

Komplexe Leptonmassenterme mit
verschränkten Mischungen in
 $U_{\text{PMNS}} = U_{\ell}^{\dagger} U_{\nu}$ und deren
experimentelle Konsequenzen

Diplomarbeit
von
Svenja Niehage



vorgelegt bei
Prof. Dr. Reinhold Rückl

am
Institut für Theoretische Physik und Astrophysik
der
Julius-Maximilians-Universität Würzburg

30. Mai 2008

Kurzzusammenfassung

Da sich gezeigt hat, dass Neutrinos nicht masselos sind, erhalten wir im Leptonsektor analog zum Quarksektor Mischungen und CP-Verletzung. Von den Mischungen im Leptonsektor wissen wir bereits aus den Oszillationsexperimenten, dass sie groß sind. Der Ursprung der Mischungen kann sowohl im Sektor der geladenen Leptonen als auch im Neutrino Sektor liegen.

Wir möchten in dieser Arbeit zwei verschiedene, nicht triviale Konfigurationen diskutieren, die durch verschränkte maximale Mischungen, sprich maximale Mischungen in U^ℓ und U^ν charakterisiert sind. Um den Aspekt der CP-Verletzung zu berücksichtigen, betrachten wir komplexe Phasen in U^ℓ und U^ν , die für komplexe Leptonmassenterme auftreten. Eine konkrete Verbindung zu den Massentermen stellen wir her, indem wir bestimmte Texturen annehmen, die in einem Fall die Struktur des Betrags der Massenmatrizen und in dem anderen zusätzlich die Struktur der komplexen Phasen beschreiben. Zunächst betrachten wir jedoch die Auswirkungen der Neutrinomassen auf verschiedene Experimente, wobei wir unseren Schwerpunkt auf den neutrinolosen Doppel-Betazerfall legen.

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	3
2	Erweiterung des Standardmodells um Neutrinomassen	7
2.1	Elektroschwache Lagrangedichte mit Neutrinomassen	7
2.2	Die leptonische Mischungsmatrix U_{PMNS}	11
2.3	Invarianten unter Phasenrotationen der Felder	13
2.4	CP-Verletzung im Quark- und Leptonsektor	15
3	Massen und Mischungen im Leptonsektor	18
3.1	Erzeugung kleiner Neutrinomassen mit Hilfe des Seesaw-Mechanismus	18
3.2	Erzeugung der Hierarchien der Fermionmassen	20
3.3	Textur-Modelle und maximale Mischungen	22
3.3.1	Durch Froggatt-Nielsen-Mechanismus motivierte Texturen . .	23
3.3.2	„Texture Zeros“	25
3.3.3	Maximale Mischungen aus Texturen	26
3.3.4	Große Mischungen in U^ℓ und U^ν	27
3.3.5	Verschränkte maximale Mischungen in U^ℓ und U^ν	28
4	Konsequenzen von Neutrinomassen im Experiment	32
4.1	Neutrinooszillationen	32
4.2	Neutrinoloser Doppel-Betazerfall	35
4.2.1	Feynman-Amplitude	36
4.2.2	Kernmatrixelement	40
4.2.3	Zerfallsbreite	42
4.2.4	Effektive Masse m_{ee}	43
4.3	Tritium-Endpunkt-Messungen	44
4.4	Kosmologische Grenzen	47
5	Verschränkte Mischungen mit drei maximalen Mischungswinkeln	48
5.1	Bestimmung der unphysikalischen Parameter	49
5.2	Zuordnung zu speziellen Texturen	53

5.3	Einführung spezieller reeller Neutrino-Massentexturen	55
5.4	Einführung spezieller komplexer Neutrino-Massentexturen	56
6	Verschränkte Mischungen mit zwei maximalen Mischungswinkeln	60
6.1	Bestimmung der unphysikalischen Parameter	61
6.1.1	Dominanz von θ_{12}^ℓ	63
6.1.2	Dominanz von θ_{13}^ℓ	64
6.1.3	Ausgeglichenheit zwischen θ_{12}^ℓ und θ_{13}^ℓ	66
6.2	Zuordnung zu speziellen Texturen	68
6.3	Annahme spezieller reeller Neutrino-Massentexturen	69
6.3.1	Dominanz von θ_{12}^ℓ	70
6.3.2	Dominanz von θ_{13}^ℓ	71
6.3.3	Ausgeglichenheit zwischen θ_{12}^ℓ und θ_{13}^ℓ	72
6.4	Annahme spezieller komplexer Neutrino-Massentexturen	74
6.4.1	Dominanz von θ_{12}^ℓ	76
6.4.2	Dominanz von θ_{13}^ℓ	78
6.4.3	Ausgeglichenheit zwischen θ_{12}^ℓ und θ_{13}^ℓ	80
7	Zusammenfassung	84
A	Die Funktion $\varphi_2(\Phi)$	88
B	Numerische Ergebnisse	89
B.1	Zu Kapitel 5	89
B.1.1	Zu Abschnitt 5.1	90
B.1.2	Zu Abschnitt 5.3	91
B.1.3	Zu Abschnitt 5.4	91
B.2	Zu Kapitel 6	91
B.2.1	Zu Abschnitt 6.1	91
B.2.2	Zu Abschnitt 6.3	92
B.2.3	Zu Abschnitt 6.4	93

1 Motivation

„Neutrinos sind masselos“, so besagt es das Standardmodell der Elementarteilchen (SM). Aus den Analysen der Neutrinooszillationsexperimente der letzten Jahre wissen wir jedoch, dass diese Aussage die Natur nicht korrekt beschreibt. Es hat sich vielmehr gezeigt, dass Neutrinos „fast“ masselos sind. Folglich ist die Betrachtung der Eigenschaften der massiven Neutrinos eine Möglichkeit, Hinweise für die Physik jenseits des SMs zu erhalten.

Begonnen hat die Neutrinoophysik 1930 mit der Postulierung eines neutralen Teilchens zur Beschreibung des kontinuierlichen β -Spektrums durch Pauli. Seitdem hat sich viel verändert. Aus den Messungen solarer Neutrinos und deren scheinbarer Inkompatibilität mit den existierenden Sonnenmodellen erlangten die 1957 von Pontecorvo [1] erstmals vorgeschlagenen Neutrinooszillationen physikalische Relevanz. Weitere Messungen von Reaktor-neutrinos und atmosphärischen sowie solaren Neutrinos führten zu dem Bild, das wir heute von Neutrinos haben: Neutrinos sind massive, stark mischende Teilchen. Aus den Analysen der verschiedenen Experimente hat sich gezeigt, dass die führenden Effekte der Oszillationen sehr gut durch 2- ν -Oszillationen beschrieben werden können. Die führenden Parameter der solaren und atmosphärischen Oszillationen - solarer und atmosphärischer Winkel sowie solare und atmosphärische Massenquadratsdifferenz - sind in den letzten Jahren in den zugehörigen Experimenten bestimmt worden. Die noch nicht bekannten Oszillationsparameter - der Wert des Reaktorwinkels (nicht nur eine obere Grenze), das Vorzeichen der atmosphärischen Massenquadratsdifferenz und die Dirac-Phase - sollen nun in den zukünftigen Experimenten bestimmt werden. Die höhere Genauigkeit führt dazu, dass die Messungen sensitiv auf 3- ν -Oszillationseffekte sind. Die Messung des Vorzeichens der atmosphärischen Massenquadratsdifferenz ist sehr wichtig, da sie uns ermöglicht zwischen normal und invertiert hierarchischer Anordnung zu unterscheiden. Derzeit können wir keine Aussage machen, ob die Masse m_1 (normal hierarchisch) oder m_3 (invertiert hierarchisch) die kleinste Neutrinomasse ist. Wir unterscheiden zwischen drei verschiedenen Neutrinomassen-Schemata: normal hierarchisch, invertiert hierarchisch und entartet. Das entartete Schema ist dadurch charakterisiert, dass die absolute Massenskala so hoch liegt, dass die Massendiffe-

renzen vernachlässigbar sind.

Die absolute Massenskala der Neutrinos ist durch Oszillationsexperimente nicht bestimmbar, da letztere nur Differenzen der Massenquadrate messen. Die Experimente, die auf absolute Massen sensitiv sind, zum Beispiel Tritium-Endpunkt-Messungen und Messungen des neutrinolosen Doppel-Betazerfalls, haben bisher nur obere Grenzen für Neutrinomassen und keine unumstrittene positive Evidenz ergeben. Die einzige positive Evidenz ist von einem Teil der Kollaboration des Heidelberg-Moskau-Experiments veröffentlicht worden [2] und wurde bisher nicht durch ein anderes Experiment bestätigt. Im Falle einer Bestätigung wäre nicht nur das entartete Schema verifiziert, sondern auch der Majorana-Charakter der Neutrinos. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass die so bestimmte Neutrinomasse nicht mit den Grenzen aus kosmologischen Beobachtungen vereinbar ist, da diese kein stark entartetes Spektrum befürworten. Einen Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten Neutrinomassen und leptonische Mischungsparameter zu bestimmen geben wir in Kapitel 4 unter besonderer Berücksichtigung des neutrinolosen Doppel-Betazerfalls. Es stellt sich in jedem Fall die Frage, warum Neutrinomassen im Verhältnis zu den anderen Massen im SM so klein sind. Um darauf eine Antwort zu finden, muss man sich überlegen, was Neutrinos von den anderen Fermionen im SM unterscheidet.

Offensichtlich sind Neutrinos die einzigen Fermionen, die elektrisch neutral sind und damit Majorana-, also ihre eigenen Antiteilchen, sein können. Versucht man einen renormalisierbaren Majorana-Massenterm in der SM-Lagrangedichte zu konstruieren, steht man vor dem Problem, dass dieser mit Hilfe der im SM enthaltenen Felder nicht erzeugbar ist. Denn dafür wird ein Triplet des schwachen Isospins mit Hyperladung $Y = 2$ benötigt. Folglich erhalten wir solche Terme nur, indem wir das SM als effektive Theorie einer fundamentaleren Theorie auf höheren Skalen betrachten. Die Neutrinomassenterme sind in diesem Fall zum Beispiel effektive Dimension-5-Terme, die durch die Skala der Symmetriebrechung der höheren Theorie unterdrückt sind. Ein möglicher Mechanismus zur Erzeugung der kleinen Massen ist der Seesaw-Mechanismus vom Typ I, bei dem SM Singulets (üblicherweise rechtshändige Neutrinos) eingeführt werden, die mit den linkshändigen Neutrinos und dem Higgs-Dublett koppeln. Integriert man die schweren rechtshändigen Neutrinos aus, erhält man einen effektiven Majorana-Massenterm für die leichten Neutrinos, unterdrückt durch die Massenskala der schweren Neutrinos, der Größenordnung der Symmetriebrechungsskala. Andere Möglichkeiten, Majorana-Massenterme zu erzeugen, sind eine Erweiterung des Higgs-Sektors durch ein $SU(2)_L$ Higgs-Triplet, das einen sehr kleinen VEV annimmt, genannt Seesaw II, die Einführung eines schweren

Fermion-Triplets, genannt Seesaw III (siehe [3, 4] und Referenzen darin für Seesaw). Weitere Mechanismen finden sich in [5]. In jedem Fall wird durch die Erzeugung eines Majorana-Massenterms die Leptonzahl L um zwei Einheiten verletzt.

Die Verletzung der Leptonzahl ist in Bezug auf ein anderes theoretisches Problem von immenser Bedeutung: die Materie-Antimaterie-Asymmetrie im Universum. Im Jahr 1967 hat Sakharov [6] drei Bedingungen aufgestellt, die erfüllt sein müssen, damit in einem Baryon-symmetrischen Universum durch Mikrophysik eine Baryon-Asymmetrie erzeugt werden kann [6]: Existenz von (i) Baryonzahlverletzung, (ii) C- und CP-Verletzung sowie (iii) baryonzahlverletzender Prozesse im thermischen Ungleichgewicht. Der Zusammenhang zur Neutrinophysik und Leptonzahlverletzung ist durch sphaleronische Prozesse gegeben, die die Summe $B+L$ der Leptonzahl und der Baryonzahl B verletzen, aber $B - L$ erhalten, so dass eine Leptonzahlverletzung in eine Baryonzahlverletzung „umgewandelt“ wird. Das erste Leptogenese-Modell wurde von Fukugita und Yanagida in Kombination mit dem Seesaw-Mechanismus vom Typ I vorgeschlagen [7]. Die schweren rechtshändigen Neutrinos zerfallen in Lepton beziehungsweise Antilepton und Higgs. Existiert CP-Verletzung in den leptonischen Wechselwirkungen, dann führt letztere zu einer Differenz in den Zerfallsraten in Lepton bzw. Antilepton, so dass Leptonzahl erzeugt wird und durch sphaleronische Prozesse in Baryonzahl umgewandelt werden kann. Wir erkennen, dass in Bezug auf Leptogenese CP-Verletzung im Leptonsektor eine entscheidende Rolle spielt. Deshalb ist es von Bedeutung, die CP-Verletzung zu berücksichtigen, die in der Massenbasis in komplexen Mischungsmatrizen beziehungsweise in der Flavor-Basis in komplexen Massenmatrizen auftritt. Aus diesem Grund werden wir in dieser Arbeit komplexe Massen- und Mischungsmatrizen betrachten.

Es stellt sich die Frage, wie wir Massenmatrizen für die Fermionen des SM erzeugen können, so dass sie mit den beobachteten Massen und Mischungen verträglich sind. Eine Möglichkeit ist es Flavor-Symmetrien, auch Generationen-Symmetrien oder horizontale Symmetrien genannt, zu betrachten. Da sich bei Messungen herausgestellt hat, dass die Massen der verschiedenen Flavor eine Hierarchie aufweisen, die mit der Annahme von universellen Yukawa-Kopplungen nicht erklärbar sind, führt man Flavor-Symmetrien ein. Aus diesen folgen dann Flavor-abhängige Einträge in den Massenmatrizen. In der Literatur betrachtete Flavor-Symmetrien sind zum Beispiel $U(1)$ [8] (aufbauend auf dem Froggatt-Nielsen-Mechanismus [9]), A_4 [10], S_4 [11], D_5 [12], aber auch $SU(3)$ [13–15]. Für die Mischungsmatrizen gilt im Allgemeinen, dass sie nicht diagonal sind und damit große Mischungen aus dem Sektor der geladenen Leptonen und dem der Neutrinos kommen können. In der Literatur

wird mit Ausnahme von [16] stets der Fall betrachtet, bei dem große Mischungen nur in einem Sektor auftreten [17–23]. Wir betrachten deshalb in dieser Arbeit den Fall verschränkter maximaler Mischungen, also maximale Mischungen sowohl in U^ℓ als auch in U^ν .

Flavor-Symmetrien werden häufig in Verbindung mit vereinheitlichenden Theorien, genannt Grand Unified Theories (GUTs), betrachtet, die eine Vereinigung der Kräfte und Teilchen anstreben. Um Anzeichen einer Vereinigung zu erkennen, untersucht man zum Beispiel Verbindungen zwischen dem Quark- und dem Leptonsektor. Phänomenologisch betrachtet man beispielsweise im Rahmen der sogenannten Quark-Lepton-Komplementarität (QLC) [24–27] Relationen zwischen Mischungswinkeln des Quark- und des Leptonsektors.

Wir werden im Folgenden zunächst in Kapitel 2 Aspekte des um Neutrinomassen erweiterten Standardmodells besprechen. In Kapitel 3 folgt ein Überblick über Massen und Mischungen im Leptonsektor und die Motivation unserer Annahmen. Im darauf folgenden Kapitel 4 untersuchen wir die Auswirkungen massiver Neutrinos im Experiment anhand von Neutrinooszillationen, dem neutrinolosen Doppel-Betazerfall und dem Betazerfall. In den Kapiteln 5 und 6 analysieren wir zwei spezielle, nicht triviale Konfigurationen, für die sowohl im Sektor der geladenen Leptonen als auch im Neutrinossektor maximale Mischungen auftreten. Im letzten Kapitel stellen wir die Zusammenfassung und den Ausblick und im Anhang die Ergebnisse unserer numerischen Berechnungen dar.

2 Erweiterung des Standardmodells um Neutrinomassen

In diesem Kapitel führen wir zunächst die elektroschwache Lagrangedichte des SMs ein, um dann auf die mögliche Struktur der Massenterme der Neutrinos einzugehen. Die aus dem Unterschied zwischen Massen- und Flavor-Basis resultierenden Transformationsmatrizen führen im geladenen Strom zur Einführung der unitären leptoni-schen Mischungsmatrix, die wir in Abschnitt 2.2 in verschiedenen Parametrisierungen betrachten. Im darauf folgenden Abschnitt betrachten wir parametrisierungs-unabhängige Größen, die die leptonische Mischungsmatrix beschreiben, sogenannte „rephasing invariants“. Zuletzt wenden wir uns der CP-Verletzung im Quark- und im Leptonsektor zu.

2.1 Elektroschwache Lagrangedichte mit Neutrinomassen

Das Standard-Modell (SM) ist eine Eichtheorie mit der Gruppe $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, wobei C , L und Y für Color, Linkshändigkeit und Hyperladung stehen. Durch die Einführung eines Higgs-Dubletts, das einen Vakuumerwartungswert (VEV) annimmt, wird die Symmetrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ spontan zu $U(1)_Q$, mit der elektrischen Ladung Q , gebrochen.

Da unser Interesse dem Leptonsektor gilt, betrachten wir im Folgenden ausschließlich die elektroschwache Theorie $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Wie der Index L der Eichgruppe $SU(2)_L$ vermuten lässt, spielt die Chiralität hier eine wichtige Rolle. Die chiralen Felder werden mit Hilfe der Projektoren P_L und P_R

$$P_{L,R} = \frac{1}{2} (1 \mp \gamma^5) \tag{2.1}$$

erzeugt, so dass wir jedes fermionische Feld durch $\psi = \psi_L + \psi_R$ darstellen können. Die linkshändigen Felder ψ_L sind Dubletts unter dem schwachen Isospin, die

rechtshändigen Felder ψ_R hingegen Singulett. Wir führen hier beispielhaft die Felddefinitionen für Leptonen und Quarks der ersten Generation ein:

$$\mathbf{L}_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad e_R, \quad u_R, \quad d_R. \quad (2.2)$$

Analog werden die Felder der zweiten und dritten Generation beschrieben. Wir erhalten die elektroschwache Lagrangedichte, bei der wir zu Gunsten der Übersichtlichkeit nur die Terme der ersten Generation betrachten:

$$\mathcal{L} = i\bar{\mathbf{L}}_L \not{D} \mathbf{L}_L + i\bar{\mathbf{Q}}_L \not{D} \mathbf{Q}_L + \sum_{f=e,u,d} i\bar{f}_R \not{D} f_R \quad (2.3)$$

$$- \frac{1}{4} A_{\mu\nu}^a A^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (2.4)$$

$$+ (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (2.5)$$

$$- y^l (\bar{\mathbf{L}}_L \phi e_R + \bar{e}_R \phi^\dagger \mathbf{L}_L) \quad (2.6)$$

$$- y^d (\bar{\mathbf{Q}}_L \phi d_R + \bar{d}_R \phi^\dagger \mathbf{Q}_L) - y^u (\bar{\mathbf{Q}}_L \tilde{\phi} u_R + \bar{u}_R \tilde{\phi}^\dagger \mathbf{Q}_L), \quad (2.7)$$

wobei ϕ das Higgs-Feld ($\tilde{\phi} = i\sigma_2 \phi^*$), y die Yukawa-Kopplungen, D_μ die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_{\mu\nu} + ig A_\mu^a I_a + ig' B_\mu \frac{Y}{2}, \quad (2.8)$$

mit den Kopplungen g und g' , den Generatoren I_a und Y sowie den Eichfeldern A_a und B der $SU(2)_L$ beziehungsweise $U(1)_Y$ beschreibt. Die Felder der Eichbosonen $A_a^{\mu\nu}$ und $B^{\mu\nu}$ sind folgendermaßen definiert:

$$A_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g \sum_{b,c=1}^3 \varepsilon_{abc} A_b^\mu A_c^\nu, \quad (2.9)$$

$$B^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu.$$

In der elektroschwachen Lagrangedichte beschreibt:

(2.3) die kinetischen Terme der Fermionen und ihre Wechselwirkung mit den Eichbosonen, sprich den geladenen und der neutralen Strom,

(2.4) die kinetischen Terme der Eichbosonen und ihre Selbstkopplungen,

(2.5) die Lagrangedichte des Higgs-Feldes,

(2.6) die Higgs-Lepton-Yukawa-Kopplungen,

(2.7) die Higgs-Quark-Yukawa-Kopplungen.

Es ist auffällig, dass wir in Gl. (2.6) im Vergleich zu Gl. (2.7) nur einen an Stelle von zwei Termen haben. Dies ist die Folge der fehlenden rechtshändigen Komponente

der Neutrinofelder (siehe Gl. (2.2)) und führt zu masselosen Neutrinos im SM. Für uns ist im Folgenden der geladene Strom für Leptonen j_L^μ :

$$j_L^\mu = 2\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu e_L + 2\bar{\nu}_{\mu L}\gamma^\mu \mu_L + 2\bar{\nu}_{\tau L}\gamma^\mu \tau_L \quad (2.10)$$

und die Struktur der Massenterme der Leptonen relevant.

Die Leptonen erhalten, wie auch die Quarks und die Eichbosonen, ihre Masse bei der elektroschwachen Symmetriebrechung (EWSB). Die EWSB wird mit Hilfe des komplexen Higgs-Dubletts durchgeführt:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

wobei ϕ^+ ein geladenes und ϕ^0 ein neutrales komplexes skalares Feld ist. Durch die Annahme eines Vakuumerwartungswerts (VEV), den wir auf Grund der Eichfreiheit reell wählen können:

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

wird die $SU(2)_L \times U(1)_Y$ zur $U(1)_Q$ spontan gebrochen. Das Higgs-Dublett wird in der unitären Eichung zu:

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

wobei H das Feld des physikalischen Higgs ist. Für die Yukawa-Kopplungsterme erhalten wir dann für eine Generation im Fall von Dirac-Neutrinos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H,L} &= -y^l \bar{\mathbf{L}}_L \phi e_R - y^\nu \bar{\mathbf{L}}_L \tilde{\phi} \nu_{eR} + H.c. \\ &= -\frac{y^l v}{\sqrt{2}} \bar{e}_L e_R - \frac{y^l}{\sqrt{2}} \bar{e}_L e_R H - \frac{y^\nu v}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{eL} \nu_{eR} - \frac{y^\nu}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{eL} \nu_{eR} H + H.c., \end{aligned} \quad (2.14)$$

wobei σ_2 die zweite Pauli-Matrix ist. In Gl. (2.14) können wir die Massenterme identifizieren und erhalten für die Dirac-Massen:

$$m_e = \frac{y^l v}{\sqrt{2}}, \quad m_{\nu_e} = \frac{y^\nu v}{\sqrt{2}}. \quad (2.15)$$

Betrachten wir nicht nur eine Generation, sondern drei, so erhalten wir folgende Massenmatrizen:

$$M_\ell = \frac{Y^l v}{\sqrt{2}}, \quad M_\nu = \frac{Y^\nu v}{\sqrt{2}}, \quad (2.16)$$

wobei die Yukawa-Kopplungsmatrizen und folglich auch die Massenmatrizen im All-

gemeinen nicht diagonal sind. Dies führt dazu, dass die Flavor-Basis nicht der Massenbasis entspricht und wir unitäre Transformationsmatrizen erhalten: U_ℓ und U'_ℓ für die links- bzw. rechtshändigen Felder der geladenen Leptonen und U_ν und U'_ν für die links- bzw. rechtshändigen Felder der Neutrinos.

$$\begin{aligned}\ell_{L\alpha} &= U_{\ell\alpha i} \ell_{Li}, & \ell_{R\alpha} &= U'_{\ell\alpha i} \ell_{Ri}, \\ \nu_{L\alpha} &= U_{\nu\alpha i} \nu_{Li}, & \nu_{R\alpha} &= U'_{\nu\alpha i} \nu_{Ri}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Hier stehen die griechischen Indizes für die Felder in der Flavor-Basis und die lateinischen für die in der Massenbasis. Diese Konvention gilt in der gesamten Arbeit, es sei denn es ist explizit anders angegeben. Die Diagonalisierungen der Massenmatrizen sind durch folgende biunitäre Transformationen gegeben:

$$\begin{aligned}U_\ell^\dagger M_\ell U'_\ell &= M_\ell^{\text{diag}} \quad \text{mit} \quad M_\ell^{\text{diag}} = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau), \\ U'_\nu M_\nu U_\nu &= M_\nu^{\text{diag}} \quad \text{mit} \quad M_\nu^{\text{diag}} = \text{diag}(m_{\nu_e}, m_{\nu_\mu}, m_{\nu_\tau}).\end{aligned}\tag{2.18}$$

Wir betrachten hier den effektiven 3×3 -Fall für Majorana-Neutrinos. Dazu führen wir den Ladungskonjugationsoperator \widehat{C} ein, der die Transformation von Teilchen zu Antiteilchen durchführt und bei chiralen Feldern die Chiralität wechselt.

$$\widehat{C} : \psi \rightarrow \psi^C = \mathcal{C} \bar{\psi}^T, \quad \mathcal{C} = i\gamma^2 \gamma^0.\tag{2.19}$$

Betrachten wir ein massives Fermionfeld mit einer links- und einer rechtshändigen Komponente, so sind im Fall eines Dirac-Felds diese beiden Felder unabhängig voneinander. Im Fall eines Majorana-Felds ist das rechtshändige Feld das C -konjugierte Feld des linkshändigen: $\psi_R = (\psi_L)^C = \mathcal{C}(\bar{\psi}_L)^T$. Wir können das Majorana-Feld folglich darstellen durch:

$$\psi = \psi_L + (\psi_L)^C.\tag{2.20}$$

Als Majorana-Bedingung erhalten wir aus Gl. (2.20):

$$\psi^C = \psi.\tag{2.21}$$

Mit Hilfe der rechtshändigen $((\nu_L)^C)$ und der linkshändigen (ν_L) Komponente des Neutrino-feldes können wir einen Massenterm konstruieren:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M^\nu &= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \bar{\nu}_{L\alpha}^C M_{\alpha\beta}^{\text{eff}} \nu_{L\beta} + H.c. \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \nu_{L\alpha}^T \mathcal{C}^\dagger M_{\alpha\beta}^{\text{eff}} \nu_{L\beta} + H.c. .\end{aligned}\tag{2.22}$$

Die Massenmatrix ist im Allgemeinen eine komplexe und symmetrische Matrix mit $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{L\alpha}^C M_{\alpha\beta} \nu_{L\beta} &= - \sum_{\alpha,\beta} \nu_{L\alpha}^T \mathcal{C}^\dagger M_{\alpha\beta} \mathcal{C} (\bar{\nu}_{L\beta}^C)^T \stackrel{\mathcal{C}^\dagger \mathcal{C} = 1}{=} - \sum_{\alpha,\beta} \nu_{L\alpha}^T M_{\alpha\beta} (\bar{\nu}_{L\beta}^C)^T \\ &\stackrel{\nu_{L\alpha}^T (\bar{\nu}_{L\beta}^C)^T = -\bar{\nu}_{L\beta}^C \nu_{L\alpha}}{=} \sum_{\alpha,\beta} \bar{\nu}_{L\beta}^C M_{\alpha\beta} \nu_{L\alpha} \stackrel{\alpha \leftrightarrow \beta}{=} \sum_{\alpha,\beta} \bar{\nu}_{L\alpha}^C M_{\beta\alpha} \nu_{L\beta}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Wir erhalten also für die Transformation von Flavor- in Massenbasis nur eine Transformationsmatrix U_ν für die linkshändigen Felder.

$$\nu_{L\alpha} = U_{\nu\alpha i} \nu_{Li} \quad (2.24)$$

Die Diagonalisierung der effektiven Majorana-Matrix ist durch

$$U_\nu^T M^{\text{eff}} U_\nu = M^{\text{diag}} \quad \text{mit} \quad M^{\text{diag}} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \quad (2.25)$$

gegeben.

2.2 Die leptonische Mischungsmatrix U_{PMNS}

In Gln. (2.17) und (2.24) treten die beiden unitären Matrizen U_ℓ und U_ν auf, die die Transformation der linkshändigen Leptonfelder aus der Flavor- in die Massenbasis durchführen. Bei dieser Transformation ist der geladene Strom der einzige beeinflusste Teil der Lagrangedichte. Transformieren wir nun unter Berücksichtigung der Gln. (2.17) und (2.24) den geladenen Strom in die Massenbasis:

$$j_L^\mu = 2 \bar{\nu}_{L\alpha} \gamma^\mu \ell_{L\alpha} = 2 \bar{\nu}_{Li} U_{\nu\alpha i}^\dagger \gamma^\mu U_{\ell\alpha j} \ell_{Lj} = 2 \bar{\nu}_{Li} \gamma^\mu U_{\text{PMNS}ij}^\dagger \ell_{Lj}, \quad (2.26)$$

so tritt eine Kombination der beiden Transformationsmatrizen U_ℓ und U_ν auf: die unitäre Matrix $U_{\text{PMNS}} = U_\ell^\dagger U_\nu$, auch Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata-Matrix (PMNS) genannt [28, 29]. Diese ist die zur Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM) V_{CKM} des Quarksektors analoge Mischungsmatrix [30, 31].

Allgemein können wir eine unitäre 3×3 -Matrix in Abhängigkeit von drei Winkeln und sechs Phasen folgendermaßen parametrisieren [32]:

$$U_{\text{unitär}} = e^{i\hat{\omega}} \cdot \text{diag}(1, e^{i\hat{\varphi}_1}, e^{i\hat{\varphi}_2}) \cdot R^{23} \cdot W^{13} \cdot R^{12} \cdot \text{diag}(e^{i\hat{\alpha}_1}, e^{i\hat{\alpha}_2}, 1) = \Gamma \cdot D \cdot \hat{U} \cdot K. \quad (2.27)$$

Hierbei beschreibt W^{ab} eine komplexe Rotation um den Winkel θ_{ab} in der a - b -Ebene und R^{ab} die entsprechende reelle Rotation. Die Kombination $\widehat{U} = R^{23}W^{13}R^{12}$ wird Standardparametrisierung beziehungsweise CKM-Form genannt und hat die Form [33]:

$$\widehat{U} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\widehat{\delta}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\widehat{\delta}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\widehat{\delta}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\widehat{\delta}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\widehat{\delta}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

mit $s_{ij} = \sin \widehat{\theta}_{ij}$ und $c_{ij} = \cos \widehat{\theta}_{ij}$. Die in den Gln. (2.27) und (2.28) auftretenden Phasen $\widehat{\omega}$, $\widehat{\varphi}_1$, $\widehat{\varphi}_2$, $\widehat{\alpha}_1$, $\widehat{\alpha}_2$ und $\widehat{\delta}$ liegen in dem Intervall $[0, 2\pi]$.

Kehren wir zu unserem Fall der PMNS-Matrix zurück. Wir haben nun zwei verschiedene Möglichkeiten, die eben allgemein besprochene Parametrisierung einer unitären Matrix anzuwenden. Entweder setzen wir sie direkt in U_{PMNS} ein oder aber jeweils in U_ℓ und U_ν . Dies führt zu den beiden möglichen Parametrisierungen:

$$U_{\text{PMNS}} = D_P \widehat{U} K_P, \quad U_{\text{PMNS}} = K_\ell^\dagger \widehat{U}_\ell^\dagger D_\ell^\dagger D_\nu \widehat{U}_\nu K_\nu. \quad (2.29)$$

Da die Lagrangedichte, bis auf den geladenen Strom, unabhängig von den Phasenrotationen der Felder der geladenen Leptonen und im Fall von Dirac-Neutrinos der Neutrinofelder der Form

$$\begin{aligned} \nu_{Lk} &\longrightarrow e^{i\varphi_k} \nu_{Lk}, & \nu_{Rk} &\longrightarrow e^{i\varphi_k} \nu_{Rk}, & (k = 1, 2, 3), \\ \ell_{La} &\longrightarrow e^{i\varphi_a} \ell_{La}, & \ell_{Ra} &\longrightarrow e^{i\varphi_a} \ell_{Ra}, & (a = e, \mu, \tau), \end{aligned} \quad (2.30)$$

ist, können wir mit ihrer Hilfe fünf Phasen der PMNS-Matrix für Dirac-Neutrinos und drei für Majorana-Neutrinos wegrotieren:

$$\begin{aligned} j_L^\mu &= 2 \bar{\nu}_{Li} e^{-i\varphi_i} \gamma^\mu U_{\text{PMNS}ia}^\dagger e^{i\varphi_a} \ell_{La} \\ &= 2 e^{-i(\varphi_3 - \varphi_e)} \bar{\nu}_{Li} e^{-i(\varphi_i + \varphi_3)} \gamma^\mu U_{\text{PMNS}ia}^\dagger e^{i(\varphi_a - \varphi_e)} \ell_{La} \\ &= 2 e^{-i(\varphi_3 - \varphi_e)} \bar{\nu}_L \gamma^\mu D^{n\dagger} U_{\text{PMNS}}^\dagger D^e \ell_L. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Hier sind $\boldsymbol{\nu}^T = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ und $\boldsymbol{\ell}^T = (\ell_e, \ell_\mu, \ell_\tau)$ die Felder in der Massensbasis, $D^n = \text{diag}(e^{i(\varphi_1 - \varphi_3)}, e^{i(\varphi_2 - \varphi_3)}, 1)$ und $D^e = \text{diag}(1, e^{i(\varphi_\mu - \varphi_e)}, e^{i(\varphi_\tau - \varphi_e)})$. Im Fall von Majorana-Neutrinos ist D^n die Einheitsmatrix. Wir betrachten den allgemeineren Fall von Majorana-Neutrinos. Mit $D = D_\ell^\dagger D_\nu = \text{diag}(1, e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})$ wird Gl. (2.29) zu:

$$U_{\text{PMNS}} = \widehat{U} \cdot \text{diag}(e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, 1), \quad U_{\text{PMNS}} = \widehat{U}_\ell^\dagger D \widehat{U}_\nu K_\nu. \quad (2.32)$$

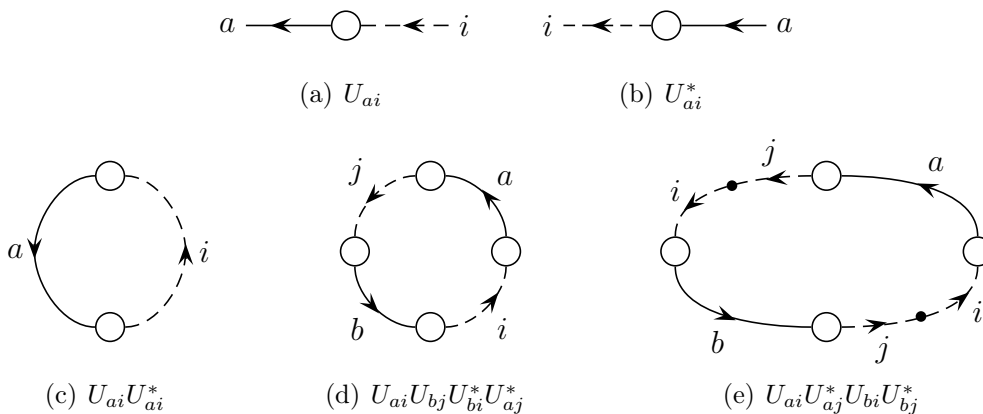


Abbildung 2.1: *a,b:* Graphische Darstellung der Elemente der PMNS-Matrix. Die Indizes an gestrichelten Linien sind die der Neutrinos und die an den durchgezogenen Linien die der geladenen Leptonen. *c,d,e:* Aus den Bedingungen konstruierte Invarianten unter Phasenrotationen der leptonischen Felder, wobei *e* nur im Fall von Majorana-Neutrinos invariant ist.

Die Phasen in D_P bzw. K_ℓ^\dagger haben wir durch geschickte Wahl der Phasen in D^e entfernt. Im Fall von Dirac-Neutrinos ist durch die Wahl der Phasen in U^n zusätzlich die Eliminierung der Majorana-Phasen ϕ_1 und ϕ_2 beziehungsweise der Phasen in K_ν möglich. Es ist zu beachten, dass die Lagrangedichte invariant unter der Phasenrotation der Majorana-Felder um π ist [34], so dass die Phasen $\phi_{1,2}$ und $\phi_{1,2} + \pi$ äquivalent sind. Deshalb bezeichnen wir im Folgenden $2\phi_1$ und $2\phi_2$ als Majorana-Phasen.

2.3 Invarianten unter Phasenrotationen der Felder

In Gl. (2.31) haben wir festgestellt, dass wir mit Hilfe von Phasenrotationen der Leptonfelder Phasen in der PMNS-Matrix eliminieren können, ohne die Physik zu verändern. Um nicht davon abhängig zu sein, in welcher Parametrisierung man sich gerade befindet, ist es sinnvoll, direkt Größen zu betrachten, die unabhängig von den Phasenrotationen der Felder sind, sogenannte „rephasing invariants“. Für die Mischungsmatrixelemente führen die Phasenrotationen mit $a \in \{e, \mu, \tau\}$ und $i \in \{1, 2, 3\}$ zu folgender Transformation:

$$U_{ai} \longrightarrow e^{-i\phi_a} U_{ai} e^{i\phi_i}, \quad (2.33)$$

wobei U die PMNS-Matrix ist und im Fall von Majorana-Neutrinos $\phi_i = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$. Wir verwenden zur Bestimmung der Invarianten die in [34] vorgeschlagene graphische Methode. Die Elemente der PMNS-Matrix werden durch Abb. 2.1(a) und 2.1(b) dargestellt. Dabei bezeichnen die Schriftzeichen an den gestrichelten Linien

die Neutrinoindizes und die an den durchgezogenen Linien die Indizes der geladenen Leptonen. Wir können also den auslaufenden/einlaufenden, durchgezogenen Linien die Faktoren $e^{-i\phi_a}/e^{i\phi_a}$ und analog den gestrichelten die Faktoren $e^{i\phi_i}/e^{-i\phi_i}$ zuordnen. Damit können wir die Bedingungen für die Invarianz bestimmen. Es muss jede auslaufende Linie mit einer einlaufenden desselben Indexes verbunden sein, so dass sich die komplexen Faktoren aufheben. Dies gilt sowohl für die geladenen Leptonen als auch für die Neutrinos. Da im Fall von Majorana-Neutrinos die Rotation auf $\phi_i = n\pi$, also einen Faktor ± 1 , beschränkt ist, ist es hier ausreichend, dass der Neutrinoindex in einer geraden Anzahl auftritt, z.B. zweimal als einlaufende Linie. Dies wird klarer, wenn man die verschiedenen Invarianten betrachtet.

In Abb. 2.1 haben wir die drei möglichen Invarianten zusammengestellt: Abb. 2.1(c) die quadratischen Invarianten $U_{\alpha i}U_{\alpha i}^*$, sprich die Beträge der Matrixelemente, Abb. 2.1(d) die quartischen Invarianten ${}^{\alpha i}\square_{\beta j} = U_{\alpha i}U_{\beta j}U_{\beta i}^*U_{\alpha j}^*$, deren Imaginärteil betragsmäßig durch die Jarlskog-Invariante J [35] gegeben ist, und Abb. 2.1(e) die quartischen Invarianten $U_{\alpha i}U_{\alpha j}^*U_{\beta i}U_{\beta j}^*$, die nur im Fall von Majorana-Neutrinos invariant sind. Unabhängig voneinander sind auf Grund der Unitarität der PMNS-Matrix von allen Invarianten lediglich vier quadratische und drei quartische.

Für uns von Bedeutung ist nun, wie man aus den Invarianten die Winkel und Phasen in der Standardparametrisierung erhält. Dazu betrachten wir die Invarianten: $|U_{13}|^2$, $|U_{23}|^2$, $|U_{12}|^2$, $|U_{22}|^2$, $J = \Im[U_{22}U_{11}U_{21}^*U_{12}^*]$, $(U_{13}U_{11}^*)^2$ und $(U_{13}U_{12}^*)^2$ als unabhängiges Set. Aus den drei erstgenannten quadratischen Invarianten erhalten wir die drei Mischungswinkel θ_{13} , θ_{23} und θ_{12} :

$$\sin^2 \theta_{13} = |U_{13}|^2, \quad (2.34)$$

$$\sin^2 \theta_{23} = \frac{|U_{23}|^2}{1 - |U_{13}|^2}, \quad (2.35)$$

$$\sin^2 \theta_{12} = \frac{|U_{12}|^2}{1 - |U_{13}|^2}. \quad (2.36)$$

Aus der letzten quadratischen Invarianten $|U_{22}|^2$ und der Jarlskog-Invarianten J erhalten wir δ_{CP} :

$$\begin{aligned} J &= c_{12}c_{23}c_{13}^2 s_{23}s_{13}s_{12} \sin \delta_{\text{CP}}, \\ |U_{22}|^2 &= c_{12}^2 c_{23}^2 + s_{12}^2 s_{23}^2 s_{13}^2 - c_{12}c_{23}s_{12}s_{23}s_{13}^2 \cos \delta_{\text{CP}}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Aus den zwei verbleibenden quartischen Invarianten $(U_{13}U_{11}^*)^2$ und $(U_{13}U_{12}^*)^2$, die

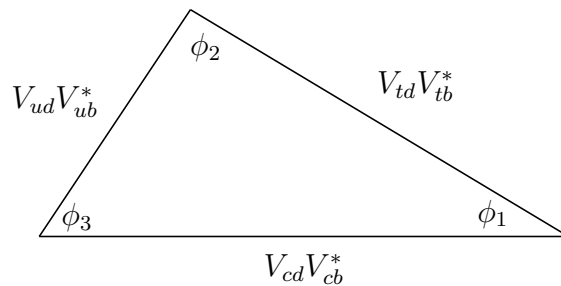


Abbildung 2.2: Das Unitaritätsdreieck im Standardmodell [33], wobei V_{ij} die Elemente der CKM-Matrix sind und ϕ_1 , ϕ_2 sowie ϕ_3 in Gl. (2.41) definiert sind.

nur im Fall von Majorana-Neutrinos gelten, folgen die Majorana-Phasen:

$$2\phi_1 = -\arg((U_{13}U_{11}^*)^2) - 2\delta_{\text{CP}}, \quad 2\phi_2 = -\arg((U_{13}U_{12}^*)^2) - 2\delta_{\text{CP}}. \quad (2.38)$$

Im Falle eines δ_{CP} , das auf Grund eines verschwindenden $\sin^2 \theta_{13}$ undefiniert ist, können die Majorana-Phasen wie folgt berechnet werden:

$$2\phi_1 = \text{Arg}((U_{21}U_{23}^*)^2), \quad 2\phi_2 = \text{Arg}((U_{32}U_{33}^*)^2). \quad (2.39)$$

Mit Hilfe der Invarianten können wir also die Mischungsmatrix unabhängig von der Parametrisierung darstellen und mit den Gln. (2.34)-(2.39) die Parameter der Standardparametrisierung bestimmen.

2.4 CP-Verletzung im Quark- und Leptonsektor

Durch die Beobachtung von CP-verletzenden Effekten sowohl in Zerfällen des neutralen Kaons [36] als auch in Zerfällen des neutralen B-Mesons [37] wissen wir, dass im Quarksektor CP-Verletzung vorliegt. Im SM sind, mit Ausnahme der Yukawa-Kopplungen, alle Kopplungen reell [38]. Daher spielen die Yukawa-Kopplungen eine wichtige Rolle bei der Erzeugung von CP-Verletzung. Eine spontane Brechung der CP-Symmetrie ist, auf Grund der Möglichkeit den VEV des Higgs stets reell zu wählen, nicht möglich. Wir erhalten die CP-Verletzung im Quarksektor deshalb nur durch den Kobayashi-Maskawa-Mechanismus. Dies bedeutet, dass die CP-Verletzung durch komplexe Yukawa-Kopplungen erzeugt wird, die zu einer komplexen CKM-Matrix führen. In der Standardparametrisierung charakterisiert die Phase δ_{CP} die CP-Verletzung. Parametrisierungsunabhängig erhalten wir die Jarlskog-Invariante

als Beschreibung der CP-Verletzung. Oftmals werden in Zusammenhang mit CP-Verletzung sogenannte „Unitaritätsdreiecke“ dargestellt (siehe Abb. 2.2), deren Fläche proportional zu der Jarlskog-Invarianten ist. Üblicherweise wird das aus der Unitaritätsrelation:

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0 \quad (2.40)$$

erhaltene Dreieck dargestellt (siehe Abb. 2.2). Für die Winkel erhalten wir aus den Messungen von B-Zerfällen [33]:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \arg\left(-\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*}\right) \quad \sin 2\phi_1 = 0.687 \pm 0.032, \\ \phi_2 &= \arg\left(-\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*}\right) = (99_{-8}^{+13})^\circ, \\ \phi_3 &= \arg\left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}\right) = (63_{-12}^{+15})^\circ. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Da Neutrinos im SM masselos sind, kann leptonische Mischung im geladenen Strom stets durch Redefinitionen der Neutrinofelder wegrotiert werden. Wir erhalten folglich keine CP-Verletzung im Leptonsektor des SM. Bisher ist auch in keinem Experiment CP-Verletzung im Leptonsektor nachgewiesen worden. Betrachten wir aber massive Neutrinos, so erhalten wir wie im Quarksektor die Möglichkeit, durch den Kobayashi-Maskawa-Mechanismus CP-Verletzung zu erzeugen. Zusätzlich können im Leptonsektor weitere Ursachen für explizite CP-Verletzung gefunden werden: zum Beispiel Majorana-Phasen in der PMNS-Matrix oder die Massenmatrix der rechtshändigen Neutrinos im Rahmen des Seesaw-Mechanismus [39]. Die Beschreibung der CP-Verletzung ist, wie schon im Quarksektor, mit Hilfe von Invarianten (siehe Gln. (2.37)-(2.39)), beziehungsweise Unitaritätsdreiecken (siehe Abb. 2.2) darstellbar. Hier erhalten wir im Fall von Majorana-Neutrinos sogenannte „Majorana-Dreiecke“ [40]¹, die den Unitaritätsdreiecken im Quarksektor entsprechen:

$$\begin{aligned} T_{12} &= U_{11}U_{12}^* + U_{21}U_{22}^* + U_{31}U_{32}^* = 0, \\ T_{12} &= U_{11}U_{13}^* + U_{21}U_{23}^* + U_{31}U_{33}^* = 0, \\ T_{12} &= U_{12}U_{13}^* + U_{22}U_{23}^* + U_{32}U_{33}^* = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

War bei den Dreiecken im Quarksektor die Orientierung in der komplexen Ebene ohne physikalische Bedeutung², so ist dies bei Majorana-Dreiecken nicht der

¹In der Referenz ist die PMNS-Matrix anders definiert: $U = U_\nu^\dagger U_\ell$.

²Die Dreiecke im Quarksektor (auch für den Fall von Dirac-Neutrinos) drehen sich unter einer Phasenrotation der down-type (Dirac-Neutrino-) Felder in der komplexen Ebene: $U_{ij}U_{ik}^* \rightarrow e^{i(\phi_j - \phi_k)}U_{ij}U_{ik}^*$.

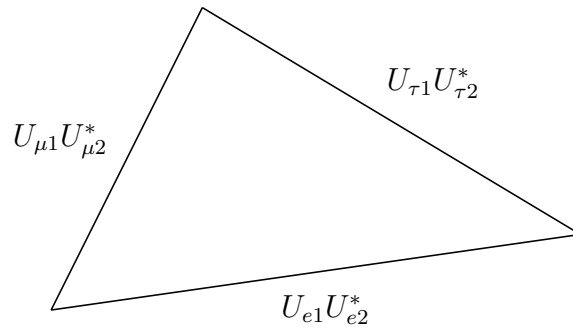


Abbildung 2.3: Das unitäre Majorana-Dreieck T_{12} , dessen Orientierung in der komplexen Ebene durch die Majorana-Phasen fixiert ist.

Fall. Aus diesen können wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für CP-Erhaltung ablesen: das Verschwinden der Fläche, die proportional zur Jarlskog-Invarianten ist, und die Orientierung aller Dreiecke entlang der reellen oder imaginären Achse. Das Verschwinden der Fläche des Dreiecks entspricht einer verschwindenden Dirac-Phase. In unserer Definition der Majorana-Phasen entspricht die Orientierung entlang der reellen Achse $\phi_1, \phi_2 \in \{0, \pi\}$ und entlang der imaginären Achse $\phi_1, \phi_2 \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$. Die beiden halbzahligen Lösungen implizieren nicht (wie man vermuten könnte) CP-Verletzung, sondern lediglich verschiedene CP-Paritäten der Masseneigenzustände [41]. Aus Gl. (2.38) wissen wir, dass lediglich das Doppelte der Majorana-Phasen physikalisch ist, so dass wir damit ebenfalls begründen können, weshalb die Orientierung entlang der imaginären Achse ($2\phi_1, 2\phi_2 \in \{\pi, 3\pi\}$) CP-erhaltend ist.

3 Massen und Mischungen im Leptonsektor

Die experimentell bestimmten Massen und Mischungen im Leptonsektor werfen noch viele Fragen auf. So ist zum Beispiel nicht klar, warum die Massen der Neutrinos so viel kleiner sind als die der anderen Fermionen. Weiterhin können wir die Hierarchien zwischen den einzelnen Generationen nicht „natürlich“ im SM erzeugen. In Bezug auf die Mischungen stellen wir fest, dass sie im Leptonsektor im Gegensatz zum Quarksektor groß sind. Wir versuchen in diesem Kapitel möglichst einfache und häufig verwendete Lösungsansätze für diese Fragen darzustellen.

3.1 Erzeugung kleiner Neutrinomassen mit Hilfe des Seesaw-Mechanismus

Wir widmen uns zunächst der Frage, warum die Neutrinomassen so viel kleiner sind als die Massen der anderen Fermionen. Dazu betrachten wir den weit verbreiteten Seesaw-Mechanismus, der auf natürliche Weise kleine Neutrinomassen erzeugt. Wie schon in der Motivation erwähnt, ist es ohne eine Erweiterung des SMs nicht möglich Neutrinomassen zu generieren. Entweder müssen, in Analogie zu den anderen Fermionen, rechtshändige Neutrinos eingeführt werden, die dann zu Yukawa-Kopplungen mit dem Higgs und nach der EWSB zu Dirac-Massen führen, oder effektive Majorana-Massenterme, die durch Physik auf einer hohen Skala entstehen. Betrachtet man den ersten Fall, so ist die einzige Möglichkeit, die Neutrinomassen von korrekter Größenordnung zu erhalten, die entsprechenden Yukawa-Kopplungen extrem klein zu wählen ($\sim 10^{-12}$). Dies ist aber unter dem Aspekt der Natürlichkeit, dass die Yukawa-Kopplungen von derselben Größenordnung sind, nicht befriedigend. Wir stellen hier im Folgenden den Seesaw-Mechanismus vom Typ I als Beispiel für einen möglichen Mechanismus vor, der extrem kleine Neutrinomassen durch effektive Majorana-Massenterme erzeugt.

Im Seesaw I führen wir zusätzlich zu den SM-Feldern drei rechtshändige Neutri-

nofelder ein. Mit Hilfe der rechtshändigen und linkshändigen Neutrinofelder können wir drei verschiedene Massenterme generieren: zwei Majorana-Massenterme mit den 3×3 -Massenmatrizen M^L und M^R und einen Dirac-Massenterm mit der 3×3 -Matrix M^D :

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} M_{\alpha\beta}^L \nu_{L\alpha} \mathcal{C}^\dagger \nu_{L\beta} - M_{\alpha\beta}^D \bar{\nu}_{R\alpha} \mathcal{C}^\dagger \nu_{L\beta} + \frac{1}{2} M_{\alpha\beta}^{R*} \nu_{R\alpha} \mathcal{C}^\dagger \nu_{R\beta} + H.c. . \quad (3.1)$$

Die Massenmatrix kann dann in der Basis $N^T = (\nu_{Le}, \nu_{L\mu}, \nu_{L\tau}, \nu_{Re}^C, \nu_{R\mu}^C, \nu_{R\tau}^C)$ durch die 6×6 -Matrix

$$M = \begin{pmatrix} M^L & (M^D)^T \\ M^D & M^R \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

beschrieben werden. Der Massenterm in der Lagrangedichte wird dann zu:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} N^T \mathcal{C}^\dagger M N + H.c. . \quad (3.3)$$

Im SM ist der Majorana-Massenterm für die linkshändigen Felder nicht erlaubt, weil die linkshändigen Felder Dubletts unter $SU(2)_L$ sind und damit der Majorana-Term nicht invariant unter den Transformationen der $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ist. Bei den rechtshändigen Feldern besteht dieses Problem nicht, weil sie Singulets des schwachen Isospins sind. Wir wählen deshalb im Folgenden $M^L = 0$. Weiterhin ist eine notwendige Annahme für den Seesaw, dass die Elemente der rechtshändigen Majorana-Matrix M^R , die durch Physik jenseits des SM generiert wird, viel größer sind als die der Dirac-Matrix M^D . Die Massenmatrix können wir nun blockweise diagonalisieren, so dass wir für die leichten Neutrinos genähert folgende Form der effektive 3×3 -Massenmatrix M^{eff} erhalten:

$$M^{\text{eff}} \simeq -M^{DT} (M^R)^{-1} M^D. \quad (3.4)$$

Eine andere Möglichkeit die effektive Neutrinomasse zu bestimmen, ist es die kinetischen Freiheitsgrade der schweren rechtshändigen Neutrinos auszuintegrieren.

Die Dirac-Massen für die Neutrinos erhalten wir durch die elektroschwache Symmetriebrechung (siehe Gl. (2.14)). Wir nehmen an, dass die Yukawa-Kopplungen der Neutrinos in derselben Größenordnung liegen, wie die der anderen Fermionen, so dass auch M_D von der Größenordnung ähnlich zu den Massen der anderen Fermionen ist. Für die schwere Masse M_R nehmen wir an, dass sie durch neue Physik jenseits des Standardmodells bei hohen Energien erzeugt wird und damit die Größenordnung der Masse durch die Skala der neuen Physik gegeben ist. Wir schließen daraus, dass die Annahme $M^D \ll M^R$ gerechtfertigt ist und damit die Massen der

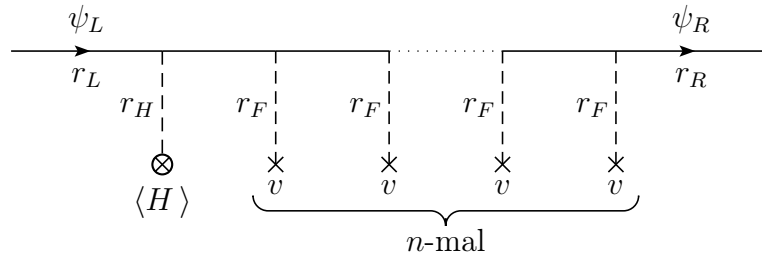


Abbildung 3.1: Feynman-Diagramm, das die Erzeugung der SM-Fermionmassen über den Froggatt-Nielsen-Mechanismus beschreibt. Dabei stehen ψ_L und ψ_R für die links- und rechtshändigen Komponenten der SM-Fermionen, die inneren durchgezogenen Linien für superschwere Fermionen mit Masse M_F , die Kreuze für den VEV v des $U(1)_R$ -brechenden Flavons und das eingekreiste Kreuz für den VEV $\langle H \rangle$ des SM-Higgs. Die Punkte zeigen an, dass je nach R -Ladungen der SM-Fermionen und Higgs (hier bezeichnet mit r_i , $i \in \{L, R, H, F\}$) eine passende Anzahl Flavonen eingefügt werden.

leichten Neutrinos durch die Unterdrückung der Dirac-Massen von den schweren Massen erzeugt werden.

Im Rahmen des Seesaw-Mechanismus können wir die Frage, warum die Masse der Neutrinos so klein ist, damit beantworten, dass sie durch die Skala der Symmetriebrechung einer höheren Theorie unterdrückt sind.

3.2 Erzeugung der Hierarchien der Fermionmassen

Die Frage nach der Grundlage der generationsabhängigen Hierarchien können wir auch nicht allgemein beantworten. Es ist möglich, durch die Annahme spezieller Yukawa-Kopplungen diese Massenhierarchien zu erzeugen, jedoch ist dieses Vorgehen nicht natürlich. Daher führen wir Flavor-Symmetrien ein, die zu Flavor-abhängigen Massenmatrizen führen und die korrekten Massenhierarchien und Mischungsmatrizen erzeugen können, wenn sie gebrochen werden. Zunächst möchten wir jedoch die Massenhierarchien der Quarks und Leptonen genauer betrachten.

Auf der elektroschwachen Skala können wir die Massenverhältnisse der Fermionen in etwa als Potenzen eines kleinen Parameters ϵ beschreiben, der von der Größenordnung des Cabibbo-Winkels θ_C ist [42]:

$$\begin{aligned} m_u : m_c : m_t &= \epsilon^6 : \epsilon^3 : 1, & m_d : m_s : m_b &= \epsilon^4 : \epsilon^2 : 1, \\ m_e : m_\mu : m_\tau &= \epsilon^4 : \epsilon^2 : 1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Für die Neutrinos hängen die Massenverhältnisse des ersten, zweiten und dritten Neutrinomasseneigenzustands von der noch unbekanntem Hierarchie ab:

$$\begin{aligned} m_1 : m_2 : m_3 &= \epsilon^2 : \epsilon : 1, & m_1 : m_2 : m_3 &= 1 : 1 : \epsilon, \\ m_1 : m_2 : m_3 &= 1 : 1 : 1, \end{aligned} \tag{3.6}$$

wobei die erste Gleichung das normal hierarchische, die zweite das invertiert hierarchische und das dritte das entartete Schema beschreibt.

Wir suchen nun einen Mechanismus, mit dem die in den Gln. (3.5) und (3.6) beschriebenen Hierarchien erzeugt werden können. Jedoch ist dies nicht die einzige Bedingung. Zusätzlich müssen aus den Massenmatrizen die korrekten Mischungswinkel hervorgehen. Wir verwenden den Froggatt-Nielsen-Mechanismus (FN) als Beispiel für einen solchen Mechanismus. In dem Modell, das 1978 von Froggatt und Nielsen vorgeschlagen wurde [9], führen wir eine abelsche $U(1)_{FN}$ -Eichsymmetrie mit der Ladung R ein. Die bekannten Fermionen sind unter der neu eingeführten Symmetrie geladen. Es existieren weiterhin unter der $U(1)_{FN}$ geladene Fermionen mit gemeinsamer, sehr schwerer Masse M_F . Die $U(1)_{FN}$ -Symmetrie wird durch den VEV v eines skalaren SM-Singulets gebrochen, das Flavon genannt wird und unter der $U(1)_{FN}$ -Symmetrie geladen ist. Die Massenterme der leichten Fermionen werden dann durch das in Abb. 3.1 dargestellte Diagramm beschrieben. Dort stellen die internen Linien die sehr schweren Fermionen, die Kreuze die symmetriebrechenden SM-Singulets mit VEV v und die eingekreisten Kreuze den VEV des normalen Higgs dar. Die Anzahl der einzufügenden „VEVs“ hängt von den R -Ladungen der links- und rechtshändigen SM-Fermionen, des Higgses und der Flavonen ab. Es muss gelten: $r_L + r_R + r_H = -nr_F$, wobei n die Anzahl eingefügter Flavonen in Abb. 3.1 ist, so dass die Massenterme ladungsfrei sind. Integriert man nun die superschweren Fermionen aus, erhält man einen zu $\langle H \rangle \epsilon^n \bar{\psi}_L \psi_R$ proportionalen effektiven Dimension- n -Operator mit dem kleinen Parameter $\epsilon = v/M_F$. Die Einträge in den Massenmatrizen sind folglich als Potenzen des kleinen Parameters, in Abhängigkeit von der Zuordnung der R -Ladung an die beteiligten Felder, gegeben. Da für die verschiedenen Flavor verschiedene R -Ladungen angenommen werden können, erhält man unterschiedliche Potenzen in den Elementen. Es ist damit möglich, Hierarchien zwischen den Generationen zu erzeugen. Die Lagrangedichte ergibt sich zu:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} \sim S_{ij} \langle H \rangle \epsilon^{n_{ij}} \bar{\Psi}_L^i \Psi_R^j + h.c., \quad \text{mit} \quad r_{L_i} + r_{R_j} + r_H = -n_{ij} r_F, \tag{3.7}$$

den komplexen Ordnung-1-Koeffizienten S_{ij} und den Flavor-Indizes i, j . Wichtig ist, dass man, um ein gültiges Modell zu erzeugen, die Ladungen R der einzelnen Felder

so wählen muss, dass die Hierarchien der Quark- und Leptonmassen (siehe Gln. (3.5) und (3.6)) und die Mischungen korrekt aus der Diagonalisierung der erzeugten Massenmatrizen in der Flavor-Basis hervorgehen (siehe z.B. [43]).

Um mit diesem Mechanismus CP-Verletzung zu erzeugen, ohne dass komplexe Phasen explizit in den Ordnung-1-Koeffizienten stehen, benötigen wir mindestens ein weiteres Flavon F_2 . Dies folgt daraus, dass wir einen VEV mit Hilfe von Eichtransformationen stets reell rotieren können [44–46]. Es ist folglich nötig, ein zweites Flavon mit einem anderen VEV v_2 bzw. einer anderen Ladung r_{F_2} einzuführen, so dass wir die drei Parameter $|v_1|$, $|v_2|$ und den Winkel Φ zwischen v_1 und v_2 erhalten. Die effektive Lagrangedichte in Gl. (3.7) verändert sich dann zu [46, 47]:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} \sim \sum_{n_1 r_{F_1} + n_2 r_{F_2} = -X} S_{ij} \langle H \rangle \eta_1^{n_{1ij}} \eta_2^{n_{2ij}} \bar{\Psi}_L^i \Psi_R^j + h.c., \quad (3.8)$$

mit $X = r_{L_i} + r_{R_j} + r_H$,

wobei entweder $\eta_1 = v_1/M_F$ oder $\eta_2 = v_2/M_F$ komplex ist. Das zugehörige Feynman-Diagramm ist in Abb. 3.2 dargestellt. Wir erhalten also mit Gl. (3.8) komplexe Massentexturen, die dann ihrerseits zu einer komplexen Mischungsmatrix führen, ohne die CP-verletzenden komplexen Größen explizit in die Lagrangedichte zu schreiben.

Wir stellen fest, dass wir durch die Einführung einer Flavor-Symmetrie die Massen und die Mischungen der Leptonen und Quarks erzeugen können. In der Anwendung betrachtet man häufig nicht die exakten Massenmatrizen, sondern nur die vorherrschenden Strukturen, genannt Texturen, aus denen man dann die Mischungsmatrizen bestimmt. Auf diese gehen wir im folgenden Abschnitt ein.

3.3 Textur-Modelle und maximale Mischungen

Texturen beschreiben die Struktur und damit auch die Symmetrien von Massenmatrizen. Wir beschäftigen uns hier mit den Texturen im Leptonsektor, die M_ℓ und M_ν beschreiben. Häufig wird bei den Betrachtungen angenommen, dass der Sektor der geladenen Leptonen diagonal rotiert ist und damit die Mischungen aus dem Neutrinossektor resultieren, beziehungsweise vice versa (siehe Abschnitte 3.3.2 und 3.3.3). Aus phänomenologischer Sicht stellt dies kein Problem dar, betrachtet man jedoch spezielle Modelle, wie zum Beispiel den FN-Mechanismus, so gehen dabei die Informationen über das Modell verloren. Im speziellen Fall sind das die Ladungszuordnungen. Im Allgemeinen erhalten wir im FN-Mechanismus sowohl M_ℓ als auch

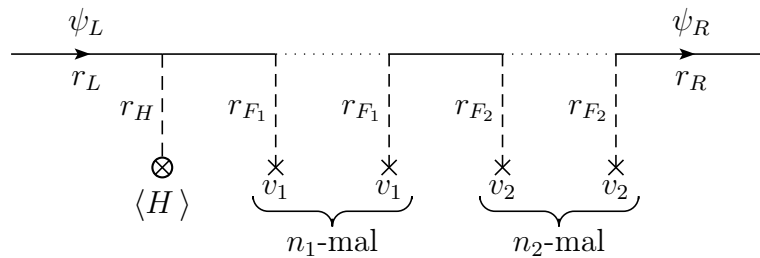


Abbildung 3.2: Feynman-Diagramm, das die Erzeugung der SM-Fermionmassen über den Froggatt-Nielsen-Mechanismus mit zwei Flavonen beschreibt. Dabei stehen ψ_L und ψ_R für die links- und rechtshändigen Komponenten der SM-Fermionen, die inneren durchgezogenen Linien für superschwere Fermionen mit Masse M_F , die Kreuze für die VEVs der Flavonen v_1 und v_2 (wie beschriftet) und das eingekreiste Kreuz für den VEV $\langle H \rangle$ des SM-Higgs. Die Punkte zeigen an, dass je nach R -Ladungen der SM-Fermionen und Higgse (hier bezeichnet mit r_i , $i \in \{L, R, H, F\}$) eine passende Anzahl Flavonen eingefügt werden.

M_ν nicht diagonal, so dass auch die Texturen nicht diagonal sind.

Um CP-Verletzung zu erhalten, ist es notwendig eine komplexe Mischungsmatrix U_{PMNS} zu erzeugen. Da die PMNS-Matrix ein Produkt der Diagonalisierungsmatrizen der Massenmatrizen der Leptonen ist, folgt daraus, dass die Massenmatrizen im CP-verletzenden Fall komplex sind. Wir können nun zwei verschiedene Definitionen der Texturen machen:

1. Die Texturen beschreiben den Betrag der komplexen Massenmatrizen.
2. Die Texturen sind ebenfalls komplex und beschreiben sowohl den Betrag als auch die Phasen der Massenmatrizen.

Wir betrachten im Folgenden drei verschiedene Arten von Texturen: Texturen, die durch den FN-Mechanismus motiviert sind, sogenannte „texture zeros“, die zwischen verschwindenden und nichtverschwindenden Einträgen unterscheiden und Texturen, die auf Grund einer Symmetrie zu maximalen beziehungsweise großen Mischungen führen.

3.3.1 Durch Froggatt-Nielsen-Mechanismus motivierte Texturen

Wir stellen zunächst dar, wie wir aus einer durch Gl. (3.7) erzeugten Massenmatrix die Textur erhalten. Zunächst entwickeln wir die Massenmatrixelemente in dem

kleinen Parameter ϵ :

$$(M_\nu^{\text{Maj}})_{ij} = M_{ij}^{(0)} + M_{ij}^{(1)} \epsilon + M_{ij}^{(2)} \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (3.9)$$

wobei ϵ reell und $M_{ij}^{(k)}$ komplex ist. Den zugehörigen Textureintrag T_{ij} erhalten wir, wenn der Term führender Ordnung durch $M_{ij}^{(n_{ij})} \epsilon^{n_{ij}}$ gegeben ist, durch:

$$M_{ij}^{(n_{ij})} \epsilon^{n_{ij}} \equiv M K_{ij} T_{ij}, \quad (3.10)$$

wobei M die absolute Neutrino-Massenskala und K_{ij} komplexe Ordnung-1-Koeffizienten sind (siehe S_{ij} in Gl. (3.7)). Wir definieren also die Textur so, dass sie den Betrag des Matrixelements durch die Potenz des kleinen Parameters ϵ unter Vernachlässigung der Neutrino-Massenskala, der komplexen Ordnung-1-Koeffizienten und der Beiträge höherer Ordnungen beschreibt. Die Beiträge höherer Ordnung können jedoch in den Koeffizienten K_{ij} absorbiert werden und zum Fit an die Daten verwendet werden. Wir erhalten dann beispielsweise als Texturen für die Leptonen:

$$M_l \sim \begin{pmatrix} \epsilon^2 & 0 & 0 \\ \epsilon^2 & 1 & 1 \\ \epsilon^2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_\nu \sim \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & 1 \\ \epsilon & \epsilon & 0 \\ \epsilon^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

wobei hier die Einträge der Ordnung ϵ^3 mit Null identifiziert werden. Wir erkennen leicht, dass M^ℓ und M^ν nicht diagonal sind.

Nehmen wir jetzt an, dass die Massenmatrizen durch Gl. (3.8) beschrieben werden, um CP-Verletzung spontan zu generieren, erhalten wir die Textureinträge als Produkte der Potenzen der beiden kleinen Parameter η_1 und η_2 . Um die Matrixelemente weiterhin durch einen kleinen Parameter ϵ zu charakterisieren, nehmen wir an, dass wir den Betrag des einen Parameters durch Potenzen des Betrags des anderen beschreiben können. Wir wählen: $|\eta_2| = |\eta_1|^k = \epsilon^k$. Das Matrixelement lässt sich dann analog zu Gl. (3.9) entwickeln. Möchten wir eine reelle Textur erzeugen, so gehen wir wie in Gl. (3.10) vor. Da wir aber das zweite Flavon extra zur spontanen Erzeugung von CP-Verletzung eingeführt haben, erzeugen wir hier komplexe Texturen in Abhängigkeit vom Winkel Φ zwischen den beiden VEVs der Flavonen. Unter den Annahmen, dass η_1 komplex und η_2 reell ist und der Term führender Ordnung durch $M_{ij}^{(n_{ij})} \epsilon^{n_{ij}}$ gegeben ist, erhalten wir den Textureintrag durch:

$$M_{ij}^{(n_{ij})} \epsilon^{n_{ij}} = e^{i\Pi} M K_{ij} \eta_1^{n_{1ij}} \eta_2^{n_{2ij}} = e^{i\Pi} M K_{ij} \epsilon^{n_{ij}} e^{in_{1ij}\Phi} \equiv e^{i\Pi} M K_{ij} T_{ij}. \quad (3.12)$$

Hierbei sind $n_{ij} = n_{1ij} + k n_{2ij}$; $|\eta_2| = |\eta_1|^k$; $K_{ij} > 0$ und reell und von der Größenordnung eins¹; Π eine globale, sprich von i und j unabhängige Phase; M die absolute Neutrino-Massenskala. Absorbieren wir hier die komplexen Beiträge höherer Ordnung, erhalten wir „leicht komplexe“ Ordnung-1-Koeffizienten. Die maximale Größe der Phase in K_{ij} , die durch die höheren Ordnungen erzeugt wird, kann geometrisch in der komplexen Ebene zu $\rho \lesssim \epsilon^2/\epsilon = \epsilon \simeq \theta_C \simeq 12^\circ$ bestimmt werden. Aus Gl. (3.12) erhalten wir für die Textureinträge die Form:

$$T_{ij} = \eta_1^{n_{1ij}} \eta_2^{n_{2ij}} = \epsilon^{n_{ij}} e^{in_{ij}\Phi}. \quad (3.13)$$

Die CP-Verletzung wird durch den Parameter Φ charakterisiert und führt durch die Diagonalisierung der leptonischen Massenmatrizen zu komplexen U^ℓ und U_ν und damit zu nichtverschwindenden Dirac- bzw. Majorana-Phasen. Die CP-Verletzung folgt also aus der Flavor-Symmetriebrechung und nicht explizit aus den komplexen Ordnung-1-Koeffizienten (siehe K_{ij} in Gl. (3.9)). Mit Gl. (3.12) haben wir die Möglichkeit komplexe Texturen zu identifizieren und die CP-Verletzung durch die Phase Φ zu charakterisieren.

3.3.2 „Texture Zeros“

Im Fall von „texture zeros“ nimmt man keine bestimmte Flavor-Symmetrie an, sondern wählt einzelne Einträge der Massenmatrix gleich Null. Dies bedeutet, dass wir im Vergleich zum FN-Mechanismus keine fundamentalere Theorie haben. Motiviert wird dies dadurch, dass es bis auf die korrekte Erzeugung der Massen und Mischungen keine Vorgaben für die Massentexturen gibt. Weiterhin könnten die Nulleinträge dominante Strukturen oder bestimmte zu Grunde liegende Symmetrien aufdecken. Bei der Wahl zweier unabhängiger Null-Einträge erhalten wir sieben verschiedene Neutrinotexturen, die mit den experimentellen Daten verträglich sind [48]. Bei den Betrachtungen wird die Annahme gemacht, dass der Sektor der geladenen Leptonen diagonal und damit die aus der Textur folgende Mischungsmatrix U_ν gleich der PMNS-Matrix ist. Die Texturen haben dann beispielsweise die Form:

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X \\ 0 & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad M_\nu = \begin{pmatrix} X & X & 0 \\ X & 0 & X \\ 0 & X & X \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

¹Dies entspricht der Annahme, dass die Yukawa-Kopplungen reell und von Größenordnung eins sind.

wobei X für nichtverschwindende Einträge steht. Die Textur beschreibt hier also lediglich, ob ein Eintrag null ist oder nicht und sagt nichts über die Größe der Einträge aus.

3.3.3 Maximale Mischungen aus Texturen

Da aus Messungen der Neutrinooszillationen bekannt ist, dass θ_{23}^ν maximal beziehungsweise nahe an maximal, θ_{12} groß und θ_{13} sehr klein ist, ist es interessant Symmetrien zu betrachten, die zu maximaler Mischung führen. Bei den hier gemachten Betrachtungen wird wie schon bei den „texture zeros“ angenommen, dass der Sektor der geladenen Leptonen diagonal ist. Betrachten wir zunächst den in [49] beschriebenen 2×2 -Fall zur Erzeugung maximaler Mischungen: Nehmen wir eine Permutationssymmetrie an, unter der die beiden Flavor ineinander übergehen, erhalten wir eine Massenmatrix der Form:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Aus der Diagonalisierung erhalten wir die Masseneigenwerte $A + B$, $A - B$ und die Diagonalisierungsmatrix:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

welche die maximale Mischung beschreibt.

Ein zu den Beobachtungen der Leptonmischungen passendes Beispiel [50], das auf einer diskreten Z_2 aufbaut, führt zu folgender μ - τ -symmetrischen Form der Neutrino-Massenmatrix:

$$M_\nu = \begin{pmatrix} x & y & y \\ y & z & w \\ y & w & z \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

wobei M_ℓ diagonal angenommen wird. Die Mischungswinkel ergeben sich dann zu $\theta_{23} = \pi/4$ und $\theta_{13} = 0$. Der solare Mischungswinkel $\sin^2 \theta_{12}$ ist so wählbar, dass er mit den experimentellen Beobachtungen übereinstimmt.

Ein sehr bekanntes Beispiel, das aus einer μ - τ -Symmetrie hervorgeht, ist die tri-bimaximale Mischung [51]. Für die Mischungswinkel gilt in diesem Fall: $\sin^2 \theta_{23} = 1/2$, $\sin^2 \theta_{12} = 1/3$ und $\sin^2 \theta_{13} = 0$ in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Beobachtungen.

Es ist wichtig zu beachten, dass bei den hier gemachten Betrachtungen der Sektor der geladenen Leptonen diagonal gewählt wird. Für phänomenologische Betrachtungen ist dies häufig sinnvoll, um die Rechnungen zu vereinfachen, jedoch ist es aus Sicht des Modellbauens und vereinheitlichter Theorien unnatürlich, dass ein Sektor diagonal ist, da genau dies den speziellen Sektor auszeichnet.

In diesem Abschnitt erkennen wir, dass exakt maximale Mischungen aus Symmetrien in den Massenmatrizen erzeugt werden können.

3.3.4 Große Mischungen in U^ℓ und U^ν

In diesem Abschnitt stellen wir je ein Beispiel für große Mischungen in U^ℓ und U^ν dar. Betrachten wir zunächst den Fall großer Mischungen in U^ν . Nehmen wir für die Texturen von M^ℓ und M^ν folgende Struktur an [52]:

$$M_\ell \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^2 & \epsilon^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_\nu \sim \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1 & 1 \\ \epsilon & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

so erhalten wir unter der Annahme, dass $U'_\ell = 1$ in Gl. (2.18) ist, ein CKM-ähnliche Mischung im Sektor der geladenen Leptonen und bimaximale Mischung² im Neutrinosektor. Die großen Mischungen treten folglich nur in U_ν auf. Die Darstellung von U_{PMNS} in der Form $U_{\text{PMNS}} = V_{\text{CKM}}^\dagger U_{\text{bimax}}$ führt bei phänomenologischen Betrachtungen zu den sogenannten Relationen der Quark-Lepton-Komplementarität (QLC):

$$\theta_{12} + \theta_C \approx \frac{\pi}{4}, \quad \theta_{23} + \theta_{cb} \approx \frac{\pi}{4}, \quad (3.19)$$

mit dem Cabibbo-Winkel θ_C und $\theta_{cb} = \arcsin V_{cb}$. Weitere Formen für U_ℓ und U_ν , basierend auf maximalen und CKM-ähnlichen Winkeln, wurden beispielsweise in [22, 53–59] besprochen.

Große Mischung im Sektor der geladenen Leptonen ergeben sich, wenn man hier sogenannte „lopsided“ Texturen betrachtet. Diese sind durch eine starke Asymmetrie in der Massenmatrix charakterisiert. Wir erhalten beispielsweise für die Massenma-

²Hier gilt für die Mischungswinkel: $\theta_{23} = \theta_{12} = \pi/4$ und $\theta_{13} = 0$

trix der geladenen Leptonen [60]:

$$M_\ell \sim \begin{pmatrix} - & - & \rho' \\ - & - & \rho \\ - & \epsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

wobei $\rho' \sim \rho \sim 1$, $\epsilon \ll 1$ gilt und $-$ für Werte steht, die im Vergleich zu den anderen klein sind. Aus dieser Form der Massenmatrix erhalten wir bimaximale Mischung in U_ℓ . Die „lopsided“ Massenmatrizen für M_ℓ haben im Rahmen von vereinheitlichten Theorien den Vorteil, dass sie sehr elegant den großen Unterschied in der 2-3-Mischung der Quarks ($V_{cb} \simeq 0.04$) und Leptonen ($U_{\mu 3} \simeq 0.7$) erklären können. Führt man eine $SU(5)$ als vereinheitlichende Symmetrie ein, so erhält man eine Relation zwischen der Massenmatrix der geladenen Leptonen und der transponierten Massenmatrix der „down“-Quarks. Daraus folgt, dass im Fall der Leptonen die großen Parameter ρ und ρ' die Mischung kontrollieren und im Fall der Quarks der kleine Parameter ϵ [60].

3.3.5 Verschränkte maximale Mischungen in U^ℓ und U^ν

In diesem Abschnitt werden wir die Annahmen dieser Arbeit darstellen. Aus dem Abschnitt 3.3.4 erkennen wir, dass sowohl in U^ℓ als auch in U^ν große Mischungen auftreten können. Betrachten wir durch den FN-Mechanismus motivierte Texturen, so sehen wir keinen Grund, warum die großen Mischungen nicht auch gleichzeitig in U_ℓ und U_ν erscheinen. Das gleichzeitige Auftreten großer Mischungen bezeichnen wir mit: „verschränkten großen Mischungen in U^ℓ und U^ν “. Wir werden im Folgenden für die Mischungswinkel in den beiden Matrizen U_ℓ und U_ν annehmen, dass sie entweder

- maximal oder
- klein ($\mathcal{O}(\theta_C)$) sind.

Die Wahl von exakt maximalen Mischungen können wir durch Symmetrien in den Texturen motivieren (siehe Abschnitt 3.3.3). Die Wahl der kleinen Winkel ermöglicht uns die Observablen in ihnen zu entwickeln. Die Wahl $\mathcal{O}(\theta_C)$ ist durch eine mögliche Verbindung zum Quarksektor (z.B. QLC) motiviert.

Da wir CP-Verletzung nicht ausschließen wollen, berücksichtigen wir in Gl. (2.32) die komplexen Phasen in U_ℓ , D , U_ν und K_ν . Um die Auswirkungen dieser Phasen besser zu erkennen betrachten wir drei verschiedene Fälle:

- Alle Phasen sind CP-erhaltend³.
- Alle Phasen sind maximal CP-verletzend.
- Die Phasen können sowohl maximal CP-verletzend als auch CP-erhaltend sein.

Wir werden, um die Auswirkungen kleiner Abweichungen zu erkennen, zusätzlich Abweichungen in der Größenordnung des Cabbibo-Winkels von den exakten Werten betrachten. Die Wahl der Phasen lässt sich analytisch gut handhaben und könnte durch eine Symmetrie, die lediglich CP-erhaltende und maximal CP-verletzende Werte erlaubt, motiviert werden.

Als nächsten Schritt führen wir durch den FN-Mechanismus motivierte spezielle Texturen (siehe Gl. (3.7)) ein. Da die Texturen durch Potenzen des kleinen Parameters ϵ beschrieben werden, ist die Annahme, dass die kleinen Mischungswinkel in U^ℓ und U^ν ebenfalls durch Potenzen von ϵ beschrieben werden, sinnvoll. Um eine Verbindung zum Quarksektor herzustellen, identifizieren wir: $\epsilon \simeq \theta_C$. Dies sind die Annahmen, die auch bei der Quark-Lepton-Komplementarität in [52] gemacht werden. Wir stellen fest, dass wir Winkel der Ordnung ϵ^3 durch 0 nähern können, da deren Auswirkungen in der gegenwärtigen Messpräzision absorbiert werden. Wir betrachten also hier Texturen der absoluten Werte, die nicht zwangsläufig zu reellen Mischungsmatrizen führen, da die Ordnung-1-Koeffizienten K_{ij} in Gl. (3.10) komplex sein können und dann explizit CP verletzen. Wir führen die Texturen exemplarisch für die Neutrino-Massenmatrizen M_ν^{Maj} ein, die wir folgendermaßen berechnen:

$$M_\nu^{\text{Maj}} = U_\nu M_\nu^{\text{diag}} U_\nu^T = (M^{\text{eff}})^* , \quad (3.21)$$

wobei wir das normal hierarchische Schema $m_1 : m_2 : m_3 = \epsilon^2 : \epsilon : 1$ (siehe Gl. (3.6)) annehmen und die bestimmte Massenmatrix in der Flavor-Basis gerade der komplex konjugierten aus Gl. (2.25) entspricht. Die Neutrino-Mischungsmatrix ist durch $U_\nu = D\widehat{U}_\nu K_\nu$ (siehe Gl. (2.32)) gegeben, so dass wir hier den Fall $D_\ell^\dagger = 1$ betrachten. Analog lässt sich eine Textur für die Massenmatrix der geladenen Leptonen einführen, jedoch ist dort die Analyse angesichts der zweiten Matrix U'_ℓ (siehe Gl. (2.18)) komplizierter. Wir beschränken uns deshalb auf die Einführung einer Textur für die Neutrino-Massenmatrizen.

Um die CP-Verletzung spontan zu erzeugen und durch die Textur zu kontrollieren, führen wir durch Gl. (3.8) motivierte Texturen für die Massenmatrizen der Neutrinos

³Das entspricht dem Fall reeller Massenmatrizen.

(siehe Gl. (3.21)) ein. Hierbei verwenden wir Textureinträge der Form:

$$T_{ij} = \eta^{n_{ij}} = \epsilon^{n_{ij}} e^{in_{ij}\Phi}. \quad (3.22)$$

Im Vergleich zu den Textureinträgen in Gl. (3.13) haben wir hier für das i - j -Element die Phase $n_{ij}\Phi$ anstatt der Phase $n_{1ij}\Phi$. Unter Berücksichtigung, dass wir Textureinträge von $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ durch 0 ersetzen, bedeutet dies, dass wir einen FN-Mechanismus betrachten für den gilt: $n_{1ij} = n_{ij} = n_{1ij} + k n_{2ij}$ mit $n_{ij} \leq 2$. Da $k \geq 1$ durch die Wahl der VEVs vorgegeben ist, ist die einzige Möglichkeit $n_{2ij} = 0$ für $n_{ij} \leq 2$ zu wählen. Im Modell können wir das entweder durch $k \geq 3$ oder $r_{F_2} > -X - r_{F_1}(2 - k)$ erzwingen⁴. Die Beiträge des zweiten Flavons tragen dann nur zu Termen von $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ bei. Weiterhin können sie in den Texturen der geladenen Leptonen beziehungsweise der Quarks auf Grund der stärkeren Hierarchie auftreten. Wählen wir für die Phase $\Phi = \pi/2$, erhalten wir beispielsweise folgende Textur für die Neutrino-Massenmatrix:

$$M_\nu^{\text{Maj}} \sim \begin{pmatrix} \eta & \eta & \eta^2 \\ \eta & \eta & 0 \\ \eta^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon e^{i\frac{\pi}{2}} & \epsilon e^{i\frac{\pi}{2}} & \epsilon^2 e^{i\pi} \\ \epsilon e^{i\frac{\pi}{2}} & \epsilon e^{i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ \epsilon^2 e^{i\pi} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

wobei die Phase im Fall eines verschwindenden Eintrags undefiniert ist.

Wir fassen hier noch einmal die Annahmen zusammen, die in den weiteren Betrachtungen auftreten:

1. Wir haben maximale und kleine ($\mathcal{O}(\theta_C)$) Mischungen sowohl in U_ℓ als auch in U_ν

2. Wir betrachten drei Fälle für die Phasen in U_ℓ und U_ν :

Alle Phasen sind CP-erhaltend.

Alle Phasen sind maximal CP-verletzend.

Die Phasen können sowohl CP-verletzend als auch CP-erhaltend sein.

3. Wir betrachten reelle Texturen, die die Beträge der Neutrino-Massenmatrizen durch Potenzen von $\epsilon \simeq \theta_C$ beschreiben. Dabei identifizieren wir $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ durch 0. Weiterhin wählen wir die Mischungswinkel in U_ℓ und U_ν aus der Menge $\{\pi/4, \epsilon, \epsilon^2, 0\}$.

⁴Dies erhalten wir, wenn wir die Ungleichung $n_{1ij} + k n_{2ij} \leq 2$ in $n_{1ij} r_{F_1} + n_{2ij} r_{F_2} = -X_{ij}$ (Gl. (3.8)) einsetzen.

4. Wir betrachten komplexe Texturen mit Einträgen der Form $T_{ij} = \epsilon^{n_{ij}} e^{in_{ij}\Phi}$. Dabei identifizieren wir $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ durch 0 mit undefinierter Phase. Weiterhin wählen wir die Mischungswinkel in U_ℓ und U_ν aus der Menge $\{\pi/4, \epsilon, \epsilon^2, 0\}$.

Desweiteren werden wir im Folgenden drei verschiedene Arten von Summenregeln erhalten. Dabei unterscheiden wir:

- Typ I: Relationen, die nur Observable des Leptonsektors verbinden,
- Typ II: QLC-ähnliche Summenregeln, die Observable des Lepton- und des Quarksektors verbinden,
- Typ III: Relationen, die Observable aus Quark- und Leptonsektor mit unphysikalischen Parametern, wie zum Beispiel Parameter aus U_ℓ und U_ν (IIIa) oder Modellparameter (IIIb), verbinden.

Mit unphysikalischen Parametern bezeichnen wir die Größen, die nicht im Experiment bestimmt werden. Die physikalischen Parameter sind folglich die Mischungswinkel und die Phasen in U_{PMNS} .

4 Konsequenzen von Neutrinomassen im Experiment

In diesem Kapitel werden wir auf verschiedene Experimente eingehen, mit denen Neutrinomassen gemessen werden können. Es gibt zwei verschiedene Arten von Neutrinomassentests: kinematische und exklusive Tests. Im Fall von kinematischen Tests betrachtet man Prozesse, die auch im SM mit $m_\nu = 0$ stattfinden, deren Rate jedoch von den Neutrinomassen abhängig ist. Beispiele dafür sind nuklearer Betazerfall und Pionzerfall. Exklusive Tests sind dadurch charakterisiert, dass sie für verschwindende Neutrinomassen, wie im SM, nicht erlaubt sind. Dazu gehören zum Beispiel Neutrinooszillationen, mit denen man die Differenzen der Massenquadrate bestimmen kann, und der neutrinolose Doppel-Betazerfall, mit dem im Fall von Majorana-Neutrinos die Größe m_{ee} bestimmt werden kann. Dabei ist m_{ee} eine Kombination aus den Neutrinomassen und den Elementen der Mischungsmatrix. Wir gehen zunächst auf die beiden letztgenannten exklusiven Fälle ein und dann noch kurz auf den Betazerfall sowie Grenzen aus der Kosmologie.

4.1 Neutrinooszillationen

Neutrinooszillationen wurden erstmals, analog zu den Oszillationen des neutralen Kaons von Pontecorvo, im Jahr 1957 vorgeschlagen. Im Fall von massiven Neutrinos sind die Flavor-Eigenzustände, die in geladenen Strömen der schwachen Wechselwirkung erzeugt werden, Linearkombinationen der Masseneigenzustände:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle. \quad (4.1)$$

Die griechischen Buchstaben sind Flavor-Indizes, die lateinischen Massenindizes und U ist die PMNS-Matrix. Wir nehmen in diesem Fall die Mischungsmatrix der geladenen Leptonen als diagonal an, was aus phänomenologischer Sicht sinnvoll ist, da das Flavor der detektierten geladenen Leptonen über die verschiedenen Massen von Elektron, Myon und Tauon bestimmt wird. Die Masseneigenzustände sind Ei-

genzustände des Hamiltonoperators, so dass sich die zeitliche Entwicklung, gegeben durch die Schrödingergleichung, mit den Energieeigenwerten E_k ergibt. Daraus folgt die zeitliche Entwicklung der Flavor-Zustände:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle = \sum_\beta \left(\sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} \right) |\nu_\beta\rangle, \quad (4.2)$$

wobei für den letzten Schritt die Unitarität der PMNS-Matrix und Gl. (4.1) verwendet werden. Da $\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ gilt, erhalten wir für die Übergangswahrscheinlichkeit von $|\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle|^2$:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t} = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i\Delta_{kj}}, \quad (4.3)$$

mit $\Delta_{kj} \equiv \Delta m_{kj}^2 L / (2E)$ und $\Delta m_{kj}^2 \equiv m_k^2 - m_j^2$. Es ist zu beachten, dass nur zwei der drei Massendifferenzen unabhängig voneinander sind. Weiterhin nähern wir in Gl. (4.3) für ultrarelativistische Neutrinos ($E_k \gg m_k$) die Dispersionsrelation $E_k = \sqrt{|\mathbf{p}_k|^2 + m_k^2} \approx E + m_k^2 / (2E)$ mit $E \approx |\mathbf{p}| \approx |\mathbf{p}_k|$, der Energie des erzeugten Flavor-Zustandes. Die sich ergebende Kombination von Mischungsmatrixelementen ist quartisch invariant und kann wie folgt geschrieben werden:

${}^{\alpha j} \square_{\beta k} = U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*$ (siehe Abschnitt 2.3). Mit $\text{Im}[{}^{\alpha j} \square_{\beta k}] = J \sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_l \epsilon_{jkl}$ und ${}^{\alpha j} \mathcal{R}_{\beta k} \equiv \text{Re}[{}^{\alpha j} \square_{\beta k}]$ sowie einigen Umformungen wird Gl. (4.3) zu:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} {}^{\alpha j} \mathcal{R}_{\beta k} \sin^2(\Delta_{kj}) + 2J \sum_{k>j} \sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_l \epsilon_{jkl} \sin(\Delta_{kj}). \quad (4.4)$$

Aus den Oszillationsexperimenten wissen wir, dass es eine Massenhierarchie der Form $|\Delta m_{21}^2| \ll |\Delta m_{31}^2| \simeq |\Delta m_{32}^2|$ gibt. Damit vereinfacht sich die Übergangswahrscheinlichkeit aus Gl. (4.4) zu:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sin^2 \Delta_{21} {}^{\alpha 1} \mathcal{R}_{\beta 2} - 4 \sin^2 \Delta_{31} ({}^{\alpha 1} \mathcal{R}_{\beta 3} + {}^{\alpha 2} \mathcal{R}_{\beta 2}) + T_{CP}, \quad (4.5)$$

wobei T_{CP} der durch $\sin 2\theta_{13}$ unterdrückte zur Jarlskog-Invarianten proportionale CP-verletzende Teil ist. Wir können nun zwei Fälle unterscheiden:

- $\Delta_{21} \ll \Delta_{31} \simeq \pi/2$

Der zu $\sin^2 \Delta_{21}$ proportionale Oszillationsterm in Gl. (4.5) ist verschwindend, während der zu $\sin^2 \Delta_{31}$ proportionale Term maximal ist. Dies ist der Fall

bei atmosphärischen Experimenten, in denen die Oszillation von Myon- und Tauonneutrinos gemessen werden. In der 2-Flavor-Näherung mit verschwindendem θ_{13} können wir daher $|\Delta m_{31}^2|$ mit der atmosphärischen Massenquadratsdifferenz Δm_{atm}^2 und θ_{23} mit dem atmosphärischen Winkel θ_{atm} identifizieren. Betrachtet man Antielektronneutrinos, wie es bei Reaktorexperimenten der Fall ist, ist der Oszillationsterm der Wahrscheinlichkeit $P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e}$ proportional zu $\sin^2 \theta_{13}$, so dass eine Abweichung von 1 einem nichtverschwindenden $\sin^2 \theta_{13}$ entspricht.

- $\Delta_{21} \simeq \pi/2 \ll \Delta_{31}$

Der erste Oszillationsterm ist maximal, wohingegen der zweite auf Grund der schnellen Oszillationen nicht auflösbar ist und sich zu dem Faktor 0.5 mittelt. In der 2-Flavor-Näherung mit verschwindendem θ_{13} können wir $|\Delta m_{21}^2|$ mit der solaren Massenquadratsdifferenz Δm_{sol}^2 und θ_{12} mit dem solaren Winkel θ_{sol} identifizieren.

Wir unterscheiden zwischen drei unterschiedlichen Arten von Neutrinoexperimenten: atmosphärische, solare und Reaktorexperimente.

Atmosphärische Experimente sind sensitiv auf die führenden atmosphärischen Parameter $|\Delta m_{31}^2|$ und θ_{23} . In der Atmosphäre werden Myonneutrinos erzeugt, die dann zum Beispiel im Super-Kamiokande-Detektor abhängig vom Zenitwinkel detektiert werden. Es gibt auch Beschleunigerexperimente, die die atmosphärischen Parameter bestimmen. Sie verwenden Myonneutrino-Beams, deren Vorteil gegenüber atmosphärischen Myonneutrinos ist, dass man die Zusammensetzung und die Energien der Neutrinos besser kennt. Beispiele dafür sind K2K (KEK to Kamioka) und CNGS (Cern to Gran Sasso).

CHOOZ ist ein **Reaktorexperiment** zur Bestimmung von $\sin^2 \theta_{13}$. Durch die Wahl von Antielektronneutrinos und einem L/E passend zu Δm_{31}^2 ist die „Disappearance“-Wahrscheinlichkeit durch $\sin^2 \theta_{13}$ unterdrückt. Die Antielektronneutrinos werden detektiert und eine Abweichung der Wahrscheinlichkeit von 1 ($P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} < 1$) führt zu einem nicht verschwindenden Wert von θ_{13} .

Solare Experimente sind sensitiv auf die führenden solaren Parameter $|\Delta m_{21}^2|$ und θ_{12} . Dort gibt es zwei verschiedene Experimenttypen. Die einen, wie zum Beispiel das SNO Experiment (Sudbury Neutrino Observatory), verwenden die solaren Neutrinos, während die anderen, wie zum Beispiel das KamLAND-Experiment (KAMioka Liquid scintillator Anti-Neutrino), Reaktorneutrinos verwenden, da deren Eigenschaften besser bekannt sind.

Parameter	Bestfit	1 σ -Genauigkeit	3 σ
$\Delta m_{21}^2 [10^{-5} \text{eV}^2]$	7.9	4%	7.1 – 8.9
$ \Delta m_{31}^2 [10^{-3} \text{eV}^2]$	2.5	10%	1.9 – 3.2
$\sin^2 \theta_{12}$	0.30	9%	0.24 – 0.40
$\sin^2 \theta_{23}$	0.50	16%	0.34 – 0.68
$\sin^2 \theta_{13}$	–	–	≤ 0.041

Tabelle 4.1: Derzeitige Bestfit-Werte, 1 σ -Genauigkeit und 3 σ -Intervalle für Drei-Flavor-Oszillationsparameter aus einer Analyse aller verfügbaren Daten [61].

Die aus allen Experimenten gewonnenen Daten wurden in einer kombinierten Analyse verwendet [61]. Die sich ergebenden Bestfit-Werte der Oszillationsparameter, die 1 σ -Genauigkeit und die 3 σ -Grenzen sind in Tab. 4.1 zusammengefasst.

4.2 Neutrinoloser Doppel-Betazerfall

Ein weiterer exklusiver Test für Neutrinomassen ist der neutrinolose Doppel-Betazerfall ($0\nu\beta\beta$). Er wurde erstmals von Furry im Jahr 1939 vorgeschlagen [62]. Der Prozess ist im SM verboten, weil er die Leptonzahl verletzt. Da in diesem Prozess sowohl eine Diskrepanz bezüglich Teilchen-Antiteilchen als auch der Helizität vorliegt, benötigt man massive Majorana-Neutrinos. Es gibt auch andere Möglichkeiten, wie zum Beispiel rechtshändige Ströme, um den Helizitäts-„mismatch“ zu erfüllen, jedoch ist die Existenz von massiven Majorana-Neutrinos notwendig [63, 64]. Wir betrachten hier den masseninduzierten $0\nu\beta\beta$.

Es existieren 35 natürlich vorkommende Isotope, die einen $0\nu\beta\beta$ durchlaufen können, für die aber der einfache β -Zerfall verboten oder unterdrückt ist. Die zweite Bedingung ist wichtig, weil die Lebensdauer eines einfachen β -Zerfalls wesentlich kürzer ist als die eines doppelten. Letzterer ist damit in Gegenwart eines Einfachen nicht sichtbar. In dem Prozess gibt es drei relevanten Kerne: $N(A,Z)$, $N(A,Z+1)$ und $N(A,Z+2)$. Für diese muss gelten, dass das Energieniveau des mittleren Kerns energetisch über dem des ersten und das des letzten mindestens zwei Elektronmassen unter dem des ersten liegt. Bei den Isotopen, die diese Bedingung erfüllen, handelt es sich um gerade-gerade Kerne, da diese auf Grund der Paarungsenergie energetisch niedriger liegen als die ungerade-ungerade Kerne. In direkten Experimenten wurden bereits 28 der 35 Isotope auf $0\nu\beta\beta$ untersucht, jedoch wurde noch kein unzweifelhaft positives Signal entdeckt. Die beste untere Grenze für die Lebensdauer von ${}^{76}\text{Ge}$, das am sensitivsten auf die Neutrinomasse ist, wurde durch das Heidelberg-Moskau-

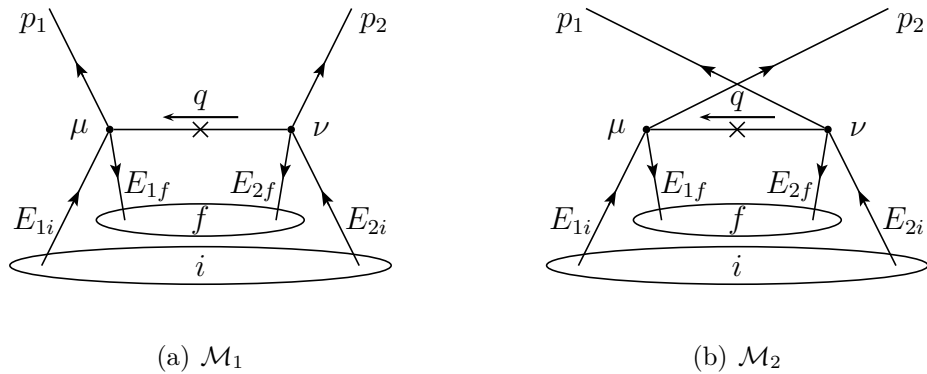


Abbildung 4.1: Die beiden zum neutrinolosen Doppel-Betazerfall beitragenden Feynman-Graphen.

Experiment im Gran-Sasso-Labor bestimmt:

$$T_{1/2}^{0\nu}({}^{76}\text{Ge}) > 1.9 \cdot 10^{25} \text{ Jahre} \quad (90\% \text{ C.L.}). \quad (4.6)$$

Daraus ergibt sich als Grenze für die effektive Majorana-Masse:

$$m_{ee} \lesssim 0.3 - 1.0 \text{ eV}. \quad (4.7)$$

Wie die Grenze der Neutrinomasse mit der Lebensdauer des neutrinolosen Doppel-Betazerfall zusammenhängt, berechnen wir in den folgenden Abschnitten.

4.2.1 Feynman-Amplitude

Der $0\nu\beta\beta$ ist ein Prozess zweiter Ordnung, für den wir folgende effektive Wechselwirkungs-Hamiltondichte annehmen:

$$\mathcal{H}_I^{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J^\alpha \tilde{J}_\alpha^\dagger + H.c., \quad (4.8)$$

wobei $J^\alpha \tilde{J}_\alpha^\dagger$ für alle Kombinationen des leptonischen und des hadronischen geladenen Stroms steht und G_F für die Fermi-Konstante, die effektive Kopplungskonstante. Die Hamiltondichte, die wir in die S-Matrix-Entwicklung einsetzen, lautet:

$$\mathcal{H}_I = \frac{G_F \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) U_{ek} \nu_k \bar{u} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) d + H.c.. \quad (4.9)$$

In dieser Gleichung können wir bereits erkennen, warum der Prozess in Hinsicht auf komplexe Phasen interessant ist. Dadurch, dass in der Wechselwirkungs-Hamilton-

dichte U_{ek} auftritt und wir im Folgenden nicht die Kombination im S-Matrixelement 2. Ordnung mit dem hermitesch Konjugierten betrachten, erhalten wir die Quadrate der Mischungsmatrixelemente und nicht die Betragsquadrate. Die in U_{PMNS} auftretenden Phasen tragen also signifikant zu den Interferenzen zwischen den Beiträgen der verschiedenen Neutrinomasseneigenzustände bei.

Die Übergangsamplitude für den $0\nu\beta\beta$ wird mit dem S-Matrix-Element 2. Ordnung berechnet, indem die beiden Neutrinofelder kontrahiert werden. Wir schreiben im Folgenden aus Übersichtsgründen die Spinindizes der Elektronen nicht explizit in die Formeln, werden dann aber bei der Quadrierung der Amplitude über alle Spins summieren. Die Kontraktion der Majorana-Felder führt zu dem Majorana-Propagator:

$$iS_M(x-y)_{\gamma\sigma} = \langle 0 | T \{ \nu_\gamma(x) \nu_\sigma^T(y) \} | 0 \rangle. \quad (4.10)$$

Indem wir Gl. (4.10) auf den Propagator

$$\begin{aligned} iS_F(x-y)_{\alpha\beta} &= \langle 0 | T \{ \nu_\alpha(x) \bar{\nu}_\beta(y) \} | 0 \rangle \\ &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-y)} \frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \Bigg|_{\varepsilon \rightarrow 0} \end{aligned} \quad (4.11)$$

zurückführen, dessen Form vom Elektronpropagator bekannt ist, erhalten wir mit $\nu_\sigma^T = -\bar{\nu}_\rho \mathcal{C}_{\rho\sigma}$ (aus Gln. (2.19)-(2.21)) für den gesuchten Propagator:

$$\begin{aligned} iS_M(x-y)_{\gamma\sigma} &= \langle 0 | T \{ \nu_\gamma(x) \nu_\sigma^T(y) \} | 0 \rangle = -\mathcal{C}_{\rho\sigma} \langle 0 | T \{ \nu_\gamma(x) \bar{\nu}_\rho(y) \} | 0 \rangle \\ &= -\mathcal{C}_{\rho\sigma} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{-iq(x-y)} \frac{(\not{q} + m)_{\gamma\rho}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-iq(x-y)} \frac{((\not{q} + m) \mathcal{C})_{\gamma\sigma}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Auf Grund der geringen Ausdehnung des zerfallenden Kerns, können wir die Ortsabhängigkeit der Wellenfunktionen der Elektronen vernachlässigen. Weiterhin betrachten wir den Prozess in der statischen Näherung, das heißt wir vernachlässigen

den Impuls des Kerns. Wir erhalten dann für die Feynman-Amplitude:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & (\sqrt{2}G_F \cos \theta_C)^2 U_{ek}^2 \int d^3x \int d^3y \langle N'_1 | J_\mu(\mathbf{x}) | N_1 \rangle \langle N'_2 | J_\nu(\mathbf{y}) | N_2 \rangle \times \\ & \left[\bar{u}(p_1) \gamma^\mu P_L \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{(\not{q} + m) \mathcal{C}}{q^2 - m^2} P_L^T (\gamma^\nu)^T \bar{u}^T(p_2) \right. \\ & \left. - \bar{u}(p_2) \gamma^\mu P_L \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{(\not{q} + m) \mathcal{C}}{q^2 - m^2} P_L^T (\gamma^\nu)^T \bar{u}^T(p_1) \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

wobei wir für q^0 die Energieerhaltung an den Vertices (siehe Abb. 4.1) beachten müssen. Wir bezeichnen analog zu Abb. 4.1 den ersten Term in Gl. (4.13) mit \mathcal{M}_1 und den zweiten mit \mathcal{M}_2 , so dass $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2$ gilt. Der zu \not{q} proportionale Term des Neutrino-Propagators verschwindet, weil $\mathcal{C} P_L^T (\gamma^\nu)^T \bar{u}^T = P_R \gamma^\nu \mathcal{C} \bar{u}^T = \gamma^\nu P_R v$ und $P_L \not{q} \gamma^\nu P_R = 0$. Weiterhin können wir mit $\mathcal{C}^T = -\mathcal{C}$ und $\mathcal{C} \gamma^\mu \mathcal{C}^{-1} = -\gamma^\mu$ den leptonen Strom von \mathcal{M}_2 folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} -\bar{u}(p_2) \gamma^\mu P_L \gamma^\nu \mathcal{C} \bar{u}^T(p_1) &= \left(-\bar{u}(p_2) \gamma^\mu P_L \gamma^\nu \mathcal{C} \bar{u}^T(p_1) \right)^T \\ &= -\bar{u}(p_1) \mathcal{C}^T (\gamma^\nu)^T P_L^T (\gamma^\mu)^T \bar{u}^T(p_2) \\ &= \bar{u}(p_1) \gamma^\nu P_L \gamma^\mu v(p_2). \end{aligned} \quad (4.14)$$

So ist im Vergleich zum leptonen Strom von \mathcal{M}_1 nur die Reihenfolge der Gamma-Matrizen vertauscht. Wir führen die Abkürzung $l^{\mu\nu}(p_1, p_2) = \bar{u}(p_1) \gamma^\mu \gamma^\nu P_R v(p_2)$ ein. Nun formen wir den Bruch des Propagators so um, dass wir die zeitliche Reihenfolge der beiden Zerfälle explizit sehen können:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^2 - m_k^2} &= \frac{1}{(q^0)^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\omega} \left(\frac{\omega - q^0 + \omega + q^0}{(\omega - q^0)(\omega + q^0)} \right) \\ &= \frac{1}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega + q^0} + \frac{1}{\omega - q^0} \right), \end{aligned} \quad (4.15)$$

wobei $\omega = \sqrt{|\mathbf{q}|^2 + m_k^2}$ gilt. Der vordere Term in Gl. (4.15) beschreibt den Fall, in dem zunächst Kern N_2 und danach Kern N_1 zerfällt, während der hintere Term den zeitlich umgekehrte Fall darstellt (also erst N_1 und dann N_2). Wir wechseln nun die Betrachtung von zwei bestimmten Neutronen (N_1 und N_2) zu einem Kern, in dem zwei beliebige Neutronen zerfallen. Dies bedeutet, dass man über alle Neutronen im Kern summieren muss. Es ist daher einfacher nicht die einzelnen Neutronen zu betrachten, sondern den Kern als Ganzen. Der Kern hat im Anfangszustand $|i\rangle$ die Energie $E_i = E_{1i} + E_{2i} + E_{Rest}$ und im Endzustand $|f\rangle$ die Energie $E_f = E_{1f} + E_{2f} + E_{Rest}$, wobei E_{Rest} die Energie der unbeteiligten Nukleonen beschreibt. Die Differenz,

das heißt die freiwerdende Energie, bezeichnen wir mit $Q = E_i - E_f$. Die Energie des nuklearen Zwischenzustands im Fall, dass erst N_2 zerfällt, ist durch $E_m = E_{2f} + E_{1i} + E_{Rest}$ und im umgekehrten Fall durch $E_m = E_{1f} + E_{2i} + E_{Rest}$ gegeben. Der nukleare Teil der Amplitude wird durch $\langle f | J_\nu(y) | m \rangle \langle m | J_\mu(x) | i \rangle$ beschrieben.

Berücksichtigen wir die Energieerhaltung an den Vertices und ersetzen q^0 entsprechend, erhalten wir für den Propagator:

$$iS_M^{0\nu}(x-y, m) = -\frac{i}{(2\pi)^4} \sum_{k=1}^3 \int d^3q \frac{e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} m_k U_{ek}^2}{2\omega} \times \left(\frac{1}{\omega + E_{2i} + \epsilon_2 - E_{2f}} + \frac{1}{\omega - E_{1f} - \epsilon_1 + E_{1i}} \right). \quad (4.16)$$

Gehen wir zur Betrachtung des gesamten Kerns über, erhalten wir:

$$iS_M^{0\nu}(x-y, m) = -\frac{i}{(2\pi)^4} \sum_{k=1}^3 \int d^3q \frac{e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} m_k U_{ek}^2}{2\omega} \times \left(\frac{1}{\omega + E_i - \epsilon_2 - E_m} + \frac{1}{\omega + E_i - \epsilon_1 - E_m} \right). \quad (4.17)$$

Die Amplitude wird damit zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= (\sqrt{2}G_F \cos \theta_C)^2 \sum_{k=1}^3 m_k U_{ek}^2 \int d^3x \int d^3y \langle f | J_\nu(y) | m \rangle \langle m | J_\mu(x) | i \rangle \\ &\times (l^{\mu\nu}(p_1, p_2) + l^{\nu\mu}(p_1, p_2)) \\ &\times \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega + E_i - \epsilon_2 - E_m} + \frac{1}{\omega + E_i - \epsilon_1 - E_m} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Den leptonen Teil der Amplitude formen wir mit $\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$ folgendermaßen um:

$$l^{\mu\nu}(p_1, p_2) + l^{\nu\mu}(p_1, p_2) = 2\bar{u}(p_1) g^{\mu\nu} P_R v(p_2), \quad (4.19)$$

da die Summe der beiden Ströme symmetrisch und $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ antisymmetrisch unter der Vertauschung $\mu \leftrightarrow \nu$ ist.

Für die weitere Berechnung machen wir die Näherungen:

- $E_m - E_i + \epsilon_l \approx \langle E_m - E_i \rangle + \Delta/2 = \langle E \rangle$ mit $l = 1, 2$ und $\Delta = E_f - E_i$,
- $\omega \approx |\mathbf{q}|$.

Die erste Näherung ist dadurch gerechtfertigt, dass die nuklearen Anregungsenergien

im Bereich von 10 MeV liegen, wohingegen der Neutrinoimpuls in der Größenordnung von $|\mathbf{q}| \approx 1/R \approx 40-100$ MeV (R bezeichnet hier den Kernradius) liegt. Damit kann die Variation von $E_m - E_i + \epsilon_l$ vernachlässigt werden. Die zweite Näherung ist für kleine Neutrinomassen $m_\nu \ll |\mathbf{q}|$ gültig, die wir hier ausschließlich betrachten. Durch die beiden Näherungen ist es möglich, die Neutrinomassen aus der Amplitude zu faktorisieren und die Summe über die intermediären Kernzustände auszuführen, da diese nun ein vollständiges Zustandssystem bilden: $\sum_m |m\rangle \langle m| = 1$. Wegen der Vollständigkeit des nuklearen Zwischenzustandssystems wird diese Näherung auch „Closure-Näherung“ genannt. Außerdem ist durch die Ersetzung der Elektronenergien mit $\Delta/2$ der leptonische vom nuklearen Teil getrennt und die beiden Beiträge zum Propagator sind identisch. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{(2\pi)^2 G_F \cos \theta_C}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^3 m_k U_{ek}^2 \int d^3x \int d^3y \langle f | J_\nu(y) J_\mu(x) | i \rangle \\ &\quad \times 2\bar{u}(p_1) g^{\mu\nu} P_{R\nu}(p_2) \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{2|\mathbf{q}|} \frac{2}{|\mathbf{q}| + \langle E \rangle} \\ &= (\sqrt{2} G_F \cos \theta_C)^2 \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 m_k U_{ek}^2 L M^{0\nu}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

mit dem Kernmatrixelement $M^{0\nu}$:

$$M^{0\nu} = \int d^3x \int d^3y H_\nu^\nu \frac{i}{2\pi^2} \int d^3q \frac{e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{|\mathbf{q}| (|\mathbf{q}| + \langle E \rangle)} \langle f | J_\nu(y) J^\nu(x) | i \rangle \quad (4.21)$$

und dem leptonischen Teil

$$L = \bar{u}(p_1) P_{R\nu}(p_2). \quad (4.22)$$

4.2.2 Kernmatrixelement

Wir betrachten in diesem Abschnitt das in Gl. (4.21) eingeführte Kernmatrixelement. Die Beiträge des Propagators bezeichnen wir hier als Neutrinopotential

$$h(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3q \frac{e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{|\mathbf{q}| (|\mathbf{q}| + \langle E \rangle)}. \quad (4.23)$$

Die im Kernmatrixelement enthaltene Integration über \mathbf{x} und \mathbf{y} geht in eine Summe über die Nukleonen j und l über [65]:

$$M^{0\nu} = c_A^2 (1 - x_F) M_{GT}^{0\nu}. \quad (4.24)$$

Dabei ist

$$M_{GT}^{0\nu} = \left\langle f \left\| \sum_{j=1}^A \sum_{l=1}^A \boldsymbol{\sigma}(j) \tau^-(j) \boldsymbol{\sigma}(l) \tau^-(l) h(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l|) \right\| i \right\rangle, \quad (4.25)$$

c_A der Formfaktor für die Axialvektorkopplung, x_F der relative Anteil Fermi-artiger Beiträge, τ^- der Isospin Leiteroperator, der ein Neutron in ein Proton umwandelt, und $\boldsymbol{\sigma}$ die Pauli-Matrizen. Die doppelten Striche bedeuten, dass das reduzierte Matrixelement (unabhängig von der magnetischen Quantenzahl) gemeint ist. Die Bezeichnungen 0^+ , 1^+ und 2^+ sind von der Form J^P mit J dem Gesamtspin des Nukleus und P der Parität. Unsere Betrachtung beschreibt nur $0^+ \rightarrow 0^+$ -Übergänge, da für $0^+ \rightarrow 1^+$ rechtshändige Ströme notwendig sind und für $0^+ \rightarrow 2^+$ rechtshändige Ströme bzw. Rückstoßterme des Kerns berücksichtigt werden müssen (für allgemeine Betrachtung siehe [66]). Das Neutrinopotential können wir mit Hilfe der gemachten Näherungen berechnen. Zur ungefähren Abschätzung können wir zusätzlich $\langle E \rangle \approx 0$ setzen und erhalten:

$$\begin{aligned} h(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) &\approx \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^\infty d |\mathbf{q}| |\mathbf{q}|^2 \frac{e^{i|\mathbf{q}|(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \cos \theta}}{|\mathbf{q}|^2} \\ &= \frac{2}{\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_0^\infty d |\mathbf{q}| \frac{\sin |\mathbf{q}| (|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{q}|} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Wir erhalten ein Coulomb-ähnliches Potential, das zeigt, dass die Reichweite des virtuellen Neutrinos begrenzt ist und der Zerfall naher Neutronen bevorzugt wird. Vernachlässigen wir den Beitrag von $\langle E \rangle$ nicht, erhalten wir:

$$\begin{aligned} h(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^\infty d |\mathbf{q}| |\mathbf{q}|^2 \frac{e^{i|\mathbf{q}|(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \cos \theta}}{|\mathbf{q}|^2 + \langle E \rangle} \\ &= \frac{2}{\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \left(\cos(\langle E \rangle |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \left(\frac{\pi}{2} - \text{si}(\langle E \rangle |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \text{ci}(\langle E \rangle |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \sin(\langle E \rangle |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right), \end{aligned} \quad (4.27)$$

mit $\text{si}(x) = \int_0^x dt \frac{\sin t}{t}$ und $\text{ci}(x) = \int_\infty^x dt \frac{\cos t}{t}$.

Die Berechnung des Kernmatrixelements ist sehr schwierig, da ein genaues Modell des Kerns benötigt wird. Es gibt verschiedene Modelle, in denen die Kernelemente berechnet werden (z.B. Schalenmodell und „Quasiparticle Random Phase Approximation“ (QRPA)), da eine exakte Berechnung nicht möglich ist. Jedoch unterscheiden sich auch die mit demselben Modell berechneten Kernmatrixelemente. Insgesamt erhalten wir eine Unsicherheit vom Faktor 3 [32].

4.2.3 Zerfallsbreite

Wir können nun die Zerfallsbreite Γ für den $0\nu\beta\beta$ mit der folgenden Gleichung berechnen:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_1}{2\epsilon_1 (2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_2}{2\epsilon_2 (2\pi)^3} |M|^2 2\pi \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - Q). \quad (4.28)$$

Der Faktor $1/2$ ist ein statistischer Faktor auf Grund der beiden ununterscheidbaren Elektronen im Endzustand (siehe Anhang B [67]). Wir berechnen zunächst das Amplitudenquadrat $|M|^2$. Für den leptonischen Teil L in Gl. (4.22) berechnen wir es explizit mit Spinsummierung im Endzustand:

$$\begin{aligned} \sum_r \sum_s |L|^2 &= \frac{1}{4} \left(\text{Sp} \left((\not{p}_2 - m)(\not{p}_1 - m) \right) + \text{Sp} \left(\gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 (\not{p}_2 - m) \gamma^5 (\not{p}_1 - m) \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\text{Sp} \left((\not{p}_2 - m)(\not{p}_1 - m) \right) + \text{Sp} \left((\not{p}_2 + m)(\not{p}_1 - m) \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} 2 \text{Sp} \left(\not{p}_2 \not{p}_1 \right) \\ &= 2p_1 p_2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Mit Gl. (4.29) können wir die Integration über den Phasenraum der Elektronen zur Bestimmung der Zerfallsbreite Γ durchführen. Der Phasenraum $G_{0\nu}$ wird für die Elektronen auf der Massenschale, das heißt $d^3 p_{1/2} = |\mathbf{p}_{1/2}| \epsilon_{1/2} d\epsilon_{1/2} d\Omega$, berechnet. Die Korrektur auf Grund der Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen mit dem Kern ist durch die Fermi-Funktion $F(E,Z)$, mit der Kernladungszahl Z des Tochterkerns, gegeben. Wir berechnen den Phasenraum in der nichtrelativistischen Primakoff-Rosen-Näherung [68]¹:

$$F(E, Z) = \frac{E}{p} \frac{2\pi Z\alpha}{1 - \exp(-2\pi Z\alpha)} = \frac{E}{p} F^{PR}(Z), \quad (4.30)$$

mit α der Feinstrukturkonstanten. Im nichtrelativistischen Fall gilt weiterhin $Q = T_0 + 2m_e$, wobei T_0 die maximale kinetische Energie eines Elektrons ist. Wir erhalten

¹Es ist jedoch zu beachten, dass sich die nichtrelativistische Näherung für große Kerne nur für Größenordnungsabschätzungen eignet.

für den Phasenraum:

$$\begin{aligned}
 G_{0\nu} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_1}{2\epsilon_1 (2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_2}{2\epsilon_2 (2\pi)^3} \frac{p_1 p_2}{2\pi^2} 2\pi \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - Q) \\
 &= [F^{PR}(Z)]^2 \frac{1}{2(2\pi)^5} \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_{m_e}^{T_0+m_e} d\epsilon_1 \epsilon_1 \epsilon_2 (\epsilon_1 \epsilon_2 - |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| \cos\theta) \Big|_{\epsilon_2=Q-\epsilon_1} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^5} [F^{PR}(Z)]^2 \int_{m_e}^{T_0+m_e} d\epsilon_1 \epsilon_1^2 \epsilon_2^2 \Big|_{\epsilon_2=T_0+2m_e-\epsilon_1} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^5} [F^{PR}(Z)]^2 m_e^5 \left(t_0 + 2t_0^2 + \frac{4}{3}t_0^3 + \frac{1}{3}t_0^4 + \frac{1}{30}t_0^5 \right),
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

wobei $t_0 = T_0/m_e$. Die Zerfallsbreite ergibt sich mit dem Kernmatrixelement $M^{0\nu}$ und der effektiven Neutrinomasse

$$m_{ee} = \left| \sum_{k=1}^3 m_k U_{ek}^2 \right| \tag{4.32}$$

zu:

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= (\sqrt{2}G_F \cos\theta_C)^4 m_{ee}^2 G_{0\nu} |M^{0\nu}|^2 \\
 &= (G_F \cos\theta_C)^4 \frac{m_{ee}^2}{m_e^2} [F^{PR}(Z)]^2 \frac{m_e^7}{8\pi^5} \left(t_0 + 2t_0^2 + \frac{4}{3}t_0^3 + \frac{1}{3}t_0^4 + \frac{1}{30}t_0^5 \right) |M^{0\nu}|^2.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Die Zerfallsbreite des $0\nu\beta\beta$ ist also durch die effektive Neutrinomasse, den Phasenraum der Elektronen und das Kernmatrixelement gegeben. Der Rückschluss aus der Zerfallsbreite auf die effektive Neutrinomasse ist durch die unsichere Berechnung des Kernmatrixelements erschwert. Für Germanium liegen die berechneten Werte für die Kombination $C_{mm} = m_e^2/(m_{ee}^2 T_{1/2}^0) = G_{0\nu}|M^{0\nu}|^2 m_e^2$ zwischen $1.4 \cdot 10^{-14} Y^{-1}$ und $1.3 \cdot 10^{-13} Y^{-1}$ (siehe Tabelle 2 in [69]). Das führt zu einem Faktor von $\approx \sqrt{10} \approx 3$ der Unsicherheit in m_{ee} .

4.2.4 Effektive Masse m_{ee}

Wir stellen fest, dass die effektive Masse im $0\nu\beta\beta$ eine wichtige Rolle spielt, da die Zerfallsbreite proportional und damit die Zerfallszeit antiproportional zu ihr ist. In der Standardparametrisierung erhalten wir für die effektive Masse im Fall einer normalen Anordnung ($\Delta m_{31}^2 > 0$, Gl. (4.34a)) und einer invertierten Anordnung

($\Delta m_{31}^2 < 0$, Gl. (4.34b)):

$$m_{ee} = \left| c_{12}^2 c_{13}^2 e^{2i\phi_1} m_1 + s_{12}^2 c_{13}^2 e^{2i\phi_2} \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{21}^2} + s_{13}^2 e^{-2i\delta_{\text{CP}}} \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{31}^2} \right|, \quad (4.34a)$$

$$m_{ee} = \left| c_{12}^2 c_{13}^2 e^{2i\phi_1} \sqrt{m_3^2 + |\Delta m_{31}^2|} + s_{12}^2 c_{13}^2 e^{2i\phi_2} \sqrt{m_3^2 + |\Delta m_{31}^2| + \Delta m_{21}^2} + s_{13}^2 e^{-2i\delta_{\text{CP}}} m_3 \right|. \quad (4.34b)$$

Wir sehen sehr schön, dass m_{ee} und damit auch die Zerfallsbreite stark von den komplexen Phasen abhängen. In Abhängigkeit von den Phasen können die einzelnen Terme konstruktiv und destruktiv interferieren. Macht man nun Annahmen über das Neutrinoschema und die kleinste Neutrinomasse, kann man m_{ee} berechnen. Im Anhang B stellen wir numerische Ergebnisse für m_{ee} unter der Annahme dar, dass $m_1 = 0.003$ eV ist, die normal hierarchische Anordnung und spezielle Mischungsmatrizen U^ℓ und U^ν realisiert sind. Wir stellen fest, dass unter den Annahmen gilt: $m_{ee} \in [0.0015 \text{ eV}, 0.0075 \text{ eV}]$ und die Zerfallsrate des $0\nu\beta\beta$ nicht verschwindet.

4.3 Tritium-Endpunkt-Messungen

Der β -Zerfall im Allgemeinen ist ein kinematischer Test der Neutrinomassen. Wir betrachten β -Zerfälle der folgenden Art:

$$(A, Z) \longrightarrow (A, Z + 1) + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (4.35)$$

Wir definieren die Größe $Q_\beta \equiv M_i - M_f - m_e$ als die freiwerdende Energie abzüglich der Elektronenmasse, so dass mit der kinetischen Energie T des Elektrons die Energie des Neutrinos durch $E_\nu = Q_\beta - T$ gegeben ist. Im Fall, dass das Matrixelement unabhängig von der Kinematik ist, was bei erlaubten β -Zerfällen (Fermi- und Gamov-Teller-Übergängen) gut erfüllt ist, erhält man für die Zerfallsrate pro Elektron-Energieintervall [32]:

$$\frac{d\Gamma}{dT} = \frac{G_F^2 m_e^5}{2\pi^3} \cos^2 \theta_C |M|^2 F(Z, E_e) E_e |\mathbf{p}_e| (Q_\beta - T) \sqrt{(Q_\beta - T)^2 - m_{\nu_e}^2}, \quad (4.36)$$

mit dem nuklearen Matrixelement M und der Fermifunktion $F(Z, E_e)$. Bei der Berechnung wird angenommen, dass das Elektronneutrino als Masseneigenzustand vorliegt.

Um die Neutrinomasse zu bestimmen, ist es zweckmäßig die Kurie-Funktion einzuführen:

$$K(T) = \sqrt{\frac{d\Gamma/dT}{\frac{G_F^2 m_e^5}{2\pi^3} \cos^2 \theta_C |M|^2 F(Z, E_e) E_e |\mathbf{p}_e|}}. \quad (4.37)$$

Wir betrachten jetzt die Kurie-Funktion für drei Annahmen: a) Neutrinos sind masselos $K_a(T)^2$; b) ein Neutrino ist massiv $K_b(T)^3$; c) alle drei Neutrinos sind massiv $K_c(T)$ [70]:

$$K_a(T) = (Q_\beta - T), \quad (4.38a)$$

$$K_b(T) = \sqrt{(Q_\beta - T) \sqrt{(Q_\beta - T)^2 - m_{\nu_e}^2}}, \quad (4.38b)$$

$$K_c(T) = \sum_{i=1}^3 \sqrt{|U_{ei}|^2 (Q_\beta - T) \sqrt{(Q_\beta - T)^2 - m_i^2}} \Theta(Q_\beta - T - m_i) \quad (4.38c)$$

Die drei Funktionen in den Gln. (4.38a)-(4.38c) stellen wir für den Tritiumzerfall ($Q_\beta = 18.574$ keV) mit den Parametern $m_{\nu_e} = 2 \times 10^{-3}$ eV, $m_1 = 2 \times 10^{-3}$ eV, $m_2 = 5 \times 10^{-3}$ eV, $m_3 = 2 \times 10^{-2}$ eV und $|U_{ei}|^2 = 1/3$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ in Abb. 4.2 dar. Für den Fall masseloser Neutrinos erhalten wir in Gl. (4.38a) einen linearen Zusammenhang (siehe durchgezogene Linie in Abb. 4.2). Betrachten wir den zweiten Fall, so erkennen wir in Gl. (4.38b), dass sich die maximale kinetische Energie des Elektrons um die Neutrinomasse verringert. Der Endpunkt der Kurie-Funktion verschiebt sich also um den Betrag der Neutrinomasse (siehe gepunktete Linie in Abb. 4.2). Die Kurie-Funktion für den Fall dreier massiver Neutrinos wird durch Gl. (4.38c) beschrieben. Wir erkennen, dass die Beiträge der Massen m_1 , m_2 und m_3 mit den zugehörigen Beträgen der Mischungsmatrixelemente $|U_{e1}|$, $|U_{e2}|$ und $|U_{e3}|$ gewichtet werden. Weiterhin wird durch die Θ -Funktion sichergestellt, dass der Masseneigenzustand nur erzeugt wird, solange es mit der Energieerhaltung vereinbar ist. Wir erhalten also für den dritten Fall lediglich die Summe von Gl. (4.38b) mit drei verschiedenen Massen, jeweils gewichtet mit dem zugehörigen Betrag des Mischungsmatrixelements. In Abb. 4.2 stellen wir Gl. (4.38c) durch die gestrichelte Linie dar. Die Knicke ergeben sich dadurch, dass der Beitrag einer Masse m_i wegfällt, wenn es energetisch nicht mehr möglich ist: $T > Q_\beta - m_i$. Die Stärke eines Knicks ist dabei abhängig von $|U_{ei}|$. Der Endpunkt der Kurie-Funktion ist im Fall von massiven Neutrinos um die Masse des leichtesten verschoben. Die Bestimmung dieser Masse reicht aus, um die Massen aller drei Neutrinos zu erhalten, da durch die Neutrinooszillationsexperimente die Massendifferenzen Δm_{21}^2 und $|\Delta m_{31}^2|$ bereits bestimmt

²Hierfür setzen wir Gl. (4.36) mit $m_\nu = 0$ in Gl. (4.37) ein.

³Hierfür setzen wir Gl. (4.36) in Gl. (4.37) ein.

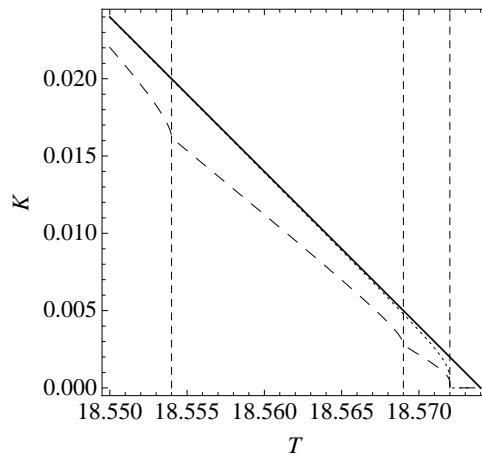


Abbildung 4.2: Graph der Kurie-Funktion für die drei Fälle: Neutrinos sind masselos (durchgezogene Linie), Elektronneutrino ist Masseneigenzustand mit $m_1 = 2 \times 10^{-3} \text{ eV}$ (gepunktete Linie), Neutrinos mischen mit $m_1 = 2 \times 10^{-3} \text{ eV}$, $m_2 = 5 \times 10^{-3} \text{ eV}$, $m_3 = 2 \times 10^{-2} \text{ eV}$ und $|U_{ei}|^2 = 1/3$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ (gestrichelte Linie).

wurden (siehe Tab. 4.1). Nehmen wir an, dass eine normale Anordnung realisiert ist, bestimmt der Endpunkt die Masse m_1 und damit die absolute Massenskala der Neutrinos. Im Fall einer invertierten Anordnung ist m_3 die kleinste Masse und wird im Experiment gemessen.

Solange in den Experimenten noch keine Abweichungen von einer Geraden entdeckt werden, gilt für die Auflösung $Q_\beta - T \gg m_i$. Wir können die Kurie-Funktion in Gl. (4.38c) für kleine $m_i^2/(Q_\beta - T)^2$ entwickeln und erhalten mit der Unitarität der Mischungsmatrix:

$$K(T) \simeq \sqrt{(Q_\beta - T) \sqrt{(Q_\beta - T)^2 - m_\beta^2}}, \quad (4.39)$$

wobei

$$m_\beta = |U_{ei}|^2 m_i^2. \quad (4.40)$$

Aus diesem Grund gelten die oberen Grenzen, die in den Experimenten gefunden werden, für die effektive Elektronneutrinomasse m_β .

Die beiden Experimente, in denen die Abweichung der Kurie-Funktion (siehe Gl. (4.37)) beim Tritium- β -Zerfall:



vom linearen Zusammenhang nahe des Endpunkts gemessen wurde, sind das Main-

zer Neutrinomassen-Experiment und das Troitsk-Neutrinomassen-Experiment. Ihre Analysen der Messdaten haben folgende oberen Grenzen für die effektive Elektron-neutrinomasse $m_\beta = |U_{ei}|^2 m_i^2$ ergeben:

$$\begin{aligned} m_\beta < 2.3 \text{ eV} \quad (95\% \text{ C.L.}) [71] \quad \text{Mainz,} \\ m_\beta < 2.5 \text{ eV} \quad (95\% \text{ C.L.}) [72] \quad \text{Troitsk.} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Derzeit wird das neue Experiment KATRIN (KARlsruhe TRItium Neutrino Experiment) in weltweiter Kollaboration in Karlsruhe gebaut. Es soll eine Sensitivität von $m_\beta < 0.2 \text{ eV}$ haben und 2010 erste Messungen starten. Es untersucht, wie auch das Mainzer Experiment, die Abweichung am Endpunkt des Elektronspektrums des Tritiumzerfalls auf Grund der Neutrinomassen.

4.4 Kosmologische Grenzen

Nichtrelativistische Teilchen (zum Beispiel normale Materie und kalte dunkle Materie) klumpen wegen der Gravitation. Relativistische Teilchen (z.B. heiße dunkle Materie) unterdrücken diesen Prozess. Da Neutrinos zu der sogenannten heißen dunklen Materie gehören, das heißt bei der Strahlungsentkopplung relativistisch waren, waschen sie kleine Strukturen bei der Strukturbildung aus. Um die Messungen von Galaxien mit hoher Rotverschiebung zu erklären ist es deshalb wichtig, dass der Großteil der dunklen Materie kalte ist, die auf kleinen Skalen die Klumpung fördert. Mit Hilfe von Simulationen wird die Strukturbildung im Universum für verschiedene Anteile der Neutrinos an der dunklen Materie nachempfunden und die Ergebnisse mit den Observationen der intergalaktischen Materieverteilung (Lyman- α -Messungen) und des Galaxien Clustering (SDSS, 2dFGRS) verglichen. Daraus ergibt sich für die Neutrinomassen [73]:

$$\sum m_\nu < 0.17 \text{ eV} \quad (95\% \text{ C.L.}), \quad (4.43)$$

die derzeit stärkste Schranke für Neutrinomassen. Diese ist jedoch sehr modellabhängig. Außerdem ist das Einbeziehen der Lyman- α -Messungen in die Analysen umstritten. Konservativere Analysen kommen auf weniger starke Grenzen [74]:

$$\sum m_\nu < 0.63 \text{ eV} \quad (95\% \text{ C.L.}). \quad (4.44)$$

Bei dieser Analyse wurden die Lyman- α -Messungen nicht berücksichtigt.

5 Verschränkte Mischungen mit drei maximalen Mischungswinkeln

Die Konfiguration, die wir in diesem Kapitel unter den in Abschnitt 3.3.5 dargestellten Annahmen diskutieren, ist durch folgenden Satz an maximalen und kleinen Winkeln gegeben [75]:

$$(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell, \theta_{23}^\ell, \theta_{12}^\nu, \theta_{13}^\nu, \theta_{23}^\nu) = (*, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, *, \frac{\pi}{4}, *), \quad (5.1)$$

wobei * für Winkel von der Ordnung des Cabibbo-Winkels steht. Wir bezeichnen diese Konfiguration im Folgenden als Konfiguration 1.

Wir stellen die PMNS-Matrix in der Parametrisierung der rechten Gleichung aus Gl. (2.32) dar und erhalten als Parameter

$$(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell, \theta_{23}^\ell, \delta^\ell, \theta_{12}^\nu, \theta_{13}^\nu, \theta_{23}^\nu, \delta^\nu, \varphi_1, \varphi_2, \alpha_1, \alpha_2), \quad (5.2)$$

die nicht in der Form in einem Experiment bestimmt werden können, so dass wir sie als unphysikalisch bezeichnen. Wir berechnen zunächst mit Hilfe der Invarianten in den Gln. (2.34)-(2.38) die Observablen $\sin^2 \theta_{13}$, $\sin^2 \theta_{12}$, $\sin^2 \theta_{23}$, δ_{CP} , ϕ_1 und ϕ_2 in Abhängigkeit der unphysikalischen Phasen in Gl. (5.2) sowie der kleinen Winkel θ_{12}^ν , θ_{23}^ν und θ_{12}^ℓ . Um qualitative Aussagen über die Größe der Observablen machen zu können, entwickeln wir in den kleinen Winkeln. Die Ergebnisse vergleichen wir mit den 3σ -Grenzen, die wir aus Neutrinooszillationsexperimenten erhalten und in Tab. 4.1 dargestellt haben. Daraus ergeben sich Bedingungen für die unphysikalischen Parameter. Um speziell die Auswirkungen der unphysikalischen Phasen besser zu erkennen, machen wir die in Abschnitt 3.3.5 motivierten verschiedene Annahmen für die Phasen: CP-erhaltend; maximal CP-verletzend; CP-erhaltend sowie maximal CP-verletzend.

Im folgenden Abschnitt 5.3 führen wir zwei spezielle Texturen, motiviert durch den FN-Mechanismus mit einem Flavon, für die Beträge der Neutrino-Massenmatrix ein. Weiterhin wählen wir, wie in Abschnitt 3.3.5 beschrieben, für die kleinen Winkel

die diskreten Werte $\pi/4$, ϵ , ϵ^2 und 0. Durch den Vergleich mit den Texturen erhalten wir Bedingungen für die kleinen Winkel. Die unphysikalischen Phasen sind frei und führen zu einer expliziten Brechung der CP-Symmetrie.

Um spontan CP-Verletzung zu erzeugen, verwenden wir die letzte Annahme in Abschnitt 3.3.5. Wir führen zwei komplexe Texturen (siehe Gl. (3.22)) für die Neutrino-Massenmatrizen ein, die uns beim Vergleich nicht nur Bedingungen für die kleinen Winkel sondern auch für die unphysikalischen Phasen erzeugt.

Zur Überprüfung unserer Ergebnisse haben wir numerische Analysen durchgeführt, deren Ergebnisse wir in Form von Verteilungen der Observablen in Anhang B darstellen. Es stellt sich heraus, dass die analytischen und die numerischen Ergebnisse gut übereinstimmen. Um die Eigenschaften der analytischen Formeln und die Unterschiede in den Ergebnissen zu den unterschiedlichen Annahmen in Abschnitt 3.3.5 besser nachzuvollziehen, ist es empfehlenswert die Graphen parallel zur Diskussion der analytischen Ergebnisse zu betrachten.

Die Vorgehensweise für die zweite Konfiguration, die wir im nächsten Kapitel diskutieren, ist analog zu der hier geschilderten.

5.1 Bestimmung der unphysikalischen Parameter

Konfiguration 1 wird durch drei maximale Winkel θ_{13}^ν , θ_{13}^ℓ und θ_{23}^ℓ charakterisiert, so dass die Observablen in den drei kleinen Winkeln θ_{12}^ν , θ_{23}^ν und θ_{12}^ℓ entwickelt werden. Es stellt sich heraus, dass die Phasen immer in ähnlichen Kombinationen auftreten, so dass für die weitergehenden Betrachtungen die folgenden Redefinitionen sinnvoll sind:

$$\chi \equiv \delta^\ell - \varphi_1, \quad \beta \equiv \delta^\ell - \delta^\nu - \varphi_2, \quad \gamma \equiv \varphi_1 - \varphi_2. \quad (5.3)$$

Mit den neuen Phasen ergibt sich für $\sin^2 \theta_{13}$:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{13} = & \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \beta + \theta_{12}^\ell \left(\frac{1}{2} \cos(\delta^\ell - \beta) - \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \delta^\ell \right) + \\ & + \theta_{23}^\nu \left(\frac{1}{4} \cos \gamma - \frac{\sqrt{2}}{4} \cos(\gamma - \beta) \right) + \mathcal{O}(\theta_k^2), \end{aligned} \quad (5.4)$$

wobei θ_k für alle kleinen Winkel steht¹. Wir erkennen, dass $\sin^2 \theta_{13}$ für die gewählte Konfiguration groß ist. In Tab. 4.1 sehen wir, dass $\sin^2 \theta_{13} \lesssim 0.04$ sein muss, um mit

¹Beispiele für Terme, die in $\mathcal{O}(\theta_k^2)$ enthalten sind: $\theta_{23}^\nu \theta_{12}^\ell$, $(\theta_{12}^\nu)^2$, ...

den experimentellen Grenzen kompatibel zu sein. Dies bedeutet, dass in führender Ordnung $3/8 - \sqrt{2} \cos \beta / 4 \lesssim 0.04$ und damit $\cos \beta \gtrsim 0.95$ gelten muss. An diesem Beispiel sehen wir deutlich, wie wir durch die experimentellen Grenzen unphysikalische Parameter einschränken können. Wir erhalten in nullter Ordnung eine untere Grenze: $\sin^2 \theta_{13} \gtrsim 0.02$. Betrachten wir zusätzlich zur führenden Ordnung die erste Ordnung, so erkennen wir, dass deren Beitrag sowohl positiv als auch negativ sein kann. Maximal wird er jeweils für β an der Grenze des erlaubten Bereichs und bei passendem δ^ℓ bzw. γ . Wir erwarten deshalb, dass sich die Grenze für $\cos \beta$ etwas absenkt, wenn wir die erste Ordnung zusätzlich berücksichtigen.

Für $\sin^2 \theta_{12}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{12} = & \frac{2}{5 + 2\sqrt{2} \cos \beta} \\ & + \frac{8}{(5 + 2\sqrt{2} \cos \beta)^2} \theta_{12}^\ell \left(2 \cos(\delta^\ell - \beta) + 2\sqrt{2} \cos \delta^\ell + \cos(\delta^\ell + \beta) \right) - \\ & - \frac{4}{(5 + 2\sqrt{2} \cos \beta)^2} \theta_{23}^\nu \left(4 \cos \gamma + 2\sqrt{2} \cos(\gamma - \beta) + \sqrt{2} \cos(\beta + \gamma) \right) - \\ & - \frac{2}{5 + 2\sqrt{2} \cos \beta} \theta_{12}^\nu \left(2 \cos \chi + \sqrt{2} \cos(\chi - \beta) \right) + \mathcal{O}(\theta_k^2). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Wir betrachten zur Abschätzung des Observablenwertes zunächst den Beitrag nullter Ordnung: $\sin^2 \theta_{12} = 2/(5 + 2\sqrt{2} \cos \beta)$. Setzen wir in diese Formel die Grenze $\cos \beta \gtrsim 0.95$ ein, erhalten wir kaum eine Abweichung vom Wert für $\beta = 0$, so dass $\sin^2 \theta_{12} \approx 0.26$ in nullter Ordnung gilt. Dieser Wert liegt leicht unterhalb des Bestfit-Wertes, ist aber gut mit den Grenzen aus Tab. 4.1 vereinbar. Die Beiträge der ersten Ordnung führen zu einer Streuung um den Wert 0.26.

Der dritte Winkel ist in erster Ordnung in θ_k gegeben durch:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{23} = & \frac{2}{5 + 2\sqrt{2} \cos \beta} \\ & + \frac{2}{(5 + 2\sqrt{2} \cos \beta)^2} \theta_{12}^\ell \left(-4 \cos(\delta^\ell - \beta) + \sqrt{2} \cos \delta^\ell \right. \\ & \left. + 2 \cos(\delta^\ell + \beta) - 2\sqrt{2} \cos(2\beta - \delta^\ell) \right) - \\ & - \frac{4}{(5 + 2\sqrt{2} \cos \beta)^2} \theta_{23}^\nu \left(4 \cos \gamma + 2\sqrt{2} \cos(\gamma - \beta) + \sqrt{2} \cos(\beta + \gamma) \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Er stimmt in führender Ordnung mit $\sin^2 \theta_{12}$ überein, so dass der Wert der Observablen weit unter seinem Bestfit-Wert (siehe Tab. 4.1) und damit außerhalb der experimentellen Grenzen liegt. Es ist deshalb notwendig, höhere Ordnungen zu be-

trachten, die den Wert durch passende Wahl der unphysikalischen Parameter in den erlaubten Bereich schieben. Betrachten wir zunächst den zu θ_{23}^ν proportionalen Term: Für die Abschätzungen setzen wir als gute Näherung $\beta = 0$ an. Damit wir einen positiven Beitrag durch den θ_{23}^ν -Term erhalten, muss der Wert von $\cos \gamma$ negativ sein. Dies erhöht jedoch zugleich $\sin^2 \theta_{13}$, so dass eine Spannung zwischen einem kleinen $\sin^2 \theta_{13}$ und einem großen $\sin^2 \theta_{23}$ entsteht. Der zu θ_{12}^ℓ proportionale Term trägt auf Grund der entgegengesetzten Vorzeichen der einzelnen Kosinusterme nur gering bei.

Wir erhalten also für die Mischungswinkel und die unphysikalischen Größen folgendes Bild: Der Mischungswinkel $\sin^2 \theta_{12}$ liegt innerhalb seiner Grenzen, so dass wir keine Beschränkungen an die unphysikalischen Parameter erhalten. Anders ist es für die beiden anderen Winkel. Für $\sin^2 \theta_{13}$ und $\sin^2 \theta_{23}$ ergeben sich für viele Kombinationen der unphysikalischen Größen Werte, die nicht mit den experimentellen Grenzen vereinbar sind. So können wir aus der oberen Schranke für $\sin^2 \theta_{13}$ die Phasenkombination β auf kleine Werte beschränken (in 0. Ordnung gilt: $\cos \beta \gtrsim 0.95$). Anhand des kleinen Terms nullter Ordnung für $\sin^2 \theta_{23}$ erkennen wir, dass θ_{23}^ν verhältnismäßig groß und $\cos \gamma$ stark negativ sein muss (mit $\theta_{12}^\ell = 0$ und $\beta = 0$ gilt: $\theta_{23}^\nu \cos \gamma \lesssim -0.16$). Der Winkel θ_{12}^ℓ sollte, wenn er beiträgt, zusammen mit einem negativen $\cos \delta^\ell$ auftreten, um zu $\sin^2 \theta_{23}$ positiv und zu $\sin^2 \theta_{13}$ negativ beizutragen. Für große θ_{23}^ν ist vor allem der negative Beitrag zu $\sin^2 \theta_{13}$ relevant. Weil der Winkel θ_{12}^ℓ nur in der Bestimmungsgleichung von $\sin^2 \theta_{12}$ (Gl. (5.5)) auftritt, erhalten wir keine Bedingungen für ihn und die Phase χ .

Wir haben festgestellt, dass durch den Vergleich mit den experimentellen Grenzen unsere Phasen bis auf χ bereits relativ stark eingeschränkt sind: $\beta \approx 0$, $\gamma \approx \pi$ und $\delta^\ell \approx \pi$ für ein nichtverschwindendes θ_{12}^ℓ . Daraus können wir schließen, dass 1. die Wahl der unphysikalischen Phasen als CP-verletzend auf Grund der Definition von β in Gl. (5.3) zu keinen gültigen Modellen führt und 2. sich durch die beiden anderen Phasenannahmen (CP-erhaltend bzw. CP-erhaltend und CP-verletzend) lediglich für $\sin^2 \theta_{12}$ leichte Änderungen ergeben können.

Wir betrachten nun die physikalischen Phasen δ_{CP} , $2\phi_1$ und $2\phi_2$ in nullter Ordnung. Die beiden Größen ($\sin \delta_{\text{CP}}$ und $\cos \delta_{\text{CP}}$) zur Bestimmung von δ_{CP} sind gegeben

durch:

$$\sin \delta_{\text{CP}} = -\frac{(5 + 2\sqrt{2} \cos \beta) \sin \beta}{\sqrt{(-3 - 2\sqrt{2} \cos \beta)(-5 + 4 \cos 2\beta)}} + \mathcal{O}(\theta_k), \quad (5.7)$$

$$\cos \delta_{\text{CP}} = \frac{\sqrt{2} \cos \beta + 2 \cos 2\beta}{\sqrt{6 - 4\sqrt{2} \cos \beta(3 + 2\sqrt{2} \cos \beta)}} + \mathcal{O}(\theta_k). \quad (5.8)$$

Aus der Einschränkung des $\cos \beta$ erhalten wir für $\sin \delta_{\text{CP}}$ immer das entgegengesetzte Vorzeichen zu $\sin \delta^\ell$ und kleine Werte. Weiterhin erkennen wir, dass $\cos \delta_{\text{CP}}$ in dem erlaubten Bereich positiv ist. Daraus können wir schließen, dass δ_{CP} Werte um Null annimmt und in nullter Ordnung durch $|\delta_{\text{CP}}| \lesssim 0.8$ beschränkt ist.

Für die beiden Majorana-Phasen entwickeln wir die Gleichungen nicht nur in den kleinen Winkeln, sondern auch in β , das durch die Schranke für $\sin^2 \theta_{13}$ auf kleine Werte beschränkt ist, und erhalten folgende Bestimmungsgleichungen:

$$2\phi_1 = 2(\alpha_1 + \delta^\nu) + \mathcal{O}(\beta, \theta_k), \quad (5.9)$$

$$2\phi_2 = 2(\alpha_2 + \varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{O}(\beta, \theta_k). \quad (5.10)$$

Hier erkennen wir deutlich, dass die beiden Majorana-Phasen von den für die anderen Observablen nicht relevanten äußeren Phasen α_1 und α_2 abhängen. Weiterhin sehen wir dadurch, dass wir zu den alten Phasendefinitionen zurückgekehrt sind², dass die erste Phase von der Summe zweier unphysikalischer Phasen und die zweite von der Summe dreier abhängt.

Da die physikalischen Phasen experimentell noch nicht bestimmt werden konnten, erhalten wir aus den Gln. (5.7)-(5.10) keine weiteren Beschränkungen an die unphysikalischen Parameter. Wir können hier also nur die Auswirkungen der unphysikalischen Größen diskutieren. Da δ_{CP} in nullter Ordnung lediglich von dem durch die Winkel stark beschränkten β abhängt, erhalten wir keine großen Veränderungen für die verschiedenen Phasenannahmen. Anders ist dies bei den Majorana-Phasen, die von den unbeschränkten Phasen α_1 und α_2 abhängen. Für sie erhalten wir im CP-erhaltenden Fall $2\phi_1 = 2\phi_2 = 0$, beziehungsweise unter Berücksichtigung kleiner Abweichungen eine leichte Streuung um Null. Im kombinierten Fall, also CP-erhaltende sowie CP-verletzende unphysikalische Phasen, können wir je eine der Phasen in Gl. (5.9) beziehungsweise (5.10) CP-verletzend wählen, so dass zusätzlich $2\phi_1 \approx \pi$ und $2\phi_2 \approx \pi$ erlaubt ist.

²Die Berechnung der Majorana-Phasen haben wir in Abhängigkeit der unphysikalischen Phasen durchgeführt und dann die Phasenkombination $\delta^\ell - \delta^\nu - \varphi_2$ gegen Null gehen lassen.

Textur 1a	Textur 1b
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \eta & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \eta & 1 \\ \eta & \eta & \eta \\ 1 & \eta & 1 \end{pmatrix}$

Tabelle 5.1: Gewählte Texturen für Konfiguration 1, wobei η bei der Diskussion reeller Texturen (siehe Abschnitt 5.3) durch $\eta = \epsilon$ gegeben ist. Verwenden wir die hier dargestellten Texturen als komplexe Texturen, so gilt: $\eta = |\eta| \cdot \exp(i\Phi) = \epsilon \cdot \exp(i\Phi)$. Wir berücksichtigen hier lediglich Einträge bis zur zweiten Ordnung, alle höheren ($\mathcal{O}(\epsilon^3)$) identifizieren wir mit Null.

Wir haben nun alle Größen bestimmt, die zur Berechnung der effektiven Masse des neutrinolosen Doppel-Betazerfalls (siehe Gl. (4.34a)) nötig sind. In den numerischen Betrachtungen haben wir deshalb zusätzlich zu den besprochenen Observablen die Verteilung von m_{ee} unter der Annahme berechnet, dass $\Delta m_{31}^2 > 0$ und $m_1 = 0.003\text{eV}$ ist, (siehe Abb. B.2).

5.2 Zuordnung zu speziellen Texturen

In diesem Abschnitt führen wir die zwei Texturen, die wir im Zusammenhang mit der Konfiguration besprechen in Tab. 5.1 ein. Hierbei ist zu beachten, dass für den Fall, dass die Texturen die absoluten Beträge der Massenmatrizen beschreiben, der Parameter η in Tab. 5.1 mit ϵ indentifiziert wird und im Fall komplexer Texturen gilt: $\eta = \epsilon \cdot \exp(i\Phi)$.

Wir beschreiben hier anhand von drei Beispielen, wie wir aus dem Vergleich der komplexen Textur mit der Entwicklung der Massenmatrix (siehe Gln. 3.9, 3.12 und 3.21), die Bedingungen an die kleinen Winkel und Phasen erhalten:

- **Textur 1a und 1b:** $(M_\nu^{\text{Maj}})_{11}$

Wir beginnen mit dem Matrixelement $(M_\nu^{\text{Maj}})_{11}$, das zu einem Textureintrag von 1 führen soll (siehe Tab. 5.1):

$$(M_\nu^{\text{Maj}})_{11} = \frac{1}{2}e^{-2i\delta^\nu} + \mathcal{O}(\epsilon) \rightarrow e^{i\Pi}T_{11} = e^{-2i\delta^\nu} \stackrel{!}{=} e^{i\Pi} 1. \quad (5.11)$$

Wir können nun die globale Phase fixieren, indem wir $\Pi = -2\delta^\nu$ setzen. Dadurch ist die geforderte Bedingung in Gl. (5.11) erfüllt. Dieses Vorgehen wenden wir stets zur Fixierung der globalen Phase an. Wir suchen uns einen Textureintrag 1 und die Phase des zugehörigen Matrixelements ergibt dann

die globale Phase. Da Gl. (5.11) keinen kleinen Winkel enthält, erhalten wir keinerlei Bedingung für θ_{12}^ν und θ_{23}^ν .

- **Textur 1a und 1b: $(M_\nu^{\text{Maj}})_{22}$**

Das zweite Beispiel ist das Matrixelement $(M_\nu^{\text{Maj}})_{22}$, das zu einem Textureintrag η führen soll. Wir entwickeln $(M_\nu^{\text{Maj}})_{22}$ daher bis zur ersten Ordnung:

$$(M_\nu^{\text{Maj}})_{22} = e^{2i(\alpha_2 + \varphi_1)} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \rightarrow e^{i\Pi} T_{22} = e^{2i(\alpha_2 + \varphi_1)} \epsilon \stackrel{!}{=} e^{i\Pi} \epsilon e^{i\Phi}. \quad (5.12)$$

Erneut ist die Bestimmungsgleichung unabhängig von θ_{12}^ν und θ_{23}^ν , so dass wir nur eine Bedingung für die Phasen erhalten: $2(\alpha_2 + \varphi_1) = \Pi + \Phi$. Setzen wir nun die aus Gl. (5.11) bestimmte globale Phase ein, erzeugen wir eine Relation zwischen den unphysikalischen Parametern α_2 , φ_1 und δ^ν und dem Modellparameter $\Phi = 2(\alpha_2 + \varphi_1 + \delta^\nu)$.

- **Textur 1a und 1b: $(M_\nu^{\text{Maj}})_{12}$**

Das letzte Beispiel für Textur 1 $(M_\nu^{\text{Maj}})_{12}$ soll für Textur 1a zu dem Textureintrag 0 und für 1b zu η führen. In der folgenden Gleichung, die die Entwicklung bis zur zweiten Ordnung darstellt, ist der obere Eintrag für Textur 1a und der untere für 1b:

$$(M_\nu^{\text{Maj}})_{12} = \frac{1}{2} e^{i(\varphi_1 - \delta^\nu)} \theta_{23}^\nu + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(2\alpha_2 + \varphi_1)} \theta_{12}^\nu \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^3) \rightarrow \begin{cases} T_{12} \stackrel{!}{=} 0 \\ e^{i\Pi} T_{12} \stackrel{!}{=} e^{i\Pi} \eta. \end{cases} \quad (5.13)$$

Die Entwicklung dieses Matrixelements ist abhängig von den kleinen Winkeln, so dass wir Bedingungen für Letztere erhalten können. Betrachten wir zunächst Textur 1a. Der Textureintrag 0 bedeutet, dass es keine Terme geben darf, die von niedrigerer als der dritten Ordnung in ϵ sind. Unsere Winkel treten in Gl. (5.13) in den Kombinationen θ_{23}^ν und $\theta_{12}^\nu \epsilon$ auf. Damit diese Terme von $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ sind, muss folglich gelten: $\theta_{23}^\nu = \mathcal{O}(\epsilon^3)$ und $\theta_{12}^\nu = \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Für die Phasen haben wir wegen des verschwindenden Textureintrags keine Bedingung. Für Textur 1b ist die Entwicklung bis zur ersten Ordnung ausreichend, also können wir den zweiten Term in Gl. (5.13) vernachlässigen. Wir erhalten damit: $e^{i\Pi} T_{12} = e^{i(\varphi_1 - \delta^\nu)} \theta_{23}^\nu \stackrel{!}{=} e^{i\Pi} \eta$. Diese Bedingung ist nur durch die beiden Identitäten $\theta_{23}^\nu = \epsilon$ und $\varphi_1 + \delta^\nu = \Phi$ zu erfüllen. Hier haben wir schon die globale Phase durch $-2\delta^\nu$ ersetzt.

Dieses Beispiel zeigt explizit die unterschiedliche Herkunft des Parameters ϵ aus der Massenhierarchie und aus den Winkeln, für die $\{\epsilon, \epsilon^2 0\}$ eingesetzt wird.

Textur	θ_{12}^ℓ	θ_{12}^ν	θ_{23}^ν
1a	$\mathcal{O}(\epsilon)$	$\mathcal{O}(\epsilon^2)$	$\mathcal{O}(\epsilon^3)$
1b	$\mathcal{O}(\epsilon)$	$\mathcal{O}(\epsilon)$	ϵ

Tabelle 5.2: Größen beziehungsweise Größenordnungen der kleinen Winkel für Konfiguration 1 unter Berücksichtigung der reellen Texturen, 1a (obere Zeile) und 1b (untere Zeile).

Betrachten wir reelle Massentexturen, so gehen wir analog vor und überprüfen lediglich die Beträge der Elemente.

5.3 Einführung spezieller reeller Neutrino-Massentexturen

In diesem Kapitel möchten wir den Wertebereich der Observablen weiter einschränken, indem wir die in Tab. 5.1 dargestellten Texturen für die Neutrino-Massenmatrix einführen. Die Massenmatrix der geladenen Leptonen bleibt frei, aber im Allgemeinen komplex und nicht diagonal. Wir beschränken uns hier auf den reellen Fall, so dass wir η mit ϵ identifizieren. Weiterhin sind die kleinen unphysikalischen Winkel nicht mehr frei, sondern nehmen die durch QLC motivierten Werte $\{\epsilon, \epsilon^2, 0\}$ mit $\epsilon \simeq \theta_C$ an. Dies erlaubt es uns eine Verbindung zum Quarksektor herzustellen. Die unphysikalischen Winkel sind frei und führen zu expliziter CP-Verletzung. Mit der in Abschnitt 3.3.1 beschriebenen Methode zur Identifizierung einer Textur erhalten wir die in Tab. 5.2 dargestellten Bedingungen an die kleinen Winkel des Neutrino-sektors. Diese setzen wir in die Gln. (5.4)-(5.6) ein. Da wir in den Gln. (5.7)-(5.10) die Phasen lediglich bis zur nullten Ordnung betrachtet haben, führt eine Einschränkung der Winkel nicht direkt zu neuen Aspekten³. Aus diesem Grund betrachten wir in diesem Kapitel ausschließlich die physikalischen Mischungswinkel.

Wir stellen fest, dass im Fall von Textur 1a der für $\sin^2 \theta_{23}$ wesentliche, zu θ_{23}^ν proportionale Term in Gl. (5.6) auf Grund der Bedingung $\theta_{23}^\nu = \mathcal{O}(\epsilon^3)$ verschwindet. Dies hat zur Folge, dass der maximal erreichbare Wert in erster Ordnung durch $\sin^2 \theta_{23} \lesssim 0.28$ gegeben ist. Mit den experimentellen Grenzen in Tab. 4.1 ist der Wert nicht vereinbar, so dass Konfiguration 1 in Kombination mit Textur 1a unter Berücksichtigung der 3σ -Grenzen nicht gültig ist.

³Durch den Vergleich der Mischungswinkel mit den experimentellen Grenzen kann es zu stärkeren Beschränkungen der unphysikalischen Phasen kommen, die sich auf die physikalischen Phasen in nullter Ordnung auswirken.

#	Textur 1a	Textur 1b
1	$\varphi_2 + \delta^\nu = 0$	$\varphi_2 + \delta^\nu = 0$
2	$2(\alpha_2 + \varphi_1 + \delta^\nu) = \Phi$	$2(\alpha_2 + \varphi_1 + \delta^\nu) = \Phi$
3	$\theta_{12}^\nu = \mathcal{O}(\epsilon^2)$	$\varphi_1 + \delta^\nu = \Phi$
4	$\theta_{23}^\nu = \mathcal{O}(\epsilon^3)$	$\theta_{23}^\nu = \epsilon$

Tabelle 5.3: Erhaltene Bedingungen aus den komplexen Texturen in Tab. 5.1 für Konfiguration 1. In der ersten Spalte steht die Nummer der Bedingung, in den anderen die aus den beiden Texturen erhaltenen Bedingungen.

Betrachten wir Textur 1b, so folgt die vorher aus den experimentellen Grenzen abgeleitete Bedingung, dass θ_{23}^ν groß sein muss, hier bereits aus der Texturstruktur (siehe Tab. 5.2). Für die anderen beiden Winkel erhalten wir keinerlei Beschränkung, so dass sich keine großen Änderungen im Vergleich zu den Gln. (5.4)-(5.6) ergeben. Die Bedingungen für die unphysikalischen Phasen können wir also in diesem Fall durch die Textur nicht verschärfen.

5.4 Einführung spezieller komplexer Neutrino-Massentexturen

Wir haben in Abschnitt 5.3 festgestellt, dass wir durch die Einführung der reellen Textur 1b keine weitreichenden Aussagen über die Wertebereiche der physikalischen Größen machen können. Aus diesem Grund stellen wir hier, indem wir komplexe Texturen einführen, nicht nur Bedingungen an die unphysikalischen Winkel, sondern auch an die unphysikalischen Phasen (siehe Abschnitt 5.2). Da sich Letztere auch auf die physikalischen Phasen auswirken, diskutieren wir diese ebenfalls. Wir identifizieren die Texturen wie in Abschnitt 3.3.1 beschrieben und erhalten die in Tab. 5.3 dargestellten Bedingungen für die unphysikalischen Parameter.

Wir setzen nun die Bedingungen aus Tab. 5.3 für die Texturen 1a und 1b in die Gln. (5.3)-(5.10) ein. Die sich ergebenden neuen Gleichungen für die Observablen unterscheiden wir durch die Beschriftung mit 1a bzw. 1b, analog zur zugehörigen Textur. Wir stellen zunächst fest, dass wir mit Bedingung 1 aus Tab. 5.3 und Gl. (5.3) die Identität $\beta = \delta^\ell$ erhalten, die dazu führt, dass $\cos \delta^\ell$ groß sein muss und $|\delta^\ell|$ klein. Wir entwickeln deshalb die Observablen in δ^ℓ , zusätzlich zu den kleinen Winkeln θ_{12}^ℓ , θ_{12}^ν und θ_{23}^ν . Wir erkennen schon an dieser Stelle, dass wir auf Grund der Identität $\beta = \delta^\ell \approx 0$ den Winkel θ_{12}^ℓ nicht groß wählen dürfen (siehe Gl. (5.6)). Es ist geschickter

zu den ursprünglichen Definitionen der Phasen (δ^ν , φ_1 und φ_2) zurückzugehen. Wir erhalten für $\sin^2 \theta_{13}$:

$$(\sin^2 \theta_{13})_{1a} = \frac{1}{8} \left(3 - 2\sqrt{2} + 2\theta_{12}^\ell (2 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} \delta^{\ell 2} \right) + \mathcal{O}(\xi^3), \quad (5.14a)$$

$$\text{mit } \theta_{12}^\ell = \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

$$\begin{aligned} (\sin^2 \theta_{13})_{1b} &= \frac{1}{8} \left(3 - 2\sqrt{2} - 2\epsilon \left((\sqrt{2} - 1) \cos \Phi + \sqrt{2} \delta^\ell \sin \Phi \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\theta_{12}^\ell (2 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} \epsilon^2 - 4 \cos \Phi \theta_{12}^\ell \epsilon + \sqrt{2} \delta^{\ell 2} \right. \\ &\quad \left. + (2\sqrt{2} - 1) \theta_{12}^{\ell 2} \right) + \mathcal{O}(\xi^3), \end{aligned} \quad (5.14b)$$

wobei ξ^n für alle Kombinationen n -ter Ordnung von ϵ , δ^ℓ und θ_k steht. Für Textur 1a stellen wir fest, dass $\sin^2 \theta_{13}$ nur dann mit den Grenzen vereinbar ist, wenn wir $\theta_{12}^\ell = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ wählen. Nach unten ist Gl. (5.14a) beschränkt mit $\sin^2 \theta_{13} \gtrsim 0.02$. Dieser Wert liegt in Reichweite von zukünftigen Reaktor- und Superbeamexperimenten. Für Textur 1b stellen wir in Gl. (5.14b) fest, dass die Observable durch die dritte Bedingung in Tab. 5.3 abhängig von dem Modellparameter Φ ist. Verwenden wir jetzt die obere Schranke für $\sin^2 \theta_{13}$ aus Tab. 4.1, so erhalten wir verbotene Werte für Φ in Abhängigkeit der Wahl von $\theta_{12}^\ell = \{\epsilon, \epsilon^2, 0\}$ ⁴:

$$\begin{aligned} \Phi &\notin [1.1, 5.2] \quad \text{für } \theta_{12}^\ell = \epsilon, \\ \Phi &\notin [2.1, 4.2] \quad \text{für } \theta_{12}^\ell = \epsilon^2, \\ \Phi &\notin [2.5, 3.8] \quad \text{für } \theta_{12}^\ell = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Zur Bestimmung dieser Grenzen haben wir δ^ℓ marginalisiert, δ^ℓ kann also beliebige Werte annehmen. Dass der verbotene Bereich für Φ kleiner wird, je kleiner wir θ_{12}^ℓ wählen, können wir anhand des positiven Beitrags des zu θ_{12}^ℓ proportionalen Terms in Gl. (5.14b) nachvollziehen.

Für $\sin^2 \theta_{23}$ erhalten wir:

$$(\sin^2 \theta_{23})_{1a} = \frac{2}{5 + 2\sqrt{2}} + \mathcal{O}(\xi^2), \quad (5.16a)$$

$$\begin{aligned} (\sin^2 \theta_{23})_{1b} &= \frac{2}{5 + 2\sqrt{2}} - \frac{2}{289} \left((26 - 7\sqrt{2}) \theta_{12}^\ell + \right. \\ &\quad \left. + 2(12 + 19\sqrt{2}) \cos \Phi \epsilon \right) + \mathcal{O}(\xi^2). \end{aligned} \quad (5.16b)$$

In Gl. (5.16a) erkennen wir, dass durch das Einführen der komplexen Textur 1a die Kompatibilität mit den experimentellen Grenzen wegen der Identität $\beta = \delta^\ell$

⁴Hier beachten wir nicht die Beschränkungen an $\sin^2 \theta_{23}$.

noch schlechter wird, als bei der Annahme der reellen Textur 1a ($\sin^2 \theta_{23} \approx 0.26$). Für Textur 1b haben wir in Gl. (5.16b) einen negativen Beitrag proportional zu θ_{12}^ℓ und einen Term erster Ordnung in ϵ , der proportional zu $\cos \Phi$ ist. Um für $\sin^2 \theta_{23}$ nun einen möglichst großen Wert zu erreichen, ist es nötig θ_{12}^ℓ klein und $\cos \Phi$ stark negativ zu wählen. Dies führt wiederum zu einer Erhöhung von $\sin^2 \theta_{13}$, so dass die in der Diskussion zu Gl. (5.6) besprochene Spannung zwischen einem großen $\sin^2 \theta_{23}$ und einem kleinen $\sin^2 \theta_{13}$ auftritt. Wir erhalten folglich für Φ die Bedingung, dass es möglichst nah an den Grenzen von dem in Gl. (5.15) dargestellten Bereich ist, und für θ_{12}^ℓ , dass es verschwindet. Es ist auf jeden Fall so, dass $\sin^2 \theta_{23}$ stets Werte am untersten Ende des erlaubten Bereichs und $\sin^2 \theta_{13}$ Werte nahe der Schranke annimmt, so dass diese Konfiguration, in Kombination mit der komplexen Textur 1b, durch Verbesserung der Genauigkeit von $\sin^2 \theta_{23}$ und $\sin^2 \theta_{13}$ leicht auszuschließen ist.

Für $\sin^2 \theta_{12}$ erhalten wir unter Berücksichtigung der Bedingungen aus den Texturen:

$$(\sin^2 \theta_{12})_{1a} = \frac{2}{5 + 2\sqrt{2}} + \mathcal{O}(\xi^2), \quad (5.17a)$$

$$\begin{aligned} (\sin^2 \theta_{12})_{1b} &= \frac{2}{5 + 2\sqrt{2}} + \frac{4}{289} \left(2(19 + 6\sqrt{2})\theta_{12}^\ell - \right. \\ &\quad \left. - (12 + 19\sqrt{2}) \cos \Phi \epsilon \right) - \frac{2}{17} (6 + \sqrt{2}) \cos(\varphi_1) \theta_{12}^\nu + \mathcal{O}(\xi^2). \end{aligned} \quad (5.17b)$$

Wir erkennen, dass für Textur 1a gilt: $\sin^2 \theta_{12} \approx 0.26$, was etwas unterhalb des Bestfit-Wertes liegt. Im Fall von Textur 1b haben wir, mit dem Wissen aus der Diskussion von Gl. (5.16b), einen positiven Beitrag durch den zu ϵ proportionalen Term und einen von φ_1 -abhängigen Term, der proportional zu θ_{12}^ν ist.

Wir erhalten für δ_{CP} :

$$(\delta_{\text{CP}})_{1a} = (1 - 3\sqrt{2}) \delta^l + \mathcal{O}(\xi^2), \quad (5.18a)$$

$$\begin{aligned} (\delta_{\text{CP}})_{1b} &= (1 - 3\sqrt{2}) \delta^l + (-1 + 3\sqrt{2}) \sin \Phi \epsilon + \\ &\quad + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sin \varphi_1 \theta_{12}^\nu + \mathcal{O}(\xi^2). \end{aligned} \quad (5.18b)$$

Mit Gl. (5.18a) folgt aus der Einschränkung $\delta^\ell \lesssim \delta_{\text{max}}^\ell$ die Beschränkung $|\delta_{\text{CP}}| \lesssim |\delta_{\text{max}}^\ell (1 - 3\sqrt{2})|$ für $|\delta_{\text{CP}}|$. Wir erhalten also einen kleineren Wertebereich als für den allgemeinen Fall (Abschnitt 5.1), da dort Terme erster Ordnung beitragen können. Für Textur 1b ergibt sich durch die zusätzlichen Terme erster Ordnung in den

Winkeln die Möglichkeit einer größeren Phase, analog zu dem allgemeinen Fall.

Abschließend betrachten wir die beiden Majorana-Phasen, deren Bestimmungsgleichungen in nullter Ordnung in den Gln. (5.9) und (5.10) gegeben sind. Da wir für α_1 keinerlei Bedingung haben, ist auch $2\phi_1$ unbeschränkt und kann jeden Wert annehmen. Dass wir für α_1 keinerlei Bedingung durch den Texturvergleich erhalten, liegt an folgendem Sachverhalt: Wir können die Gl. (3.21) für die Massenmatrix umschreiben als

$$M_\nu^{\text{Maj}} = \text{diag} \left(1, e^{i\varphi_1}, e_2^{i\varphi} \right) \cdot \widehat{U}_\nu \cdot \text{diag} \left(\epsilon^2 e^{2i\alpha_1}, \epsilon e^{2i\alpha_2}, 1 \right) \cdot \widehat{U}_\nu^T \cdot \text{diag} \left(1, e^{i\varphi_1}, e_2^{i\varphi} \right). \quad (5.19)$$

Wir erkennen, dass die Phase α_1 immer in Kombination mit ϵ^2 auftritt. Daraus folgt: Kann überhaupt eine Bedingungsgleichung für α_1 gefunden werden, so nur über einen Textureintrag ϵ^2 . Da dies sowohl für Textur 1a als auch für Textur 1b nicht der Fall ist, ist α_1 und damit ϕ_1 unbeschränkt. Die Bestimmungsgleichung der zweiten Majorana-Phase in Gl. (5.10) wird mit Bedingung 2 aus Tab. 5.3 für beide Texturen zu:

$$(2\phi_2)_{1a,1b} = \Phi + \mathcal{O}(\xi). \quad (5.20)$$

Wir stellen fest, dass die zweite Majorana-Phase in beiden Fällen in nullter Ordnung durch den Modellparameter Φ gegeben ist. Wir erhalten für beide Texturen die Summenregel vom Typ IIIb:

$$2\phi_2 \simeq \Phi, \quad (5.21)$$

die die physikalische Observable $2\phi_2$ in Relation zu dem Modellparameter Φ setzt.

Es hat sich also für Konfiguration 1 in Kombination mit den Texturen 1a und 1b folgendes Bild ergeben: Die grundlegenden Merkmale von Konfiguration 1, die wir in Abschnitt 5.1 erhalten haben, gelten auch hier: großes θ_{13} ; θ_{12} nahe des Bestfit-Wertes; große Abweichung von maximaler Mischung für θ_{23} und ein kleines δ_{CP} . Zusätzlich haben wir in diesem Kapitel durch die Einführung der Texturen unphysikalische Winkel und Phasen einschränken können und vor allem einen Bezug zu dem Modellparameter Φ herstellen können. Dieser wirkt sich für Textur 1a nur auf eine Observable ($2\phi_2$), für Textur 1b jedoch auf alle Observablen aus. Weiterhin haben wir festgestellt, dass Textur 1a sowohl im reellen als auch im komplexen Fall zu einem $\sin^2 \theta_{23}$ führt, das nicht mit den 3σ -Grenzen aus Tab. 4.1 vereinbar ist.

6 Verschränkte Mischungen mit zwei maximalen Mischungswinkeln

Die Konfiguration, die wir in diesem Kapitel unter den in Abschnitt 3.3.5 dargestellten Annahmen diskutieren, ist durch folgenden Satz an maximalen und kleinen Winkeln gegeben [75]:

$$(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell, \theta_{23}^\ell, \theta_{12}^\nu, \theta_{13}^\nu, \theta_{23}^\nu) = (*, *, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, *, *), \quad (6.1)$$

wobei * für Winkel von der Ordnung des Cabibbo-Winkels steht. Wir bezeichnen diese Konfiguration im Folgenden als Konfiguration 2.

Die Diskussion dieser Konfiguration verläuft analog zu der von Konfiguration 1 in Kapitel 5. Wir werden also zunächst die Observablen in den kleinen Winkeln entwickeln und dann mit Hilfe der experimentellen Grenzen in Tab. 4.1 die unphysikalischen Parameter möglichst stark beschränken. Den Einfluss der komplexen Phasen untersuchen wir erneut durch die drei verschiedenen Annahmen aus Abschnitt 3.3.5: rein CP-erhaltende unphysikalische Phasen, rein CP-verletzende unphysikalische Phasen und CP-verletzende sowie CP-erhaltende unphysikalische Phasen. Wir erlauben zusätzlich kleine Abweichungen um ϵ von den exakten Werten. Als nächsten Schritt führen wir zwei reelle Texturen ein, die uns Beschränkungen für die unphysikalischen Winkel geben. Die Winkel nehmen hier nur noch die Werte $\{\epsilon, \epsilon^2, 0\}$ mit $\epsilon \simeq \theta_C$ an, so dass wir QLC-ähnliche Summenregeln erhalten können. Als Letztes beschränken wir zusätzlich zu den kleinen Winkeln die unphysikalischen Phasen, indem wir komplexe Texturen betrachten.

Wie schon bei Konfiguration 1 haben wir auch für Konfiguration 2 numerische Analysen durchgeführt, deren Ergebnisse in Anhang B dargestellt sind. Es ist auch in diesem Fall zur Veranschaulichung der Formeln empfehlenswert beim Lesen dieses Kapitels einen Blick auf die Verteilungen zu haben.

6.1 Bestimmung der unphysikalischen Parameter

Konfiguration 2 beinhaltet mehr Möglichkeiten, da sie im Vergleich zur vorherigen einen maximalen Winkel weniger hat. Die maximal gewählten Winkel sind θ_{12}^ν und θ_{23}^ℓ . Wie schon bei Konfiguration 1 entwickeln wir die Observablen in den restlichen kleinen Winkeln (hier θ_{12}^ℓ , θ_{13}^ℓ , θ_{13}^ν und θ_{23}^ν). Wir entwickeln $\sin^2 \theta_{13}$ bis zur dritten Ordnung in den kleinen Winkeln, weil die führende Ordnung für diese Konfiguration die zweite ist und die Koeffizienten der dritten Ordnung relativ groß sind. Wir erhalten dann in dritter Ordnung:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{13} = & \frac{1}{2} \theta_{12}^{\ell 2} + \frac{1}{2} \theta_{13}^{\ell 2} + \theta_{13}^{\nu 2} - \cos \delta^\ell \theta_{12}^\ell \theta_{13}^\ell + \sqrt{2} \cos(\varphi_2 + \delta^\nu) \theta_{12}^\ell \theta_{13}^\nu \\ & - \sqrt{2} \cos(\varphi_2 - \delta^\ell + \delta^\nu) \theta_{13}^\ell \theta_{13}^\nu - 6 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \theta_{12}^{\ell 2} \theta_{23}^\nu \\ & - 12 \sin \delta^\ell \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \theta_{12}^\ell \theta_{13}^\ell \theta_{23}^\nu + 6 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \theta_{13}^{\ell 2} \theta_{23}^\nu \\ & - 6\sqrt{2} \cos(\delta^\nu + \varphi_1) \theta_{12}^\ell \theta_{13}^\nu \theta_{23}^\nu - 6\sqrt{2} \cos(\delta^\nu + \varphi_1 - \delta^\ell) \theta_{13}^\ell \theta_{13}^\nu \theta_{23}^\nu. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Da wir keinen Term nullter Ordnung erhalten, gilt im Falle verschwindender Winkel: $\sin^2 \theta_{13} = 0$. Das bedeutet, dass wir im allgemeinsten Fall keine Aussagen über die Dirac-Phase machen können, weil sie dann undefiniert ist. Aus diesem Grund diskutieren wir nach den allgemeinen Formeln für die Mischungswinkel drei Spezialfälle inklusive Dirac-Phase. Zunächst betrachten wir jedoch den Wertebereich von $\sin^2 \theta_{13}$. Obwohl wir keine Beiträge der nullten und ersten Ordnung zu $\sin^2 \theta_{13}$ haben, ist es durch die Wahl verhältnismäßig großer Winkel ($\approx \theta_C$) möglich, Werte außerhalb des erlaubten Bereichs zu erreichen. Damit decken wir den gesamten erlaubten Bereich ab.

Für $\sin^2 \theta_{12}$ erhalten wir in zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{12} = & \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\delta^\ell - \varphi_1) \theta_{13}^\ell - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 \theta_{12}^\ell \\ & - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi_2 \theta_{12}^\ell \theta_{23}^\nu + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\delta^\ell - \varphi_2) \theta_{13}^\ell \theta_{23}^\nu. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Bei der Betrachtung der nullten Ordnung stellen wir fest, dass sie maximaler Mischung entspricht und mit den experimentellen Grenzen nicht vereinbar ist. Daher ist es unumgänglich, die höheren Ordnungen in Betracht zu ziehen und θ_{12}^ℓ und/oder θ_{13}^ℓ verhältnismäßig groß zu wählen. Weiterhin müssen die zu θ_{12}^ℓ und θ_{13}^ℓ proportionalen Terme in der Summe negative Beiträge leisten. Wir erhalten für diese Konfiguration ein großes $\sin^2 \theta_{12}$, das durch geeignete Wahl der Winkel und Phasen den gesamten erlaubten Bereich abdecken kann.

Der dritte Mischungswinkel $\sin^2 \theta_{23}$ ist in zweiter Ordnung durch folgende Formel gegeben:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{23} = & \frac{1}{2} - \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \theta_{23}^\nu - \frac{1}{4} \theta_{12}^{\ell 2} + \frac{1}{4} \theta_{13}^{\ell 2} + \frac{1}{2} \cos \delta^\ell \theta_{13}^\ell \theta_{12}^\ell \\ & - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\delta^\ell - \delta^\nu - \varphi_2) \theta_{13}^\ell \theta_{13}^\nu - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\delta^\nu + \varphi_2) \theta_{12}^\ell \theta_{13}^\nu. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Wie bei Konfiguration 1 haben wir in nullter Ordnung die Identität $\sin^2 \theta_{12} = \sin^2 \theta_{23}$. Das bedeutet, dass $\sin^2 \theta_{23}$ in nullter Ordnung durch maximale Mischung, also den Bestfit-Wert, gegeben ist. Die Abweichung von diesem Wert erhalten wir hauptsächlich durch den zu θ_{23}^ν proportionalen Term erster Ordnung. Der Wert dieses Winkels ist folglich signifikant für die Abweichung vom Bestfit-Wert.

Wir erhalten für diese Konfiguration ohne weitere Annahmen, dass $\sin^2 \theta_{23}$ gut innerhalb seiner Grenzen liegt. Die unphysikalischen Parameter werden folglich durch die Grenzen dieses Mischungswinkels nicht eingeschränkt. Für $\sin^2 \theta_{13}$ ergibt sich zwar die Möglichkeit die obere Schranke zu überschreiten, jedoch ist es auf Grund der vielen Terme in Gl. (6.2) nicht möglich, daraus explizit Bedingungen für die unphysikalischen Größen zu erhalten. Der letzte Mischungswinkel $\sin^2 \theta_{12}$ eignet sich wegen seiner starken Abweichung in nullter Ordnung vom Bestfit-Wert sehr gut zur Beschränkung der unphysikalischen Parameter. Wir erhalten in erster Ordnung die Bedingung: $13\sqrt{2}/50 \gtrsim \cos(\delta^\ell - \varphi_1) \theta_{13}^\ell + \cos \varphi_1 \theta_{12}^\ell \gtrsim \sqrt{2}/10$. Diese führt zu der Aussage, dass mindestens einer der beiden kleinen Winkel des geladenen Leptonsektors groß sein muss¹.

Wir betrachten jetzt die Gln. (6.2)-(6.4) für die Phasenannahmen: CP-erhaltend, CP-verletzend und beides kombiniert. Beginnend mit CP-erhaltend bemerken wir, dass alle phasenabhängigen Terme nun maximal positiv bzw. negativ beitragen. Wir können mit dieser Annahme die beiden Phasen, die signifikant zu $\sin^2 \theta_{12}$ beitragen, bestimmen: $\delta^\ell \simeq \varphi_1 \simeq 0$. Wir erhalten dann für die Summe der beiden kleinen Winkel in U^ℓ : $13\sqrt{2}/50 \gtrsim \theta_{12}^\ell + \theta_{13}^\ell \gtrsim \sqrt{2}/10$. Wählen wir die unphysikalischen Phasen CP-verletzend, so verschwinden alle Terme, die proportional zu einem Kosinus mit einer ungeraden Anzahl Phasen sind. Für $\sin^2 \theta_{12}$ bedeutet dies, dass der zu θ_{12}^ℓ proportionale Term verschwindet und die Bedingung für θ_{13}^ℓ lautet: $13\sqrt{2}/50 \gtrsim \theta_{13}^\ell$. Dadurch, dass wir die kleinen Winkel auf Werte von $\mathcal{O}(\theta_C)$ beschränken, können wir hier nicht mehr den gesamten erlaubten Bereich für $\sin^2 \theta_{12}$ erreichen. Bei der gleichzeitigen Betrachtung von CP-erhaltenden und CP-verletzenden Phasen können auch gerade Summen von Phasen zu einem verschwindenden Kosinus führen.

¹Die in Gl. (6.3) enthaltenen Phasen müssen ebenfalls passend gewählt werden

Dadurch entsteht bei $\sin^2 \theta_{12}$ die Möglichkeit, dass der zu θ_{13}^ℓ proportionale Term verschwindet und die Bedingung, die im CP-verletzenden Fall für θ_{13}^ℓ gilt, hier für θ_{12}^ℓ gilt. Wir haben bei der Diskussion der verschiedenen Phasenannahmen nur den einen Mischungswinkel $\sin^2 \theta_{12}$ betrachtet, weil sich durch die verschiedenen Phasenannahmen bei $\sin^2 \theta_{13}$ und $\sin^2 \theta_{23}$ nur die Verteilung (siehe Abb. B.5) nicht aber der Wertebereich ändert.

Die Berechnung der CP-Phase können wir im allgemeinsten Fall, wie schon bei der Diskussion zu $\sin^2 \theta_{13}$ erläutert, nicht durchführen. Mit Hilfe von Gl. (2.39) können wir jedoch die Majorana-Phasen in nullter Ordnung bestimmen². Wir erhalten:

$$2\phi_1 = 2(\alpha_1 + \varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{O}(\theta_k), \quad 2\phi_2 = 2(\alpha_2 + \varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{O}(\theta_k). \quad (6.5)$$

Um die Dirac-Phase zu bestimmen, wählen wir drei signifikant verschiedene, möglichst einfache Kombinationen der kleinen Winkel. Mit der Bedingung aus der Diskussion von $\sin^2 \theta_{12}$, dass mindestens einer der beiden kleinen Winkel aus dem geladenen Leptonsektor groß sein muss, wählen wir: alle kleinen Winkel sind Null, bis auf θ_{12}^ℓ beziehungsweise alle kleinen Winkel sind Null, bis auf θ_{13}^ℓ ; $\theta_{12}^\ell = \theta_{13}^\ell = \sqrt{\theta_{23}^\nu}$ mit $\theta_{13}^\nu = 0$. Die Wahl von θ_{23}^ν im dritten Fall ist nicht die einfachste Wahl, jedoch erlaubt sie uns die tri-bimaximale Mischung zu erzeugen. Für die Spezialfälle geben wir im Folgenden die Mischungswinkel in zweiter und die Dirac-Phase in erster Ordnung an.

6.1.1 Dominanz von θ_{12}^ℓ

Die Gln. (6.2)-(6.4) der allgemeinen Diskussion vereinfachen sich mit der Annahme, dass alle Winkel bis auf θ_{12}^ℓ verschwinden, zu:

$$\sin^2 \theta_{13} = \frac{1}{2}(\theta_{12}^\ell)^2, \quad (6.6)$$

$$\sin^2 \theta_{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 \theta_{12}^\ell, \quad (6.7)$$

$$\sin^2 \theta_{23} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\theta_{12}^\ell)^2, \quad (6.8)$$

$$\sin \delta_{\text{CP}} = \sin \varphi_1, \quad \cos \delta_{\text{CP}} = -\cos \varphi_1. \quad (6.9)$$

Wir erhalten die Observablen in Abhängigkeit der beiden unphysikalischen Parameter θ_{12}^ℓ und φ_1 , die aus Gl. (6.7) durch $\cos \varphi_1 \theta_{12}^\ell \gtrsim \sqrt{2}/10$ beschränkt sind. Daraus

²Für nicht verschwindende Winkel ist $\sin^2 \theta_{13} \neq 0$, so dass Gl. (2.39) in erster Ordnung nicht mehr gilt.

erhalten wir entweder eine Schranke für $\cos \varphi_1$, so dass $\cos \delta_{\text{CP}} \lesssim -\sqrt{2}/(10 \theta_{12}^\ell)$ gilt, oder eine für θ_{12}^ℓ , gegeben durch $\theta_{12}^\ell \gtrsim \sqrt{2}/(10 \cos \varphi_1) \geq \sqrt{2}/10$, die zu einer unteren Grenze für $\sin^2 \theta_{13} \gtrsim 0.01$ führt. Diese Grenze liegt in Reichweite zukünftiger Experimente, wie zum Beispiel Double Chooz (siehe z.B. [76, 77]). Kombinieren wir die beiden Gleichungen für δ_{CP} in Gl. (6.9), erhalten wir für die CP-Phase: $\delta_{\text{CP}} = \pi - \varphi_1$. Mit der Grenze für $\cos \varphi_1$ können wir sagen, dass CP-Verletzung, für die $\cos \varphi_1 = 0$ gelten muss, verboten ist und δ_{CP} nahe an π liegt.

Wegen der einfachen Form der Gln. (6.6)-(6.9) ist es möglich, die unphysikalischen Parameter zu eliminieren und Gleichungen zu erhalten, die nur von den leptonen physikalischen Größen abhängen, also Summenregeln vom Typ I. Eine weitere Eigenschaft der Summenregeln ist, dass die reinen Mischungswinkel und nicht die Sinusquadrate auftreten. Wir erhalten:

$$\theta_{23} + \frac{1}{2} \theta_{13}^2 \simeq \frac{\pi}{4}, \quad (6.10)$$

$$\theta_{12} - \cos \delta_{\text{CP}} \theta_{13} \simeq \frac{\pi}{4}. \quad (6.11)$$

Aus Gl. (6.10) bestimmen wir mit der oberen Grenze für θ_{13} die prozentuale, maximale Abweichung von θ_{23} von maximaler Mischung zu 3%. Abweichungen dieser Größenordnung befinden sich am Rande des messbaren Bereichs zukünftiger Präzisionsexperimente (siehe [78]). Weiterhin können wir aus der unteren Schranke für $\sin^2 \theta_{13}$ die minimale Abweichung von maximaler Mischung zu ~ 0.005 bestimmen. In Gl. (6.11) haben wir eine Kombination der drei physikalischen Größen θ_{12} , δ_{CP} und θ_{13} , die bei einer Messung selbiger dazu dienen kann, das Modell zu falsifizieren.

6.1.2 Dominanz von θ_{13}^ℓ

Für den Fall, dass alle Winkel bis auf θ_{13}^ℓ verschwinden, erhalten wir für die Observablen:

$$\sin^2 \theta_{13} = \frac{1}{2} (\theta_{13}^\ell)^2, \quad (6.12)$$

$$\sin^2 \theta_{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\delta^\ell - \varphi_1) \theta_{13}^\ell, \quad (6.13)$$

$$\sin^2 \theta_{23} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (\theta_{13}^\ell)^2, \quad (6.14)$$

$$\sin \delta_{\text{CP}} = \sin(\delta^\ell - \varphi_1), \quad \cos \delta_{\text{CP}} = \cos(\delta^\ell - \varphi_1). \quad (6.15)$$

Wir erkennen, dass sich die Gln. (6.12)-(6.14) von der Struktur her nicht stark von den Gln. (6.6)-(6.8) unterscheiden. Wir haben in diesem Fall $\theta_{12}^\ell/\varphi_1$ anstatt $\theta_{13}^\ell/\delta^\ell - \varphi_1$. Unsere unphysikalischen Parameter sind folglich θ_{13}^ℓ , δ^ℓ und φ_1 , für die die Bedingung $\cos(\delta^\ell - \varphi_1)\theta_{13}^\ell \gtrsim \sqrt{2}/10$ gilt. Die Unterschiede zwischen den beiden Fällen sind die unterschiedlichen Vorzeichen der Abweichung von maximaler Mischung in Gl. (6.14) im Vergleich zu Gl. (6.8) und im Kosinus der CP-Phase. Das unterschiedliche Vorzeichen im Kosinus führt zu der Orientierung von δ_{CP} um 0 und nicht um π . Sehr gut zu erkennen sind die Unterschiede in den Summenregeln vom Typ I:

$$\theta_{23} - \frac{1}{2} \theta_{13}^2 \simeq \frac{\pi}{4}, \quad (6.16)$$

$$\theta_{12} + \cos \delta_{\text{CP}} \theta_{13} \simeq \frac{\pi}{4}. \quad (6.17)$$

Anders als im ersten Fall liegt θ_{23} hier im 2. und nicht im 1. Oktanten, was man an dem unterschiedlichen Vorzeichen in Gl. (6.16) im Vergleich zu Gl. (6.10) erkennen kann. Die maximale Abweichung von maximaler Mischung ist erneut durch 3% gegeben und schlecht messbar. Betrachten wir nun jedoch den Unterschied zwischen den beiden Fällen, so ist dieser groß genug, um in zukünftigen Präzisionsexperimenten gemessen zu werden. Im Vergleich der Gln. (6.17) und (6.11) erkennen wir die bereits erwähnte unterschiedliche Lage von δ_{CP} .

Zusammenfassend können wir sagen, dass wir die beiden Spezialfälle, bei denen θ_{12}^ℓ beziehungsweise θ_{13}^ℓ dominiert, durch folgende Kriterien unterscheiden können: der Oktant von θ_{23} (1. Oktant \leftrightarrow 2. Oktant) und die Lage von δ_{CP} ($\pi \leftrightarrow 0$). Gemeinsam haben beide Fälle, dass $\sin^2 \theta_{13} \gtrsim 0.01$, θ_{23} nur geringe Abweichung von maximaler Mischung hat, $\sin^2 \theta_{12}$ groß ist und keine beziehungsweise geringe CP-Verletzung auftritt.

6.1.3 Ausgeglichenheit zwischen θ_{12}^ℓ und θ_{13}^ℓ

Dieser Spezialfall ist durch den folgenden Satz an Winkeln gegeben:

$(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell, \theta_{23}^\ell, \theta_{12}^\nu, \theta_{13}^\nu, \theta_{23}^\nu) = (X, X, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0, X^2)$. Wir erhalten hier für die Observablen:

$$\sin^2 \theta_{13} = X^2 (1 - \cos \delta^\ell) , \quad (6.18)$$

$$\sin^2 \theta_{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} X (\cos(\delta^\ell - \varphi_1) + \cos \varphi_1) , \quad (6.19)$$

$$\sin^2 \theta_{23} = \frac{1}{2} (1 + (\cos \delta^\ell + 2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) X^2) , \quad (6.20)$$

$$\sin \delta_{\text{CP}} = \frac{\sin(\delta^\ell - \varphi_1) + \sin \varphi_1}{\sqrt{2 - 2 \cos \delta^\ell}} , \quad \cos \delta_{\text{CP}} = \frac{\cos(\delta^\ell - \varphi_1) - \cos \varphi_1}{\sqrt{2 - 2 \cos \delta^\ell}} . \quad (6.21)$$

Als erstes fällt uns in Gl. (6.18) auf, dass wir durch die Wahl von $\delta^\ell = 0$, im Gegensatz zu den beiden vorangegangenen Fällen, $\sin^2 \theta_{13} = 0$ erhalten können. Deshalb ist die hier gemachte Wahl, dass beide Winkel der geladenen Leptonen groß sind, unter dem Aspekt tri-bimaximaler Mischung geeignet. Ansonsten ist die Struktur der Gleichungen ähnlich zu den beiden zuvor besprochenen Fällen. Dadurch, dass wir beide Winkel groß wählen, erhalten wir die Summe der jeweiligen Gleichungen in Spezialfall 1 und 2 sowie Terme zweiter Ordnung, die proportional zu dem Produkt $\theta_{12}^\ell \theta_{13}^\ell$ sind. Gerade diese Produktterme bewirken, dass wir im Vergleich zu vorher in $\sin^2 \theta_{12}$ und $\sin^2 \theta_{23}$ eine δ^ℓ -Abhängigkeit beobachten können. Die Abhängigkeit von der Phase φ_2 in Gl. (6.20) erhalten wir durch die Wahl von $\sqrt{\theta_{23}^\nu} = X$. Aus Gl. (6.19) ergibt sich, in Analogie zu θ_{12}^ℓ in Spezialfall 1, eine untere Schranke durch $X \gtrsim \sqrt{2}/20 \simeq 0.07$. Wir betrachten nun Gl. (6.21) bezüglich der Frage, welche Werte δ_{CP} annehmen kann. Wir bekommen für CP-Erhaltung, also $\sin \delta_{\text{CP}} = 0$, die Bedingung $\tan \varphi_1 = \sin \delta^\ell / (\cos \delta^\ell - 1)$. In Gl. (6.19) eingesetzt, erhalten wir $\sin^2 \theta_{12} = 1/2$, was nicht kompatibel mit den experimentellen Grenzen ist. Demnach ist für den Fall, dass beide geladenen Leptonwinkel gleich groß sind, CP-Erhaltung ausgeschlossen. Zum Testen, ob maximale CP-Verletzung erlaubt ist, setzen wir $\cos \delta_{\text{CP}} = 0$ und erhalten die Bedingung $\tan \varphi_1 = (1 - \cos \delta^\ell) / \sin \delta^\ell$. Diese führt in Kombination mit den Gln. (6.18) und (6.19) zu keiner Inkompatibilität mit den Grenzen aus Tab. 4.1, so dass maximale CP-Verletzung für diese Kombination der Winkel erzeugbar ist. Mit $X \leq \theta_C$ erhalten wir dann als Bedingung für den minimalen Wert des Betrags von $\sin \delta_{\text{CP}}$: $|\sin \delta_{\text{CP}}| \gtrsim 0.4$.

Wie schon bei der Diskussion von $\sin^2 \theta_{13}$ erwähnt, erlaubt diese Kombination von Winkeln mit $\delta^\ell = 0$ ein verschwindendes $\sin^2 \theta_{13}$. Dies ist eine der drei Bedingungen tri-bimaximaler Mischung. Die beiden anderen sind durch $\sin^2 \theta_{12} = 1/3$ und

$\sin^2 \theta_{23} = 1/2$ gegeben. Wir erhalten für die Gln. (6.19) und (6.20) mit $\delta^\ell = 0$:

$$\sin^2 \theta_{12} = \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cos \varphi_1 X \stackrel{!}{=} \frac{1}{3}, \quad (6.22)$$

$$\sin^2 \theta_{23} = \frac{1}{2} + X^2 \left(\frac{1}{2} - \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}. \quad (6.23)$$

Durch Eliminierung von φ_1 erhalten wir für X und φ_2 :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} \pm \varphi_2\right) X = \frac{1}{6\sqrt{2}}. \quad (6.24)$$

Diese Bedingung ist zum Beispiel durch $\varphi_2 = \pi/3$ und $X = 1/(6\sqrt{2})$ erfüllbar. Wir haben also einen Satz von Winkeln gefunden, der im Rahmen der 2. Konfiguration die Erzeugung von tri-bimaximaler Mischung erlaubt. Über δ_{CP} erhalten wir dabei aber keinerlei Informationen, da die Phase für $\sin^2 \theta_{13} = 0$ undefiniert ist. Wir haben bei der Betrachtung nur Terme bis zur zweiten Ordnung berücksichtigt, so dass Terme höherer Ordnung Abweichungen von tri-bimaximaler Mischung bewirken.

Wir diskutieren hier kurz die Auswirkungen der verschiedenen Annahmen der unphysikalischen Phasen auf die physikalischen Phasen. So sind im CP-erhaltenden Fall die Majorana-Phasen 0 und δ_{CP} ergibt sich je nach Wahl der kleinen Winkel θ_{12}^ℓ und θ_{13}^ℓ zu 0, π beziehungsweise keinem Wert³. Betrachten wir die Annahme CP-verletzender Phasen, so erhalten wir für die Majorana-Phasen in nullter Ordnung $\phi_1 = \phi_2 = \pi$. Der Fall eines dominierenden θ_{12}^ℓ ist ausgeschlossen und für die anderen beiden erhalten wir $\delta_{\text{CP}} = 0$ bzw. $\delta_{\text{CP}} \in \{\pi/4, 7\pi/4\}$. Die dritte Phasenannahme führt lediglich für den dritten Fall zu einem zusätzlichen Wertebereich, nämlich $\delta_{\text{CP}} \in \{3\pi/4, 5\pi/4\}$.

In Tab. 6.1 haben wir die Ergebnisse der drei Spezialfälle noch einmal in Form von Summenregeln vom Typ I beziehungsweise Wertebereichen zusammengefasst. Wir erkennen gut die Unterscheidungsmerkmale der drei Spezialfälle: Es ergibt sich im 1. Fall $\delta_{\text{CP}} \sim \pi$ und im 2. ~ 0 . Im dritten Fall tritt CP-Verletzung auf. Der Mischungswinkel θ_{13} ist in den ersten beiden Fällen im Vergleich zum dritten nach unten beschränkt. Der atmosphärische Winkel θ_{23} liegt im 1. Fall im 1. Oktanten, im 2. Fall im 2. und im 3. Fall in beiden. Der letzte Winkel θ_{12} ist wie θ_{13} in den ersten beiden Fällen nach unten beschränkt. Aussagen über die Majorana-Phasen können wir auf Grund der Abhängigkeit von den Phasen α_1 und α_2 nur unter bestimmten Annahmen für die unphysikalischen Phasen machen. In den einzelnen Spezialfällen

³Im dritten Fall ist δ_{CP} für $\delta^\ell = 0$ undefiniert und $\sin^2 \theta_{12}$ für $\delta^\ell = \pi$ nicht innerhalb der erlaubten Grenzen.

Observable	Winkel $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell, \theta_{23}^\ell, \theta_{12}^\nu, \theta_{13}^\nu, \theta_{23}^\nu)$		
	$(Y, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0, 0)$	$(0, Y, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0, 0)$	$(X, X, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0, X^2)$
θ_{12}	$\simeq \pi/4 + \cos \delta_{\text{CP}} \theta_{13}$	$\simeq \pi/4 - \cos \delta_{\text{CP}} \theta_{13}$	gesamte erlaubte Region um maximale Mischung
θ_{23}	$\simeq \pi/4 - \theta_{13}^2/2$	$\simeq \pi/4 + \theta_{13}^2/2$	
θ_{13}	$\gtrsim 0.1$	$\gtrsim 0.1$	gesamte erlaubte Region
δ_{CP}	$\sim \pi$	~ 0	$ \sin \delta_{\text{CP}} \gtrsim 0.4$

Tabelle 6.1: *Summenregeln vom Typ I bzw. ungefähre Werte/Bereiche für δ_{CP} , θ_{13} , θ_{23} und θ_{12} in den Spezialfällen von Konfiguration 2 (6.1.1, 6.1.2, und 6.1.3). Der Winkel Y liegt im Bereich $\sqrt{2}/10 \lesssim Y \lesssim \theta_C$, X hingegen im Bereich $\sqrt{2}/20 \lesssim X \lesssim \theta_C$. Die Bedingungen in der dritten Spalte sind weitaus schwächer, da drei unphysikalische Phasen beitragen und zusätzlich die Beiträge der Terme zweiter Ordnung größer sind.*

war es uns möglich, die in $\sin^2 \theta_{12}$ auftretenden unphysikalischen Parameter stärker zu beschränken.

6.2 Zuordnung zu speziellen Texturen

In diesem Abschnitt führen wir die beiden im Rahmen dieser Konfiguration betrachteten Texturen ein. Analog zu Tab. 5.1 sind in Tab. 6.2 die zwei Texturen dargestellt, für die im reellen Fall $\eta = \epsilon$ und im komplexen Fall $\eta = \epsilon \cdot \exp(i\Phi)$ gilt. Wir betrachten hier noch ein weiteres Beispiel zur Identifizierung der Texturen, weil für das 2-3-Element von Textur 2b die erhaltenen Bedingungen nicht eindeutig sind.

Textur 2b: $(M_\nu^{\text{Maj}})_{23}$

Wir entwickeln das Matricelement bis zur zweiten Ordnung:

$$(M_\nu^{\text{Maj}})_{23} = \frac{1}{2} e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \theta_{23}^\nu (2 + e^{i(2\alpha_2 + \pi)} \epsilon) + \frac{1}{2} e^{i(\delta^\nu + \varphi_1 + \varphi_2 + 2\alpha_2 + \pi)} \theta_{13}^\nu \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (6.25)$$

Der zu $\theta_{23}^\nu \epsilon$ proportionale Term ist immer um eine Ordnung höher als der zu θ_{23}^ν proportionale Term, so dass ersterer für die Texturbestimmung irrelevant ist. Das 23-Element der Textur 2b ist durch η^2 gegeben (siehe Tab. 6.2). Wir haben jetzt in Gl. (6.25) zwei Terme, die durch geschickte Wahl der kleinen Winkel ($\theta_{23}^\nu = \epsilon^2$ und $\theta_{12}^\nu = \epsilon$) von der Ordnung ϵ^2 sind. Aus der Analyse der anderen Matricelemente haben wir bereits die Bedingungen 1 – 4 aus Tab. 5.3 erhalten. Mit Bedingung 4 ist der zweite relevante Term in Gl. (6.25) von $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Für θ_{23}^ν können wir also sowohl 0 als auch ϵ^2 wählen. Für $\theta_{23}^\nu = 0$ erhalten wir aus Gl. (6.25) die Bedingung $\delta^\nu + \varphi_1 + \varphi_2 + 2\alpha_2 + \pi = \Pi + 2\Phi$. Mit $\Pi = 2\varphi_2$ und den Phasenbedingungen 1 – 3 aus Tab. 5.3 wird diese zu $2\Phi = \pi$. Das bedeutet, dass die Wahl $\theta_{23}^\nu = 0$

Textur 2a	Textur 2b
$\begin{pmatrix} \eta & \eta & \eta^2 \\ \eta & \eta & 0 \\ \eta^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \eta & \eta & \eta \\ \eta & \eta & \eta^2 \\ \eta & \eta^2 & 1 \end{pmatrix}$

Tabelle 6.2: Gewählte Texturen für Konfiguration 2, wobei η bei der Diskussion reeller Texturen (siehe Abschnitt 5.3) durch $\eta = \epsilon$ gegeben ist. Verwenden wir die hier dargestellten Texturen als komplexe Texturen, so gilt: $\eta = |\eta| \cdot \exp(i\Phi) = \epsilon \cdot \exp(i\Phi)$. Wir berücksichtigen hier lediglich Einträge bis zur zweiten Ordnung, alle höheren ($\mathcal{O}(\epsilon^3)$) identifizieren wir mit Null.

nur für $\Phi \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$ mit der Textur vereinbar ist. Da wir aber im Folgenden Betrachtungen anstellen wollen, die für alle Φ gelten, wählen wir hier $\theta'_{23} = \epsilon^2$ und erhalten aus

$$\arg\left(e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} + \frac{1}{2}e^{i(\delta\nu+\varphi_1+\varphi_2+2\alpha_2+\pi)}\right) = 2\Phi + 2\varphi_2 \quad (6.26)$$

eine Funktion für φ_2 in Abhängigkeit von Φ . In erster Näherung, also unter Vernachlässigung des zweiten Teils des Terms im Argument, ergibt sich $\varphi_2 = -2\Phi$. Die exakte Funktion ist in Anhang A als Funktion und Graph dargestellt.

6.3 Annahme spezieller reeller Neutrino-Massentexturen

Analog zur Diskussion von Konfiguration 1 in Kapitel 5.3 führen wir zur stärkeren Beschränkung der kleinen Winkel des Neutrinosektors reelle Texturen ein, die die Beträge der Massenmatrix beschreiben. Die für Konfiguration 2 gewählten sind in Tab. 6.2 dargestellt. Die Massenmatrix der geladenen Leptonen bleibt frei, aber im Allgemeinen nicht diagonal und komplex. Wir führen die in Abschnitt 3.3.1 beschriebene Identifizierung durch und erhalten die in Tab. 6.3 dargestellten Größenordnungen der Winkel. Da wir für den geladenen Leptonsektor keine Texturen überprüfen, erhalten wir keine Bedingungen für die Winkel θ_{12}^ℓ und θ_{13}^ℓ . Aus der Diskussion von Gl. (6.3) wissen wir, dass mindestens einer der beiden kleinen Winkel aus U^ℓ groß sein muss. Auf Grund der Annahme, dass die kleinen Winkel in diesem Abschnitt nur die Werte $\{\epsilon, \epsilon^2, 0\}$ annehmen können, erhalten wir unter Berücksichtigung der Grenze für $\sin^2 \theta_{12}$: $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell) \in \{(\epsilon, 0), (\epsilon, \epsilon^2), (0, \epsilon), (\epsilon^2, \epsilon), (\epsilon, \epsilon)\}$. Wir wählen aus diesen fünf Möglichkeiten die drei einfachsten und dabei charakteristisch verschiedensten Fälle $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell) \in \{(\epsilon, 0), (0, \epsilon), (\epsilon, \epsilon)\}$, in Analogie zu den drei Spezialfällen in den Abschnitten 6.1.1, 6.1.2 und 6.1.3, aus. Hier können wir die Winkel des Neu-

Textur	θ_{12}^ℓ	θ_{13}^ℓ	θ_{13}^ν	θ_{23}^ν
2a	$\mathcal{O}(\epsilon)$	$\mathcal{O}(\epsilon)$	ϵ^2	$\mathcal{O}(\epsilon^3)$
2b	$\mathcal{O}(\epsilon)$	$\mathcal{O}(\epsilon)$	ϵ	$\mathcal{O}(\epsilon^2)$

Tabelle 6.3: Größen beziehungsweise Größenordnung der kleinen Winkel für Konfiguration 2 unter Berücksichtigung von Textur 2a (obere Zeile) und Textur 2b (untere Zeile).

trinosektors jedoch nicht beliebig wählen, weil sie durch die Textur eingeschränkt sind (siehe Tab. 6.3).

6.3.1 Dominanz von θ_{12}^ℓ

Wir stellen hier die Gleichungen für den Fall $\theta_{12}^\ell = \epsilon$ und $\theta_{13}^\ell = 0$ dar. Mit den Winkeln aus Tab. 6.3 erhalten wir für

$\sin^2 \theta_{12}$ in zweiter Ordnung:

$$(\sin^2 \theta_{12})_{2a,2b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 \epsilon, \quad (6.27)$$

$\sin^2 \theta_{23}$ in zweiter Ordnung:

$$(\sin^2 \theta_{23})_{2a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \epsilon^2, \quad (6.28a)$$

$$(\sin^2 \theta_{23})_{2b} = \frac{1}{2} - \epsilon^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\delta^\nu + \varphi_2) \right) - \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \theta_{23}^\nu, \quad (6.28b)$$

$\sin^2 \theta_{13}$ in dritter Ordnung:

$$(\sin^2 \theta_{13})_{2a} = \frac{1}{2} \epsilon^2 + \sqrt{2} \cos(\varphi_2 + \delta^\nu) \epsilon^3, \quad (6.29a)$$

$$(\sin^2 \theta_{13})_{2b} = \epsilon^2 \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \cos(\varphi_2 + \delta^\nu) \right) \quad (6.29b)$$

und $\sin \delta_{\text{CP}}$ in erster Ordnung:

$$(\sin \delta_{\text{CP}})_{2a} = \sin \varphi_1 - \sqrt{2} \epsilon \cos \varphi_1 \sin(\delta^\nu + \varphi_2), \quad (6.30a)$$

$$(\sin \delta_{\text{CP}})_{2b} = \frac{\sin \varphi_1 - \sqrt{2} \sin(\delta^\nu + \varphi_2 - \varphi_1)}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2} \cos(\delta^\nu + \varphi_2)}}. \quad (6.30b)$$

Hierbei bezeichnet der Index die zugehörige Textur. Im Vergleich zu den Gln. (6.6)-(6.9) tritt hier der kleine Parameter ϵ auf, den wir mit dem Cabibbo-Winkel θ_C

identifizieren, und wir erhalten zusätzliche Terme wegen der nichtverschwindenden Winkel θ_{13}^ν und θ_{23}^ν (für Textur 2b). Dies bedeutet, dass wir durch die Ersetzung $\epsilon \approx \theta_C$ aus Gl. (6.28a) zum Beispiel eine QLC-ähnliche Summenregel, das heißt eine Summenregel vom Typ II, und aus Gl. (6.27) eine Summenregel vom Typ IIIa ablesen können. Allgemein können wir sagen, dass durch die größeren Neutrinowinkel für Textur 2b größere Beiträge zu den Observablen vorliegen und folglich der Wertebereich für Textur 2b größer ist als für Textur 2a. Deutlich wird dies bei der Betrachtung des Winkels $\sin^2 \theta_{13}$, für den im Fall von Textur 2a die Werte innerhalb der experimentellen Grenzen liegen, wohingegen sie im Fall von Textur 2b den erlaubten Bereich verlassen. Wir erhalten daher für Textur 2b eine Bedingung für die unphysikalischen Phasen: $\cos(\varphi_2 + \delta^\nu) \lesssim -1/(2\sqrt{2})$. Die dritte in den Gleichungen auftretende Phase φ_1 können wir mit Hilfe der Schranke für $\sin^2 \theta_{12}$ und Gl. (6.27) durch die Ungleichung $\cos \varphi_1 \gtrsim \sqrt{2}/(10\epsilon)$ für beide Texturen beschränken. Die Erweiterung des Wertebereichs der Observablen für Textur 2b im Vergleich zu denen für Textur 2a können wir auch für die Phase δ_{CP} erkennen. Diese ist im Fall von Textur 2a auf Werte um $\delta_{CP} \approx 0$ beschränkt, im Fall von Textur 2b erreicht sie sogar maximale CP-Verletzung.

6.3.2 Dominanz von θ_{13}^ℓ

Wir stellen hier die Gleichungen für den Fall $\theta_{13}^\ell = \epsilon$ und $\theta_{12}^\ell = 0$ dar. Mit den Winkeln aus Tab. 6.3 erhalten wir für

$\sin^2 \theta_{12}$ in zweiter Ordnung:

$$(\sin^2 \theta_{12})_{2a,2b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\delta^\ell - \varphi_1) \epsilon, \quad (6.31)$$

$\sin^2 \theta_{23}$ in zweiter Ordnung:

$$(\sin^2 \theta_{23})_{2a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \epsilon^2, \quad (6.32a)$$

$$(\sin^2 \theta_{23})_{2b} = \frac{1}{2} + \epsilon^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\delta^\ell - \delta^\nu - \varphi_2) \right) - \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \theta_{23}^\nu, \quad (6.32b)$$

$\sin^2 \theta_{13}$ in dritter Ordnung:

$$(\sin^2 \theta_{13})_{2a} = \frac{1}{2} \epsilon^2 - \sqrt{2} \cos(\varphi_2 - \delta^\ell + \delta^\nu) \epsilon^3, \quad (6.33a)$$

$$(\sin^2 \theta_{13})_{2b} = \epsilon^2 \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} \cos(\varphi_2 - \delta^\ell + \delta^\nu) \right) \quad (6.33b)$$

und $\sin \delta_{\text{CP}}$ in erster Ordnung:

$$(\sin \delta_{\text{CP}})_{2a} = \sin(\delta^\ell - \varphi_1) + \sqrt{2} \epsilon \cos(\delta^\ell - \varphi_1) \sin(\delta^\ell - \delta^\nu - \varphi_2), \quad (6.34a)$$

$$(\sin \delta_{\text{CP}})_{2b} = \frac{\sin(\delta^\ell - \varphi_1) - \sqrt{2} \sin(\delta^\nu + \varphi_2 - \varphi_1)}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2} \cos(\delta^\ell - \delta^\nu - \varphi_2)}}. \quad (6.34b)$$

Wie schon in den Abschnitten 6.1.1 und 6.1.2 erkennen wir die Ähnlichkeit der beiden Spezialfälle „ θ_{12}^ℓ dominiert“ und „ θ_{13}^ℓ dominiert“. Für $\sin^2 \theta_{12}$ und $\sin^2 \theta_{13}$ erhalten wir fast identische Ergebnisse mit der einzigen Ausnahme, dass $\varphi_1 \leftrightarrow \delta^\ell - \varphi_1$ und $\varphi_2 + \delta^\nu \leftrightarrow \pi \pm (\varphi_2 - \delta^\ell + \delta^\nu)$ gesetzt werden muss. Unterscheiden können wir die beiden Fälle durch $\sin^2 \theta_{23}$ und δ_{CP} : Im Fall von $\sin^2 \theta_{23}$ haben wir hier für Textur 2a eine Abweichung in positiver Richtung (im Vergleich zu einer negativen im 1. Fall) und für Textur 2b eine Verlagerung zu kleineren anstatt zu größeren Werten. Betrachten wir δ_{CP} , so erhalten wir für ein dominierendes θ_{13}^ℓ die um π verschobenen Ergebnisse eines dominierenden θ_{12}^ℓ . Für den hier betrachteten Fall der Dominanz von θ_{13}^ℓ sind die Bestimmungsgleichungen der Observablen (Gln. (6.31)-(6.34b)) von den vier unphysikalischen Phasen δ^ℓ , δ^ν , φ_1 und φ_2 abhängig. Durch die Grenze für $\sin^2 \theta_{12}$ können wir die Phasenkombination $\delta^\ell - \varphi_1$ und durch die Schranke für $\sin^2 \theta_{13}$ die Kombination $\varphi_2 + \delta^\nu - \delta^\ell$ einschränken.

6.3.3 Ausgeglichenheit zwischen θ_{12}^ℓ und θ_{13}^ℓ

In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall $\theta_{12}^\ell = \theta_{13}^\ell = \epsilon$. Es ergeben sich mit den Winkelannahmen aus Tab. 6.3 folgende Gleichungen für

$\sin^2 \theta_{12}$ in zweiter Ordnung:

$$(\sin^2 \theta_{12})_{2a,2b} = \frac{1}{2} - \epsilon \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(\delta^\ell - \varphi_1) + \cos \varphi_1), \quad (6.35)$$

$\sin^2 \theta_{23}$ in zweiter Ordnung:

$$(\sin^2 \theta_{23})_{2a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \delta^\ell \epsilon^2, \quad (6.36a)$$

$$(\sin^2 \theta_{23})_{2b} = \frac{1}{2} + \epsilon^2 \left(\frac{1}{2} \cos \delta^\ell - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\delta^\ell - \delta^\nu - \varphi_2) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\delta^\nu + \varphi_2) \right) - \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \theta_{23}^\nu, \quad (6.36b)$$

$\sin^2 \theta_{13}$ in dritter Ordnung:

$$(\sin^2 \theta_{13})_{2a} = \epsilon^2 (1 - \cos \delta^\ell) + \epsilon^3 \left(\sqrt{2} \cos(\varphi_2 + \delta^\nu) - \sqrt{2} \cos(\varphi_2 - \delta^\ell + \delta^\nu) \right), \quad (6.37a)$$

$$(\sin^2 \theta_{13})_{2b} = \epsilon^2 \left(2 - \cos \delta^\ell + \sqrt{2} \cos(\varphi_2 + \delta^\nu) - \sqrt{2} \cos(\varphi_2 - \delta^\ell + \delta^\nu) \right) \quad (6.37b)$$

und $\sin \delta_{\text{CP}}$ in erster Ordnung:

$$(\sin \delta_{\text{CP}})_{2a} = \frac{\sin(\delta^\ell - \varphi_1) + \sin \varphi_1}{\sqrt{2} - 2 \cos \delta^\ell} + \epsilon \frac{\sin(\varphi_1 - \delta^\nu - \varphi_2) - \sin(\delta^\ell - \delta^\nu - \varphi_2 - \varphi_1)}{\sqrt{2} \sqrt{2} - 2 \cos \delta^\ell}, \quad (6.38a)$$

$$(\sin \delta_{\text{CP}})_{2b} = \frac{\sin \varphi_1 - \sqrt{2} \sin(\delta^\nu - \varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\delta^\ell - \varphi_1)}{\sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2} \cos(\delta^\nu + \varphi_2) - \cos \delta^\ell - \sqrt{2} \cos(\delta^\ell - \delta^\nu - \varphi_2)}}. \quad (6.38b)$$

Da sowohl θ_{12}^ℓ als auch θ_{13}^ℓ groß sind, erhalten wir mehr Terme in unseren Gleichungen und damit auch größere Beiträge, die wiederum zu einem größeren Wertebereich führen. Betrachten wir zum Beispiel $\sin^2 \theta_{12}$, so erkennen wir, dass durch die beiden Terme erster Ordnung nun auch Werte erreicht werden, die in den anderen beiden Fällen außerhalb des Wertebereichs lagen. Ferner können wir mit diesen Winkelannahmen ein verschwindendes $\sin^2 \theta_{13}$ für beide Texturen erzeugen. Weiterhin decken wir für δ_{CP} den gesamten Bereich von 0 bis 2π ab. Für die unphysikalischen Phasen erhalten wir wie in den vorangegangenen beiden Abschnitten Beschränkungen aus den Grenzen für $\sin^2 \theta_{12}$ und $\sin^2 \theta_{13}$.

Wir haben festgestellt, dass durch die Forderung der Texturen und die Beschränkung der Werte der kleinen Winkel auf ϵ , ϵ^2 und 0 hauptsächlich der Wertebereich für $\sin^2 \theta_{23}$ eingeschränkt werden konnte, da die Hauptabweichung vom Bestfit-Wert

#	Textur 2a	Textur 2b
1	$\varphi_1 = 0$	$\varphi_1 = 0$
2	$2(\alpha_2 - \varphi_2) = \Phi$	$2(\alpha_2 - \varphi_2) = \Phi$
3	$2\Phi = -\delta^\nu - \varphi_2$	$\Phi = -\delta^\nu - \varphi_2$
4	$\theta_{13}^\nu = \epsilon^2$	$\theta_{13}^\nu = \epsilon$
5	$\theta_{23}^\nu = \mathcal{O}(\epsilon^3)$	$\theta_{23}^\nu = \epsilon^2$ (für alle Φ) oder $\theta_{23}^\nu = \mathcal{O}(\epsilon^3)$ (für $\Phi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$)

Tabelle 6.4: Aus den Texturen in Tab. 6.2 erhaltene Bedingungen für Konfigurationen 2. In der ersten Spalte steht die Nummer der Bedingung, in den anderen die aus beiden Texturen erhaltenen Bedingungen. Für Textur 2b erhalten wir eine nichttriviale Funktionsabhängigkeit $\varphi_2(\Phi)$, die in Anhang A explizit ausgeschrieben ist und grob durch $\varphi_2 \simeq -2\Phi$ genähert werden kann.

durch einen zu θ_{23}^ν proportionalen Term gegeben ist und θ_{23}^ν durch die Texturen auf $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ bzw. $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ beschränkt ist. Aus den anderen beiden Mischungswinkeln erhalten wir Bedingungen für die unphysikalischen Phasen, die nur noch von physikalischen Parametern abhängen, weil wir ϵ mit θ_C identifizieren.

6.4 Annahme spezieller komplexer Neutrino-Massentexturen

Wir nehmen nun an, dass die Texturen in Tab. 6.2 komplex sind und bestimmen mit ihnen die in Tab. 6.4 dargestellten Bedingungen. Diese setzen wir in die Gln. (6.2)-(6.4) der Observablen ein. Wie schon bei der Betrachtung der reellen Texturen beschränken wir uns auf die Fälle $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell) \in \{(\epsilon, 0), (0, \epsilon), (\epsilon, \epsilon)\}$, da die beiden anderen $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell) \in \{(\epsilon, \epsilon^2), (\epsilon^2, \epsilon)\}$ nur zu kleinen Abweichungen führen.

Wir bestimmen im Folgenden die Observablen in Abhängigkeit der beiden Phasen Φ und δ^ℓ . Durch die Grenzen der Observablen $\sin^2 \theta_{13}$ und $\sin^2 \theta_{12}$ aus Tab. 4.1 werden die Phasen Φ und δ^ℓ eingeschränkt. Die erlaubten Regionen in der Φ - δ^ℓ -Ebene stellen wir in Abb. 6.1 für Textur 2a in der linken Spalte und für Textur 2b in der rechten Spalte dar. Da diese Regionen von der Wahl der kleinen Winkel $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell)$ abhängen, sind in den Zeilen die drei Kombinationen $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell) \in \{(\epsilon, 0), (0, \epsilon), (\epsilon, \epsilon)\}$ dargestellt. Wir deuten zusätzlich die erlaubten Regionen für $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell) \in \{(\epsilon, \epsilon^2), (\epsilon^2, \epsilon)\}$ durch die gestrichelten Linien in den oberen beiden Zeilen an und erkennen, dass die Abweichungen zu den Hauptfällen gering sind.

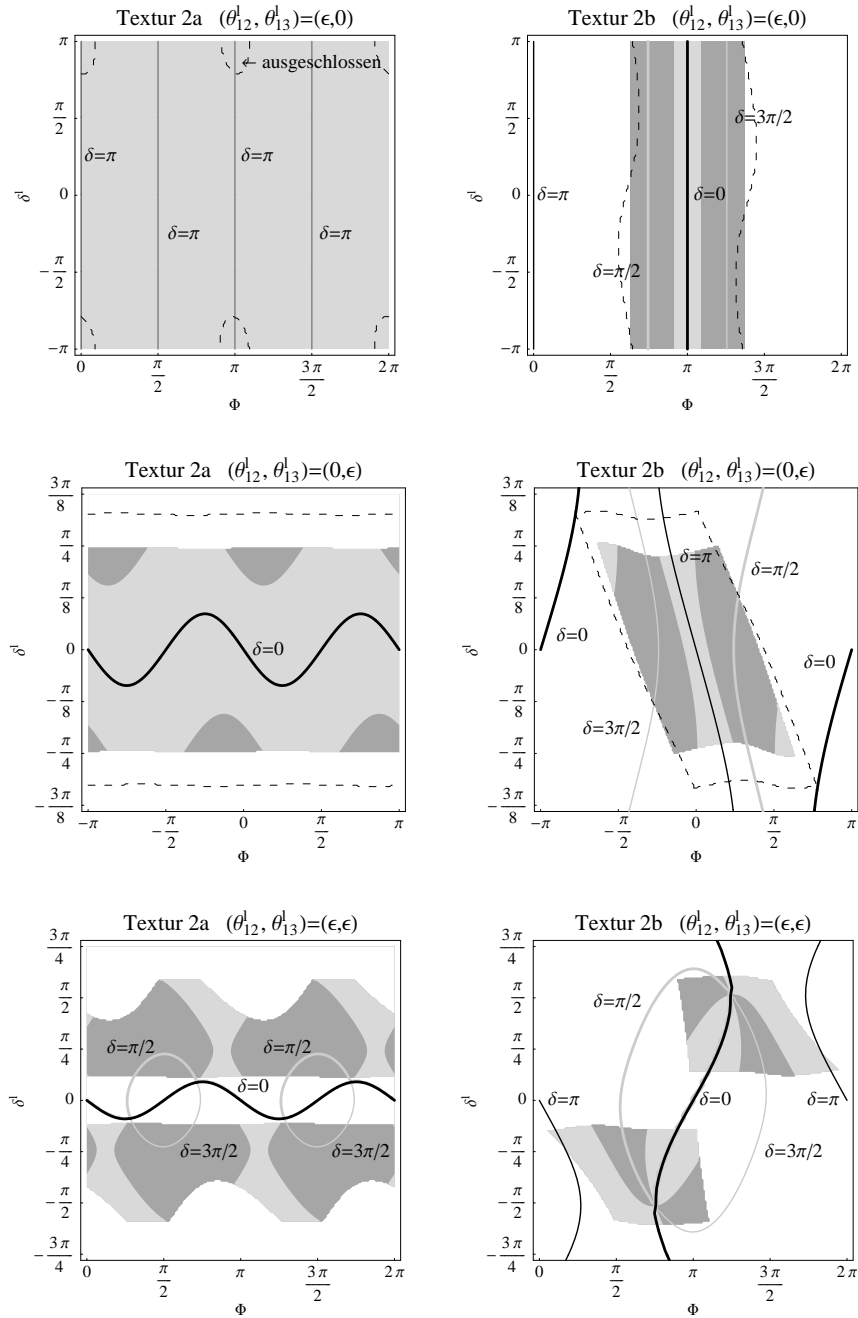


Abbildung 6.1: Aus [75]. Erlaubte Regionen (schattiert) in der Φ - δ_ℓ -Ebene für Textur 2a (linke Spalte) und Textur 2b (rechte Spalte) auf 3σ -Vertrauensniveau. Die jeweiligen Zeilen entsprechen den in den Bildüberschriften gekennzeichneten, unterschiedlichen Spezialfällen. In den ersten beiden Zeilen werden zusätzlich die Regionen für $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell) = (\epsilon, \epsilon^2)$ bzw. (ϵ^2, ϵ) durch gestrichelte Linien angedeutet. Die durchgezogenen Linien in den Graphen stehen für $\delta_{CP} = 0$ (dick schwarz), $\delta_{CP} = \pi/2$ (dick grau), $\delta_{CP} = \pi$ (dünn schwarz) und $\delta_{CP} = 3\pi/2$ (dünn grau). Die dunkel/hell schattierten Bereiche bezeichnen Regionen, die näher an CP-Verletzung/Erhaltung liegen.

6.4.1 Dominanz von θ_{12}^ℓ

In diesem Spezialfall wählen wir $\theta_{13}^\ell = 0$. Daraus resultiert, dass die Observablen unabhängig von δ^ℓ sind und nur noch von dem Modellparameter Φ abhängen. Wir erhalten für $\sin^2 \theta_{13}$ in dritter Ordnung (in ϵ) die Bestimmungsgleichungen und die zugehörigen Summenregeln vom Typ IIIb :

$$(\sin^2 \theta_{13})_{2a} = \frac{1}{2} \epsilon^2 + \sqrt{2} \cos(2\Phi) \epsilon^3, \quad (6.39a)$$

$$\theta_{13}^2 \simeq \frac{1}{2} \theta_C^2 + \sqrt{2} \cos(2\Phi) \theta_C^3,$$

$$(\sin^2 \theta_{13})_{2b} = \epsilon^2 \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \cos \Phi \right), \quad (6.39b)$$

$$\theta_{13}^2 \simeq \theta_C^2 \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \cos \Phi \right).$$

Der Term dritter Ordnung rührt von der Kombination $\theta_{12}^\ell \theta_{13}^{\ell'}$ her und wird nicht durch das Setzen eines kleinen Winkels als ϵ^3 erzeugt. Aus Gl. (6.39a) ergibt sich für $\epsilon = 0.2$ der Wertebereich $\sin^2 \theta_{13} \in [0.01, 0.03]$. Wir bleiben demnach innerhalb der experimentellen Grenzen und erhalten keinerlei Beschränkung für Φ . Folglich ist in Abb. 6.1 links oben der gesamte Bereich der Φ - δ^ℓ -Ebene erlaubt. Dies ist für Textur 2b nicht der Fall. Durch die obere Schranke für $\sin^2 \theta_{13}$ in Tab. 4.1 gilt die Bedingung $\cos \Phi \lesssim -1/(2\sqrt{2})$, die in Abb. 6.1 oben rechts gut erkennbar ist. Der Wertebereich für $\sin^2 \theta_{13}$ ergibt sich zu $[0.003, 0.04]$, dessen untere Grenze in den nächsten zehn Jahren messbar sein wird.

Aus Gl. (6.27) erhalten wir mit $\theta_{13}^\ell = 0$ und $\theta_{12}^\ell = \epsilon$ in zweiter Ordnung folgende Summenregel vom Typ II:

$$\theta_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_C \simeq \frac{\pi}{4}, \quad (6.40)$$

die den Mischungswinkel θ_{12} aus dem Leptonsektor mit dem Cabibbo-Winkel θ_C aus dem Quarksektor verbindet. Setzen wir $\theta_C \approx 0.2$, erhalten wir $\sin^2 \theta_{12} \approx 0.36$ oberhalb des Bestfit-Wertes, aber innerhalb der 3σ -Grenzen.

Der dritte Mischungswinkel $\sin^2 \theta_{23}$ ergibt sich zu:

$$(\sin^2 \theta_{23})_{2a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (6.41a)$$

$$(\sin^2 \theta_{23})_{2b} = \frac{1}{2} - \cos(\varphi_2(\Phi)) \epsilon^2 - \frac{1}{4} \epsilon^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \Phi \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (6.41b)$$

Wir können aus Gl. (6.41a) eine Summenregel vom Typ II und aus Gl. (6.41b) eine

vom Typ IIIb berechnen:

$$\theta_{23} + \frac{1}{4} \theta_C^2 \simeq \frac{\pi}{4}, \quad (6.42a)$$

$$\theta_{23} + \left(\frac{1}{4} + \cos(\varphi_2(\Phi)) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \Phi \right) \theta_C^2 \simeq \frac{\pi}{4}. \quad (6.42b)$$

Für Textur 2a erhalten wir mit $\epsilon = 0.2$ den Wert $\sin^2 \theta_{23} = 0.49$, der gering vom Wert der maximalen Mischung abweicht. Der Wertebereich für $\sin^2 \theta_{23}$, mit den Beschränkungen aus Textur 2b, ergibt sich mit $\cos \Phi \lesssim 1/(2\sqrt{2})$ zu: $\sin^2 \theta_{23} \in [0.48, 0.51]$. Da für diese Wahl der kleinen Winkel die Werte $\pi/2$ und $3\pi/2$ für Φ verboten sind, können wir für Textur 2b setzen: $\theta_{23}^\nu = \epsilon^2$ und $\varphi_2 = f(\Phi)$ (siehe Anhang A). Damit ist $\sin^2 \theta_{23}$ nur eine Funktion von ϵ und Φ .

Durch die unteren Grenzen für $\sin^2 \theta_{13}$ ist δ_{CP} für die Texturen 2a und 2b wohldefiniert. Es ergeben sich für $\sin \delta_{\text{CP}}$ in erster Ordnung:

$$(\sin \delta_{\text{CP}})_{2a} = \sqrt{2} \epsilon \sin 2\Phi, \quad (6.43a)$$

$$(\sin \delta_{\text{CP}})_{2b} = \frac{\sqrt{2} \sin \Phi}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2} \cos \Phi}}, \quad (6.43b)$$

die mit der Ersetzung $\epsilon \simeq \theta_C$ zu Summenregeln vom Typ IIIb führen. Für Textur 2a können wir aus Gl. (6.43a) ablesen, dass $\sin \delta_{\text{CP}}$ nach oben hin durch $\sin \delta_{\text{CP}} \lesssim \sqrt{2} \theta_C \simeq 0.3$ limitiert ist. Mit $\cos \delta_{\text{CP}} \simeq -1$ erhalten wir die Summenregel vom Typ IIIb: $\delta_{\text{CP}} \simeq \pi - \sqrt{2} \theta_C \sin 2\Phi$. In Abb. 6.1 stellen die Tönungen die erlaubten Regionen und die durchgezogenen Linien die notierten Werte für δ_{CP} dar. Die Tönung gibt dabei zusätzlich an, ob $|\sin \delta_{\text{CP}}| \lesssim 1/\sqrt{2}$ (helle Region, näher an CP-Erhaltung) oder $|\sin \delta_{\text{CP}}| \gtrsim 1/\sqrt{2}$ (dunkle Region, näher an maximaler CP-Verletzung) gilt. Unser Ergebnis für Textur 2a können wir im Graph oben links überprüfen und erhalten eine Übereinstimmung. Im Fall von Textur 2b erkennen wir anhand von Gl. (6.43b) eine kompliziertere Φ -Abhängigkeit. Die Bedingung für maximale CP-Verletzung ($\sin \delta_{\text{CP}} = 1$) ist erfüllt für $\Phi = 3\pi/4$ und $\Phi = 5\pi/4$, die für CP-Erhaltung ($\sin \delta_{\text{CP}} = 0$) für $\Phi = 0$ und $\Phi = \pi$. Die Lösung $\Phi = 0$ ist jedoch mit der Bedingung $\cos \Phi \lesssim -1/(2\sqrt{2})$ nicht vereinbar. Mit $\cos \delta_{\text{CP}}$ positiv für $\Phi \in [3\pi/4, 5\pi/4]$ und negativ außerhalb, erhalten wir als Wertebereich $\delta_{\text{CP}} \in [0, \arccos(-1/(2\sqrt{2}))] \approx [0, 1.9]$ und $\delta_{\text{CP}} \in [2\pi - \arccos(-1/(2\sqrt{2})), 2\pi] \approx [4.4, 2\pi]$. Diese Resultate lassen sich mit Abb. 6.1 gut verifizieren.

Obwohl wir für die Texturen 2a und 2b Einträge von zweiter Ordnung in ϵ haben, erhalten wir auch hier keine Bedingungen für die Phase α_1 und folglich ϕ_1 . In diesem

Fall liegt es an der Wahl der maximalen kleinen Winkel, so dass die Beiträge aus U_ν in Gl. (5.19) für die zu $\epsilon^2 e^{2i\alpha_1}$ proportionalen Terme immer von derselben Ordnung sind wie die für $\epsilon e^{2i\alpha_2}$. Damit sind die führenden Terme nie proportional zu $e^{2i\alpha_1}$.

Die zweite Majorana-Phase ist für beide Texturen in erster Ordnung durch folgende Summenregel vom Typ IIIb gegeben:

$$(2\phi_2)_{2a,2b} = \Phi. \quad (6.44)$$

Daher erhalten wir mit $\cos \Phi \lesssim -1/(2\sqrt{2})$ den Wertebereich

$$2\phi_2 \in [\arccos(-1/(2\sqrt{2})), 2\pi - \arccos(-1/(2\sqrt{2}))] \approx [1.9, 4.4]. \quad (6.45)$$

6.4.2 Dominanz von θ_{13}^ℓ

In diesem Spezialfall ist im Vergleich zum vorhergehenden $\theta_{13}^\ell \neq 0$, so dass die Bestimmungsgleichungen der Observablen von Φ und δ^ℓ abhängen. Betrachten wir als Erstes wieder $\sin^2 \theta_{13}$ bis zur dritten Ordnung:

$$(\sin^2 \theta_{13})_{2a} = \frac{1}{2} \epsilon^2 - \sqrt{2} \cos(2\Phi + \delta^\ell) \epsilon^3, \quad (6.46a)$$

$$(\sin^2 \theta_{13})_{2b} = \epsilon^2 \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} \cos(\Phi + \delta^\ell) \right). \quad (6.46b)$$

Wir erkennen, dass wir im Vergleich zu den Gln. (6.39a) und (6.39b) für Gl. (6.46a) die Ersetzung $-\cos(2\Phi + \delta^\ell) \rightarrow \cos 2\Phi$ und für Gl. (6.46b) $-\cos(\Phi + \delta^\ell) \rightarrow \cos \Phi$ durchführen müssen, um dieselben Gleichungen zu erhalten. Unter Berücksichtigung der Ersetzungen können wir also die Diskussion aus Abschnitt 6.4.1 übernehmen. Wir erhalten folglich dieselben Wertebereiche $\sin^2 \theta_{13} \in [0.01, 0.03]$ für Textur 2a und $\sin^2 \theta_{13} \in [0.003, 0.04]$ für Textur 2b. Die Beschränkung, die wir auf Grund der Grenzen in Tab. 4.1 aus Gl. (6.39b) für $\cos \Phi$ erhalten haben, wird im Fall von Gl. (6.46b) zu $\cos(\Phi + \delta^\ell) \gtrsim 1/(2\sqrt{2})$.

Als Nächstes betrachten wir $\sin^2 \theta_{12}$ bis zur zweiten Ordnung. Aus Gl. (6.31) erhalten wir für beide Texturen die Summenregel vom Typ IIIa, in der Observable mit einem unphysikalischen Parameter (hier δ^ℓ) in Verbindung gebracht werden:

$$\theta_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \delta^\ell \theta_C \simeq \frac{\pi}{4}. \quad (6.47)$$

Unter Berücksichtigung der Grenzen für $\sin^2 \theta_{12}$ in Tab. 4.1 erhalten wir eine un-

tere Schranke mit $\cos \delta^\ell \gtrsim 1/\sqrt{2}$. Der maximale Wert von $\sin^2 \theta_{12}$ ist durch die Bedingung aus Tab. 4.1 ($\sin^2 \theta_{12} \lesssim 0.4$) gegeben. Der minimale Wert ergibt sich zu $\sin^2 \theta_{12} \gtrsim 0.36$. In Abb. 6.1 kann man die Einschränkung von δ^ℓ in der zweiten Zeile gut erkennen. Die Ursache für den zusätzlichen, nicht erlaubten Bereich im rechten Graphen ist die Bedingung $\cos(\Phi + \delta^\ell) \gtrsim 1/(2\sqrt{2})$ aus $\sin^2 \theta_{13}$ für Textur 2b.

Der letzte Winkel $\sin^2 \theta_{23}$ ergibt sich zu:

$$(\sin^2 \theta_{23})_{2a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (6.48a)$$

$$(\sin^2 \theta_{23})_{2b} = \frac{1}{2} - \cos \varphi_2 \theta_{23}^\nu + \frac{1}{4} \epsilon^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\delta^\ell + \Phi) \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (6.48b)$$

Wir haben θ_{23}^ν im Gegensatz zu Gl. (6.41b) in Gl. (6.48b) stehen lassen, da die Werte $\Phi = \pm\pi/2$ für diesen Spezialfall erlaubt sind (siehe Abb. 6.1 Mitte rechts) und damit θ_{23}^ν sowohl ϵ^2 als auch 0 sein kann. Zu beachten ist, dass φ_2 im Fall eines nicht verschwindenden θ_{23}^ν eine Funktion von Φ und somit kein freier Parameter ist. Aus Gl. (6.48a) erhalten wir für Textur 2a die Summenregel vom Typ II:

$$\theta_{23} - \frac{1}{4} \theta_C^2 \simeq \frac{\pi}{4}, \quad (6.49)$$

aus der man sehr schön erkennen kann, dass θ_{23} hier im Vergleich zum Abschnitt 6.4.1 im zweiten Oktanten liegt. Für Textur 2a erhalten wir $\sin^2 \theta_{23} \simeq 0.51$ als möglichen Wert und für Textur 2b gilt: $\sin^2 \theta_{23} \in [0.44, 0.54]$.

Zur Bestimmung von δ_{CP} berechnen wir $\sin \delta_{\text{CP}}$ bis zur ersten Ordnung:

$$(\sin \delta_{\text{CP}})_{2a} = \sin \delta^\ell + \sqrt{2} \epsilon \cos \delta^\ell \sin(2\Phi + \delta^\ell), \quad (6.50a)$$

$$(\sin \delta_{\text{CP}})_{2b} = \frac{2\sqrt{2} \sin \Phi + 2 \sin \delta^\ell}{2\sqrt{3 - 2\sqrt{2} \cos(\Phi + \delta^\ell)}}. \quad (6.50b)$$

Die Analyse der beiden Gleichungen, unter Berücksichtigung der Bedingungen für Φ und δ^ℓ , führen wir mit Hilfe der mittleren Graphen in Abb. 6.1 durch. Wir erkennen, dass δ_{CP} im Fall von Textur 2a zu Werten neigt, die näher an CP-Erhaltung liegen. Dies ist eine Folge des Terms nullter Ordnung in Gl. (6.50a), der durch die Bedingung $\cos \delta^\ell \gtrsim 1/\sqrt{2}$ mit $|\sin \delta^\ell| \lesssim 1/\sqrt{2}$ beschränkt ist. Der Wertebereich für Textur 2a ergibt sich zu $\delta_{\text{CP}} \in [-1.1, 1.1]$. Für Textur 2b können wir im Graphen erkennen, dass je nach Wahl von Φ sowohl der CP-erhaltende Fall als auch der CP-verletzende Fall möglich ist und für δ_{CP} gilt: $\delta_{\text{CP}} \in [0.4, 2\pi - 0.4]$.

Als Letztes betrachten wir noch die zweite Majorana-Phase für Textur 2a und 2b:

$$(2\phi_2)_{2a,2b} = \Phi + \sqrt{2} \epsilon \sin \delta^\ell + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (6.51)$$

Durch die Bedingung $|\sin \delta^\ell| \lesssim 1/\sqrt{2}$ ist auch der Beitrag erster Ordnung beschränkt. Wir können in nullter Ordnung die gleiche Summenregel vom Typ IIIb erhalten, wie im vorangehenden Spezialfall aus Gl. (6.44): $2\phi_2 = \Phi$. Der Wertebereich ist für Textur 2a nicht eingeschränkt und für Textur 2b durch die Analyse der Gln. (6.46b) und (6.47) auf $2\phi_2 \in [-2.0, 2.0]$ beschränkt.

6.4.3 Ausgeglichenheit zwischen θ_{12}^ℓ und θ_{13}^ℓ

In diesem Abschnitt ist für beide kleine Winkel aus dem geladenen Leptonsektor $\theta_{12}^\ell = \theta_{13}^\ell = \epsilon$ gewählt. Dadurch erhalten wir mehr Terme als in den beiden vorherigen Kapiteln, so dass die Gleichungen komplizierter werden.

Der erste Winkel $\sin^2 \theta_{13}$ ist für Textur 2a bzw. 2b in dritter Ordnung folgendermaßen gegeben:

$$(\sin^2 \theta_{13})_{2a} = \epsilon^2 (1 - \cos \delta^\ell) + \epsilon^3 \left(\sqrt{2} \cos \Phi - \sqrt{2} \cos (\Phi + \delta^\ell) \right) \quad (6.52a)$$

$$(\sin^2 \theta_{13})_{2b} = \epsilon^2 \left(2 + \sqrt{2} \cos \Phi - \cos \delta^\ell - \sqrt{2} \cos (\Phi + \delta^\ell) \right). \quad (6.52b)$$

Wir stellen in den Gln. (6.52a)-(6.52b) fest, dass bei beiden Texturen der für $\sin^2 \theta_{13}$ erlaubte Bereich verlassen werden kann. Es ergeben sich also verbotene Regionen in der δ^ℓ - Φ -Ebene, die im Fall von Textur 2b größer sind als im Fall von Textur 2a. Betrachten wir die unteren Graphen in Abb. 6.1, stellen wir fest, dass sich dort Kurven verschiedener δ_{CP} -Werte schneiden. Diese Schnittpunkte sind physikalisch nicht sinnvoll und liegen bei den Werten, bei denen $\sin^2 \theta_{13} = 0$ gilt und damit δ_{CP} nicht definiert ist. Weitere Einschränkungen erhalten wir, wie im vorhergehenden Spezialfall, durch den zweiten Winkel $\sin^2 \theta_{12}$. Wir erhalten aus Gl. (6.35) die Summenregel vom Typ IIIa in zweiter Ordnung:

$$\theta_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_C (1 + \cos \delta^\ell) \simeq \frac{\pi}{4}. \quad (6.53)$$

In diesem Fall ist es möglich den erlaubten Bereich durch die Beiträge von θ_{12}^ℓ und θ_{13}^ℓ nicht nur nach oben, sondern auch nach unten zu verlassen, so dass für $\cos \delta^\ell$ gilt: $-0.3 \lesssim \cos \delta^\ell \lesssim 0.8$. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 6.1 deutlich zu erkennen. Die dort sichtbare Einschränkung bezüglich Φ resultiert aus der Grenze von $\sin^2 \theta_{13}$.

Der dritte Winkel $\sin^2 \theta_{23}$ wird zu:

$$(\sin^2 \theta_{23})_{2a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \cos \delta^\ell + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (6.54a)$$

$$(\sin^2 \theta_{23})_{2b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \varphi_2 \theta_{23}^\nu + \frac{1}{2} \epsilon^2 \left(\cos \delta^\ell - \sqrt{2} \cos \Phi - \sqrt{2} \cos (\Phi + \delta^\ell) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (6.54b)$$

Die Diskussion bezüglich θ_{23}^ν unter Gl. (6.48b) gilt hier analog. Für Gl. (6.54a) erhalten wir erneut eine Summenregel, hier vom Typ IIIa:

$$\theta_{23} - \frac{1}{2} \theta_C^2 \cos \delta^\ell \simeq \frac{\pi}{4}. \quad (6.55)$$

Es ist interessant zu sehen, dass wir mit $\theta_{12}^\ell = \theta_{13}^\ell = \epsilon$ keine Vorhersage des Oktanten von θ_{23} machen können, da dieser vom Vorzeichen des $\cos \delta^\ell$ abhängt. Die Wertebereiche für $\sin^2 \theta_{23}$ ergeben sich zu $\sin^2 \theta_{23} \in [0.49, 0.52]$ für Textur 2a und $\sin^2 \theta_{23} \in [0.43, 0.55]$ für Textur 2b.

Die CP-Phase δ_{CP} ist in erster Ordnung durch folgende Formeln gegeben:

$$(\sin \delta_{\text{CP}})_{2a} = \frac{\sin \delta^\ell}{\sqrt{2 - 2 \cos \delta^\ell}} + \epsilon \frac{\sin 2\Phi - \sin (2\Phi + \delta^\ell)}{\sqrt{2} \sqrt{2 - 2 \cos \delta^\ell}}, \quad (6.56a)$$

$$(\sin \delta_{\text{CP}})_{2b} = \frac{\sqrt{2} \sin \Phi + \sin \delta^\ell}{\sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2} \cos \Phi - \cos \delta^\ell - \sqrt{2} \cos (\Phi + \delta^\ell)}}. \quad (6.56b)$$

Diese nicht trivialen Abhängigkeiten stellen wir in Abb. 6.1 unten links für Textur 2a und rechts für Textur 2b dar. Auf der linken Seite erkennen wir, dass CP-Erhaltung, im Gegensatz zu maximaler CP-Verletzung, durch die Grenzen für $\sin^2 \theta_{12}$ ausgeschlossen ist. Im rechten Graphen ist zu sehen, dass wir je nach Wahl des Modellparameters Φ jeden möglichen Wert für δ_{CP} erhalten können.

Wie für die beiden vorangehenden Spezialfälle ist die zweite Majorana-Phase in nullter Ordnung durch den Modellparameter gegeben: $2\phi_2 \approx \Phi$. Damit ist sie für Textur 2b auf den Bereich $2\phi_2 \in [0.3, 6.0]$ beschränkt.

Die Ergebnisse für Konfiguration 2 in Kombination mit Textur 2a und 2b haben wir in Tab. 6.5 noch einmal für die drei Spezialfälle als Summenregeln bzw. Wertebereiche zusammengefasst. Diese Wertebereiche gelten, wenn man alle erlaubten Φ - und δ^ℓ -Werte berücksichtigt. Betrachtet man nun eine bestimmte Textur, so ist Φ vorgegeben und der zugehörige Wertebereich bei weiterhin freiem δ^ℓ ist kleiner als in der Tabelle angegeben, kann aber mit Hilfe der Regionen in Abb. 6.1 und

Textur 2a		Textur 2b	
Obs.	Summenregel/Bereich	(Typ)	Summenregel/Bereich (Typ)
Spezialfall $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell) = (\epsilon, 0)$			
$\sin^2 \theta_{13}$	$\theta_{13}^2 \simeq \frac{1}{2} \theta_C^2 + \sqrt{2} \cos(2\Phi) \theta_C^3$ $\sin^2 \theta_{13} \in [0.01, 0.03]$	(IIIb)	$\theta_{13}^2 \simeq \theta_C^2 (\frac{3}{2} + \sqrt{2} \cos \Phi)$ $\sin^2 \theta_{13} \in [0.003, 0.04]$ (IIIb)
$\sin^2 \theta_{12}$	$\theta_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_C \simeq \frac{\pi}{4}$ $\sin^2 \theta_{12} \simeq 0.36$	(II)	$\theta_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_C \simeq \frac{\pi}{4}$ $\sin^2 \theta_{12} \simeq 0.36$ (II)
$\sin^2 \theta_{23}$	$\theta_{23} + \frac{1}{4} \theta_C^2 \simeq \frac{\pi}{4}$ $\sin^2 \theta_{23} \simeq 0.49$	(II)	- $\sin^2 \theta_{23} \in [0.48, 0.51]$
δ_{CP}	$\sin \delta_{\text{CP}} \simeq \sqrt{2} \theta_C \sin 2\Phi$ $\delta_{\text{CP}} \in [2.9, 3.4]$	(IIIb)	$\sin \delta_{\text{CP}} \simeq \frac{\sqrt{2} \sin \Phi}{\sqrt{3+2\sqrt{2} \cos \Phi}}$ $\delta_{\text{CP}} \in [0, 1.9], [4.4, 2\pi[$ (IIIb)
$2\phi_2$	$2\phi_2 \simeq \Phi$ -	(IIIb)	$2\phi_2 \simeq \Phi$ $2\phi_2 \in [1.9, 4.4]$ (IIIb)
Spezialfall $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell) = (0, \epsilon)$			
$\sin^2 \theta_{13}$	$\sin^2 \theta_{13} \in [0.01, 0.03]$		$\sin^2 \theta_{13} \in [0.003, 0.04]$
$\sin^2 \theta_{12}$	$\theta_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \delta^\ell \theta_C \simeq \frac{\pi}{4}$ $\sin^2 \theta_{12} \in [0.36, 0.4]$	(IIIa)	$\theta_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \delta^\ell \theta_C \simeq \frac{\pi}{4}$ $\sin^2 \theta_{12} \in [0.36, 0.4]$ (IIIa)
$\sin^2 \theta_{23}$	$\theta_{23} - \frac{1}{4} \theta_C^2 \simeq \frac{\pi}{4}$ $\sin^2 \theta_{23} \simeq 0.51$	(II)	- $\sin^2 \theta_{23} \in [0.44, 0.54]$
δ_{CP}	$\delta_{\text{CP}} \in [-1.1, 1.1]$		$\delta_{\text{CP}} \in [0.4, 2\pi - 0.4]$
$2\phi_2$	$2\phi_2 \simeq \Phi$ -	(IIIb)	$2\phi_2 \simeq \Phi$ $2\phi_2 \in [-2.0, 2.0]$ (IIIb)
Spezialfall $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell) = (\epsilon, \epsilon)$			
$\sin^2 \theta_{12}$	$\theta_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_C (1 + \cos \delta^\ell) \simeq \frac{\pi}{4}$	(IIIa)	$\theta_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_C (1 + \cos \delta^\ell) \simeq \frac{\pi}{4}$ (IIIa)
$\sin^2 \theta_{23}$	$\theta_{23} - \frac{1}{2} \theta_C^2 \cos \delta^\ell \simeq \frac{\pi}{4}$ $\sin^2 \theta_{23} \in [0.49, 0.52]$	(IIIa)	- $\sin^2 \theta_{23} \in [0.43, 0.55]$
δ_{CP}	$\delta_{\text{CP}} \in [0.9, 2.7], [3.6, 5.4]$		-
$2\phi_2$	$2\phi_2 \simeq \Phi$ -	(IIIb)	$2\phi_2 \simeq \Phi$ $2\phi_2 \in [0.3, 6.0]$ (IIIb)

Tabelle 6.5: Summenregeln vom Typ II und III und ungefähre Wertebereiche der Observablen mit $\epsilon = 0.2 \simeq \theta_C$. Die Phasen Φ und δ^ℓ variieren innerhalb der erlaubten Bereiche für die betrachteten Spezialfälle für Textur 2a (links) und Textur 2b (rechts). Die erlaubten Bereiche der beiden Phasen können aus Abb. 6.1 abgelesen werden. Wenn keine Summenregel bzw. kein Wertebereich angegeben ist, haben wir keine gefunden bzw. haben wir keine engeren Grenzen als in Tab. 4.1 erhalten [75].

den Bestimmungsformeln der Observablen in den Abschnitten 6.4.1, 6.4.2 und 6.4.3 leicht berechnet werden.

Wir erkennen, dass im Vergleich zu den reellen Texturen, hier die Wertebereiche der Observablen stärker eingeschränkt sind. Weiterhin sind die physikalischen Phasen im Fall komplexer Texturen durch δ^ℓ und Φ , die Phase der Textur, charakterisiert. Dass δ^ℓ auftritt liegt daran, dass wir für die Massenmatrizen der geladenen Leptonen keine Texturen angenommen haben. Die Auswirkungen der Texturen können wir gut in den Verteilungen der numerischen Ergebnisse in den Abbildungen B.7 und B.8 vergleichen.

7 Zusammenfassung

Aus den Messungen der Neutrinooszillationen wissen wir, dass die Mischungen im Leptonsektor groß sind. Wir können jedoch keine Aussage darüber machen, ob deren Ursprung im Sektor der geladenen Leptonen oder der Neutrinos liegt. Daher ist der allgemeine Fall, dass in beiden große Mischungen auftreten. Eine weitere Motivation für verschränkte große Mischungen erhalten wir aus der Betrachtung der Massenmatrizen der Neutrinos und geladenen Leptonen. So sind diese im Allgemeinen nicht diagonal, wenn man zum Beispiel den Froggatt-Nielsen-Mechanismus zu Grunde legt. Rotiert man einen der beiden Sektoren diagonal, um große Mischungen in nur einem zu erhalten, verändert man nicht die messbare Physik, verliert aber die Informationen über das Modell. Eine weitere Eigenschaft der Massenmatrizen ist, dass sie im Allgemeinen komplex sind, und damit zu CP-Verletzung führen, die eine der Voraussetzungen für Baryogenese ist.

Wir betrachten motiviert durch den FN-Mechanismus den Fall, dass sowohl U^ℓ als auch U^ν komplex sowie nicht diagonal sind und große Mischungen in beiden auftreten können. Dazu wählen wir die beiden nicht trivialen Konfigurationen

- $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell, \theta_{23}^\ell, \theta_{12}^\nu, \theta_{13}^\nu, \theta_{23}^\nu) = (*, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, *, \frac{\pi}{4}, *)$,
- $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell, \theta_{23}^\ell, \theta_{12}^\nu, \theta_{13}^\nu, \theta_{23}^\nu) = (*, *, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, *, *)$.

Die maximalen Mischungswinkel können wir durch Symmetrien in den Massenmatrizen motivieren, wohingegen die kleinen Winkel, dargestellt durch * und motiviert durch die Quark-Lepton-Komplementarität, von der Ordnung θ_C sind. Mit Hilfe von Invarianten lassen sich daraus Observable berechnen und mit den experimentellen Grenzen vergleichen, so dass wir Einschränkungen für die unphysikalischen Parameter erhalten. Um eine mögliche CP-Verletzung zu berücksichtigen, betrachten wir den vollen komplexen Fall. Wir nehmen nun an, dass auch die Phasen durch eine Symmetrie beeinflusst werden, so dass sie lediglich CP-erhaltende und maximal CP-verletzende Werte annehmen können. Wir unterscheiden somit drei Fälle: CP-erhaltend, maximal CP-verletzend und sowohl CP-erhaltend als auch maximal-verletzend. Als Nächstes stellen wir eine Verbindung zu je zwei reellen Texturen

für die Neutrino-Massenmatrizen, motiviert durch den FN-Mechanismus her. Die Einträge sind durch Potenzen des kleinen Parameters ϵ gegeben, wobei wir Einträge der Ordnung ϵ^3 mit 0 identifizieren. Weiterhin wählen wir die Mischungswinkel aus der Menge $\{\pi/4, \epsilon, \epsilon^2, 0\}$. Um eine Verbindung zum Quarksektor zu erhalten, wählen wir $\epsilon \simeq \theta_C$. Es ist zu beachten, dass durch die Einführung der reellen Texturen nicht zwangsläufig die Massenmatrizen reell sind, da die bei der Textur vernachlässigten Ordnung-1-Koeffizienten komplex sein können. Um die CP-Verletzung durch die Textur steuern zu können führen wir komplexe Texturen ein, deren Einträge von der Form $T_{ij} = \epsilon^{n_{ij}} \exp(in_{ij}\Phi)$ sind. Dadurch können wir die CP-Verletzung, die spontan erzeugt wird und aus dem Neutrinossektor resultiert, durch den Parameter Φ charakterisieren.

Wir haben zunächst die Auswirkungen von nicht verschwindenden Neutrinomassen im Experiment betrachtet und festgestellt, dass Neutrinooszillationen im Fall massiver Neutrinos auftreten. Der danach genauer betrachtete neutrinolose Doppel-Betazerfall hingegen findet nur für massive Majorana-Neutrinos statt. Weiterhin spielen für diesen Prozess die Dirac-Phase und die Majorana-Phasen eine wichtige Rolle, da sie die Form der Interferenz der Beiträge der drei Masseneigenzustände in der effektiven Neutrinomasse $m_{ee} = \left| \sum_{k=1}^3 m_k U_{ek}^2 \right|$ kontrollieren. Bei der Betrachtung des einfachen Betazerfalls wirken sich die Neutrinomassen auf die Verschiebung des Endpunkts aus. Die aus den Experimenten bestimmte effektive Masse ist im Vergleich zu der des neutrinolosen Doppel-Betazerfalls unabhängig von den komplexen Phasen.

Bei der Diskussion der beiden Konfigurationen unter den verschiedenen Annahmen hat sich folgendes ergeben: Die erste Konfiguration, diskutiert in Kapitel 5 und charakterisiert durch drei maximale Mischungswinkel in U^ℓ und U^ν , führt zu großem $\sin^2 \theta_{13}$, extrem kleinem $\sin^2 \theta_{23}$, $\sin^2 \theta_{12}$ nahe dem Bestfit-Wert und kleinem δ_{CP} . Durch den Abgleich mit den experimentellen Grenzen können wir die unphysikalischen Größen stark beschränken. Mit unphysikalisch beschreiben wir alle Parameter, die nicht im Experiment direkt bestimmt werden können. Hier sind es die Winkel und Phasen in den Mischungsmatrizen U^ℓ und U^ν . Es hat sich gezeigt, dass die Wahl einzig CP-verletzender unphysikalischer Phasen zu keinen gültigen Modellen führt, wobei mit gültig gemeint ist, dass sie kompatibel mit den experimentellen Grenzen sind. Durch die Einführung der reellen Textur erhalten wir für Textur 1a keine auf 3σ -Niveau gültigen Kombinationen. Durch die Einführung komplexer Texturen finden wir Teile der Observablen in Abhängigkeit des Modellparameters Φ , wobei die zweite Majorana-Phase für beide Texturen in nullter Ordnung durch Φ gegeben ist.

Es ergibt sich für Konfiguration 2, diskutiert in Kapitel 5 und charakterisiert durch zwei maximale Mischungswinkel in U^ℓ und U^ν , folgendes Bild: $\sin^2 \theta_{13}$ klein, $\sin^2 \theta_{12}$ sehr groß, $\sin^2 \theta_{23}$ nahe dem Bestfit-Wert und die physikalischen Phasen (bei freier Wahl der Phasen in U^ℓ und U^ν) im gesamten Wertebereich $[0, 2\pi]$. Aus den experimentellen Grenzen für $\sin^2 \theta_{12}$ können wir die Bedingung an die unphysikalischen Winkel aus U^ℓ stellen, dass mindestens einer der beiden groß sein muss. Zur analytischen Bestimmung der Dirac-Phase haben wir, auf Grund der Eigenschaft von $\sin^2 \theta_{13}$ in nullter Ordnung verschwindend zu sein, drei Spezialfälle betrachtet: Dominanz von θ_{12}^ℓ , Dominanz von θ_{13}^ℓ und Ausgeglichenheit von θ_{12}^ℓ und θ_{13}^ℓ . Es hat sich herausgestellt, dass durch die Betrachtung des Oktanten von θ_{23} und der Lage von δ_{CP} die ersten beiden der drei Fälle unterschieden werden können. Der dritte Fall, der die Möglichkeit eröffnet tri-bimaximale Mischung und CP-Verletzung zu konstruieren, kann durch $\sin^2 \theta_{13}$ und δ_{CP} identifiziert werden. Die Ergebnisse der Spezialfälle sind in Tab. 6.1 zusammengefasst. Die Annahme bestimmter Phasen und die Einführung der reellen Textur wirken sich lediglich leicht auf je einen Mischungswinkel aus. Durch die Betrachtung der komplexen Texturen können wir die unphysikalischen Phasen auf zwei reduzieren (δ^ℓ aus dem geladenen Leptonsektor und Φ den Modellparameter der Texturen). Durch die Abhängigkeit der Observablen von den beiden Phasen ist es zusätzlich möglich, Regionen in der Φ - δ^ℓ -Ebene auszuschließen (siehe Abb. 6.1) und damit die unphysikalischen Phasen einzuschränken. Unsere Ergebnisse haben wir in Tab. 6.5 zusammengefasst.

Im Rahmen dieser Arbeit erhielten wir verschiedene Summenregeln, deren Eigenschaften wir hier noch einmal gesammelt darstellen wollen:

- Summenregeln vom **Typ I** verbinden leptonische Observable miteinander, z.B. Gl. (6.10) $\theta_{23} + \frac{1}{2} \theta_{13}^2 \simeq \frac{\pi}{4}$,
- Summenregeln vom **Typ II** verbinden leptonische Observable mit Observablen aus dem Quarksektor, z.B. Gl. (6.40) $\theta_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_C \simeq \frac{\pi}{4}$,
- Summenregeln vom **Typ III** verbinden Observable von einem oder beiden Sektoren mit *einem* unphysikalischen oder Modellparameter. Wir unterscheiden die beiden Fälle:
 - IIIa** Verbindung mit einem unphysikalischen Parameter, z.B. Gl. (6.47) $\theta_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \delta^\ell \theta_C \simeq \frac{\pi}{4}$,
 - IIIb** Verbindung mit einem Modellparameter, z.B. Gl. (5.21) $2\phi_2 \simeq \Phi$.

Die Schwerpunkte dieser Arbeit lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Der **neutrinolose Doppel-Betazerfall**, dessen Zerfallsbreite durch die Proportionalität zur effektiven Neutrinomasse m_{ee} stark von den physikalischen Phasen abhängt.
- **Maximale Mischungswinkel sowohl in U^ℓ als auch in U^ν** , die wir durch Modelle basierend auf Flavor-Symmetrien motiviert haben (z.B. FN-ähnliche Modelle).
- **Komplexe Phasen im Leptonsektor** und folglich auch in den Massentexturen, die durch die Möglichkeit CP-verletzende Modelle zu konstruieren motiviert sind.
- Eine **Verbindung zwischen Quark- und Leptonsektor** durch die Darstellung der kleinen Winkel durch $\epsilon \simeq \theta_C$, die durch die Vereinheitlichung von Quarks und Leptonen motiviert werden kann.

Als nächsten Schritt wäre es sinnvoll die Texturen nicht nur für den Neutrino-sektor, sondern auch für den Sektor der geladenen Leptonen einführen. Dadurch würde man für die Winkel und Phasen in U^ℓ Bedingungen erhalten, die im Fall von komplexen Texturen dazu führen, dass die CP-Verletzung ausschließlich durch die Phase der Textur Φ charakterisiert wird. Weiterhin erhält man dort auf Grund der stärkeren Hierarchie Beiträge von beiden VEVs. Die Weiterführung der Idee der Texturen bringt uns dazu die betrachteten Texturen in ein FN-ähnliches Modell einzuarbeiten, sprich den Feldern des Leptonsektors passende R-Ladungen zuzuordnen. Da durch den FN-Mechanismus nicht nur der Leptonsektor, sondern auch der Quarksektor beschrieben werden kann, ist es von Interesse auch die Quarkmassen und -mischungen durch dieselben Parameter (ϵ und Φ) im Rahmen eines gemeinsamen Modells korrekt zu beschreiben.

A Die Funktion $\varphi_2(\Phi)$

Die exakte funktionale Abhängigkeit der Phase φ_2 von Φ bedingt durch den Texturvergleich des 23-Elements für Konfiguration 2 mit Textur 2a stellen wir hier in Gl. (A.1) und in Abb. A.1 dar. Die oberen Vorzeichen in Gl. (A.1) gelten für den Bereich $2\Phi \in [0, \pi]$ und die unteren für $2\Phi \in [\pi, 2\pi]$. Die durchgezogene Linie in Abb. A.1 beschreibt Gl. (A.1) und die gestrichelte die Näherung $\varphi_2 = -2\Phi$.

$$\varphi_2(\Phi) = \mp \arccos \left[\frac{1}{2} \cot 2\Phi \left(\tan 2\Phi - \frac{\tan 2\Phi}{1 + \tan^2 2\Phi} \pm \frac{\sqrt{4 \tan^2 2\Phi + 3 \tan^4 2\Phi}}{1 + \tan^2 2\Phi} \right) \right] \quad (\text{A.1})$$

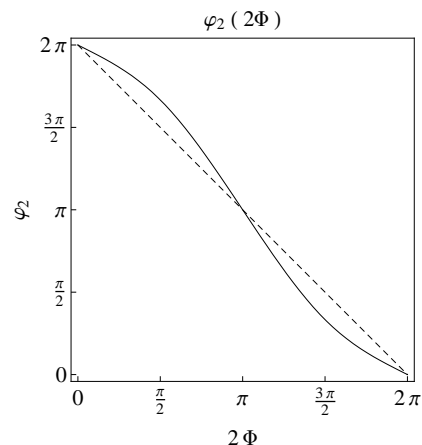


Abbildung A.1: φ_2 als Funktion des Modellparameters Φ . Die exakte Funktionsabhängigkeit ist durchgezogen und die genäherte $\varphi_2 = -2\Phi$ gestrichelt.

B Numerische Ergebnisse

Wir führen zusätzlich für beide Konfigurationen numerische Analysen in Analogie zu den analytischen in den Kapiteln 5 und 6 durch. Dabei verlangen wir für die Gültigkeit einer Kombination von unphysikalischen Parametern folgende Auswahlbedingung der sich ergebenden Mischungswinkel [52]:

$$S \equiv \left(\frac{\sin^2 \theta_{12} - 0.3}{0.3 \times 0.09} \right)^2 + \left(\frac{\sin^2 \theta_{23} - 0.5}{0.5 \times 0.16} \right)^2 \leq 11.83, \quad \sin^2 \theta_{13} \leq 0.04. \quad (\text{B.1})$$

Diese fordert eine Kompatibilität auf 3σ -Niveau mit einem Gauss'schen χ^2 für $\sin^2 \theta_{12}$ und $\sin^2 \theta_{23}$ (2 Freiheitsgrade) und eine harte Grenze für $\sin^2 \theta_{13}$. In den Abbildungen B.1-B.6 stellen wir die sich numerisch ergebenden Verteilungen für die unterschiedlichen Annahmen der unphysikalischen Phasen in der Reihenfolge dar, die in der ersten Spalte genannt wird. Dabei variieren wir die kleinen Winkel gleichmäßig zwischen 0 und 0.2 in 5 Schritten. In den Fällen nicht gleichverteilter Phasen erhalten wir sowohl Ergebnisse ohne als auch mit Berücksichtigung von kleinen Abweichungen der Größe 0.2. Diese stellen wir zum einfachen Vergleich untereinander dar. Im Fall gleichverteilter Phasen variieren wir die Phasen in Schritten von $\pi/8$. Die effektive Masse m_{ee} berechnen wir mit Gl. (4.34a) für die normale Anordnung mit $m_1 = 0.003 \text{ eV}$. Die Wahl der kleinsten Masse ist dadurch motiviert, dass für diesen Wert theoretisch ein verschwindendes m_{ee} erlaubt ist (siehe Abb. 9 in [52]). Diese Analyse entspricht also einem Parameter-Scan der unphysikalischen Größen. Wir können also erkennen, wie die Observablen bei freien Parametern verteilt sind, wo sich Häufungspunkte ergeben und welche Werte nie oder selten erreicht werden.

B.1 Zu Kapitel 5

Wir besprechen hier kurz die Kompatibilität der numerischen Ergebnisse mit den analytischen in Kapitel 5 für Konfiguration 1, die durch folgenden Satz an unphysikalischen Winkeln gegeben ist:

$$(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell, \theta_{23}^\ell, \theta_{12}^\nu, \theta_{13}^\nu, \theta_{23}^\nu) = (*, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, *, \frac{\pi}{4}, *) .$$

B.1.1 Zu Abschnitt 5.1

In Abschnitt 5.1 haben wir zunächst keine Annahmen zu den Phasen gemacht. Die Ergebnisse dafür können wir mit der ersten Zeile in Abb. B.1 für die Winkel und Abb. B.2 für die Phasen vergleichen. Die dann gemachten Phasenannahmen CP-erhaltend und sowohl CP-erhaltend als auch maximal CP-verletzend stellen wir in den darunter liegenden Zeilen jeweils für die exakten Phasenannahmen und unter Berücksichtigung von kleinen Abweichungen dar.

Betrachten wir zunächst die Winkel unter den verschiedenen Annahmen in Abb. B.1. Die oberste Zeile stellt sehr schön die Ergebnisse der analytischen Berechnungen dar. So erkennen wir, dass $\sin^2 \theta_{12}$ sein Maximum (entspricht dem Term nullter Ordnung) etwas unterhalb des Bestfit-Wertes hat und den gesamten Wertebereich ausfüllt und dass $\sin^2 \theta_{23}$ zu kleinen Werten neigt. Bei der Betrachtung von $\sin^2 \theta_{13}$ ist die Tendenz zu großen Werten gut sichtbar.

Vergleichen wir die Verteilungen der Winkel unter den bestimmten Phasenannahmen so bemerken wir, dass sich dadurch nicht viel ändert. Die Verteilungen werden lediglich im Fall CP-erhaltender Phasen wegen den maximalen Beiträgen der Kosinusterme etwas flacher und im Fall CP-verletzender wegen möglicher verschwindender Terme erster Ordnung etwas steiler. Wir stellen außerdem fest, dass die zusätzlichen Abweichungen keine großen Auswirkungen haben.

Wenden wir uns den Phasen in Abb. B.2 zu. Wir sehen in der ersten Zeile sehr schön die Einschränkung für δ_{CP} zu kleinen Werten. Außerdem erkennen wir für die Majorana-Phasen, dass sie gleichverteilt sind. Dies folgt aus der Gleichverteilung und Unbeschränktheit der beiden Phasen α_1 und α_2 . Für m_{ee} ergeben sich Werte im Bereich von 0.0015eV bis 0.007eV. Im Fall von CP-erhaltenden Phasen erhalten wir, wie in Abschnitt 5.1 bestimmt, dass alle physikalischen Phasen Null sind. Für m_{ee} bedeutet das, dass wir konstruktive Interferenz und damit große Werte haben. Dies sehen wir in der zweiten Zeile in Abb. B.2 bestätigt. Erlauben wir jetzt kleine Abweichungen, so weiten sich die Verteilungen und auch m_{ee} kann kleinere Werte annehmen. Im dritten gültigen Fall tritt zusätzlich π als Wert der Majorana-Phasen auf. Ferner tragen hier die Terme erster Ordnung bei, so dass wir Abweichungen von Null und π erkennen. Es zeigt sich, dass sich durch die Einführung der Abweichungen die Verteilungen weiten.

B.1.2 Zu Abschnitt 5.3

In diesem Abschnitt berücksichtigen wir die Bedingungen in Tab. 5.2, die wir aus dem Texturabgleich mit den in Tab. 5.1 dargestellten erhalten haben. Für Textur 1a zeigt sich gut in der oberen Zeile von Abb. B.3, dass $\sin^2 \theta_{23}$ nicht mit den 3σ -Grenzen aus Tab. 4.1 vereinbar ist. Im Fall von Textur 1b erkennen wir die ähnliche Struktur zum allgemeinen Fall (siehe Abb. B.1 und B.2), die lediglich durch die spezielle Wahl der unphysikalischen Winkel aus $\{\epsilon, \epsilon^2, 0\}$ nicht ganz so gleichförmig ist.

B.1.3 Zu Abschnitt 5.4

Die numerischen Ergebnisse für die Annahme der komplexen Texturen in Tab. 5.1 sind in Abb. B.4 dargestellt. Hier ist zu beachten, dass ϕ_2 und nicht wie in Abb. B.2 $2\phi_2$ dargestellt ist. Wir erkennen in den Graphen, dass durch die Einführung der komplexen Textur mit bestimmten Φ die Wertebereiche stark eingeschränkt werden. Für Textur 1a erhalten wir erneut die Inkompatibilität mit den experimentellen 3σ -Grenzen für $\sin^2 \theta_{23}$. Im Fall von Textur 1b können wir schön die Abhängigkeit von Φ anhand der beiden unteren Zeilen erkennen. Wir sehen bestätigt, dass für $\Phi \rightarrow \pi$ alle Mischungswinkel größere Werte annehmen. Außerdem ist die Verschiebung von ϕ_2 passend zu Gl. (5.20).

B.2 Zu Kapitel 6

In diesem Kapitel besprechen wir die numerischen Ergebnisse für Konfiguration 2, die durch folgenden Satz an unphysikalischen Winkeln gegeben ist:

$$(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell, \theta_{23}^\ell, \theta_{12}^\nu, \theta_{13}^\nu, \theta_{23}^\nu) = (*, *, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, *, *) .$$

B.2.1 Zu Abschnitt 6.1

In Abb. B.5 stellen wir die Winkel und in Abb. B.6 die Phasen für Konfiguration 2 allgemein und unter den drei in Abschnitt 6.1 besprochenen Phasenannahmen dar. In der ersten Zeile von Abb. B.5 erkennen wir die allgemeinen Eigenschaften der zweiten Konfiguration: $\sin^2 \theta_{12}$ tendiert zu großen Werten, $\sin^2 \theta_{23}$ ist um 0.5 verteilt und $\sin^2 \theta_{13}$ tendiert zu kleinen Werten, erreicht aber den gesamten Wertebereich.

Wir werden im Folgenden die Graphen für die Abweichungen von den exakten Phasenannahmen nicht extra besprechen, da diese kaum von den exakten abweichen. Für $\sin^2 \theta_{12}$ erkennen wir, dass im Fall von CP-verletzenden Phasen nicht der gesamte Wertebereich erreicht werden kann. Dies liegt an dem Verschwinden des zu θ_{12}^ℓ proportionalen Terms in Gl. (6.3). Für $\sin^2 \theta_{23}$ ergibt sich eine flachere Verteilung im Fall von CP-erhaltenden Phasen auf Grund der maximalen Beiträge der ersten und zweiten Ordnungen. Für $\sin^2 \theta_{13}$ erhalten wir signifikante Unterschiede zwischen CP-erhaltenden und CP-verletzenden Phasen. Dies liegt daran, dass im CP-erhaltenden Fall zum Kosinus proportionale Terme maximal sind und auf Grund der phasenunabhängigen Terme und der kleinen oberen Schranke negativ beitragen, so dass die Verteilung zu kleinen Werten verschoben ist. Im CP-verletzenden Fall hingegen ist θ_{13}^ℓ durch die Bedingung für $\sin^2 \theta_{12}$ groß und trägt dementsprechend stark für $\sin^2 \theta_{13}$ bei, so dass wir eine Verteilung um 0.02 erhalten.

Für die Phasen können wir die Ergebnisse aus Abschnitt 6.1 in Abb. B.6 verifizieren. Für den allgemeinen Fall erhalten wir Werte im gesamten Wertebereich. Wählen wir CP-erhaltende, unphysikalische Phasen, sind die Majorana-Phasen durch 0 und die Dirac-Phase durch 0 und π gegeben. Für den CP-verletzenden Fall erhalten wir in Übereinstimmung mit den analytischen Ergebnissen δ_{CP} um 0 verteilt und die Majorana-Phasen um π . Bei der gemeinsamen Betrachtung von CP-verletzenden und CP-erhaltenden Phasen erhalten wir zusätzlich zu der Summe der Einzelfälle Beiträge für δ_{CP} . Die effektive Masse m_{ee} deckt den Bereich $[0.002\text{eV}, 0.007\text{eV}]$ ab und ist für den CP-erhaltenden Fall auf Werte größer als 0.0045 und für den CP-verletzenden mit $m_{ee} \gtrsim 0.003$ beschränkt.

B.2.2 Zu Abschnitt 6.3

In Abb. B.7 stellen wir die numerischen Ergebnisse unter Berücksichtigung der reellen Texturen in Tab. 6.2 für die einzelnen Spezialfälle dar. Hier erlauben wir jedoch für den kleineren Winkel aus dem geladenen Leptonsektor die Werte 0 und ϵ^2 . Wir erkennen sehr schön den kleineren Wertebereich für $\sin^2 \theta_{23}$ auf Grund der Beschränkung des Winkels θ_{23}^ν . Weiterhin lassen sich die Unterscheidungsmerkmale der beiden Fälle, in denen nur ein Winkel dominiert, gut in den Abweichungen von $\sin^2 \theta_{23}$ von 0.5 und der Lage der Dirac-Phase erkennen. Weiterhin sehen wir in Übereinstimmung mit den analytischen Ergebnissen, dass sich $\sin^2 \theta_{12}$ für die beiden Texturen nicht signifikant unterscheidet. Die größeren Streuungen für Textur 2b im Vergleich zu Textur 2a, die wir in Abb. B.7 erkennen, sind die Folge der größeren Beiträge

wegen des größeren θ'_{13} .

B.2.3 Zu Abschnitt 6.4

In Abb. B.8 stellen wir die numerischen Ergebnisse unter der Annahme der komplexen Texturen in Tab. 6.2 dar. Im Fall von Textur 2a haben wir die Analysen für zwei Werte von Φ durchgeführt, so dass wir die Auswirkungen des Modellparameters erkennen können. Wir sehen, dass sich $\sin^2 \theta_{12}$ und $\sin^2 \theta_{23}$ in Übereinstimmung mit den analytischen Ergebnissen kaum ändern. Signifikante Unterschiede erkennen wir bei $\sin^2 \theta_{13}$, δ_{CP} und ϕ_2 . Dies stimmt mit den Ergebnissen aus Abschnitt 6.4 überein. Für Textur 2b erkennen wir sehr schön, dass bei der Wahl $\Phi = \pi/2$ der Fall der Dominanz von θ_{12}^l verboten ist und dass die Streuung für $\sin^2 \theta_{23}$ weiter ist im Vergleich zu Textur 2a. Durch den Vergleich mit Abb. 6.1 sehen wir, dass die numerischen Ergebnisse für δ_{CP} mit den analytischen kompatibel sind. Außerdem können wir für $\sin^2 \theta_{13}$ die verhältnismäßig großen Werte erkennen.

Abschließend können wir sagen, dass die numerischen Ergebnisse gut mit den analytischen übereinstimmen.

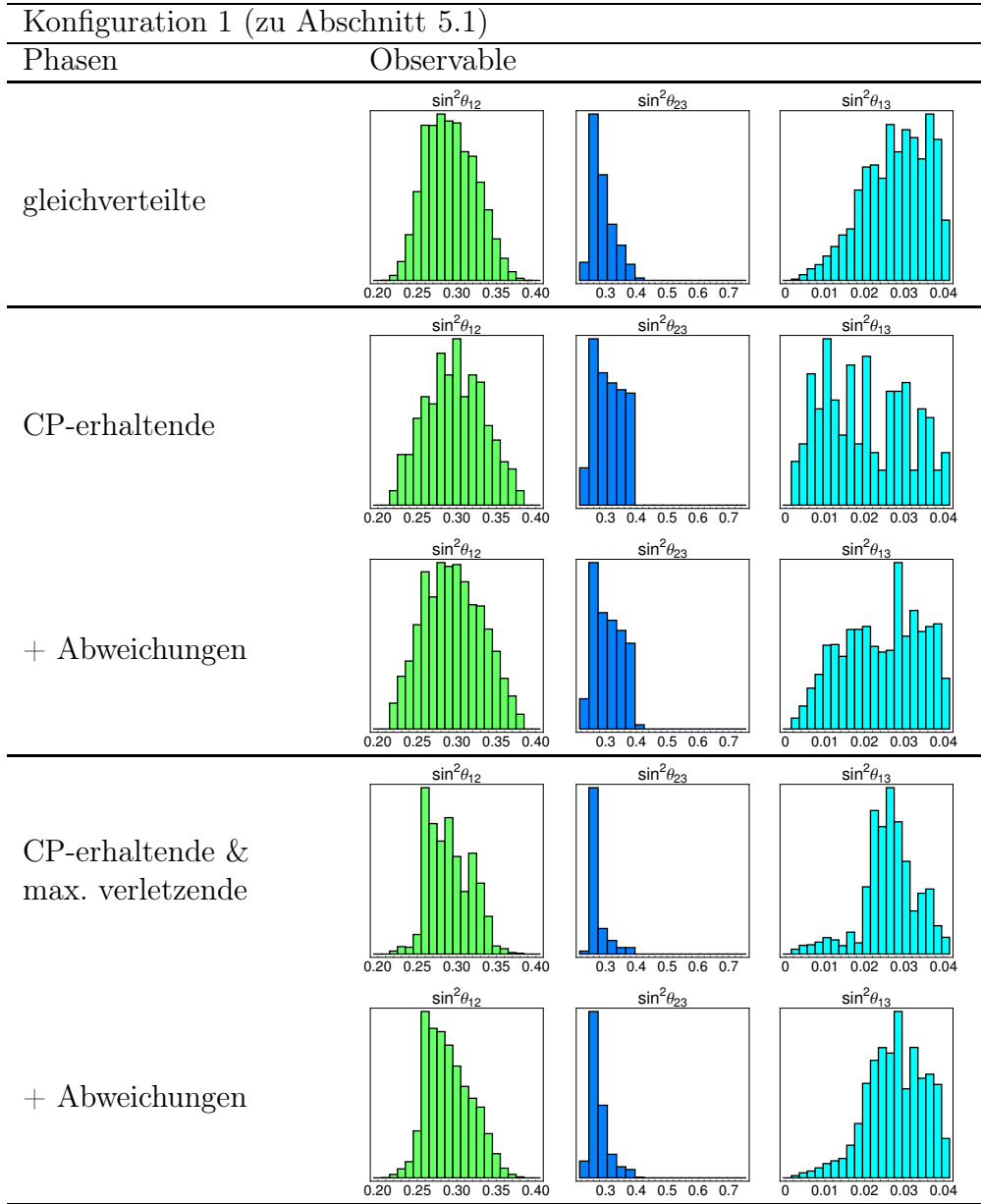


Abbildung B.1: Verteilung der Observablen für Konfiguration 1, die die Auswahlbedingungen in Gl. (B.1) erfüllen. Die kleinen Winkel in U^ℓ und U^ν wurden dabei gleichförmig zwischen 0 und 0.2 in Schritten von 0.04 variiert und die unphysikalischen Phasen in der ersten Zeile zwischen 0 und 2π in Schritten von $\pi/8$. Die Graphen in der zweiten Zeile stellen die Verteilungen der Observablen für CP-erhaltende unphysikalische Phasen dar. Bei der Generierung der darunterliegenden Graphen wurden zusätzlich Abweichungen der Phasen um 0.2 von CP-erhaltenden Werten berücksichtigt. Für die vierte Zeile sind die Phasen sowohl CP-erhaltend als auch maximal CP-verletzend gewählt. Analog zur dritten Zeile sind in der fünften Zeile Abweichungen von den exakten Werten um 0.2 erlaubt.

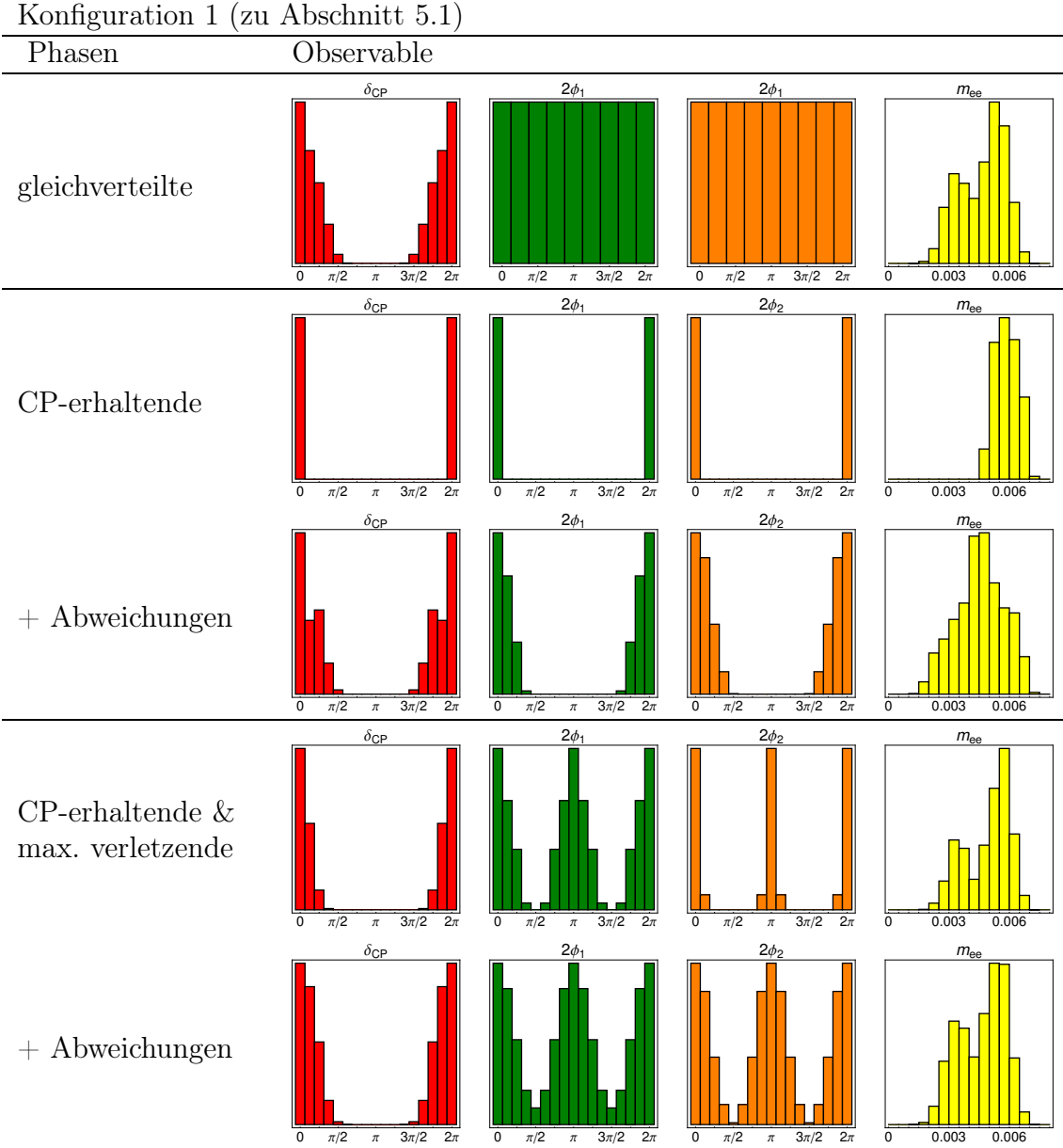


Abbildung B.2: Verteilung der Observablen für Konfiguration 1, die die Auswahlbedingungen in Gl. (B.1) erfüllen. Die Generierung der zu Grunde liegenden Daten erfolgt analog zu der von Abb. B.1. Die Annahmen für die unphysikalischen Phasen in jeder Zeile sind in der ersten Spalte bezeichnet. Die effektive Masse m_{ee} in eV haben wir für eine normale Hierarchie mit $m_1 = 0.003\text{eV}$ berechnet.

Konfiguration 1 (zu Abschnitt 5.3)

Observable

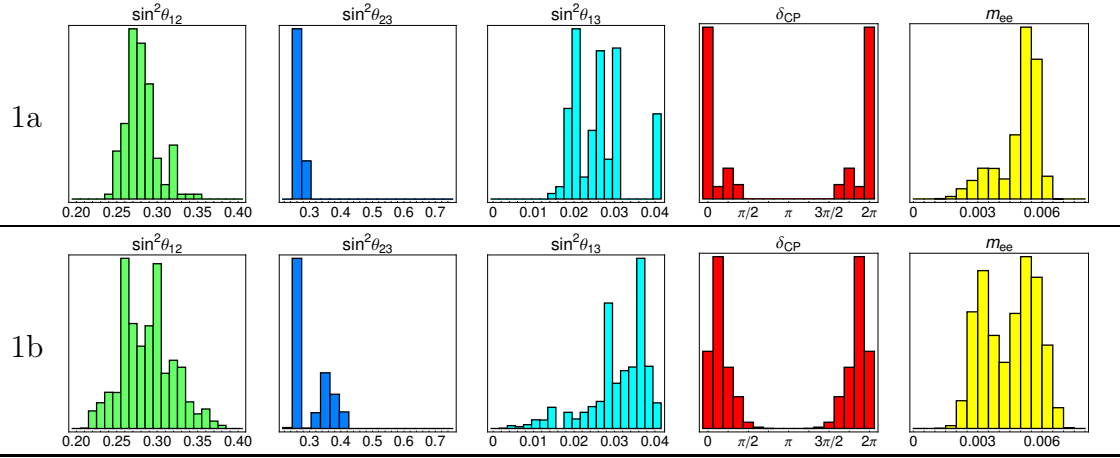


Abbildung B.3: Verteilung der Observablen unter Berücksichtigung der reellen Texturen in Tab. 5.1 für alle Kombinationen, die die Auswahlbedingung in Gl. (B.1) erfüllen. Zur Erzeugung wurden die relevanten Phasen gleichmäßig zwischen 0 und 2π variiert (16 Schritte) und die Winkel aus dem Satz $\{\epsilon, \epsilon^2, 0\}$ mit $\epsilon = 0.2$ gewählt. Die Majorana-Phasen stellen wir nicht dar, weil sie gleichverteilt sind. Die effektive Masse m_{ee} ist in eV dargestellt.

Konfiguration 1 (zu Abschnitt 5.4)

Φ Observable

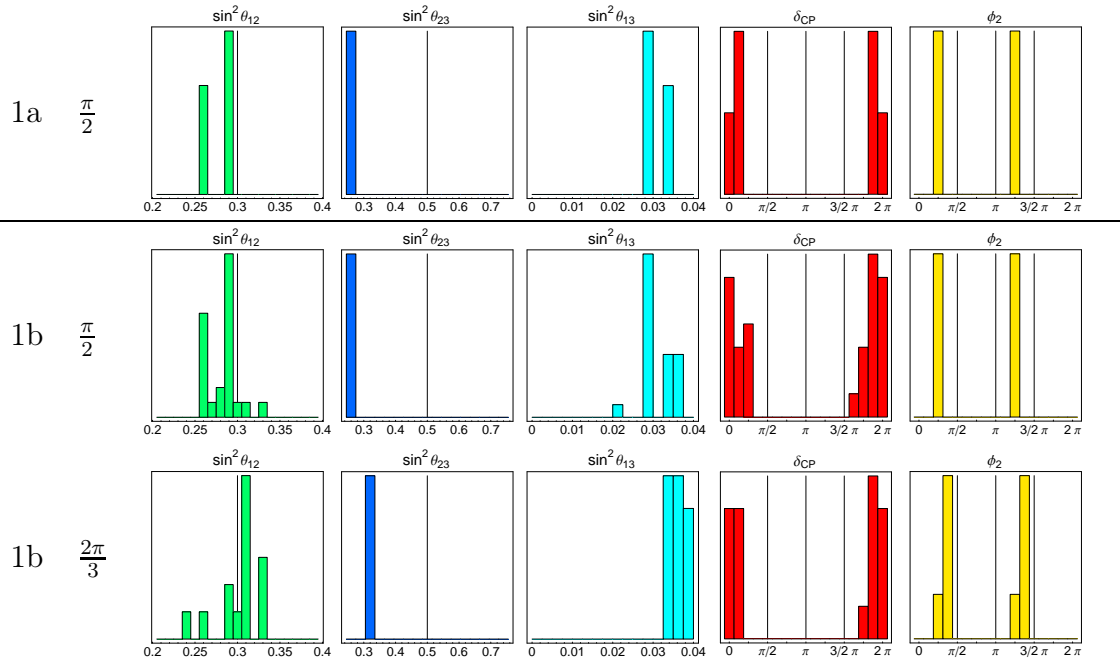


Abbildung B.4: Aus [75]. Verteilung der Observablen unter Berücksichtigung der komplexen Texturen in Tab. 5.1 für alle Kombinationen, die die Auswahlbedingung in Gl. (B.1) erfüllen. Zur Erzeugung wurden die relevanten Phasen gleichmäßig zwischen 0 und 2π variiert (32 Schritte für $\Phi = \pi/2$ und 36 Schritte für $\Phi = 2\pi/3$) und die Winkel aus $\{\epsilon, \epsilon^2, 0\}$ mit $\epsilon = 0.2$ gewählt.

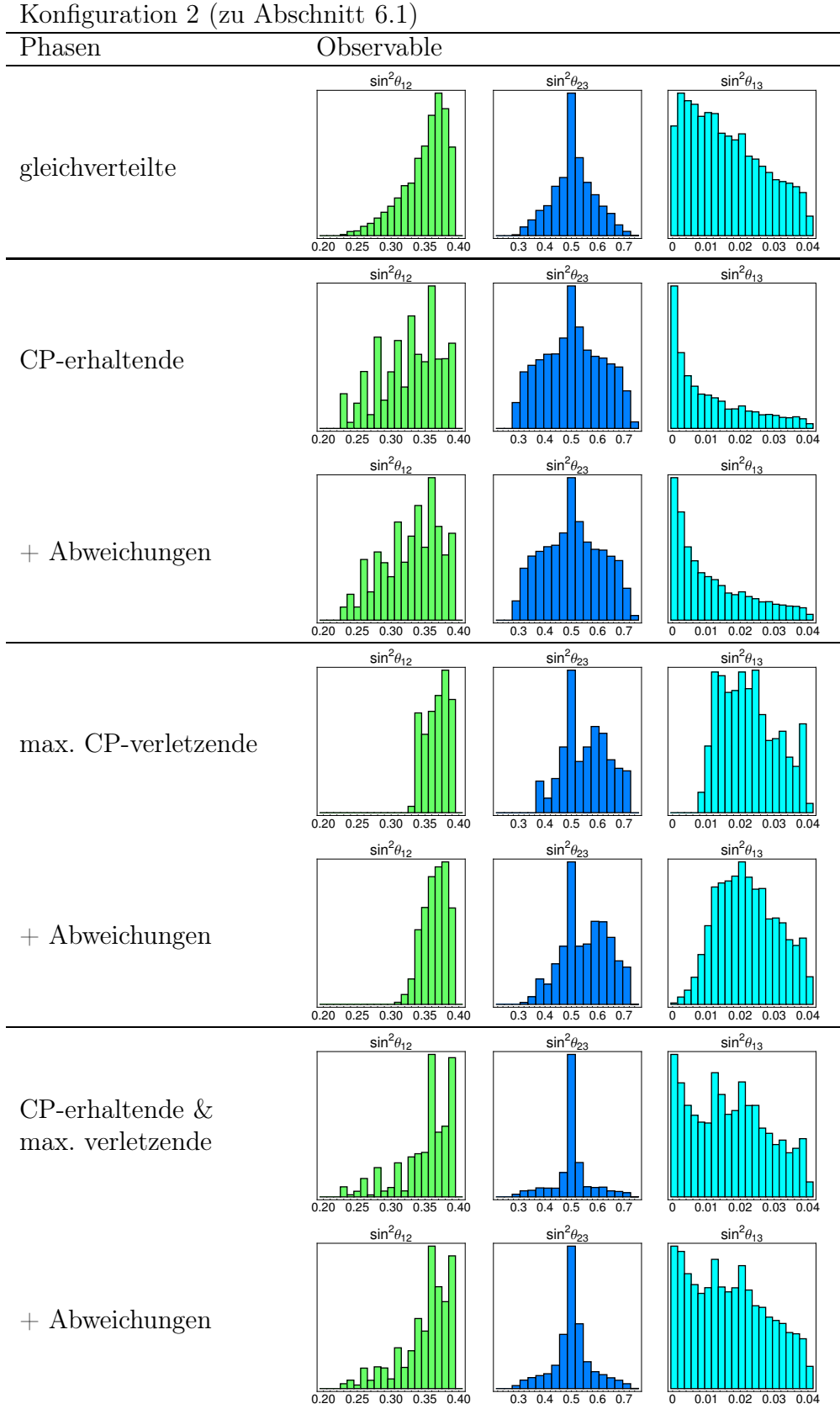


Abbildung B.5: Verteilung der Mischungswinkel für Konfiguration 2, die die Auswahlbedingung in Gl. (B.1) erfüllen. Die Generierung der zu Grunde liegenden Daten erfolgt analog zu der von Abb. B.1.

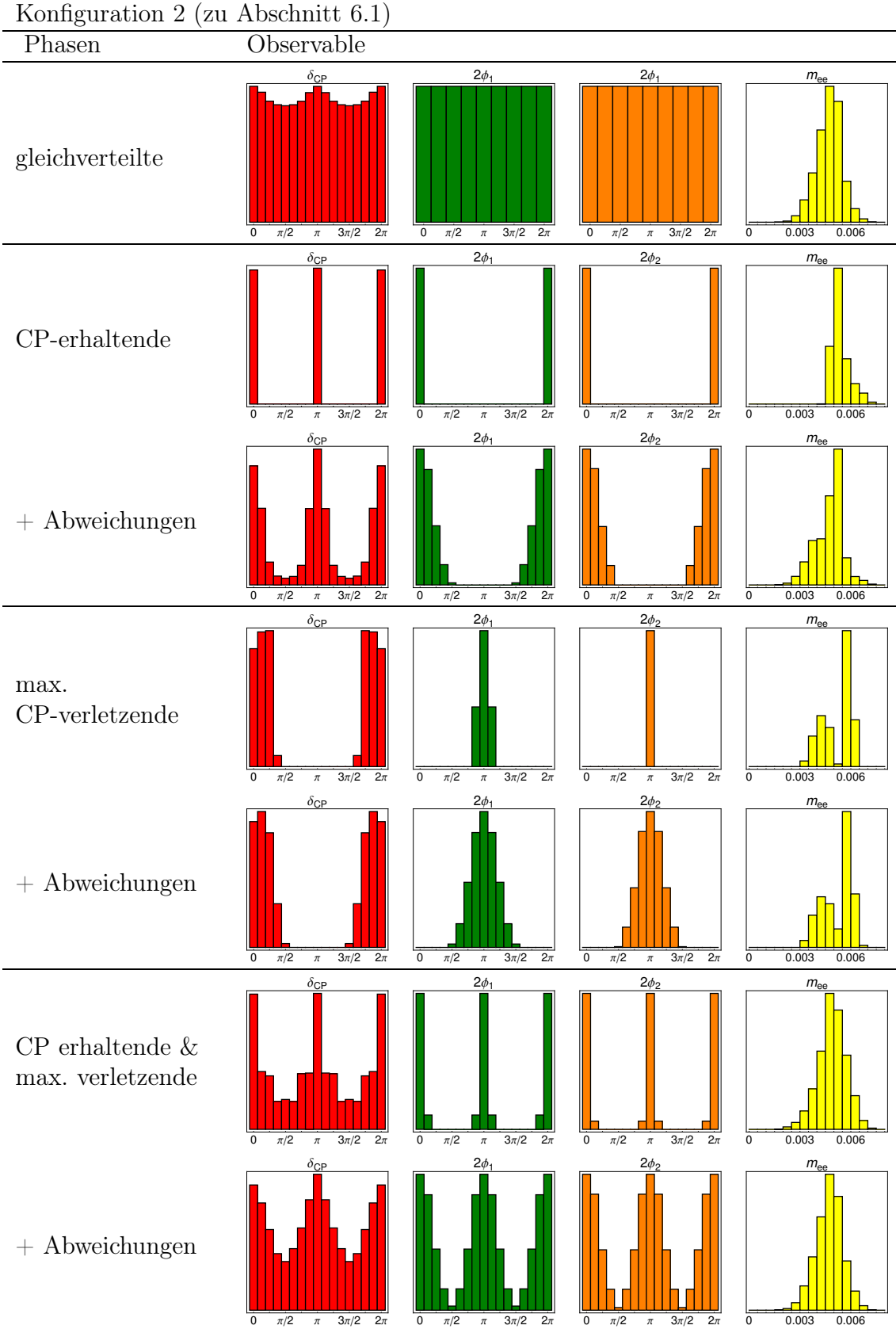


Abbildung B.6: Verteilung der physikalischen Phasen für Konfiguration 2, die die Auswahlbedingung (siehe Gl. (B.1)) erfüllen. Die Erstellung ist analog zu Abb. B.2. Die effektive Masse m_{ee} ist in eV dargestellt.

Konfiguration 2 (zu Abschnitt 6.3)

Observable

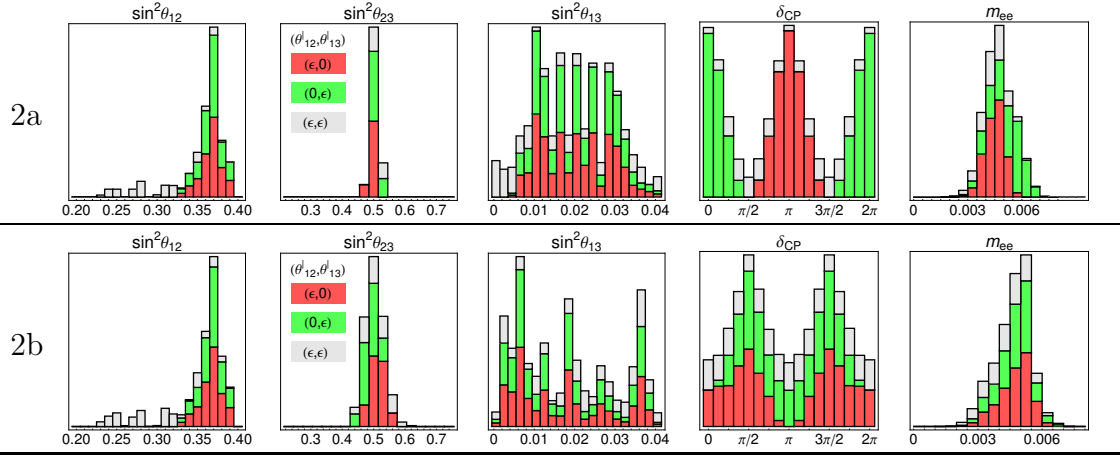


Abbildung B.7: Verteilung der Observablen unter Berücksichtigung der reellen Texturen in Tab. 6.2 für alle Kombinationen, die die Auswahlbedingung in Gl. (B.1) erfüllen. Zur Erzeugung wurden die relevanten Phasen gleichmäßig zwischen 0 und 2π variiert (16 Schritte) und die Winkel aus der Menge $\{\epsilon, \epsilon^2, 0\}$ mit $\epsilon = 0.2$ gewählt. Die drei Spezialfälle sind einzeln dargestellt. In den roten Balken zu $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell) = (\epsilon, 0)$ sind die Ergebnisse für $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell) = (\epsilon, \epsilon^2)$ enthalten. Dies gilt analog für den Fall $(\theta_{12}^\ell, \theta_{13}^\ell) = (0, \epsilon)$ (grün). Für die anderen Winkel gilt $\theta_{13}^\nu, \theta_{23}^\nu \in \{\epsilon, \epsilon^2, 0\}$. Die effektive Masse m_{ee} ist in eV dargestellt.

Konfiguration 2 (zu Abschnitt 6.4)

Φ Observable

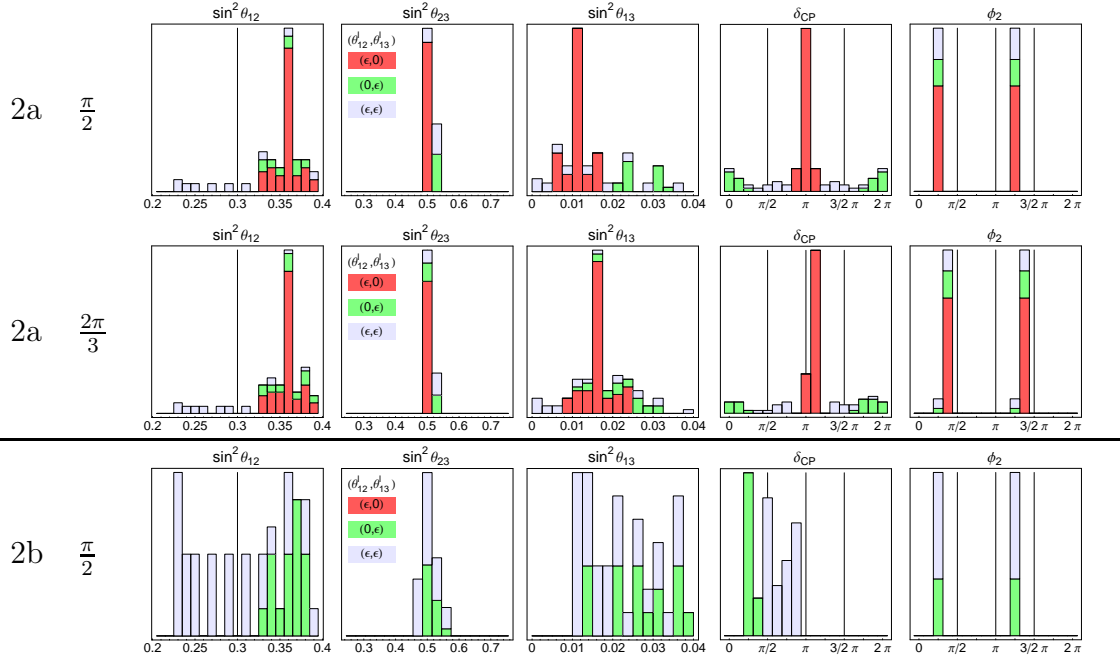


Abbildung B.8: Aus [75]. Darstellung und Erzeugung sind analog zu Abb. B.7 jedoch werden hier die relevanten Phasen in 32 Schritten für $\Phi = \pi/2$ und in 36 Schritten für $\Phi = 2\pi/3$ variiert.

Literaturverzeichnis

- [1] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **7**, 172 (1958).
- [2] H. V. Klapdor-Kleingrothaus, I. V. Krivosheina, A. Dietz, and O. Chkvorets, Phys. Lett. **B586**, 198 (2004), [hep-ph/0404088](#).
- [3] A. Strumia and F. Vissani (2006), [hep-ph/0606054](#).
- [4] E. Ma, Phys. Rev. Lett. **81**, 1171 (1998), [hep-ph/9805219](#).
- [5] A. Y. Smirnov (2004), [hep-ph/0411194](#).
- [6] A. D. Sakharov, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **5**, 32 (1967).
- [7] M. Fukugita and T. Yanagida, Phys. Lett. **B174**, 45 (1986).
- [8] G. L. Kane, S. F. King, I. N. R. Peddie, and L. Velasco-Sevilla, JHEP **08**, 083 (2005), [hep-ph/0504038](#).
- [9] C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, Nucl. Phys. **B147**, 277 (1979).
- [10] E. Ma and G. Rajasekaran, Phys. Rev. **D64**, 113012 (2001), [hep-ph/0106291](#).
- [11] C. Hagedorn, M. Lindner, and R. N. Mohapatra, JHEP **06**, 042 (2006), [hep-ph/0602244](#).
- [12] C. Hagedorn, M. Lindner, and F. Plentinger, Phys. Rev. **D74**, 025007 (2006), [hep-ph/0604265](#).
- [13] S. F. King and G. G. Ross, Phys. Lett. **B520**, 243 (2001), [hep-ph/0108112](#).
- [14] Z. Berezhiani and A. Rossi, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **101**, 410 (2001), [hep-ph/0107054](#).
- [15] I. de Medeiros Varzielas and G. G. Ross, Nucl. Phys. **B733**, 31 (2006), [hep-ph/0507176](#).
- [16] I. Masina, Phys. Lett. **B633**, 134 (2006), [hep-ph/0508031](#).

- [17] G. Altarelli, F. Feruglio, and I. Masina, Nucl. Phys. **B689**, 157 (2004), hep-ph/0402155.
- [18] A. Romanino, Phys. Rev. **D70**, 013003 (2004), hep-ph/0402258.
- [19] S. Antusch and S. F. King, Phys. Lett. **B591**, 104 (2004), hep-ph/0403053.
- [20] C. A. de S. Pires, J. Phys. **G30**, B29 (2004), hep-ph/0404146.
- [21] N. Li and B.-Q. Ma, Eur. Phys. J. **C42**, 17 (2005), hep-ph/0504161.
- [22] T. Ohlsson, Phys. Lett. **B622**, 159 (2005), hep-ph/0506094.
- [23] K. A. Hochmuth, S. T. Petcov, and W. Rodejohann, Phys. Lett. **B654**, 177 (2007), arXiv:0706.2975 [hep-ph].
- [24] S. T. Petcov and A. Y. Smirnov, Phys. Lett. **B322**, 109 (1994), hep-ph/9311204.
- [25] A. Y. Smirnov (2004), hep-ph/0402264.
- [26] M. Raidal, Phys. Rev. Lett. **93**, 161801 (2004), hep-ph/0404046.
- [27] H. Minakata and A. Y. Smirnov, Phys. Rev. **D70**, 073009 (2004), hep-ph/0405088.
- [28] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **6**, 429 (1957).
- [29] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962).
- [30] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10**, 531 (1963).
- [31] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).
- [32] C. Giunti and C. W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics* (Univ. Pr., Oxford, UK, 2007).
- [33] W. M. Yao *et al.* (Particle Data Group), J. Phys. **G33**, 1 (2006).
- [34] E. E. Jenkins and A. V. Manohar, Nucl. Phys. **B792**, 187 (2008), 0706.4313.
- [35] C. Jarlskog, Phys. Rev. Lett. **55**, 1039 (1985).
- [36] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, and R. Turlay, Phys. Rev. Lett. **13**, 138 (1964).

- [37] B. Aubert *et al.* (BABAR), Phys. Rev. Lett. **87**, 091801 (2001), hep-ex/0107013.
- [38] G. C. Branco and M. N. Rebelo, Acta Phys. Polon. **B38**, 3819 (2007), 0711.2650.
- [39] Y. Farzan and A. Y. Smirnov, JHEP **01**, 059 (2007), hep-ph/0610337.
- [40] J. A. Aguilar-Saavedra and G. C. Branco, Phys. Rev. **D62**, 096009 (2000), hep-ph/0007025.
- [41] L. Wolfenstein, Phys. Lett. **B107**, 77 (1981).
- [42] F. Plentinger, G. Seidl, and W. Winter, Phys. Rev. **D76**, 113003 (2007), 0707.2379.
- [43] F. Plentinger, G. Seidl, and W. Winter, JHEP **04**, 077 (2008), 0802.1718.
- [44] T. D. Lee, Phys. Rept. **9**, 143 (1974).
- [45] M. M. Robinson and J. Ziabicki (1997), hep-ph/9705418.
- [46] S. Kanemura *et al.*, Eur. Phys. J. **C51**, 927 (2007), arXiv:0704.0697[hep-ph].
- [47] H. Kamikado, T. Shindou, and E. Takasugi (2008), 0805.1338.
- [48] P. H. Frampton, S. L. Glashow, and D. Marfatia, Phys. Lett. **B536**, 79 (2002), hep-ph/0201008.
- [49] R. N. Mohapatra and P. B. Pal, World Sci. Lect. Notes Phys. **72**, 1 (2004).
- [50] W. Grimus and L. Lavoura, JHEP **07**, 045 (2001), hep-ph/0105212.
- [51] P. F. Harrison, D. H. Perkins, and W. G. Scott, Phys. Lett. **B530**, 167 (2002), hep-ph/0202074.
- [52] F. Plentinger, G. Seidl, and W. Winter, Nucl. Phys. **B791**, 60 (2008), hep-ph/0612169.
- [53] M. Jezabek and Y. Sumino, Phys. Lett. **B457**, 139 (1999), hep-ph/9904382.
- [54] C. Giunti and M. Tanimoto, Phys. Rev. **D66**, 113006 (2002), hep-ph/0209169.
- [55] P. H. Frampton, S. T. Petcov, and W. Rodejohann, Nucl. Phys. **B687**, 31 (2004), hep-ph/0401206.

- [56] S. Antusch and S. F. King, Phys. Lett. **B631**, 42 (2005), hep-ph/0508044.
- [57] S. K. Kang, C. S. Kim, and J. Lee, Phys. Lett. **B619**, 129 (2005), hep-ph/0501029.
- [58] K. Cheung, S. K. Kang, C. S. Kim, and J. Lee, Phys. Rev. **D72**, 036003 (2005), hep-ph/0503122.
- [59] B. C. Chauhan, M. Picariello, J. Pulido, and E. Torrente-Lujan, Eur. Phys. J. **C50**, 573 (2007), hep-ph/0605032.
- [60] K. S. Babu and S. M. Barr, Phys. Lett. **B525**, 289 (2002), hep-ph/0111215.
- [61] T. Schwetz, Phys. Scripta **T127**, 1 (2006), hep-ph/0606060.
- [62] W. H. Furry, Phys. Rev. **56**, 1184 (1939).
- [63] J. Schechter and J. W. F. Valle, Phys. Rev. **D25**, 2951 (1982).
- [64] E. Takasugi, Phys. Lett. **B149**, 372 (1984).
- [65] K. Grotz and H. Klapdor, *Die schwache Wechselwirkung in Kern-, Teilchen- und Astrophysik* (Teubner, Stuttgart, 1989).
- [66] M. Doi, T. Kotani, and E. Takasugi, Prog. Theor. Phys. Suppl. **83**, 1 (1985).
- [67] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistische Quantenfeldtheorie* (B.I. Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich - Hochschultaschenbücher, 1967).
- [68] H. Primakoff and S. Rosen, Rep. Prog. Phys. **22**, 121 (1959).
- [69] S. R. Elliott and J. Engel, J. Phys. **G30**, R183 (2004), hep-ph/0405078.
- [70] B. H. J. McKellar, Phys. Lett. **B97**, 93 (1980).
- [71] C. Kraus *et al.*, Eur. Phys. J. **C40**, 447 (2005), hep-ex/0412056.
- [72] V. M. Lobashev *et al.*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **91**, 280 (2001).
- [73] U. Seljak, A. Slosar, and P. McDonald, JCAP **0610**, 014 (2006), astro-ph/0604335.
- [74] C. Zunckel and P. G. Ferreira, JCAP **0708**, 004 (2007), astro-ph/0610597.
- [75] S. Niehage and W. Winter (2008), 0804.1546.

- [76] P. Huber, J. Kopp, M. Lindner, M. Rolinec, and W. Winter, *JHEP* **05**, 072 (2006), [hep-ph/0601266](#).
- [77] F. Ardellier *et al.* (Double Chooz) (2006), [hep-ex/0606025](#).
- [78] S. Antusch, P. Huber, J. Kersten, T. Schwetz, and W. Winter, *Phys. Rev.* **D70**, 097302 (2004), [hep-ph/0404268](#).

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Allen bedanken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben und ohne die diese Arbeit in der jetzigen Form nicht existieren würde:

- Prof. Dr. Reinhold Rückl für die Möglichkeit diese Diplomarbeit an seinem Lehrstuhl anfertigen zu dürfen und für seine QMI-Vorlesung, die mich dazu motiviert hat den Weg in Richtung Teilchenphysik einzuschlagen
- Dr. Walter Winter für die engagierte Betreuung, das offene Ohr für meine Fragen und das Probelesen dieser Arbeit
- Prof. Dr. Friedrich Reinert und Prof. Dr. Reinhold Rückl für die Möglichkeit am Sommerstudentenprogramm des DESY teilzunehmen, das mir tiefere Einblicke in die Teilchenphysik geben konnte, und die Arbeit, die ich dort gemacht habe, als F-Praktikum B anzuerkennen
- Dr. Karsten Büßer und Adrian Vogel für die Betreuung während des Sommerstudentenprogramms und der Nahebringung des Computers als praktisches Hilfsmittel
- den fleißigen Helfern, die die Jagd nach Fehlern auf sich genommen haben
- meinen Bürogenossen, mit denen kein Tag langweilig wurde
- dem gesamten Lehrstuhl für Theoretische Physik II für das angenehme Arbeitsklima
- meinen Studienkollegen, die immer aufgepasst haben, dass ich auch außerhalb des Studiums eine schöne Zeit habe
- meiner Familie für die ständige Unterstützung während meines Studiums
- Wolfgang Hümmer für die Unterstützung und den ständigen Computersupport in den letzten Jahren

Danke!

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Svenja Niehage

Würzburg, den 30.05.2008