partial_\beta A_\sigma^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& + \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \partial_\alpha \partial_\mu C^A \partial_{\beta'} A_\nu^D \partial_\beta C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \partial_\alpha \partial_\mu C^A \partial_{\beta'} A_\nu^D \partial_\beta C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l+1} \frac{l+1}{k+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{\beta'} \partial_\nu C^D \partial_\beta C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \frac{l+1}{k+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \partial_\alpha A_\rho^A \partial_{\beta'} \partial_\sigma C^D \partial_\beta C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
= & - \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \partial_\alpha \partial_\rho C^A \partial_{\beta'} A_\sigma^D \partial_\beta C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \frac{k-2l-1}{l+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \partial_\alpha \partial_\mu C^A \partial_{\beta'} A_\nu^D \partial_\beta C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{\beta'} \partial_\nu C^D \partial_\beta C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
= & - \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \frac{2k-3l-1}{l+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \partial_\alpha \partial_\mu C^A \partial_{\beta'} A_\nu^D \partial_\beta C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{\beta'} \partial_\nu C^D \partial_\beta C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= + \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{3l+3}{l+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
&\quad \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{\beta^l} A_{\nu}^D \partial_{\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&- \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{2k+2}{l+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
&\quad \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{\beta^l} A_{\nu}^D \partial_{\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&+ \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-k-1}{k+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
&\quad \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{\beta} A_{\nu}^D (C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&- \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
&\quad \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta^l} \partial_{\nu} C^D \partial_{\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&+ \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^D (C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&= + \frac{i}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{\beta} (A_{\nu}^D C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&- \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{k+1}{l+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
&\quad \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{\beta^l} A_{\nu}^D \partial_{\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&- \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{\beta} A_{\nu}^D (C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&- \frac{i}{12} (3-2) \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} \partial_{\nu} (C^D C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&+ \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^D (C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&= + \frac{i}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} (A_{\mu}^D C^E) \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B [[T_D, T_E], T_B]_{k+1} \\
&- \left(\frac{i}{4} - \frac{i}{6}\right) \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} \partial_{\nu} (C^D C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
&- \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{k+1}{l+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
&\quad \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{\beta^l} A_{\nu}^D \partial_{\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{\beta} A_{\nu}^D (C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& + \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^D (C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
= & \frac{1}{g^2} \gamma^{[1]} h^{[2]} \\
& + \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} \partial_{\nu} (C^D C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& - \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{k+1}{l+1} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \\
& \qquad \qquad \qquad \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{\beta} A_{\nu}^D \partial_{\beta} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{\beta} A_{\nu}^D (C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& + \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^D (C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
= & \frac{1}{g^2} \gamma^{[1]} h^{[2]} \\
& + \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{\beta} (C^D \partial_{\nu} C^E) [T_A, [T_D, T_E]]_{k+1} \\
& - \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a,b} \binom{a+b}{a} \frac{a+b+1}{a+1} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b}{(a+b+1)!} \\
& \qquad \qquad \qquad \partial_{\mu} C^A A_{\nu}^D C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{a+b+1} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a}{(a+1)!} \partial_{\mu} C^A A_{\nu}^D C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{a+1} \\
& + \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a}{(a+1)!} A_{\mu}^A \partial_{\nu} C^D C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{a+1} \\
= & \frac{1}{g^2} \gamma^{[1]} h^{[2]} \\
& + \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a,b} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b}{(a+b+1)!} \binom{a+b}{a} A_{\mu}^A C^D \partial_{\nu} C^E [T_A, [T_D, T_E]]_{a+b+1} \\
& - \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{b,c} \binom{b+c}{b} \frac{b+c+1}{b+1} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+c+1)!} \\
& \qquad \qquad \qquad A_{\mu}^D C^E \partial_{\nu} C^A [[T_D, T_E], T_A]_{b+c+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{(i \wedge_{13})^b}{(b+1)!} A_{\mu}^D C^E \partial_{\nu} C^A [[T_D, T_E], T_A]_{b+1} \\
& -\frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{(i \wedge_{13})^b}{(b+1)!} A_{\mu}^D C^E \partial_{\nu} C^A [T_D, [T_A, T_E]]_{b+1}
\end{aligned}$$

(vgl. Gleichung (C.10)).

Berechne weiter

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{g^2} \gamma^{[0] h_2^{[3]}} \\
& = -\frac{1}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i \frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)! (l+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+5}{m+k+2} \\
& \quad \partial_{\gamma} \partial_{\rho} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\sigma} A_{\mu}^A \partial_{n\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\
& -\frac{1}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i \frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)! (l+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+5}{m+k+2} \\
& \quad \partial_{\gamma} A_{\rho}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\sigma} \partial_{\mu} C^A \partial_{n\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\
& -\frac{1}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i \frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)! (l+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma} \partial_{\rho} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{n\delta} \partial_{\beta} \partial_{\sigma} \partial_{\nu} C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\
& -\frac{1}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i \frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)! (l+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma} A_{\rho}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{n\delta} \partial_{\beta} \partial_{\sigma} \partial_{\nu} C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\
& +\frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i \frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \frac{1}{l-m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{n\delta} \partial_{\beta} A_{\nu}^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& +\frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i \frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \frac{1}{l-m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{n\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& -\frac{1}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i \frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)! (l+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
& \quad \frac{l+1-m}{l-m+k+2} \partial_{\gamma} \partial_{\rho} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{n\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} A_{\sigma}^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
& \quad \frac{l+1-m}{l-m+k+2} \partial_\gamma \partial_\rho C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{n\delta} \partial_\beta \partial_\nu \partial_\sigma C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\
& - \frac{1}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+4}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+k+2} \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\rho \partial_\mu C^A \partial_{n\delta} \partial_\beta \partial_\nu A_\sigma^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_l \\
& - \frac{1}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+2)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+4}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+k+2} \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\rho A_\mu^A \partial_{n\delta} \partial_\beta \partial_\nu \partial_\sigma C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_l \\
& - \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma^A \partial_{n\delta} \partial_\beta C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
& - \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma A_\rho^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\sigma C^A \partial_{n\delta} \partial_\beta C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
& + \frac{1}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho \partial_\kappa C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\lambda A_\sigma^A \partial_{n\delta} \partial_\beta C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+2} \\
& + \frac{1}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho A_\kappa^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\lambda \partial_\sigma C^A \partial_{n\delta} \partial_\beta C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+2} \\
& + \frac{1}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho \partial_\kappa C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma^A \partial_{n\delta} \partial_\beta \partial_\lambda C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+2} \\
& + \frac{1}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho A_\kappa^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\sigma C^A \partial_{n\delta} \partial_\beta \partial_\lambda C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+1+k} \partial_\gamma \partial_\rho C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\mu \partial_\sigma C^A \partial_{n_\delta} \partial_\beta A_\nu^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\
& + \frac{1}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+2} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+1+k} \partial_\gamma \partial_\rho C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\mu A_\sigma^A \partial_{n_\delta} \partial_\beta \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_{l+1} \\
& + \frac{1}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+2}{m+1} \frac{m+1}{m+k+1} \\
& \quad \frac{l+1-m}{l-m+1+k} \partial_\gamma \partial_\rho \partial_\kappa C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\sigma C^A \partial_{n_\delta} \partial_\beta A_\lambda^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+2} \\
& + \frac{1}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+2)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+2}{m+1} \frac{m+1}{m+k+1} \\
& \quad \frac{l+1-m}{l-m+1+k} \partial_\gamma \partial_\rho \partial_\kappa C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma^A \partial_{n_\delta} \partial_\beta \partial_\lambda C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+2} \\
& = \frac{i}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=1}^l \binom{l-1}{m-1} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{n_\delta} \partial_\beta \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& + \frac{i}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+3}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma A_\rho^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\sigma C^A \partial_{n_\delta} \partial_\beta C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
& + \frac{i}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=0}^{l-1} \binom{l-1}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{n_\delta} \partial_\beta \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& + \frac{i}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k}{m+k} \\
& \quad \partial_\gamma A_\rho^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha C^A \partial_{n_\delta} \partial_\beta \partial_\sigma C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
& + \frac{i}{12} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l}\Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \frac{1}{l-m+k+1} \\
& \quad \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\mu C^A \partial_{n_\delta} \partial_\beta A_\nu^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \frac{1}{l-m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{n\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& + \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{k! (l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \frac{3m+2k}{m+k} \\
& \quad \frac{l+1-m}{l-m+k+1} \partial_{\gamma} \partial_{\rho} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} C^A \partial_{n\delta} \partial_{\beta} A_{\sigma}^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
& + \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=0}^{l-1} \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
& \quad \frac{l-m}{l-m+k+1} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{n\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& + \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
& \quad \frac{k}{l-m+k+1} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\rho} C^A \partial_{n\delta} \partial_{\beta} A_{\sigma}^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& + \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
& \quad \frac{k}{l-m+k+1} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{n\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& - \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{k! (l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma} \partial_{\rho} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\sigma}^A \partial_{n\delta} \partial_{\beta} C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
& - \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{k! (l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma} A_{\rho}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\sigma} C^A \partial_{n\delta} \partial_{\beta} C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
& - \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{k! (l+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma} \partial_{\rho} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\sigma}^A \partial_{n\delta} \partial_{\beta} C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
& - \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{k! (l+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma} A_{\kappa}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\lambda} C^A \partial_{n\delta} \partial_{\beta} C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^{l-1} \binom{l}{m+1} \frac{m+1}{m+k+1} \\
& \quad \partial_{\gamma} \partial_{\rho} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\sigma}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
& - \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k} \\
& \quad \partial_{\gamma} A_{\kappa}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} C^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\lambda} C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
& - \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \\
& \quad \frac{k+1}{l-m+1+k} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} A_{\nu}^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
& - \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+1} \\
& \quad \frac{k}{l-m+k} \partial_{\gamma} \partial_{\rho} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\sigma}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
& - \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\kappa\lambda}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=1}^l \binom{l+1}{m} \frac{m}{m+k} \\
& \quad \frac{l-m+1}{l-m+k+1} \partial_{\gamma} \partial_{\kappa} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} C^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} A_{\lambda}^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
& - \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^{l-1} \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+1} \\
& \quad \frac{l-m}{l-m+k} \partial_{\gamma} \partial_{\rho} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\sigma}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
&\quad \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
&+ \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{k! (l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \\
&\quad \partial_{\gamma} A_{\rho}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\sigma} C^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
&+ \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{k! (l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \\
&\quad \partial_{\gamma} A_{\rho}^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} C^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\sigma} C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
&+ \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \frac{k+1}{l-m+k+1} \\
&\quad \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} A_{\nu}^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
&+ \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
&\quad \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\mu}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
&+ \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{k! (l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \\
&\quad \frac{l+1-m}{l-m+k+1} \partial_{\gamma} \partial_{\rho} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} C^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} A_{\sigma}^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
&- \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{k! (l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{l-m+m+1}{m+k+1} \\
&\quad \partial_{\gamma} \partial_{\rho} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\sigma}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
&- \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=1}^l \binom{l}{m} \frac{m}{m+k+1} \\
&\quad \frac{k+1}{l-m+1+k} \partial_{\gamma} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} C^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} A_{\nu}^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
&- \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{k! (l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m+1} \frac{m+1}{m+k+1} \\
&\quad \partial_{\gamma} \partial_{\rho} C^C \partial_{\delta^m} \partial_{\alpha} A_{\sigma}^A \partial_{m\delta} \partial_{\beta} C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
&\quad \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{n\delta} \partial_\beta \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
&+ \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{k! (l+1)!} \\
&\quad \partial_\gamma A_\rho^C \partial_\delta (\partial_\alpha \partial_\sigma C^A \partial_\beta C^B) [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
&+ \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{k+1}{l-m+k+1} \\
&\quad \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha \partial_\mu C^A \partial_{n\delta} \partial_\beta A_\nu^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
&+ \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
&\quad \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{n\delta} \partial_\beta \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
&- \frac{i}{4} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{k! (l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{l+1}{m+k+1} \\
&\quad \partial_\gamma \partial_\rho C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma^A \partial_{n\delta} \partial_\beta C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
&- \frac{i}{12} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{k! (l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{l+1}{m+k+1} \\
&\quad \partial_\gamma \partial_\rho C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma^A \partial_{n\delta} \partial_\beta C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
&= \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+2k+2}{m+k+1} \\
&\quad \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{n\delta} \partial_\beta \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
&+ \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{k! (l+1)!} \\
&\quad \partial_\gamma A_\rho^C \partial_\delta (\partial_\alpha \partial_\sigma C^A \partial_\beta C^B) [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
&- \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ l=1}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{(k+1)! l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{k+1}{m+k+1} \\
&\quad \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{n\delta} \partial_\beta \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
&- \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta} \Theta^{\gamma\delta}}{k! (l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{l+1}{m+k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_\gamma \partial_\rho C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma^A \partial_{m\delta} \partial_\beta C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
= & \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{3m+3k+3}{m+k+1} \\
& \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
+ & \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \\
& \partial_\gamma A_\rho^C \partial_\delta (\partial_\alpha \partial_\sigma C^A \partial_\beta C^B) [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
- & \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{k+1}{m+k+1} \\
& \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
- & \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{l+1}{m+k+1} \\
& \partial_\gamma \partial_\rho C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma^A \partial_{m\delta} \partial_\beta C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
= & -\frac{i}{g} h^{[2]} * C - \frac{i}{g} C * h^{[2]} \\
& - 3 \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} C^C \partial_\alpha A_\mu^A \partial_\beta \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}] \\
+ & \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \\
& \partial_\gamma A_\rho^C \partial_\delta (\partial_\alpha \partial_\sigma C^A \partial_\beta C^B) [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1} \\
- & \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \partial_\gamma A_\rho^C \partial_\delta (\partial_\sigma C^A C^B) [T_C, [T_A, T_B]]_{l+1} \\
- & \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{l!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{k+1}{m+k+1} \\
& \partial_\gamma C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_{m\delta} \partial_\beta \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}]_l \\
+ & \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} C^C \partial_\alpha A_\mu^A \partial_\beta \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{k+1}] \\
- & \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^{k+l} \Theta^{\alpha\beta}}{k!} \frac{\Theta^{\gamma\delta}}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{l+1}{m+k+1} \\
& \partial_\gamma \partial_\rho C^C \partial_{\delta^m} \partial_\alpha A_\sigma^A \partial_{m\delta} \partial_\beta C^B [T_C, [T_A, T_B]_k]_{l+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^l \Theta \gamma^\delta}{(l+1)!} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{l+1}{m+1} \\
& \quad \partial_\gamma \partial_\rho C^C \partial_{\delta^m} A_\sigma^A \partial_{m\delta} C^B [T_C, [T_A, T_B]]_{l+1} \\
= & - \frac{i}{g} h^{[2]} * C - \frac{i}{g} C * h^{[2]} \\
& - \frac{i}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{23})^c}{(c+1)!} C^C A_\mu^A \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{c+1}] \\
& + \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{c!(a+b+1)!} \binom{a+b}{a} \\
& \quad A_\rho^C \partial_\sigma C^A C^B [T_C, [T_A, T_B]_c]_{a+b+1} \\
& - \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \binom{a+b}{a} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b}{(a+b+1)!} A_\rho^C \partial_\sigma C^A C^B [T_C, [T_A, T_B]]_{a+b+1} \\
& - \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(c+1)!(a+b)!} \binom{a+b}{a} \frac{c+1}{a+c+1} \\
& \quad C^C A_\mu^A \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{c+1}]_{a+b} \\
& + \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{23})^c}{(c+1)!} C^C A_\mu^A \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{c+1}] \\
& - \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(c)!(a+b+1)!} \binom{a+b}{a} \frac{a+b+1}{a+c+1} \\
& \quad \partial_\rho C^C A_\sigma^A C^B [T_C, [T_A, T_B]_c]_{a+b+1} \\
& + \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b}{(a+b+1)!} \binom{a+b}{a} \frac{a+b+1}{a+1} \\
& \quad \partial_\rho C^C A_\sigma^A C^B [T_C, [T_A, T_B]]_{a+b+1} \\
= & - \frac{i}{g} h^{[2]} * C - \frac{i}{g} C * h^{[2]} \\
& - \frac{i}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b}{(b+1)!} A_\mu^A C^C \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{b+1}] \\
& + \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{c!(a+b+1)!} \binom{a+b}{a} \\
& \quad A_\rho^C C^A \partial_\sigma C^B [T_C, [T_A, T_B]_c]_{a+b+1} \\
& - \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \binom{a+b}{a} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b}{(a+b+1)!} A_\rho^C C^A \partial_\sigma C^B [T_C, [T_A, T_B]]_{a+b+1} \\
& - \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+1)!(a+c)!} (-1)^a \binom{a+c}{a} \frac{b+1}{a+b+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_\mu^A C^C \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{b+1}]_{a+c} \\
& + \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b}{(b+1)!} A_\mu^A C^C \partial_\nu C^B [T_C, [T_A, T_B]_{b+1}] \\
& - \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!(b+c+1)!} (-1)^{b+c} \binom{b+c}{b} \frac{b+c+1}{a+b+1} \\
& \quad A_\rho^A C^B \partial_\sigma C^C [T_C, [T_A, T_B]_a]_{b+c+1} \\
& + \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+c+1)!} (-1)^{b+c} \binom{b+c}{b} \frac{b+c+1}{b+1} \\
& \quad A_\rho^A C^B \partial_\sigma C^C [T_C, [T_A, T_B]]_{b+c+1} \\
= & -\frac{i}{g} h^{[2]} * C - \frac{i}{g} C * h^{[2]} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b}{(b+1)!} A_\mu^A C^B \partial_\nu C^C [T_B, [T_A, T_C]_{b+1}] \\
& - \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \binom{a+b}{a} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b}{(a+b+1)!} A_\rho^A C^B \partial_\sigma C^C [T_A, [T_B, T_C]]_{a+b+1} \\
& + \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+c+1)!} (-1)^{b+c} \binom{b+c}{b} \frac{b+c+1}{b+1} \\
& \quad A_\rho^A C^B \partial_\sigma C^C [T_C, [T_A, T_B]]_{b+c+1} \\
& + \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c (a+b)!}{c!(a+b+1)! a!b!} \\
& \quad A_\rho^A C^B \partial_\sigma C^C [T_A, [T_B, T_C]_c]_{a+b+1} \\
& - \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+1)!(a+c)!} (-1)^a \frac{(a+c)!}{a!c!} \frac{b+1}{a+b+1} \\
& \quad A_\mu^A C^B \partial_\nu C^C [T_B, [T_A, T_C]_{b+1}]_{a+c} \\
& - \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!(b+c+1)!} (-1)^{b+c} \frac{(b+c)!}{b!c!} \frac{b+c+1}{a+b+1} \\
& \quad A_\rho^A C^B \partial_\sigma C^C [T_C, [T_A, T_B]_a]_{b+c+1} \\
= & -\frac{i}{g} h^{[2]} * C - \frac{i}{g} C * h^{[2]} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b}{(b+1)!} A_\mu^A C^B \partial_\nu C^C [T_B, [T_A, T_C]_{b+1}] \\
& - \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \binom{a+b}{a} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b}{(a+b+1)!} A_\rho^A C^B \partial_\sigma C^C [T_A, [T_B, T_C]]_{a+b+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+c+1)!} \binom{b+c}{b} \frac{b+c+1}{b+1} \\
& \quad A_\rho^A C^B \partial_\sigma C^C [[T_A, T_B], T_C]_{b+c+1} \\
& + \frac{i}{3} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!c!(a+b+1)} A_\rho^A C^B \partial_\sigma C^C \\
& \quad \left([T_A, [T_B, T_C]_c]_{a+b+1} - (-1)^a [T_B, [T_A, T_C]_{b+1}]_{a+c} \right. \\
& \quad \left. - (-1)^{b+c} [T_C, [T_A, T_B]_a]_{b+c+1} \right)
\end{aligned}$$

(vgl. wieder Gleichung (C.10)). Der letzte Term, der als einziger Term verschachtelte Antikommutatoren enthält und daher der einzige relevante Term für den abelschen Fall wäre, verschwindet auf Grund einer verallgemeinerten Jacobi-Identität.

Also ist insgesamt

$$\begin{aligned}
-\gamma^{[0]} h^{[3]} &= \gamma^{[1]} h^{[2]} - igh^{[2]} * C - igC * h^{[2]} \\
& - \frac{i}{6} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b}{(b+1)!} A_\mu^A C^B \partial_\nu C^C \\
& \quad ([T_B, [T_A, T_C]_{b+1}] + [[T_A, T_B], T_C]_{b+1} + [T_A, [T_C, T_B]]_{b+1}) \\
&= \gamma^{[1]} h^{[2]} - igh^{[2]} * C - igC * h^{[2]},
\end{aligned}$$

wieder auf Grund einer verallgemeinerten Jacobi-Identität.

Berechne schließlich für die zweite Ordnung

$$\begin{aligned}
-\gamma^{[0]} h^{[2]} &= \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\vartheta}{2})^k \Theta^{\alpha\beta}}{(k+1)!} \partial_\alpha \partial_\alpha C^A \partial_\beta \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&= -igC * C + igCC \quad (\text{D.2})
\end{aligned}$$

Damit ist Gleichung (D.1) gezeigt.

D.2 Überprüfung des Eichbosons

Zu Überprüfen ist (Gleichung (3.8b):

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu \hat{C} - ig[\hat{A}_\mu * \hat{C}] - \gamma \hat{A}_\mu \\
& \doteq \partial_\mu C + \partial_\mu h^{[2]} - ig[A_\mu * C] - \gamma A_\mu - \gamma^{[0]} f_\mu^{[2]} \\
& = +\partial_\mu h^{[2]} - ig[A_\mu * C] + ig[A_\mu, C] - \gamma^{[0]} f_\mu^{[2]} \quad (\text{D.3})
\end{aligned}$$

Ausgehend von Gleichung (C.9) berechne

$$\gamma^{[0]} f_\mu^{[2]}$$

$$\begin{aligned}
&= g \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \partial_\alpha \partial_\mu C^A A_\beta^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&+ g \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \partial_\alpha A_\mu^A \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&- \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \frac{1}{k+1} \partial_\mu \partial_\alpha C^A A_\beta^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&- \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \frac{1}{k+1} \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&- \frac{ig}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+2)!} \frac{k+1}{k+2} \partial_{\alpha'} \partial_\mu \partial_\alpha C^A \partial_\beta A_{\beta'}^B [T_A, T_B]_k \\
&- \frac{ig}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+2)!} \frac{k+1}{k+2} \partial_{\alpha'} \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta \partial_{\beta'} C^B [T_A, T_B]_k \\
&= g \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \partial_\alpha \partial_\mu C^A A_\beta^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&- ig \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{k!} A_\mu^A C^B [T_A, T_B]_k \\
&- \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \frac{1}{k+1} \partial_\mu \partial_\alpha C^A A_\beta^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&- \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \frac{1}{k+1} \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&- \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \frac{k}{k+1} \partial_{\alpha'} \partial_\mu C^A A_{\beta'}^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&- \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \frac{k}{k+1} \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&= \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \partial_\alpha \partial_\mu C^A A_\beta^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&- ig[A_\mu, *C] + ig[A_\mu, C] \\
&- \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \partial_\mu A_\alpha^A \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&= -\frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} A_\alpha^A \partial_\beta \partial_\mu C^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
&- ig[A_\mu, *C] + ig[A_\mu, C]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{g}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^k}{(k+1)!} \partial_{\mu} A_{\alpha}^A \partial_{\beta} C^B [T_A, T_B]_{k+1} \\
& = \partial_{\mu} h^{[2]} - ig[A_{\mu}, *C] + ig[A_{\mu}, C]
\end{aligned}$$

Damit ist das Ergebnis überprüft.

D.3 Überprüfung des Materiefeldes

Man berechnet einerseits:

$$\begin{aligned}
\gamma^{[0]} m^{[3]} & = \\
& = \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+1)! b! c!} \frac{a-b+c+1}{(a+c+1)(a+b+1)} \\
& \quad \partial_{\mu} C A_{\nu} \Psi \\
& + \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+1)! b! c!} \frac{a-b+c+1}{(a+c+1)(a+b+1)} \\
& \quad A_{\mu} \partial_{\nu} C \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a! b! c! (a+2)} \frac{a-b+c+2}{(a+c+2)(a+b+2)} \\
& \quad \partial_{\rho} \partial_{\mu} C \partial_{\nu} A_{\sigma} \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a! b! c! (a+2)} \frac{a-b+c+2}{(a+c+2)(a+b+2)} \\
& \quad \partial_{\rho} A_{\mu} \partial_{\nu} \partial_{\sigma} C \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a! b! c!} \left(\frac{2}{(a+b+1)(c+1)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{(a+b+1)(a+c+2)} + \frac{1}{(a+c+2)(a+1)} \right) \partial_{\mu} C \partial_{\nu} A_{\alpha} \partial_{\beta} \Psi \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a! b! c!} \left(\frac{2}{(a+b+1)(c+1)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{(a+b+1)(a+c+2)} + \frac{1}{(a+c+2)(a+1)} \right) A_{\mu} \partial_{\nu} \partial_{\alpha} C \partial_{\beta} \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+1)! b! c!} \frac{2a+c+2}{(a+c+1)(a+b+2)} \\
& \quad \partial_{\rho} \partial_{\mu} C A_{\sigma} \partial_{\nu} \Psi \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+1)! b! c!} \frac{2a+c+2}{(a+c+1)(a+b+2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_\rho A_\mu \partial_\sigma C \partial_\nu \Psi \\
+ & \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+1)!(c+1)!} \frac{(b-c)}{(b+c+2)} \\
& \partial_\alpha C A_\rho \partial_\sigma \partial_\beta \Psi \\
+ & \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+1)!(c+1)!} \frac{(b-c)}{(b+c+2)} \\
& A_\alpha \partial_\rho C \partial_\sigma \partial_\beta \Psi \\
+ & \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!(c+1)!} \frac{2a+c+1}{(a+c+1)(a+b+1)} \\
& \partial_\mu C A_\alpha \partial_\nu \partial_\beta \Psi \\
+ & \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!(c+1)!} \frac{2a+c+1}{(a+c+1)(a+b+1)} \\
& A_\mu \partial_\alpha C \partial_\nu \partial_\beta \Psi \\
= & \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+1)!b!c!} \frac{a-b+c+1}{(a+c+1)(a+b+1)} \\
& \partial_\mu C A_\nu \Psi \\
+ & \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+1)!b!c!} \frac{a-b+c+1}{(a+c+1)(a+b+1)} \\
& A_\mu \partial_\nu C \Psi \\
+ & \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a-1)!b!c!(a+1)} \frac{a-b+c+1}{(a+c+1)(a+b+1)} \\
& \partial_\rho C A_\sigma \Psi \\
+ & \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a-1)!b!c!(a+1)} \frac{a-b+c+1}{(a+c+1)(a+b+1)} \\
& A_\mu \partial_\nu C \Psi \\
- & \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a-1)!b!c!} \left(\frac{2}{(a+b)(c+1)} \right. \\
& \left. - \frac{1}{(a+b)(a+c+1)} + \frac{1}{(a+c+1)(a)} \right) C A_\alpha \partial_\beta \Psi \\
- & \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta \Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!(c-1)!} \left(\frac{2}{(a+b+1)(c)} \right. \\
& \left. - \frac{1}{(a+b+1)(a+c+1)} + \frac{1}{(a+c+1)(a+1)} \right) A_\mu \partial_\nu C \Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+1)!(b-1)!c!} \frac{2a+c+2}{(a+c+1)(a+b+1)} \\
& \quad \partial_\rho C A_\sigma \Psi \\
& + \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!c!} \frac{2a+c}{(a+c)(a+b+1)} \\
& \quad A_\mu C \partial_\nu \Psi \\
& - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} \sum_{b=1}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!(c+1)!} \frac{(b-c-1)}{(b+c+1)} C A_\rho \partial_\sigma \Psi \\
& - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(b+1)!c!} \frac{(b-c+1)}{(b+c+1)} A_\alpha C \partial_\beta \Psi \\
& - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!(b-1)!(c+1)!} \frac{2a+c+1}{(a+c+1)(a+b)} \\
& \quad C A_\alpha \partial_\beta \Psi \\
& - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!c!} \frac{2a+c}{(a+c)(a+b+1)} \\
& \quad A_\mu C \partial_\nu \Psi \\
& = \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+1)!b!c!} \partial_\mu C A_\nu \Psi \\
& - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+1)!b!c!} A_\mu \partial_\nu C \Psi \\
& - ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!} \frac{1}{(a+b+1)} A_\mu \partial_\nu C \Psi \\
& - ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!(c+1)!} C A_\alpha \partial_\beta \Psi \\
& + ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!} \frac{1}{(b+c+1)} C A_\alpha \partial_\beta \Psi \\
& + ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!} \frac{1}{(a+b+1)} A_\mu C \partial_\nu \Psi \\
& - ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!} \frac{1}{(b+c+1)} A_\alpha C \partial_\beta \Psi
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$igC * m^{[2]} + igh^{[2]} * \Psi - \gamma^{[1]} m^{[2]}$$

$$\begin{aligned}
&= -ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(i\wedge_{12})^m (i\wedge_{13})^{k-m} (i\wedge_{23})^l}{m!(k-m)!(l+1)!} C A_\alpha \partial_\beta \Psi \\
&\quad - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{(i\wedge_{12})^k (i\wedge_{13})^m (i\wedge_{23})^{l-m}}{(k+1)!m!(l-m)!} A_\alpha^A \partial_\beta C^B [T_A, T_B]_{k+1} \Psi \\
&\quad - ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(i\wedge_{13})^m (i\wedge_{23})^{k-m}}{m!(k-m)!} \frac{1}{k+1} A_\alpha^A C^B [T_A, T_B] \partial_\beta \Psi \\
&\quad + ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(i\wedge_{12})^m (i\wedge_{13})^{k-m}}{m!(k-m)!} \frac{1}{k+1} (A_\alpha \partial_\beta C \Psi + A_\alpha C \partial_\beta \Psi) \\
&= -ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{a!b!(c+1)!} C A_\alpha \partial_\beta \Psi \\
&\quad - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{(a+1)!b!c!} (A_\alpha \partial_\beta C + \partial_\alpha C A_\beta) \Psi \\
&\quad - ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^k \frac{(i\wedge_{13})^b (i\wedge_{23})^c}{b!c!} \frac{1}{b+c+1} (A_\alpha C + C A_\alpha) \partial_\beta \Psi \\
&\quad + ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^k \frac{(i\wedge_{12})^a (i\wedge_{13})^b}{a!b!} \frac{1}{a+b+1} (A_\alpha \partial_\beta C \Psi + A_\alpha C \partial_\beta \Psi)
\end{aligned}$$

Also ist insgesamt

$$\gamma^{[0]}m^{[3]} + \gamma^{[1]}m^{[2]} = ig(C * m^{[2]} + h^{[2]} * \Psi), \quad (\text{D.4})$$

und dies ist gerade die Seiberg-Witten-Gleichung (3.8c) in der dritten Ordnung in den Feldern.

E Rechnungen zu den Feynmanregeln

E.1 Der Drei-Bosonen-Vertex

Die relevanten Terme für den Drei-Bosonen-Vertex (Diagramm siehe Abschnitt 5.3.2) in der Lagrangedichte (5.5) sind

$$\mathcal{L}_{\text{ggg}} = -\text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu}^{[1]} \hat{F}^{[2]\mu\nu} - \frac{2}{\lambda} \text{Tr} (\partial^\mu A_\mu) (\partial^\nu \hat{A}_\nu^{[2]}) \quad (\text{E.1})$$

Der erste Term ist ausgeschrieben

$$\begin{aligned} -\text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu}^{[1]} \hat{F}^{[2]\mu\nu} &= -\text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu}^{[1]} \partial^\mu A^{[2]\nu} + \text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu}^{[1]} \partial^\nu A^{[2]\mu} + ig \text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu}^{[1]} [A^\mu * A^\nu] \\ &= -2\text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu}^{[1]} \partial^\mu A^{[2]\nu} + 2ig \text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu}^{[1]} (A^\mu * A^\nu) \\ &= -2\text{Tr} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^{[2]\nu} + 2\text{Tr} \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^{[2]\nu} \\ &\quad + 2ig \text{Tr} \partial_\mu A_\nu (A^\mu * A^\nu) - 2ig \text{Tr} \partial_\nu A_\mu (A^\mu * A^\nu) \\ &= +2\text{Tr} (\partial^\mu \partial_\mu A_\nu) A^{[2]\nu} - 2\text{Tr} (\partial^\mu \partial_\nu A_\mu) A^{[2]\nu} \\ &\quad + 2ig \text{Tr} \partial_\mu A_\nu (A^\mu * A^\nu) - 2ig \text{Tr} \partial_\nu A_\mu (A^\mu * A^\nu). \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Im letzten Schritt wurde in der ersten Zeile partiell integriert. Man erhält also insgesamt (nach einer weiteren partiellen Integration)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ggg}} &= +2\text{Tr} (\partial^\mu \partial_\mu A_\nu - (1 - \frac{1}{\lambda}) \partial^\mu \partial_\nu A_\mu) A^{[2]\nu} \\ &\quad + 2ig \text{Tr} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (A^\mu * A^\nu) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Setze nun $A^{[2]\nu}$ in die erste Zeile ein und erhalte:

$$\begin{aligned} &+ 2\text{Tr} (\partial^\mu \partial_\mu A_\nu) A^{[2]\nu} - 2\text{Tr} (\partial^\mu \partial_\nu A_\mu) A^{[2]\nu} \\ &= +2g \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} (\partial^\mu \partial_\mu A_\nu^C - (1 - \frac{1}{\lambda}) \partial^\mu \partial_\nu A_\mu^C) \frac{\sin(\wedge_{12})}{\wedge_{12}} \partial_\alpha A_A^\nu A_\beta^B \text{Tr} T_C \{T_A, T_B\} \\ &\quad - 2ig \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} (\partial^\mu \partial_\mu A_\nu^C - (1 - \frac{1}{\lambda}) \partial^\mu \partial_\nu A_\mu^C) \frac{\cos(\wedge_{12}) - 1}{\wedge_{12}} \partial_\alpha A_A^\nu A_\beta^B \text{Tr} T_C [T_A, T_B] \\ &\quad - g \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} (\partial^\mu \partial_\mu A_\nu^C - (1 - \frac{1}{\lambda}) \partial^\mu \partial_\nu A_\mu^C) \frac{S^{(2)}(\wedge_{12})}{\wedge_{12}} \partial^\nu A_\alpha^A A_\beta^B \text{Tr} T_C \{T_A, T_B\} \\ &\quad + ig \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} (\partial^\mu \partial_\mu A_\nu^C - (1 - \frac{1}{\lambda}) \partial^\mu \partial_\nu A_\mu^C) \frac{C^{(2)}(\wedge_{12}) - 1}{\wedge_{12}} \partial^\nu A_\alpha^A A_\beta^B \text{Tr} T_C [T_A, T_B] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} (\partial^\mu \partial_\mu A_\nu^C - (1 - \frac{1}{\lambda}) \partial^\mu \partial_\nu A_\mu^C) \frac{\sin(\Lambda_{12}) - S^{(2)}(\Lambda_{12})}{\Lambda_{12}^2} \\
& \qquad \qquad \qquad \partial_{\alpha'} \partial^\nu A_\alpha^A \partial_\beta A_{\beta'}^B \text{Tr } T_C \{T_A, T_B\} \\
& + ig \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} (\partial^\mu \partial_\mu A_\nu^C - (1 - \frac{1}{\lambda}) \partial^\mu \partial_\nu A_\mu^C) \frac{\cos(\Lambda_{12}) - C^{(2)}(\Lambda_{12})}{\Lambda_{12}^2} \\
& \qquad \qquad \qquad \partial_{\alpha'} \partial^\nu A_\alpha^A \partial_\beta A_{\beta'}^B \text{Tr } T_C [T_A, T_B]
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\begin{aligned}
\text{Tr } T_A [T_B, T_C] &= \frac{1}{2} i f_{ABC} \\
\text{Tr } T_A \{T_B, T_C\} &= \frac{1}{2} d_{ABC}
\end{aligned}$$

lässt sich dies nach Fouriertransformation schreiben als

$$\begin{aligned}
& + g \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} (-\eta^2 A_\nu^C + (1 - \frac{1}{\lambda}) \eta^\mu \eta_\nu A_\mu^C) \frac{\sin(-(p\Theta q))}{-(p\Theta q)} (-ip_\alpha) A_A^\nu A_\beta^B d_{CAB} \\
& - ig \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} (-\eta^2 A_\nu^C + (1 - \frac{1}{\lambda}) \eta^\mu \eta_\nu A_\mu^C) \frac{\cos(-(p\Theta q)) - 1}{-(p\Theta q)} (-ip_\alpha) A_A^\nu A_\beta^B i f_{CAB} \\
& - \frac{g}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} (-\eta^2 A_\nu^C + (1 - \frac{1}{\lambda}) \eta^\mu \eta_\nu A_\mu^C) \frac{S^{(2)}(-(p\Theta q))}{-(p\Theta q)} (-ip^\nu) A_\alpha^A A_\beta^B d_{CAB} \\
& + \frac{ig}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} (-\eta^2 A_\nu^C + (1 - \frac{1}{\lambda}) \eta^\mu \eta_\nu A_\mu^C) \frac{C^{(2)}(-(p\Theta q)) - 1}{-(p\Theta q)} (-ip^\nu) A_\alpha^A A_\beta^B i f_{CAB} \\
& - \frac{g}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} (-\eta^2 A_\nu^C + (1 - \frac{1}{\lambda}) \eta^\mu \eta_\nu A_\mu^C) \frac{\sin(-(p\Theta q)) - S^{(2)}(-(p\Theta q))}{(p\Theta q)^2} \\
& \qquad \qquad \qquad (-ip_{\alpha'}) (-ip^\nu) A_\alpha^A (-iq_\beta) A_{\beta'}^B d_{CAB} \\
& + \frac{ig}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} (-\eta^2 A_\nu^C + (1 - \frac{1}{\lambda}) \eta^\mu \eta_\nu A_\mu^C) \frac{\cos(-(p\Theta q)) - C^{(2)}(-(p\Theta q))}{(p\Theta q)^2} \\
& \qquad \qquad \qquad (-ip_{\alpha'}) (-ip^\nu) A_\alpha^A (-iq_\beta) A_{\beta'}^B i f_{CAB} \\
& = \frac{ig}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \left\{ \left(2 \frac{\sin(p\Theta q)}{(p\Theta q)} p_\alpha \delta_\beta^\sigma \delta_\nu^\rho - \frac{S^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)} p_\nu \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma \right) d_{CAB} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \left(2 \frac{\cos(p\Theta q) - 1}{(p\Theta q)} p_\alpha \delta_\beta^\sigma \delta_\nu^\rho - \frac{C^{(2)}(p\Theta q) - 1}{(p\Theta q)} p_\nu \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma \right) f_{CAB} \right\} \\
& \qquad \qquad \qquad (\eta^2 g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\lambda}) \eta^\mu \eta^\nu) A_\mu^C A_\rho^A A_\sigma^B \\
& - \frac{ig}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} p_{\alpha'} p_\nu q_\beta \delta_\alpha^\rho \delta_{\beta'}^\sigma \left\{ \frac{\sin(p\Theta q) - S^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} d_{CAB} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{\cos(p\Theta q) - C^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} f_{CAB} \right\} (\eta^2 g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\lambda}) \eta^\mu \eta^\nu) A_\mu^C A_\rho^A A_\sigma^B \quad (\text{E.4})
\end{aligned}$$

Dieser Term muss nun noch mit i multipliziert und in den Bosonen (A, ρ) , (B, σ) und (C, μ) symmetrisiert werden. Für die spätere Anwendung ist die vollständige Symmetrisierung jedoch nicht nötig: Man erkennt nämlich, dass sämtliche Terme proportional sind zu

$$(\eta^2 g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\lambda})\eta^\mu \eta^\nu) A_\mu^C.$$

Dies ist aber genau die freie Bewegungsgleichung für das Eichboson A_μ^C (inklusive der Eichfixierung). Für den Fall, dass A_μ^C „on-shell“ ist, verschwindet der Beitrag dieses Terms also. Später werden die Feynmanregeln nur für den Fall benötigt, dass zwei der drei Eichbosonen, die auf den Dreiervertex treffen, „on-shell“ sind. Also bleiben von der symmetrisierten Feynmanregel nur die Terme übrig, für die $A_\mu^C(\eta)$ virtuell ist. Dies sind genau zwei Terme, die aus Gleichung (E.4) durch Vertauschung von (A, ρ) und (B, σ) entstehen. Die vollständige Feynmanregel erhält man, indem man zusätzlich noch unter den zyklischen Vertauschungen von (A, ρ) , (B, σ) und (C, μ) symmetrisiert.

Betrachte nun die zweite Zeile von Gleichung (E.3):

$$\begin{aligned} & 2ig(\text{Tr } \partial_\nu A_\mu(A^\mu * A^\nu) - \text{Tr } \partial_\mu A_\nu(A^\mu * A^\nu)) \\ &= 2ig(\partial_\mu A_\nu^C - \partial_\nu A_\mu^C) \exp(i\wedge_{12}) A_A^\mu A_B^\nu \text{Tr } T_C T_A T_B \\ &= \frac{ig}{2}(\partial_\mu A_\nu^C - \partial_\nu A_\mu^C) \cos(\wedge_{12}) A_A^\mu A_B^\nu if_{CAB} \\ &\quad - \frac{g}{2}(\partial_\mu A_\nu^C - \partial_\nu A_\mu^C) \sin(\wedge_{12}) A_A^\mu A_B^\nu d_{CAB} \\ &\rightsquigarrow \frac{ig}{2}((-i\eta_\mu)A_\nu^C - (-i\eta_\nu)A_\mu^C) \cos(-(p\Theta q)) A_A^\mu A_B^\nu if_{CAB} \\ &\quad - \frac{g}{2}((-i\eta_\mu)A_\nu^C - (-i\eta_\nu)A_\mu^C) \sin(-(p\Theta q)) A_A^\mu A_B^\nu d_{CAB} \\ &= \frac{ig}{2}(g^{\mu\sigma}\eta^\rho - g^{\mu\rho}\eta^\sigma) f_{CAB} \cos(p\Theta q) A_\mu^C A_\rho^A A_\sigma^B \\ &\quad - \frac{ig}{2}(g^{\mu\sigma}\eta^\rho - g^{\mu\rho}\eta^\sigma) d_{CAB} \sin(p\Theta q) A_\mu^C A_\rho^A A_\sigma^B \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wurde die Exponentialreihe aufgespalten in Terme, die symmetrisch bzw. antisymmetrisch unter der Vertauschung $A_A^\mu \leftrightarrow A_B^\nu$. Dadurch kann $2\text{Tr } T_C T_A T_B$ durch $\text{Tr } T_A \{T_B, T_C\} = \frac{1}{2}d_{ABC}$ bzw. $\text{Tr } T_A [T_B, T_C] = \frac{1}{2}if_{ABC}$ ersetzt werden (vgl. die Rechnung (4.22)).

Multiplikation mit i und Symmetrisieren führt zur Feynmanregel

$$\begin{aligned} & g(f_{ABC} \cos(p\Theta q) - d_{ABC} \sin(p\Theta q)) \\ & (g^{\mu\rho}(\eta - p)^\sigma + g^{\rho\sigma}(p - q)^\mu + g^{\sigma\mu}(q - \eta)^\rho) A_\mu^C A_\rho^A A_\sigma^B \end{aligned}$$

Dabei wurde die Impulserhaltung ausgenutzt: Aus $p + q + \eta = 0$ folgt

$$\begin{aligned} p\Theta q &= -p\Theta p - p\Theta \eta = \eta\Theta p \\ &= -\eta\Theta \eta - \eta\Theta q = q\Theta \eta \end{aligned}$$

Man erkennt, dass diese Feynmanregel im Grenzfall $\vartheta \rightarrow 0$ in die bekannte kommutative Feynmanregel übergeht (vgl Abschnitt 6).

Insgesamt erhält man also als Feynmanregel für den Drei-Eichbosonen-Vertex für den Fall, dass nur das Eichboson $\hat{A}_\mu^C(\eta)$ virtuell ist¹, den Ausdruck

$$\begin{aligned}
& g(f_{ABC} \cos(p\Theta q) - d_{ABC} \sin(p\Theta q)) \\
& \quad (g^{\mu\rho}(\eta - p)^\sigma + g^{\rho\sigma}(p - q)^\mu + g^{\sigma\mu}(q - \eta)^\rho) \\
& - \frac{g}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \left\{ \left(2 \frac{\sin(p\Theta q)}{(p\Theta q)} (p_\alpha \delta_\beta^\sigma \delta_\nu^\rho + q_\alpha \delta_\beta^\rho \delta_\nu^\sigma) - \frac{S^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)} (p_\nu - q_\nu) \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma \right) d_{CAB} \right. \\
& \quad - \left(2 \frac{\cos(p\Theta q) - 1}{(p\Theta q)} (p_\alpha \delta_\beta^\sigma \delta_\nu^\rho + q_\alpha \delta_\beta^\rho \delta_\nu^\sigma) \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - \frac{C^{(2)}(p\Theta q) - 1}{(p\Theta q)} (p_\nu - q_\nu) \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma \right) f_{CAB} \right\} \\
& \quad (\eta^2 g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\lambda}) \eta^\mu \eta^\nu) \\
& + \frac{g}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} p_{\alpha'} (p_\nu - q_\nu) q_\beta \delta_\alpha^\rho \delta_{\beta'}^\sigma \\
& \quad \left\{ \frac{\sin(p\Theta q) - S^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} d_{CAB} - \frac{\cos(p\Theta q) - C^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} f_{CAB} \right\} \\
& \quad (\eta^2 g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\lambda}) \eta^\mu \eta^\nu).
\end{aligned}$$

E.2 Der Kontaktvertex

Die relevanten Terme für den Kontaktvertex (Diagramm siehe Abschnitt 5.3.4) in der Lagrangedichte (5.5) sind

$$\mathcal{L}_{\text{q}\bar{\text{q}}\text{gg}} = + \sum_a \overline{\hat{\Psi}_a^{[2]}} (i\hat{\not{D}} - m) \hat{\Psi}_a^{[2]} \quad (\text{E.5})$$

$$+ \sum_a \overline{\Psi}_a (i\hat{\not{D}} - m) \hat{\Psi}_a^{[3]} + \sum_a \overline{\hat{\Psi}_a^{[3]}} (i\hat{\not{D}} - m) \Psi_a \quad (\text{E.6})$$

$$+ g \sum_{a,b} \overline{\Psi}_a [\hat{A}_{ab} * \hat{\Psi}_b^{[2]}] + g \sum_{a,b} \overline{\Psi}_a [\hat{A}_{ab}^{[2]} * \Psi_b] + g \sum_{a,b} \overline{\hat{\Psi}_a^{[2]}} [\hat{A}_{ab} * \Psi_b]$$

Der erste Term ergibt

$$\begin{aligned}
& \sum_a \overline{\hat{\Psi}_a^{[2]}} (i\hat{\not{D}} - m) \hat{\Psi}_a^{[2]} \\
& = (+ig \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\exp(i\wedge_{12}) - 1}{\wedge_{12}} (\partial_\beta \overline{\Psi}) A_\alpha)
\end{aligned}$$

¹Anderenfalls wäre noch der zweite Teil der Feynmanregel zyklisch zu symmetrisieren.

$$\begin{aligned}
& (i\cancel{\partial} - m)(+ig \frac{\cancel{\partial}\Theta^{\alpha'\beta'} \exp(i\wedge_{12}) - 1}{2 \wedge_{12}} A_{\alpha'} \partial_{\beta'} \Psi) \\
\rightsquigarrow & -g^2 \frac{\cancel{\partial}\Theta^{\alpha\beta} \exp(-i(k\Theta p)) - 1}{2 -(k\Theta p)} (-ik_{\beta}) \bar{\Psi} A_{\alpha} \\
& (\cancel{q} + \cancel{l} - m) \frac{\cancel{\partial}\Theta^{\alpha'\beta'} \exp(-i(q\Theta l)) - 1}{2 -(q\Theta l)} A_{\alpha'} (-il_{\beta'}) \Psi \\
= & g^2 \frac{\cancel{\partial}\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\cancel{\partial}\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \frac{\exp(-i(k\Theta p)) - 1}{(k\Theta p)} k_{\beta} \bar{\Psi} A_{\alpha} \\
& (\cancel{q} + \cancel{l} - m) \frac{\exp(-i(q\Theta l)) - 1}{(q\Theta l)} A_{\alpha'} l_{\beta'} \Psi
\end{aligned}$$

Da der Vertex symmetrisch ist unter der Vertauschung der beiden Eichbosonen, muss noch symmetrisiert werden. Multiplikation mit i liefert dann die Feynmanregel

$$\begin{aligned}
& ig^2 \frac{\cancel{\partial}\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\cancel{\partial}\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\alpha'}^{\nu} \\
& \left(k_{\beta} l_{\beta'} (\cancel{q} + \cancel{l} - m) \frac{\exp(-i(q\Theta l)) - 1}{(q\Theta l)} \frac{\exp(-i(k\Theta p)) - 1}{(k\Theta p)} T_A T_B \right. \\
& \left. + l_{\beta} k_{\beta'} (\cancel{p} + \cancel{l} - m) \frac{\exp(-i(p\Theta l)) - 1}{(p\Theta l)} \frac{\exp(-i(k\Theta q)) - 1}{(k\Theta q)} T_B T_A \right)
\end{aligned}$$

Betrachte als nächstes den Term

$$+g \sum_{a,b} \bar{\Psi}_a [A_{ab} * \hat{\Psi}_b^{[2]}].$$

Mit Hilfe der Formel (5.3) lässt sich dieser Term wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
& +g \bar{\Psi} [A * \hat{\Psi}^{[2]}] \\
& = g [\bar{\Psi} * A] \hat{\Psi}^{[2]} \\
& = g \exp(i\wedge_{12}) \bar{\Psi} A ig \frac{\cancel{\partial}\Theta^{\alpha\beta} \exp(i\wedge_{12}) - 1}{2 \wedge_{12}} A_{\alpha} \partial_{\beta} \Psi \\
\rightsquigarrow & ig^2 \frac{\cancel{\partial}\Theta^{\alpha\beta}}{2} \exp(-ik\Theta p) \frac{\exp(-iq\Theta l) - 1}{-q\Theta l} A_{\alpha} (-il_{\beta}) \Psi \\
& = -g^2 \frac{\cancel{\partial}\Theta^{\alpha\beta}}{2} \exp(-ik\Theta p) \bar{\Psi} A \frac{\exp(-iq\Theta l) - 1}{q\Theta l} A_{\alpha} l_{\beta} \Psi
\end{aligned}$$

Symmetrisieren und Multiplikation mit i führt zur Feynmanregel

$$\begin{aligned}
& -ig^2 \frac{\cancel{\partial}\Theta^{\alpha\beta}}{2} l_{\beta} \left(\exp(-ik\Theta p) \frac{\exp(-iq\Theta l) - 1}{q\Theta l} \delta_{\alpha}^{\nu} \gamma^{\mu} T_A T_B \right. \\
& \left. + \exp(-ik\Theta q) \frac{\exp(-ip\Theta l) - 1}{p\Theta l} \delta_{\alpha}^{\mu} \gamma^{\nu} T_B T_A \right)
\end{aligned}$$

Analog führt der Term

$$\begin{aligned}
& + g \overline{\hat{\Psi}}^{[2]}[\hat{A} * \Psi] \\
& = g \left(+ig \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \exp(i\Lambda_{12}) - 1}{2 \Lambda_{12}} (\partial_\beta \overline{\Psi}) A_\alpha \exp(i\Lambda_{12}) \hat{A} \Psi \right. \\
& \rightsquigarrow ig^2 \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \exp(-ik\Theta p) - 1}{2 -k\Theta p} (-ik_\beta) \overline{\Psi} A_\alpha \exp(-iq\Theta l) \hat{A} \Psi \\
& = -g^2 \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \exp(-ik\Theta p) - 1}{2 k\Theta p} k_\beta \overline{\Psi} A_\alpha \exp(-iq\Theta l) \hat{A} \Psi
\end{aligned}$$

zur Feynmanregel

$$\begin{aligned}
& - ig^2 \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta}}{2} k_\beta \left(\delta_\alpha^\mu \gamma^\nu \frac{\exp(-ik\Theta p) - 1}{k\Theta p} \exp(-iq\Theta l) T_A T_B \right. \\
& \quad \left. + \delta_\alpha^\nu \gamma^\mu \frac{\exp(-ik\Theta q) - 1}{k\Theta q} \exp(-ip\Theta l) T_B T_A \right)
\end{aligned}$$

Der Term

$$\begin{aligned}
& + g \overline{\hat{\Psi}}[\hat{A}^{[2]} * \Psi] \\
& = g \overline{\Psi} \exp(i\Lambda_{12}) \gamma^\rho \\
& \left(+g \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \sin(\Lambda_{12})}{2 \Lambda_{12}} \partial_\alpha A_\rho^A A_\beta^B \{T_A, T_B\} \right. \\
& \quad - ig \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \cos(\Lambda_{12}) - 1}{2 \Lambda_{12}} \partial_\alpha A_\rho^A A_\beta^B [T_A, T_B] \\
& \quad - \frac{g \vartheta \Theta^{\alpha\beta} S^{(2)}(\Lambda_{12})}{2 \cdot 2 \Lambda_{12}} \partial_\rho A_\alpha^A A_\beta^B \{T_A, T_B\} \\
& \quad + \frac{ig \vartheta \Theta^{\alpha\beta} C^{(2)}(\Lambda_{12}) - 1}{2 \cdot 2 \Lambda_{12}} \partial_\rho A_\alpha^A A_\beta^B [T_A, T_B] \\
& \quad - \frac{g \vartheta \Theta^{\alpha\beta} \vartheta \Theta^{\alpha'\beta'} \sin(\Lambda_{12}) - S^{(2)}(\Lambda_{12})}{2 \cdot 2 \cdot 2 \Lambda_{12}^2} \partial_{\alpha'} \partial_\rho A_\alpha^A \partial_\beta A_{\beta'}^B \{T_A, T_B\} \\
& \quad \left. + \frac{ig \vartheta \Theta^{\alpha\beta} \vartheta \Theta^{\alpha'\beta'} \cos(\Lambda_{12}) - C^{(2)}(\Lambda_{12})}{2 \cdot 2 \cdot 2 \Lambda_{12}^2} \partial_{\alpha'} \partial_\rho A_\alpha^A \partial_\beta A_{\beta'}^B [T_A, T_B] \right) \Psi \\
& \rightsquigarrow g^2 \overline{\Psi} \exp(-i(p+q)\Theta l) \gamma^\rho \\
& \left(+ \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \sin(-p\Theta q)}{2 -p\Theta q} (-ip_\alpha) A_\rho^A A_\beta^B \{T_A, T_B\} \right. \\
& \quad - i \frac{\vartheta \Theta^{\alpha\beta} \cos(-p\Theta q) - 1}{2 -p\Theta q} (-ip_\alpha) A_\rho^A A_\beta^B [T_A, T_B] \\
& \quad - \frac{1 \vartheta \Theta^{\alpha\beta} S^{(2)}(-p\Theta q)}{2 \cdot 2 -p\Theta q} (-ip_\rho) A_\alpha^A A_\beta^B \{T_A, T_B\} \\
& \quad \left. + \frac{i \vartheta \Theta^{\alpha\beta} C^{(2)}(-p\Theta q) - 1}{2 \cdot 2 -p\Theta q} (-ip_\rho) A_\alpha^A A_\beta^B [T_A, T_B] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \frac{\sin(-p\Theta q) - S^{(2)}(-p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} (-p_{\alpha'} p_{\rho}) A_{\alpha}^A(-iq_{\beta}) A_{\beta'}^B\{T_A, T_B\} \\
& + \frac{i}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \frac{\cos(-p\Theta q) - C^{(2)}(-p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} (-p_{\alpha'} p_{\rho}) A_{\alpha}^A(-iq_{\beta}) A_{\beta'}^B[T_A, T_B] \Big) \\
& \qquad \qquad \qquad \Psi \\
& = g^2 \bar{\Psi} \exp(-i(p+q)\Theta l) \gamma^{\rho} \\
& \quad \left(-i \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} p_{\alpha} \delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \frac{\sin(p\Theta q)}{p\Theta q} \{T_A, T_B\} \right. \\
& \quad + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} p_{\alpha} \delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \frac{\cos(p\Theta q) - 1}{p\Theta q} [T_A, T_B] \\
& \quad + \frac{i}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} p_{\rho} \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \frac{S^{(2)}(p\Theta q)}{p\Theta q} \{T_A, T_B\} \\
& \quad - \frac{1}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} p_{\rho} \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \frac{C^{(2)}(p\Theta q) - 1}{p\Theta q} [T_A, T_B] \\
& \quad + \frac{i}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} p_{\alpha'} p_{\rho} q_{\beta} \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta'}^{\nu} \frac{\sin(p\Theta q) - S^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} \{T_A, T_B\} \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} p_{\alpha'} p_{\rho} q_{\beta} \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta'}^{\nu} \frac{\cos(p\Theta q) - C^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} [T_A, T_B] \right) \\
& \qquad \qquad \qquad A_{\mu}^A A_{\nu}^B \Psi \\
& = g^2 \bar{\Psi} \exp(ik\Theta l) \gamma^{\rho} \\
& \quad \left(-\frac{i}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \delta_{\beta}^{\nu} \left(2p_{\alpha} \delta_{\rho}^{\mu} \frac{\sin(p\Theta q)}{p\Theta q} - p_{\rho} \delta_{\alpha}^{\mu} \frac{S^{(2)}(p\Theta q)}{p\Theta q} \right) \{T_A, T_B\} \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \delta_{\beta}^{\nu} \left(2p_{\alpha} \delta_{\rho}^{\mu} \frac{\cos(p\Theta q) - 1}{p\Theta q} - p_{\rho} \delta_{\alpha}^{\mu} \frac{C^{(2)}(p\Theta q) - 1}{p\Theta q} \right) [T_A, T_B] \\
& \quad + \frac{i}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} p_{\alpha'} p_{\rho} q_{\beta} \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta'}^{\nu} \left(\frac{\sin(p\Theta q) - S^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} \{T_A, T_B\} \right. \\
& \quad \left. \left. + i \frac{\cos(p\Theta q) - C^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} [T_A, T_B] \right) \right) \\
& \qquad \qquad \qquad A_{\mu}^A A_{\nu}^B \Psi
\end{aligned}$$

ergibt die Feynmanregel

$$\begin{aligned}
& ig^2 \exp(ik\Theta l) \\
& \quad \left(-\frac{i}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \left(2(p_{\alpha} \delta_{\beta}^{\nu} \gamma^{\mu} + q_{\alpha} \delta_{\beta}^{\mu} \gamma^{\nu}) \frac{\sin(p\Theta q)}{p\Theta q} \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} (\not{p} - \not{q}) \frac{S^{(2)}(p\Theta q)}{p\Theta q} \right) \{T_A, T_B\} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \left(2(p_{\alpha} \delta_{\beta}^{\nu} \gamma^{\mu} + q_{\alpha} \delta_{\beta}^{\mu} \gamma^{\nu}) \frac{\cos(p\Theta q) - 1}{p\Theta q} \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + i \frac{\cos(p\Theta q) - C^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} [T_A, T_B] \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu (\not{p} - \not{q}) \frac{C^{(2)}(p\Theta q) - 1}{p\Theta q} [T_A, T_B] \\
& + \frac{i}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} p_{\alpha'} (\not{p} - \not{q}) q_\beta \delta_\alpha^\mu \delta_{\beta'}^\nu \left(\frac{\sin(p\Theta q) - S^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} \{T_A, T_B\} \right. \\
& \left. + i \frac{\cos(p\Theta q) - C^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} [T_A, T_B] \right)
\end{aligned}$$

Weiter führt

$$\begin{aligned}
& \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\hat{\Psi}_a^{[3]} \\
& = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m) \left(\frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} M_I^{[3]}(i\wedge_{12}, i\wedge_{13}, i\wedge_{23}) A_\mu A_\nu \Psi \right. \\
& \quad - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{II}^{[3]}(i\wedge_{12}, i\wedge_{13}, i\wedge_{23}) \partial_\rho A_\mu \partial_\nu A_\sigma \Psi \\
& \quad + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} M_{IIIa}^{[3]}(i\wedge_{12}, i\wedge_{13}, i\wedge_{23}) A_\mu \partial_\nu A_\alpha \partial_\beta \Psi \\
& \quad - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIb}^{[3]}(i\wedge_{12}, i\wedge_{13}, i\wedge_{23}) \partial_\rho A_\mu A_\sigma \partial_\nu \Psi \\
& \quad \left. + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IV}^{[3]}(i\wedge_{12}, i\wedge_{13}, i\wedge_{23}) A_\alpha A_\rho \partial_\sigma \partial_\beta \Psi \right) \\
& \rightsquigarrow -\bar{\Psi} \frac{g^2}{2} (\not{k} + m) \left(\frac{i\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} M_I^{[3]}(-ip\Theta q, -ip\Theta l, -iq\Theta l) \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \right. \\
& \quad - \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{II}^{[3]}(-ip\Theta q, -ip\Theta l, -iq\Theta l) (-ip)_\rho \delta_\alpha^\mu (-iq)_\beta \delta_\sigma^\nu \\
& \quad + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIa}^{[3]}(-ip\Theta q, -ip\Theta l, -iq\Theta l) \delta_\rho^\mu (-iq)_\sigma \delta_\alpha^\nu (-il)_\beta \\
& \quad - \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIb}^{[3]}(-ip\Theta q, -ip\Theta l, -iq\Theta l) (-ip)_\rho \delta_\alpha^\mu \delta_\sigma^\nu (-il)_\beta \\
& \quad \left. + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IV}^{[3]}(-ip\Theta q, -ip\Theta l, -iq\Theta l) \delta_\alpha^\mu \delta_\rho^\nu (-l_\sigma l_\beta) \right) A_\mu A_\nu \Psi \\
& = +\bar{\Psi} \frac{g^2}{2} (\not{k} + m) \left(-\frac{i\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} M_I^{[3]}(-ip\Theta q, -ip\Theta l, -iq\Theta l) \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \right. \\
& \quad + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{II}^{[3]}(-ip\Theta q, -ip\Theta l, -iq\Theta l) q_\alpha \delta_\beta^\mu p_\rho \delta_\sigma^\nu \\
& \quad + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIa}^{[3]}(-ip\Theta q, -ip\Theta l, -iq\Theta l) q_\alpha \delta_\beta^\mu l_\rho \delta_\sigma^\nu \\
& \quad + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIb}^{[3]}(-ip\Theta q, -ip\Theta l, -iq\Theta l) l_\alpha \delta_\beta^\mu p_\rho \delta_\sigma^\nu \\
& \quad \left. + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IV}^{[3]}(-ip\Theta q, -ip\Theta l, -iq\Theta l) l_\alpha \delta_\beta^\mu l_\rho \delta_\sigma^\nu \right) A_\mu A_\nu \Psi
\end{aligned}$$

zur Feynmanregel

$$\begin{aligned}
& i\frac{g^2}{2}(k+m) \left[\left(-\frac{i\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} M_I^{[3]}(-ip\Theta q, -ip\Theta l, -iq\Theta l) \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \right. \right. \\
& + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{II}^{[3]}(-ip\Theta q, -ip\Theta l, -iq\Theta l) q_\alpha \delta_\beta^\mu p_\rho \delta_\sigma^\nu \\
& + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIa}^{[3]}(-ip\Theta q, -ip\Theta l, -iq\Theta l) q_\alpha \delta_\beta^\mu l_\rho \delta_\sigma^\nu \\
& + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIb}^{[3]}(-ip\Theta q, -ip\Theta l, -iq\Theta l) l_\alpha \delta_\beta^\mu p_\rho \delta_\sigma^\nu \\
& + \left. \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IV}^{[3]}(-ip\Theta q, -ip\Theta l, -iq\Theta l) l_\alpha \delta_\beta^\mu l_\rho \delta_\sigma^\nu \right) T_A T_B \\
& + \left(+\frac{i\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} M_I^{[3]}(-iq\Theta p, -iq\Theta l, -ip\Theta l) \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \right. \\
& + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{II}^{[3]}(-iq\Theta p, -iq\Theta l, -ip\Theta l) q_\alpha \delta_\beta^\mu p_\rho \delta_\sigma^\nu \\
& + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIa}^{[3]}(-iq\Theta p, -iq\Theta l, -ip\Theta l) l_\alpha \delta_\beta^\mu p_\rho \delta_\sigma^\nu \\
& + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIb}^{[3]}(-iq\Theta p, -iq\Theta l, -ip\Theta l) q_\alpha \delta_\beta^\mu l_\rho \delta_\sigma^\nu \\
& + \left. \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IV}^{[3]}(-iq\Theta p, -iq\Theta l, -ip\Theta l) l_\alpha \delta_\beta^\mu l_\rho \delta_\sigma^\nu \right) T_B T_A \Big]
\end{aligned}$$

Schreibe dies als

$$i\frac{g^2}{2}(k+m)(\mathcal{V}^{\mu\nu}(l, p, q)T_A T_B + \mathcal{V}^{\nu\mu}(l, q, p)T_B T_A)$$

Betrachte nun als letzten Term

$$\sum_a \overline{\hat{\Psi}_a^{[3]}}(i\rlap{\not{\partial}} - m)\Psi_a$$

Mit

$$\begin{aligned}
\overline{\hat{\Psi}^{[3]}} &= -\frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} M_I^{[3]}(i\wedge_{23}, i\wedge_{13}, i\wedge_{12}) \overline{\Psi} A_\nu A_\mu \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{II}^{[3]}(i\wedge_{23}, i\wedge_{13}, i\wedge_{12}) \overline{\Psi} \partial_\nu A_\sigma \partial_\rho A_\mu \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} M_{IIIa}^{[3]}(i\wedge_{23}, i\wedge_{13}, i\wedge_{12}) \partial_\beta \overline{\Psi} \partial_\nu A_\alpha A_\mu \\
& - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIb}^{[3]}(i\wedge_{23}, i\wedge_{13}, i\wedge_{12}) \partial_\nu \overline{\Psi} A_\sigma \partial_\rho A_\mu \\
& + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IV}^{[3]}(i\wedge_{23}, i\wedge_{13}, i\wedge_{12}) \partial_\sigma \partial_\beta \overline{\Psi} A_\rho A_\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= + \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} M_I^{[3]}(i\wedge_{23}, i\wedge_{13}, i\wedge_{12}) \bar{\Psi} A_\mu A_\nu \\
&\quad - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{II}^{[3]}(i\wedge_{23}, i\wedge_{13}, i\wedge_{12}) \bar{\Psi} \partial_\mu A_\rho \partial_\sigma A_\nu \\
&\quad + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} M_{IIIa}^{[3]}(i\wedge_{23}, i\wedge_{13}, i\wedge_{12}) \partial_\alpha \bar{\Psi} \partial_\mu A_\beta A_\nu \\
&\quad - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIb}^{[3]}(i\wedge_{23}, i\wedge_{13}, i\wedge_{12}) \partial_\mu \bar{\Psi} A_\rho \partial_\sigma A_\nu \\
&\quad + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IV}^{[3]}(i\wedge_{23}, i\wedge_{13}, i\wedge_{12}) \partial_\rho \partial_\alpha \bar{\Psi} A_\sigma A_\beta
\end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned}
&\overline{\hat{\Psi}^{[3]}(i\rlap{/}\partial - m)\Psi} \\
&= \left\{ \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} M_I^{[3]}(i\wedge_{23}, i\wedge_{13}, i\wedge_{12}) \bar{\Psi} A_\mu A_\nu \right. \\
&\quad - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{II}^{[3]}(i\wedge_{23}, i\wedge_{13}, i\wedge_{12}) \bar{\Psi} \partial_\mu A_\rho \partial_\sigma A_\nu \\
&\quad + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} M_{IIIa}^{[3]}(i\wedge_{23}, i\wedge_{13}, i\wedge_{12}) \partial_\alpha \bar{\Psi} \partial_\mu A_\beta A_\nu \\
&\quad - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIb}^{[3]}(i\wedge_{23}, i\wedge_{13}, i\wedge_{12}) \partial_\mu \bar{\Psi} A_\rho \partial_\sigma A_\nu \\
&\quad \left. + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IV}^{[3]}(i\wedge_{23}, i\wedge_{13}, i\wedge_{12}) \partial_\rho \partial_\alpha \bar{\Psi} A_\sigma A_\beta \right\} (i\rlap{/}\partial - m)\Psi \\
&\rightsquigarrow \left\{ \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} M_I^{[3]}(-ip\Theta q, -ik\Theta q, -ik\Theta p) \bar{\Psi} A_\mu A_\nu \right. \\
&\quad - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{II}^{[3]}(-ip\Theta q, -ik\Theta q, -ik\Theta p) \bar{\Psi} (-ip_\mu) A_\rho (-iq_\sigma) A_\nu \\
&\quad + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} M_{IIIa}^{[3]}(-ip\Theta q, -ik\Theta q, -ik\Theta p) (-ik_\alpha) \bar{\Psi} (-ip_\mu) A_\beta A_\nu \\
&\quad - \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\mu\nu}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIb}^{[3]}(-ip\Theta q, -ik\Theta q, -ik\Theta p) (-ik_\mu) \bar{\Psi} A_\rho (-iq_\sigma) A_\nu \\
&\quad \left. + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IV}^{[3]}(-ip\Theta q, -ik\Theta q, -ik\Theta p) (-k_\rho k_\alpha) \bar{\Psi} A_\sigma A_\beta \right\} (l - m)\Psi \\
&= - \left\{ - \frac{ig^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} M_I^{[3]}(-ip\Theta q, -ik\Theta q, -ik\Theta p) \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \right. \\
&\quad + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{II}^{[3]}(-ip\Theta q, -ik\Theta q, -ik\Theta p) q_\alpha \delta_\beta^\mu p_\rho \delta_\sigma^\nu \\
&\quad + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIa}^{[3]}(-ip\Theta q, -ik\Theta q, -ik\Theta p) k_\alpha \delta_\beta^\mu p_\rho \delta_\sigma^\nu \\
&\quad \left. + \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{IIIb}^{[3]}(-ip\Theta q, -ik\Theta q, -ik\Theta p) q_\alpha \delta_\beta^\mu k_\rho \delta_\sigma^\nu \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{g^2}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{\text{IV}}^{[3]}(-ip\Theta q, -ik\Theta q, -ik\Theta p) k_\alpha \delta_\beta^\mu k_\rho \delta_\sigma^\nu \left. \right\} \bar{\Psi} A_\mu A_\nu (l-m) \Psi$$

Dies ergibt die Feynmanregel

$$\begin{aligned} = & -\frac{ig^2}{2} \left[\left(-i \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} M_{\text{I}}^{[3]}(-ip\Theta q, -ik\Theta q, -ik\Theta p) \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \right. \right. \\ & + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{\text{II}}^{[3]}(-ip\Theta q, -ik\Theta q, -ik\Theta p) q_\alpha \delta_\beta^\mu p_\rho \delta_\sigma^\nu \\ & + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{\text{IIIa}}^{[3]}(-ip\Theta q, -ik\Theta q, -ik\Theta p) k_\alpha \delta_\beta^\mu p_\rho \delta_\sigma^\nu \\ & + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{\text{IIIb}}^{[3]}(-ip\Theta q, -ik\Theta q, -ik\Theta p) q_\alpha \delta_\beta^\mu k_\rho \delta_\sigma^\nu \\ & + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{\text{IV}}^{[3]}(-ip\Theta q, -ik\Theta q, -ik\Theta p) k_\alpha \delta_\beta^\mu k_\rho \delta_\sigma^\nu \left. \right) T_A T_B \\ & + \left(+i \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} M_{\text{I}}^{[3]}(-iq\Theta p, -ik\Theta p, -ik\Theta q) \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \right. \\ & + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{\text{II}}^{[3]}(-iq\Theta p, -ik\Theta p, -ik\Theta q) q_\alpha \delta_\beta^\mu p_\rho \delta_\sigma^\nu \\ & + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{\text{IIIa}}^{[3]}(-iq\Theta p, -ik\Theta p, -ik\Theta q) q_\alpha \delta_\beta^\mu k_\rho \delta_\sigma^\nu \\ & + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{\text{IIIb}}^{[3]}(-iq\Theta p, -ik\Theta p, -ik\Theta q) k_\alpha \delta_\beta^\mu p_\rho \delta_\sigma^\nu \\ & + \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\rho\sigma}}{2} M_{\text{IV}}^{[3]}(-iq\Theta p, -ik\Theta p, -ik\Theta q) k_\alpha \delta_\beta^\mu k_\rho \delta_\sigma^\nu \left. \right) T_B T_A \left. \right] (l-m) \end{aligned}$$

Dies ist genau

$$-i \frac{g^2}{2} (l-m) (\overline{\mathcal{V}^{\nu\mu}(k, q, p)} T_A T_B + \overline{\mathcal{V}^{\mu\nu}(k, p, q)} T_B T_A)$$

Damit ist die Feynmanregel für den Kontaktvertex insgesamt

$$\begin{aligned} & ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} \delta_\alpha^\mu \delta_{\alpha'}^\nu \\ & \left(k_\beta l_{\beta'} (\not{q} + \not{l} - m) \frac{\exp(-i(q\Theta l)) - 1}{(q\Theta l)} \frac{\exp(-i(k\Theta p)) - 1}{(k\Theta p)} T_A T_B \right. \\ & \quad \left. + l_\beta k_{\beta'} (\not{p} + \not{l} - m) \frac{\exp(-i(p\Theta l)) - 1}{(p\Theta l)} \frac{\exp(-i(k\Theta q)) - 1}{(k\Theta q)} T_B T_A \right) \\ & - ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} l_\beta \left(\exp(-ik\Theta p) \frac{\exp(-iq\Theta l) - 1}{q\Theta l} \delta_\alpha^\nu \gamma^\mu T_A T_B \right. \\ & \quad \left. + \exp(-ik\Theta q) \frac{\exp(-ip\Theta l) - 1}{p\Theta l} \delta_\alpha^\mu \gamma^\nu T_B T_A \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - ig^2 \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} k_\beta \left(\delta_\alpha^\mu \gamma^\nu \frac{\exp(-ik\Theta p) - 1}{k\Theta p} \exp(-iq\Theta l) T_A T_B \right. \\
& \quad \left. + \delta_\alpha^\nu \gamma^\mu \frac{\exp(-ik\Theta q) - 1}{k\Theta q} \exp(-ip\Theta l) T_B T_A \right) \\
& + ig^2 \exp(ik\Theta l) \\
& \quad \left(-\frac{i}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \left(2(p_\alpha \delta_\beta^\nu \gamma^\mu + q_\alpha \delta_\beta^\mu \gamma^\nu) \frac{\sin(p\Theta q)}{p\Theta q} \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu (\not{p} - \not{q}) \frac{S^{(2)}(p\Theta q)}{p\Theta q} \right) \{T_A, T_B\} \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \left(2(p_\alpha \delta_\beta^\nu \gamma^\mu + q_\alpha \delta_\beta^\mu \gamma^\nu) \frac{\cos(p\Theta q) - 1}{p\Theta q} \right. \\
& \quad \quad \left. - \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu (\not{p} - \not{q}) \frac{C^{(2)}(p\Theta q) - 1}{p\Theta q} \right) [T_A, T_B] \\
& \quad + \frac{i}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha\beta}}{2} \frac{\vartheta\Theta^{\alpha'\beta'}}{2} p_{\alpha'} (\not{p} - \not{q}) q_\beta \delta_\alpha^\mu \delta_{\beta'}^\nu \left(\frac{\sin(p\Theta q) - S^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} \{T_A, T_B\} \right. \\
& \quad \quad \left. + i \frac{\cos(p\Theta q) - C^{(2)}(p\Theta q)}{(p\Theta q)^2} [T_A, T_B] \right) \\
& + i \frac{g^2}{2} (\not{k} + m) (\mathcal{V}^{\mu\nu}(l, p, q) T_A T_B + \mathcal{V}^{\nu\mu}(l, q, p) T_B T_A) \\
& - i \frac{g^2}{2} (l - m) (\overline{\mathcal{V}^{\nu\mu}(k, q, p)} T_A T_B + \overline{\mathcal{V}^{\mu\nu}(k, p, q)} T_B T_A) \tag{E.7}
\end{aligned}$$

F Gruppentheoretische Gewichte

Als gruppentheoretisches Gewicht eines Feynman-Diagramms bezeichnet man die Kombination von Strukturkonstanten und Generatorspuren, die bei der Farbmitteilung auftreten. Diese Gewichte lassen sich nach Cvitanović[5] in geschlossener Form vereinfachen. Dazu dienen im Falle der $SU(3)$ die folgenden drei Formeln:

$$if^{ABC} = 2\text{Tr}(T^A T^B T^C - T^C T^B T^A), \quad (\text{F.1a})$$

$$d^{ABC} = \frac{2}{d}\text{Tr}(T^A T^B T^C + T^C T^B T^A), \quad (\text{F.1b})$$

$$T_{ij}^A T_{kl}^A = \frac{1}{2}\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{6}\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad (\text{F.1c})$$

insbesondere

$$T_{ij}^A T_{ji}^A = 4. \quad (\text{F.2})$$

Dabei sollen die Spuren in der definierenden Darstellung der $SU(3)$ ausgewertet werden, da nur dort Gleichung (F.1c) gilt. Wie in Abschnitt 5.1 besprochen, ergibt sich für Auswertungen in anderen Darstellungen als einzige Änderung, dass der Tensor d_{ABC} durch $d'_{ABC} = d d_{ABC}$ ersetzt werden muss.

Damit berechnet man

$$\begin{aligned} T_{ij}^A T_{jk}^B T_{kl}^A T_{li}^B &= \frac{1}{4}(\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl})(\delta_{ji}\delta_{kl} - \frac{1}{3}\delta_{jk}\delta_{li}) \\ &= \frac{1}{4}\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{ji}\delta_{kl} - \frac{1}{12}\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{jk}\delta_{li} - \frac{1}{12}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ji}\delta_{kl} + \frac{1}{36}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{jk}\delta_{li} \\ &= \delta_{ii}(\frac{1}{4} + \frac{1}{36}) - \delta_{ii}\delta_{jj}2\frac{1}{12} = 3\frac{10}{36} - 9\frac{6}{36} = -\frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Mit

$$T_{ij}^A T_{jk}^A = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jj} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{jk}) = \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{3})\delta_{ik} = \frac{4}{3}\delta_{ik}, \quad (\text{F.4})$$

folgt andererseits

$$T_{ij}^A T_{jk}^A T_{kl}^B T_{li}^B = \frac{16}{9}\delta_{ik}\delta_{ki} = \frac{16}{3}. \quad (\text{F.5})$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} d^{ABC'} d^{ABC} &= 4(T_{ij}^A T_{jk}^B T_{ki}^{C'} + T_{ij}^{C'} T_{jk}^B T_{ki}^A)(T_{lm}^A T_{mn}^B T_{nl}^C + T_{lm}^C T_{mn}^B T_{nl}^A) \\ &= 4(T_{ij}^A T_{jk}^B T_{ki}^{C'} T_{lm}^A T_{mn}^B T_{nl}^C + T_{ij}^A T_{jk}^B T_{ki}^{C'} T_{lm}^C T_{mn}^B T_{nl}^A \\ &\quad + T_{ij}^{C'} T_{jk}^B T_{ki}^A T_{lm}^A T_{mn}^B T_{nl}^C + T_{ij}^{C'} T_{jk}^B T_{ki}^A T_{lm}^C T_{mn}^B T_{nl}^A) \\ &= (\delta_{im}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{lm})(\delta_{jn}\delta_{km} - \frac{1}{3}\delta_{jk}\delta_{mn})T_{ki}^{C'} T_{nl}^C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\delta_{il}\delta_{jn} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{nl})(\delta_{jn}\delta_{km} - \frac{1}{3}\delta_{jk}\delta_{mn})T_{ki}^{C'}T_{lm}^C \\
& + (\delta_{km}\delta_{il} - \frac{1}{3}\delta_{ki}\delta_{lm})(\delta_{jn}\delta_{km} - \frac{1}{3}\delta_{jk}\delta_{mn})T_{ij}^{C'}T_{nl}^C \\
& + (\delta_{kl}\delta_{in} - \frac{1}{3}\delta_{ki}\delta_{nl})(\delta_{jn}\delta_{km} - \frac{1}{3}\delta_{jk}\delta_{mn})T_{ij}^{C'}T_{lm}^C \\
= & + (\delta_{ln}\delta_{km} - \frac{1}{3}\delta_{lk}\delta_{mn})T_{km}^{C'}T_{nl}^C - \frac{1}{3}(\delta_{jn}\delta_{km} - \frac{1}{3}\delta_{jk}\delta_{mn})T_{kj}^{C'}T_{nm}^C \\
& + (\delta_{nn}\delta_{km} - \frac{1}{3}\delta_{nk}\delta_{mn})T_{kl}^{C'}T_{lm}^C - \frac{1}{3}(\delta_{jn}\delta_{nm} - \frac{1}{3}\delta_{jk}\delta_{mn})T_{kj}^{C'}T_{nm}^C \\
& + (\delta_{jn}\delta_{mm} - \frac{1}{3}\delta_{jm}\delta_{mn})T_{lj}^{C'}T_{nl}^C - \frac{1}{3}(\delta_{jn}\delta_{km} - \frac{1}{3}\delta_{jk}\delta_{mn})T_{kj}^{C'}T_{nm}^C \\
& + (\delta_{jn}\delta_{lm} - \frac{1}{3}\delta_{jl}\delta_{mn})T_{nj}^{C'}T_{lm}^C - \frac{1}{3}(\delta_{jn}\delta_{km} - \frac{1}{3}\delta_{jk}\delta_{mn})T_{kj}^{C'}T_{nm}^C \\
= & + T_{kk}^{C'}T_{nn}^C - \frac{1}{3}T_{ln}^{C'}T_{nl}^C - \frac{1}{3}T_{mn}^{C'}T_{nm}^C + \frac{1}{9}T_{kk}^{C'}T_{nn}^C \\
& + 3T_{ml}^{C'}T_{lm}^C - \frac{1}{3}T_{nl}^{C'}T_{ln}^C - \frac{1}{3}T_{mn}^{C'}T_{nm}^C + \frac{1}{9}T_{kk}^{C'}T_{nn}^C \\
& + 3T_{lk}^{C'}T_{kl}^C - \frac{1}{3}T_{ln}^{C'}T_{nl}^C - \frac{1}{3}T_{mn}^{C'}T_{nm}^C + \frac{1}{9}T_{kk}^{C'}T_{nn}^C \\
& + T_{nn}^{C'}T_{mm}^C - \frac{1}{3}T_{nl}^{C'}T_{ln}^C - \frac{1}{3}T_{mn}^{C'}T_{nm}^C + \frac{1}{9}T_{kk}^{C'}T_{nn}^C \\
= & \frac{10}{3}T_{ml}^{C'}T_{lm}^C = \frac{5}{3}\delta^{C'C}. \tag{F.6}
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$T_{us}^{C'}T_{su}^C d^{ABC'} d^{ABC} = \frac{5}{3}\delta^{C'C}T_{us}^{C'}T_{su}^C = \frac{20}{3} \tag{F.7}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}
d^{ABC}T_{sr}^AT_{ru}^BT_{us}^C & = d^{ABC}T_{sr}^AT_{ru}^BT_{us}^C \\
& = \frac{1}{2}(d^{ABC}T_{sr}^AT_{ru}^BT_{us}^C + d^{ABC}T_{sr}^CT_{ru}^BT_{us}^A) = \frac{1}{4}d^{ABC}d^{ABC} = \frac{20}{3}. \tag{F.8}
\end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung mit veränderten Vorzeichen liefert das bekannte Ergebnis

$$f^{ABC'}f^{ABC} = 3\delta^{C'C} \tag{F.9}$$

und damit

$$T_{us}^{C'}T_{su}^C f^{ABC'}f^{ABC} = 12 \tag{F.10}$$

Weiter ist

$$f^{ABC}T_{sr}^AT_{ru}^BT_{us}^C = -f^{ABC}T_{sr}^BT_{ru}^AT_{us}^C = \frac{i}{4}f^{ABC}f^{ABC} = 6i. \tag{F.11}$$

Alle anderen Gewichte verschwinden wegen

$$d^{ABC}f^{ABC'} = 0. \tag{F.12}$$

G Abbildungen zu Unterabschnitt 6.3.1: Winkelverteilung des differentiellen Wirkungsquerschnittes

In diesem Abschnitt ist der nichtkommutative Wirkungsquerschnitt für einige weitere Parameter graphisch dargestellt.

In den Diagrammen G.1 und G.2 ist der relative $\rho^{[0]}$ -Wirkungsquerschnitt Δ für die Energien 750 GeV und 2000 GeV für einen weiteren Wert von $\alpha = \frac{\pi}{8}$ aufgetragen. Da der Vektor \vec{B} in diesem Fall sehr nah an der Strahlachse liegt, wird die Abhängigkeit von ϕ geringer.

In den Diagramm G.3 und G.4 ist der relative alternative Wirkungsquerschnitt Δ' für 2000 GeV und $\alpha = \frac{\pi}{4}$ bzw. $\alpha = \frac{\pi}{8}$ dargestellt. Erstaunlicherweise ist die Winkelverteilung ähnlich dem $\rho^{[0]}$ -Fall (Diagramme 6.6) und G.2), anders als für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Diagramme 6.5 und 6.12).

Schließlich sind in den Diagrammen G.5 bis G.7 noch die Winkelverteilungen von Δ' für eine höhere Energie von 5000 GeV aufgetragen. Wenngleich die Winkelverteilung stark von α abhängt, bleibt die Größenordnung doch die gleiche, anders als im $\rho^{[0]}$ -Fall. Daher hängt der integrierte alternative Wirkungsquerschnitt nicht so stark von α ab (Unterabschnitt 6.3.2).

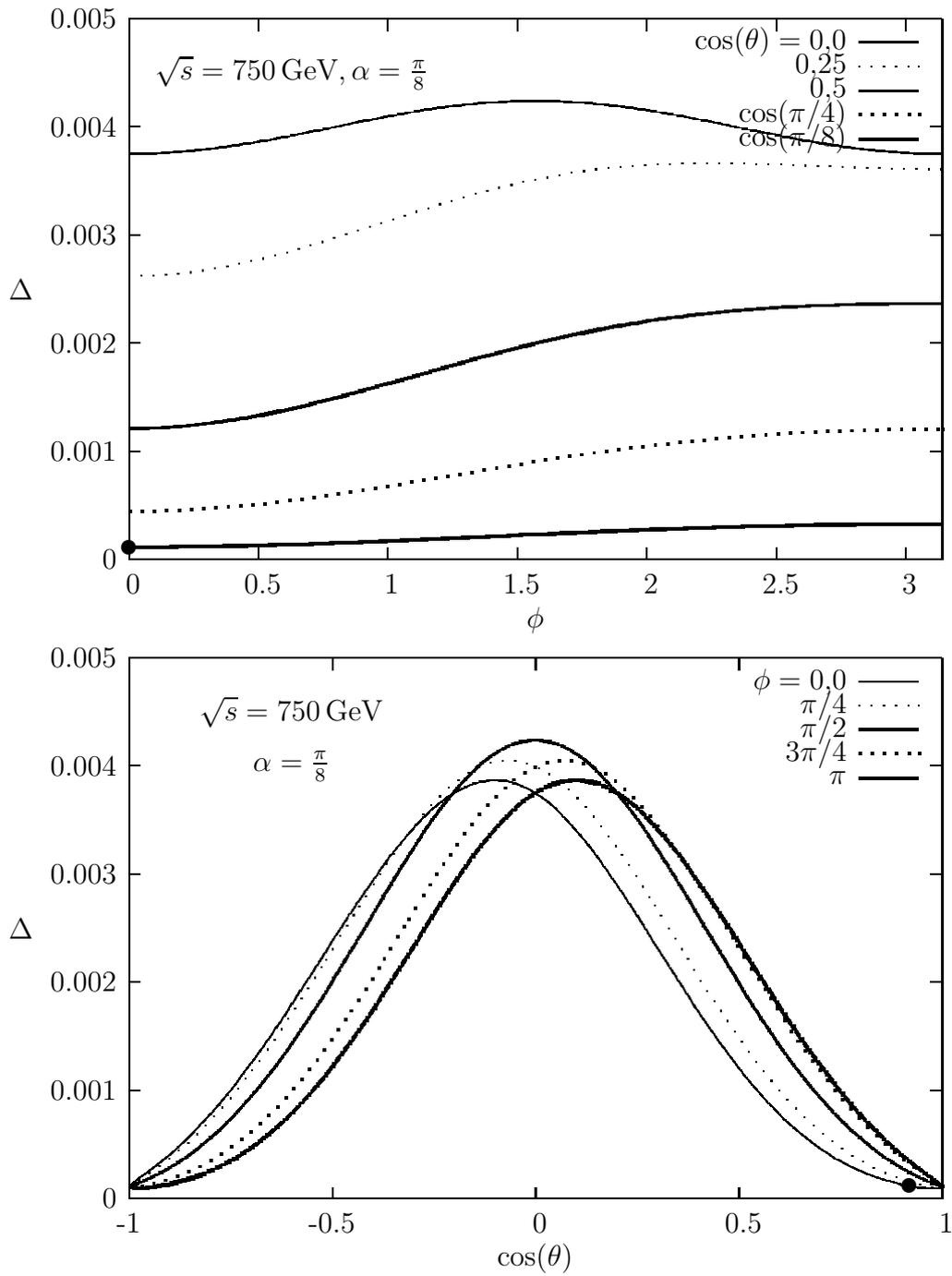


Abbildung G.1: Δ (Gleichung (6.12)) für $\sqrt{s} = 750$ GeV, $\Lambda_{\text{NC}} = 1$ TeV, $\alpha_s = 0,09$. Der Punkt deutet Streuung parallel zu \vec{B} an.

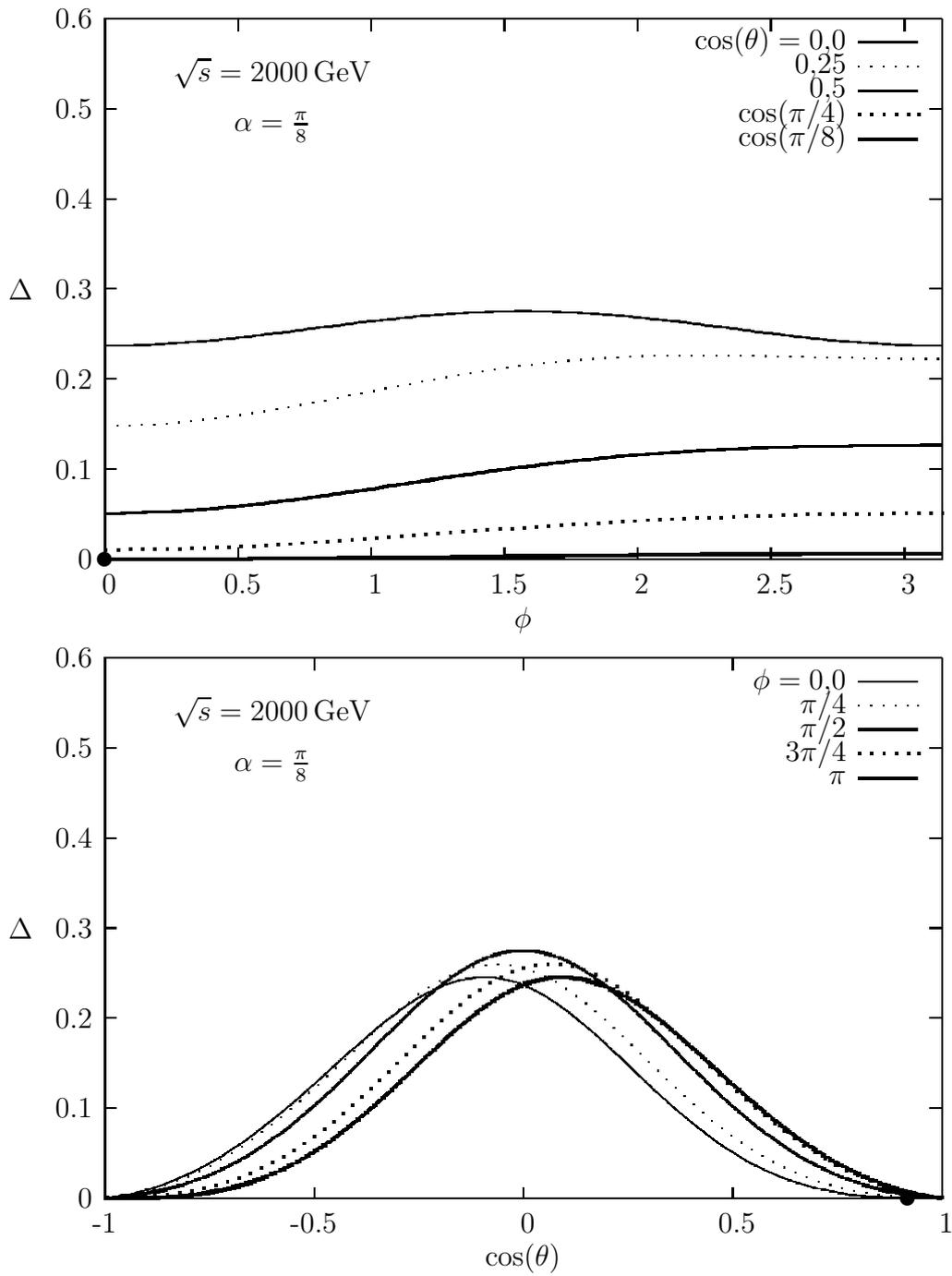


Abbildung G.2: Δ (Gleichung (6.12)) für $\sqrt{s} = 2000 \text{ GeV}$, $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$, $\alpha_s = 0,09$.
Der Punkt deutet Streuung parallel zu \vec{B} an.

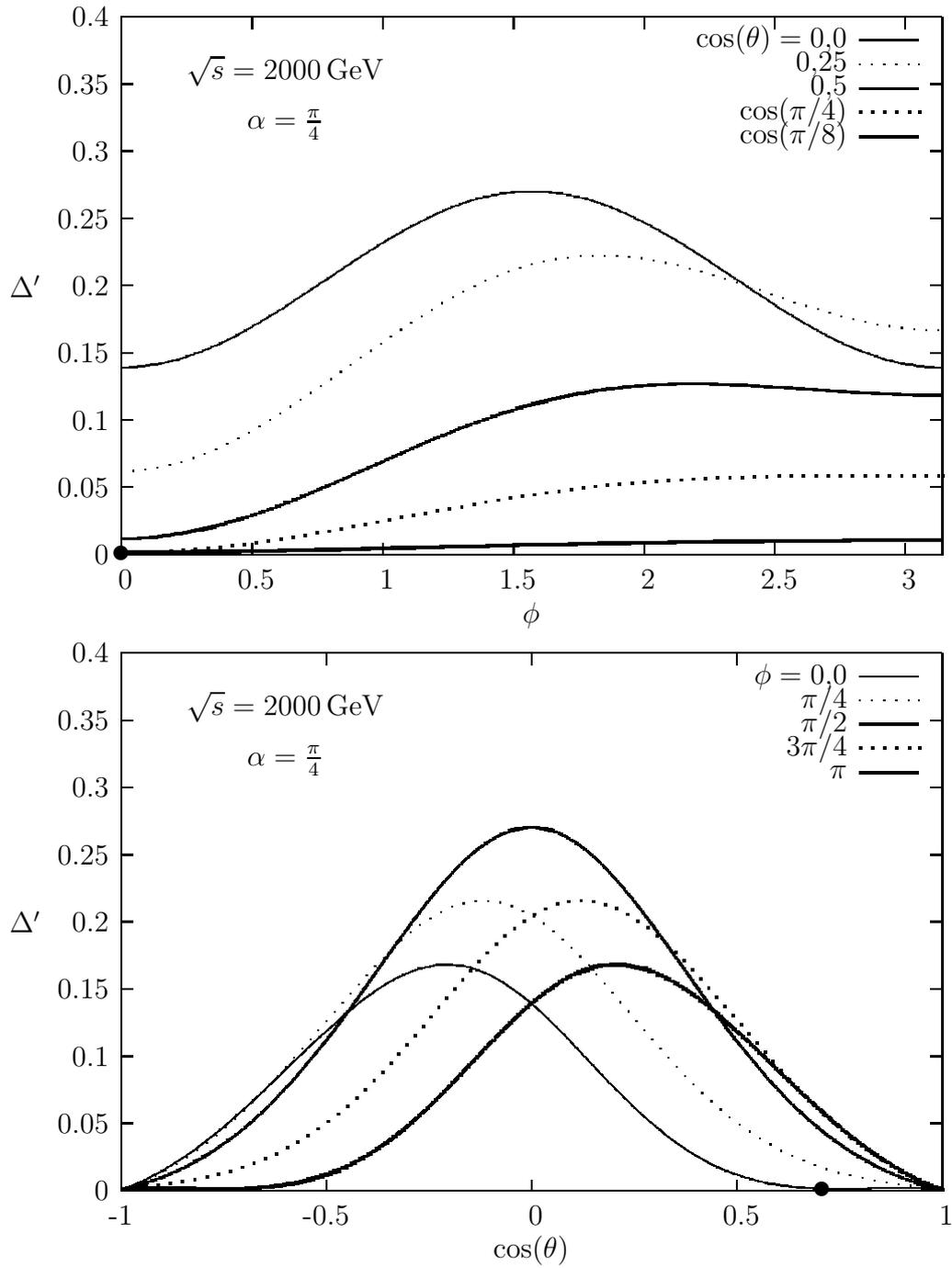


Abbildung G.3: Δ' (Gleichung (6.12)) für $\sqrt{s} = 2000$ GeV, $\Lambda_{\text{NC}} = 1$ TeV, $\alpha_s = 0,09$. Der Punkt deutet Streuung parallel zu \vec{B} an.

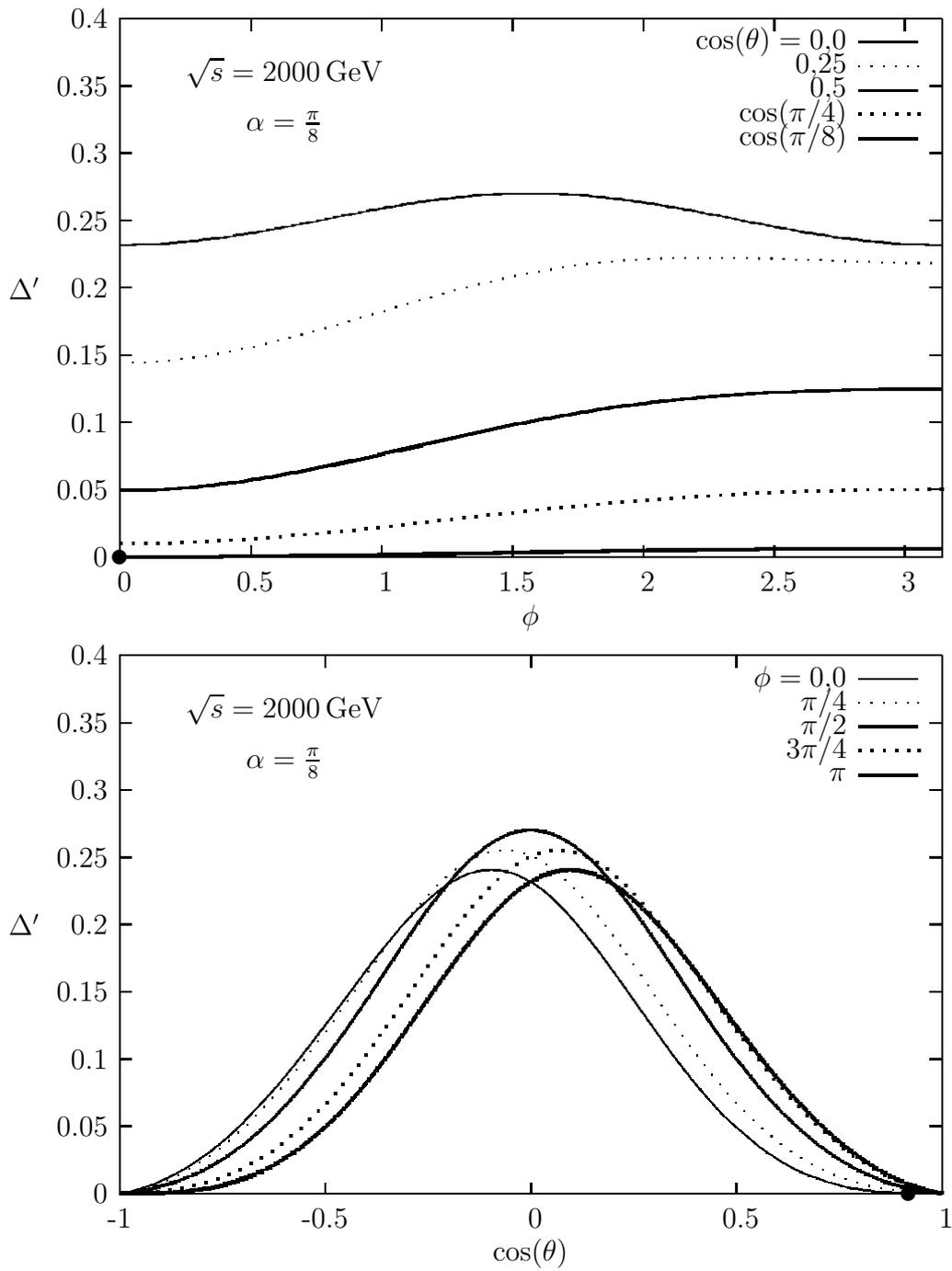


Abbildung G.4: Δ' (Gleichung (6.12)) für $\sqrt{s} = 2000 \text{ GeV}$, $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$, $\alpha_s = 0,09$.
Der Punkt deutet Streuung parallel zu \vec{B} an.

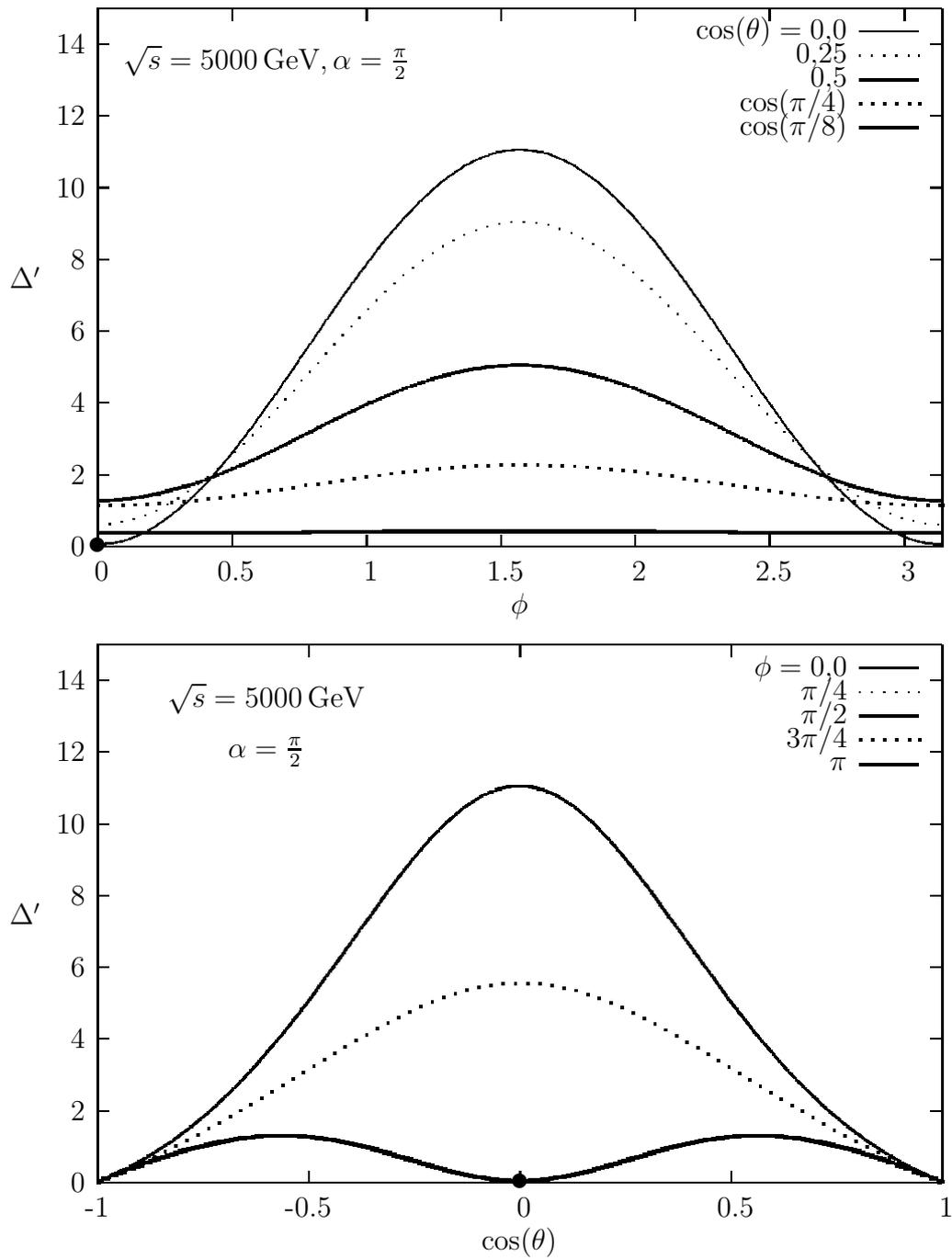


Abbildung G.5: Δ' (Gleichung (6.12)) für $\sqrt{s} = 5000$ GeV, $\Lambda_{\text{NC}} = 1$ TeV, $\alpha_s = 0,09$.

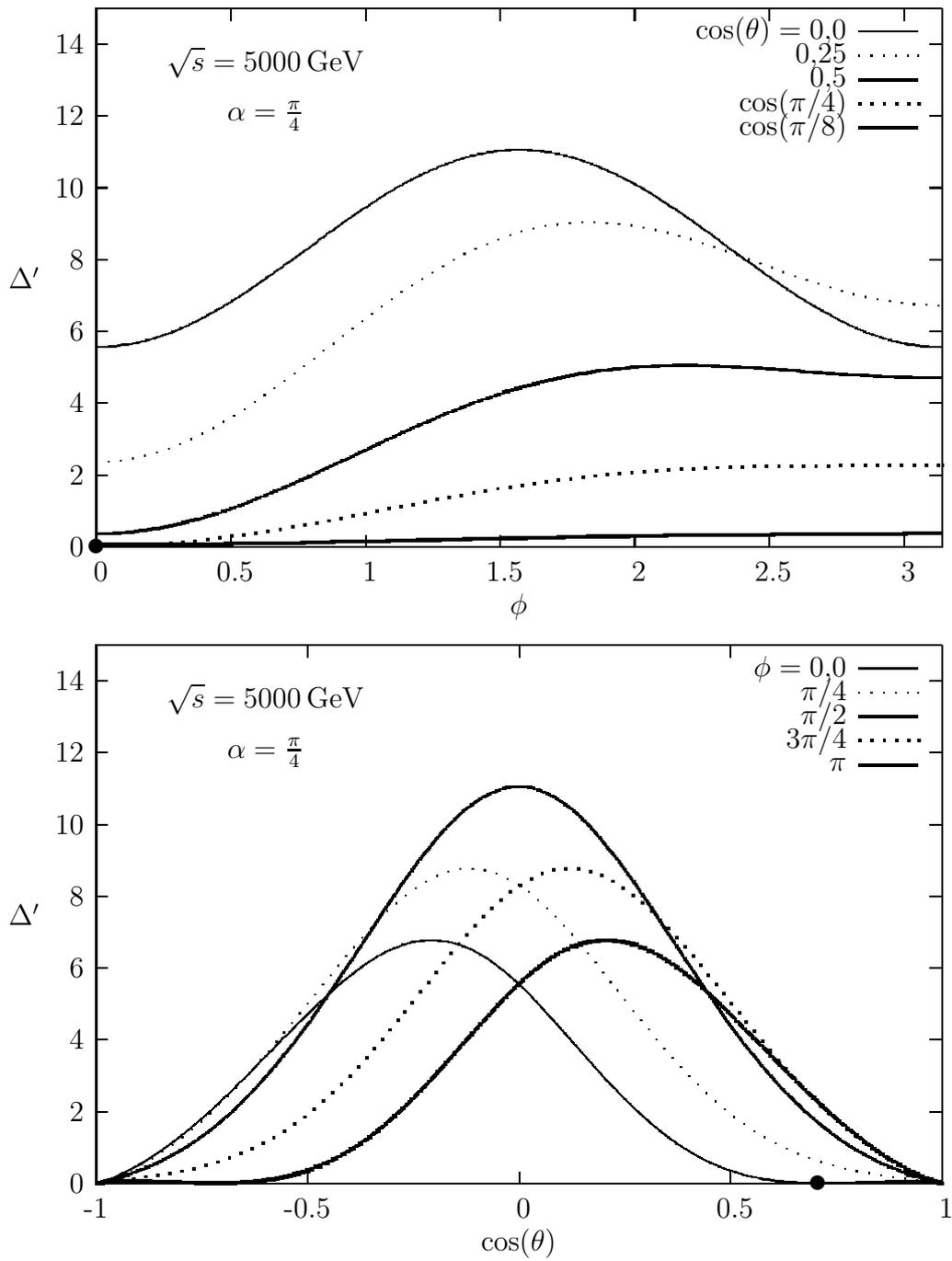


Abbildung G.6: Δ' (Gleichung (6.12)) für $\sqrt{s} = 5000 \text{ GeV}$, $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$, $\alpha_s = 0,09$.

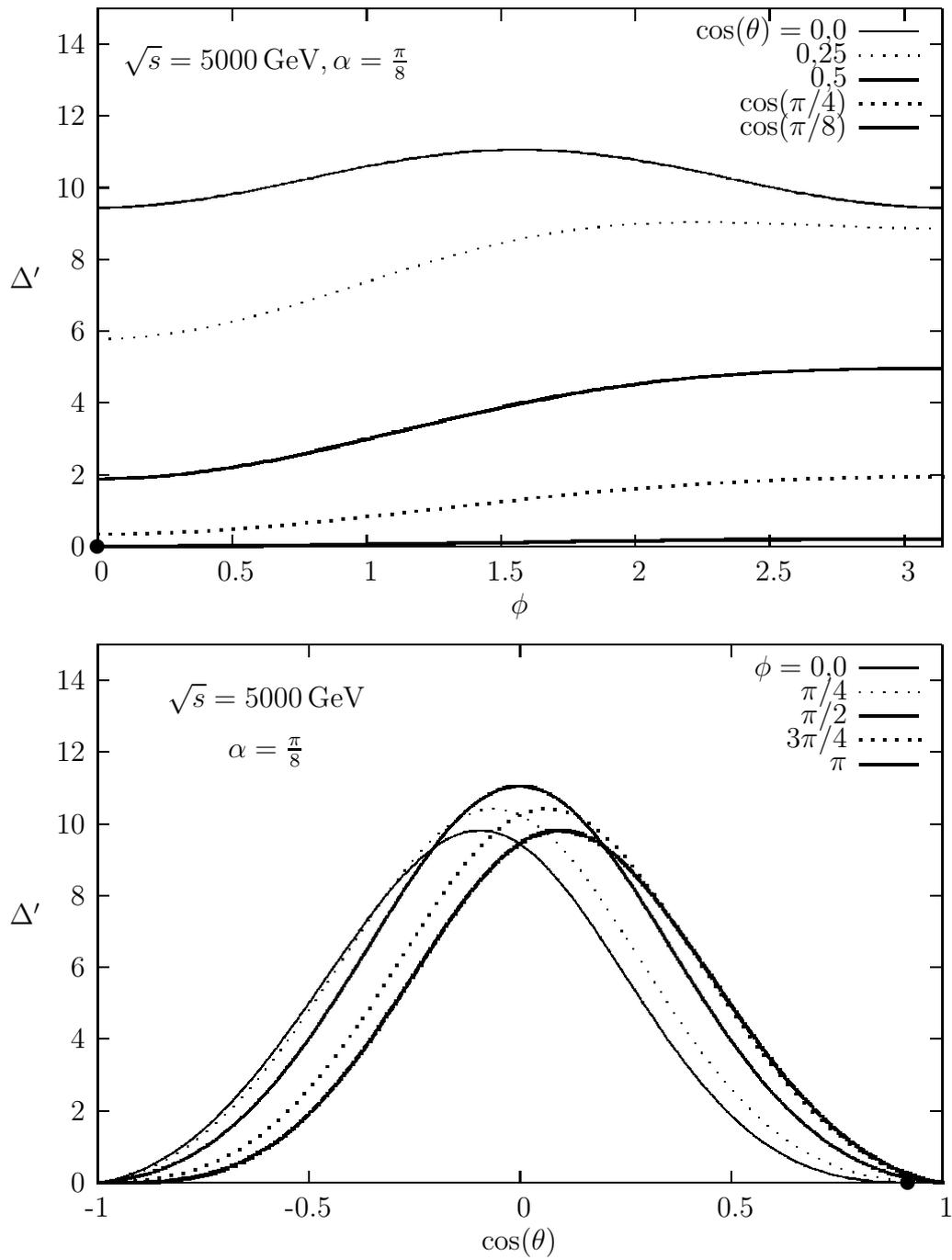


Abbildung G.7: Δ' (Gleichung (6.12)) für $\sqrt{s} = 5000 \text{ GeV}$, $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$, $\alpha_s = 0,09$.

Literaturverzeichnis

- [1] H. S. Snyder, „Quantized space-time“, Phys. Rev. **71** (1947) 38.
- [2] M. Froissart, „Asymptotic behavior and subtractions in the Mandelstam representation“, Phys. Rev. **123** (1961) 1053.
- [3] P. A. M. Dirac, „Lectures on quantum mechanics“, Yeshiva University, New York: Academic Press (1967)
- [4] P. Dittner, „Invariant tensors in $SU(3)$ “, Commun. math. Phys. **22** (1971) 252.
- [5] P. Cvitanovic, „Group theory for Feynman diagrams in non-abelian gauge theories“, Phys. Rev. D **14** (1976) 1536.
- [6] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, „Renormalization of gauge theories“, Annals Phys. **98** (1976) 287; M. Z. Iofa and I. V. Tyutin, „Eichinvarianz von spontan gebrochenen nichtabelschen Theorien mit Hilfe der Bogolyubov-Parasiuk-Hepp-Zimmerman Methode (auf russisch)“, Teor. Mat. Fiz. **27** (1976) 38.
- [7] R. K. Ellis, W. J. Stirling und B. R. Webber, „QCD and collider physics“, Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. **8** (1996) 1.
- [8] M. Henneaux und C. Teitelboim, „Quantization of gauge systems“, Princeton, USA: Univ. Pr. (1994) 552 p.
- [9] M. E. Peskin und D. V. Schroeder, „An introduction to quantum field theory“, Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.
- [10] M. Bertelson, M. Cahen und S. Gutt, „Equivalence of star products“, Class Quantum. Grav. **14** (1997) A93-A107. [arXiv:hep-th/9711162].
- [11] A. Connes, M. R. Douglas und A. S. Schwarz, „Noncommutative geometry and matrix theory: Compactification on tori“, JHEP **9802** (1998) 003 [arXiv:hep-th/9711162].
- [12] N. Seiberg und E. Witten, „String theory and noncommutative geometry“, JHEP **9909** (1999) 032 [arXiv:hep-th/9908142].
- [13] S. Eidelman *et al.* [Particle Data Group Collaboration], „Review of particle physics“, Phys. Lett. B **592** (2004) 1, aktuelle Daten für die Ausgabe 2006 verfügbar auf der PDG-Internetseite <http://pdg.lbl.gov/>; siehe auch <http://www-theory.lbl.gov/~ianh/alpha/alpha.html>

- [14] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp und J. Wess, „Gauge theory on noncommutative spaces“, *Eur. Phys. J. C* **16** (2000) 161 [arXiv:hep-th/0001203].
- [15] J. A. M. Vermaseren, „New features of FORM“, arXiv:math-ph/0010025.
- [16] A. Bichl, J. Grimstrup, H. Grosse, L. Popp, M. Schweda und R. Wulkenhaar, „Renormalization of the noncommutative photon self-energy to all orders via Seiberg-Witten map“, *JHEP* **0106** (2001) 013 [arXiv:hep-th/0104097].
- [17] M. Chaichian, P. Presnajder, M. M. Sheikh-Jabbari und A. Tureanu, „Noncommutative gauge field theories: A no-go theorem“, *Phys. Lett. B* **526** (2002) 132 [arXiv:hep-th/0107037].
- [18] B. Jurco, L. Moller, S. Schraml, P. Schupp und J. Wess, „Construction of non-abelian gauge theories on noncommutative spaces“, *Eur. Phys. J. C* **21** (2001) 383 [arXiv:hep-th/0104153].
- [19] X. Calmet, B. Jurco, P. Schupp, J. Wess und M. Wohlgenannt, „The standard model on noncommutative space-time“, *Eur. Phys. J. C* **23**, 363 (2002) [arXiv:hep-ph/0111115].
- [20] M. Moretti, T. Ohl und J. Reuter, „O’Mega: An optimizing matrix element generator“, arXiv:hep-ph/0102195.
- [21] B. L. Cerchiai, A. F. Pasqua und B. Zumino, „The Seiberg-Witten map for noncommutative gauge theories“, arXiv:hep-th/0206231.
- [22] G. Barnich, F. Brandt und M. Grigoriev, „Local BRST cohomology and Seiberg-Witten maps in noncommutative Yang-Mills theory“, *Nucl. Phys. B* **677** (2004) 503 [arXiv:hep-th/0308092].
- [23] T. Ohl, R. Rückl und J. Zeiner, „Unitarity of time-like noncommutative gauge theories: The violation of Ward identities in time-ordered perturbation theory“, *Nucl. Phys. B* **676** (2004) 229 [arXiv:hep-th/0309021].
- [24] T. Ohl und J. Reuter, „Testing the noncommutative standard model at a future photon collider“, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 076007 [arXiv:hep-ph/0406098].
- [25] Doktorarbeit von J. Zeiner, Universität Würzburg, in Vorbereitung
- [26] T. Ohl, J. Rauh, R. Rück, J. Zeiner, in Vorbereitung

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei all denen bedanken, die mich bei dieser Arbeit von wissenschaftlicher und von privater Seite unterstützt haben. Ich bedanke mich bei

- PD Dr. Thorsten Ohl für eine vielseitige, interessante Aufgabenstellung und seine ständige Hilfsbereitschaft,
- Prof. Dr. Reinhold Rückl für die Möglichkeit, an seinem Lehrstuhl auf diesem Themengebiet arbeiten zu können,
- Jörg Zeiner für seine Starthilfe und die gute Zusammenarbeit,
- meinen „Mitbewohnern“ aus den Zimmern E 234 und E 238, in der Reihenfolge ihres Auftretens Sigrun Csallner, Thomas Reiter, Matthias Kaminski, Christian Speckner, Thomas Schutzmeier und Philipp Mertsch, für viele anregende Diskussionen,
- Alexander Wagner und Andreas Vetter für die bereitwillige Unterstützung in Computerangelegenheiten,
- Brigitte für ihren Einsatz in organisatorischen und Verwaltungsangelegenheiten,
- allen anderen Mitarbeitern der TP2 für die gute, inspirierende Atmosphäre,
- schließlich bei meinen Eltern für die Unterstützung während des Studiums und der Diplomarbeit,
- sowie bei meiner Freundin Elisabeth, der ich zwar nie erklärt habe, wofür genau die ganze Zeit draufging, die mir aber stets glaubte, dass es ungeheuer wichtig wäre.

Vielen Dank.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Würzburg, den 25. April 2006

Johannes Rauh