

Niederenergieobservable in einem supersymmetrischen Modell mit spontan gebrochener R-Parität

von:
Jochen Meyer

vorgelegt bei:
Prof. Dr. Werner Porod

September 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Experimentelle Vorgaben	3
2.1	Neutrino-physik	3
2.2	Inklusive B-Meson Zerfälle	7
2.3	Leptonzerfälle	8
3	Supersymmetrie	9
3.1	Motivation	9
3.2	Allgemeine Supersymmetrie	9
3.3	Das Minimal Supersymmetrische Standardmodell	15
3.4	R-Parität	17
3.5	Erweiterungen des MSSM	18
4	Eine spezielle Erweiterung des MSSM	21
4.1	Superpotential und Symmetriebrechung	21
4.2	Massenbasis und Mischungen	22
4.3	Verbindung zur Neutrino-physik	27
5	Leptonzerfälle	29
5.1	Leptonischer Dreikörperzerfall	29
5.1.1	Matrixelement des Dreikörperzerfalls	29
5.1.2	Kinematik des Dreikörperzerfalls	31
5.2	Leptonzerfall in Lepton und Majoron	34
6	Inklusiver B-Meson-Zerfall	35
6.1	Operator-Produkt-Entwicklung in schwachen Zerfällen	35
6.2	Matrixelement und Kopplungen des B-Meson-Zerfalls	36
6.3	Kinematik des inklusiven B-Meson-Zerfalls	40
7	Numerische Berechnungen	43
7.1	Parameterwahl	43
7.1.1	Standardmodell-Parameter	43
7.1.2	Referenzpunkt SPS1a	43
7.1.3	Referenzpunkt SPS4	44
7.1.4	Freie Parameter	45
7.2	Variation der Vakuumenerwartungswerte v_R und v_S	46
7.2.1	Resultate des B-Mesonzerfalls	46
7.2.2	Resultate der Leptonzerfälle	47
7.3	Variation der Yukawakopplung h_0	52
8	Zusammenfassung	53

A Transformationen und Identitäten	55
A.1 Weyl-Darstellung	55
A.2 Fierztransformation	55
A.3 Rechenregeln	56
B Modellspezifische Definitionen	57
B.1 Skalarpotential	57
B.2 Massenmatrizen der Fermionen	57
B.2.1 Neutrale Fermionen	57
B.2.2 Geladene Fermionen	60
B.3 Massenmatrizen skalarer Teilchen	61
B.3.1 Neutrale Skalare (CP-gerade)	62
B.3.2 Neutrale Pseudoskalare (CP-ungerade)	64
B.4 Definitionen zu Normierungsparametern	66
C Verfahren zur Neutrinodatenanpassung	67
D Kinematische Funktionen des B-Meson Zerfalls	69
D.1 Allgemeine kinematische Funktionen A_i	69
D.2 Kinematische Funktionen M_i (ohne Winkelanteil)	69
D.3 Kinematische Parameter	70
E Kopplungen	73
E.1 Kopplungen des Leptonzerfalls in Lepton und Majoron	73
E.2 Kopplungen des inklusiven B-Meson-Zerfalls	74
F Verwendete Software	77
Abbildungsverzeichnis	79
Literaturverzeichnis	81

1 Einleitung

In den Naturwissenschaften im Allgemeinen und in der Physik im Speziellen versucht der Mensch seine Umwelt verstehen zu lernen. Die beiden Herangehensweisen sind zum einen die Beobachtung der Natur und deren Deutung. Dies geschieht in Experimenten und der darauf folgenden Auswertung. Zum anderen werden Theorien aufgestellt, die Vorhersagen und Erklärungen für Beobachtungen liefern. Stimmen diese mit der Natur überein, so ist mit dem abstrakten Formalismus eine Beschreibung der Umwelt gelungen. Die Theorie regt somit stets Experimente an, um ihre Gültigkeit zu testen und wird umgekehrt von ihnen inspiriert.

Die zur Zeit wohl am meisten in der Öffentlichkeit diskutierten Experimente finden am “Large Hadron Collider” (LHC), am europäischen Kernforschungszentrum CERN statt. Es steht zunächst die Entdeckung noch unbekannter Teilchen, insbesondere die des sogenannten Higgs-Bosons, das von einer Theorie zur Beschreibung von Masse durch elektroschwache Symmetriebrechung postuliert wird, im Mittelpunkt. Speziell hier, aber mit der Elementarteilchenphysik insgesamt, wird ein weiteres Interesse des Menschen gestillt: Die Frage, wie Materie, also er selbst aufgebaut ist und die damit unweigerlich verknüpfte weitere Frage nach dem Ursprung. Mitunter überschreiten die von der Theorie vorgeschlagenen Experimente jedoch technologische und auch finanzielle Grenzen, so dass ihre Durchführung nicht zustande kommt. Aus diesem Grund ist es wichtig Theorien mit den bisherigen Kenntnissen abzugleichen und die Wissensgewinnung aus bereits bestehenden Versuchen auszureizen. Genau an dieser Stelle ist der Ansatzpunkt dieser Arbeit zu sehen.

Es wird eine bislang unbestätigte supersymmetrische Erweiterung des mittlerweile gut verstandenen und verifizierten Standardmodells der Teilchenphysik angenommen. Wie für diese Art von Theorien, die Fermionen und Bosonen miteinander verknüpft üblich, erhält jedes Teilchen des Standardmodells einen supersymmetrischen Partner mit anderer Spineigenschaft. Die Teilchenzahl wird demnach verdoppelt. Mit der Einführung von Antiteilchen wurde schon einmal dieser Schritt gewagt und hat zum Erfolg geführt. Neben weiteren für supersymmetrische Theorien gebräuchlichen Annahmen, weist das in dieser Arbeit behandelte Modell eine Besonderheit auf. Die Leptonzahl wird verletzt, womit eine mit R-Parität bezeichnete Symmetrie gebrochen ist. Dies geschieht durch Einführung zusätzlicher Felder und dem Prinzip der spontanen Symmetriebrechung, das heißt der Grundzustand ist nicht länger eindeutig.

Zur Einschränkung einiger modellspezifischer, freier Parametern werden Daten der aktuellen Neutrinophysik verwendet. Auf diese Weise wird der Wertebereich von Yukawa-Kopplungen und Vakuumerwartungswerten der supersymmetrischen Partnerteilchen der Neutrinos bestimmt. Anschließend werden Zerfälle von B-Mesonen oder Leptonzerfälle unter Verletzung der Leptongeneration betrachtet. Es handelt sich um Prozesse im niederenergetischen Bereich, die im Standardmodell stark unterdrückt oder nicht vorgesehen sind, so dass aktuelle Messdaten Vorgaben für weitere Parameter liefern sollten. Die bestehenden experimentellen Ergebnisse wurden allerdings teilweise vor relativ langer Zeit ermittelt und veröffentlicht, so dass sie mit heutigen analytischen Methoden verbessert werden könnten.

Das Ziel dieser Arbeit ist es Aufschluß zu geben, bei welchen Prozessen eine genauere experimentelle Betrachtung zu zusätzlichen Beschränkungen des theoretischen Parameterraums führen könnte. Dies ist dann der Fall, wenn die numerisch ermittelten Resultate in ausreichender Nähe

zu den augenblicklichen Messungen liegen. So könnten die bestehenden Experimente genutzt werden oder gar die schon aufgenommenen Daten nach einer erneuten Auswertung zum Erfolg führen. In jedem Fall wäre der zu betreibende Aufwand gerechtfertigt und läge im Rahmen des Realisierbaren.

Das Vorgehen dieser Arbeit gliedert sich wie folgt: Zunächst werden in Kapitel zwei die aktuellen Messergebnisse der Neutrinophysik, eines bestimmten inklusiven B-Meson-Zerfalls und von Prozessen mit Verletzung der Leptongeneration vorgestellt. Das darauf folgende Kapitel gibt eine allgemeine Einführung in die Supersymmetrie als mögliche Erweiterung des Standardmodells und klärt Begriffe wie MSSM oder R-Parität. Anschließend wird das im Weiteren behandelte supersymmetrische Modell mit spontan gebrochener R-Parität erläutert und mit der Neutrinophysik in Verbindung gebracht. In Kapitel fünf und sechs sind Berechnungen zu Zerfallsbreiten der angesprochenen Prozesse gezeigt sowie Formalismen wie die Operatorproduktentwicklung angesprochen. Schließlich werden im vorletzten Kapitel numerisch bestimmte Verzweigungsverhältnisse präsentiert, die ein in Kapitel sieben zusammenfassendes Resumée zulassen. Im Anhang finden sich vor allem Details zu Massenmatrizen und Kopplungen die zum gesamtheitlichen Verständnis beitragen.

2 Experimentelle Vorgaben

In diesem Kapitel werden einige Phänomene aufgezählt und erläutert, die großen Einfluß auf die heutige theoretische Teilchenphysik haben. Ihre Beobachtung liefert zum Teil strenge Grenzen oder Gültigkeitsbereiche an deren Einhaltung sich jedes theoretische Modell, das den Anspruch stellt die Natur zu beschreiben, messen lassen muss. Durch die passende Wahl freier Parameter können zur Zeit noch die meisten Modelle an die Messungen angepasst werden. Einige Überlegungen sind jedoch schon ausgeschlossen oder müssen erweitert werden, um neue Phänomene zu erklären. Das Standardmodell der Teilchenphysik stimmt mit vielen experimentellen Daten sehr gut überein, womit an seiner Gültigkeit in niederen Energiebereichen kaum noch jemand zweifelt. Allerdings zeigen einige der nachfolgenden Punkte, dass dieses Modell keine vollständige Beschreibung der Natur liefert.

2.1 Neutrinophysik

Alle heute durchgeführten Experimente im Bereich Neutrinophysik legen in überzeugender Eindeutigkeit den Schluß nahe, dass die aufwendig zu detektierenden Neutrinos massiv sind, d.h. dass ihre Eigeigenzustände zu Masseneigenzuständen mischen, dass sie oszillieren [1]. Diese Aussage widerspricht zwar den Vorhersagen des Standardmodells, ist aber aufgrund einer mittlerweile guten Statistik der Langzeitmessungen nicht mehr von der Hand zu weisen.

Betrachtet man Neutrinooszillationen in einem Modell mit beispielsweise zwei Eigeigenzuständen ν_μ und ν_e , so bilden diese über die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

die Masseneigenzustände ν_i mit der jeweiligen Masse m_i ($i = 1, 2$). Der Winkel α wird als Mischungswinkel bezeichnet. Aus dieser Gleichung ergibt sich für große Strahlenergien $E \gg m_i$ die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \approx \sin^2 \alpha \sin^2 \left[\frac{(m_2^2 - m_1^2) L}{4E} \right], \quad (2.2)$$

wobei L den Abstand zur Quelle darstellt. Es ist demnach möglich ein Neutrino ν_e nachzuweisen, obwohl ursprünglich ein Neutrino ν_μ produziert wurde. Voraussetzung sind allerdings ein Mischungswinkel $\alpha > 0$ und unterschiedliche Neutrinomassen $m_1 \neq m_2$. Die verwendeten Indizes e und μ der Eigeigenzustände wurden in diesem Beispiel natürlich nicht zufällig gewählt, denn bei Elektron- und Myon-Neutrino sind diese Übergänge messbar.

Vergleicht man die mittels aktueller Sonnenmodelle berechnete Rate von in der Sonne entstehenden Elektron-Neutrinos ν_e mit der tatsächlich auf der Erde ankommenden Rate, so tritt eine signifikante Abweichung auf. Diese sogenannte solare Mischung von ν_e und ν_μ stellten die Experimente Homestake [2], SAGE [3], GALLEX [4], Kamiokande [5], Super-Kamiokande [6] und SNO [7] fest. Ebenso wiesen Frejus [8], IMB [9], NUSEX [10] und Kamiokande [5, 11] eine Os-

zillation zwischen Myon- ν_μ und Tau-Neutrino ν_τ nach. In diesen Messungen wurden durch kosmische Strahlung hervorgerufene hadronische Schauer in der Atmosphäre beobachtet, welche hauptsächlich Myon-Neutrinos ν_μ enthalten.

Schließlich sind noch Reaktorexperimente wie CHOOZ [12] oder KamLAND [13] zu nennen, die eine lediglich kleine Mischung zwischen Elektron- ν_e und Tau-Neutrino ν_τ aufzeigen. Zusätzlich wird an Beschleunigern Neutrinophysik betrieben, womit durch beispielsweise K2K [14] oder MINOS [15] die gesammelten Daten weiter verbessert werden.

Die bisherige Diskussion lässt erkennen, dass es notwendig ist das Prinzip der Neutrinooszillation für nunmehr drei Generationen zu formulieren, wobei nicht ausgeschlossen werden kann, dass es noch zusätzliche Erweiterungen gibt. Im Falle dreier Eigeigenzustände ν_l mit $l = e, \mu, \tau$ sind diese mit der leptonischen (3×3) -Mischmatrix $V^{(\nu)}$ nach der Vorschrift

$$|\nu_l\rangle = \sum_{i=1}^3 V_l^{(\nu)*} |\nu_i\rangle \quad (2.3)$$

zu Masseneigenzuständen verknüpft. Mit den Abkürzungen $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ sowie $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, wobei θ_{ij} die drei Mischungswinkeln bezeichnet, hat die Mischmatrix $V^{(\nu)}$ im Allgemeinen die Form:

$$V^{(\nu)} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Bei den Größen $\alpha_{1/2}$ sowie δ handelt es sich um CP-verletzende Phasen, von denen ausschließlich δ Einfluss auf Neutrinooszillationen nimmt. Zudem treten die Winkel $\alpha_{1/2}$ nur für den Fall auf, dass es sich bei Neutrinos um Majorana-Teilchen handelt, sie also zeitgleich ihr Antiteilchen sind. Aus diesem Grund tragen $\alpha_{1/2}$ den Namen Majorana-Phasen. In Prozessen wie dem neutrinolosen doppelten β -Zerfall spielen sie mitunter eine bedeutsame Rolle.

Bereits an dieser Stelle ist zu erwähnen, dass das Verhältnis des $(2, 1)$ - und des $(1, 1)$ -Elements der Matrix $V^{(\nu)}$ die ausschließlich von θ_{12} abhängige Funktion $\tan \theta_{12}$ beschreibt und analog der Quotient $\frac{(2,3)}{(3,3)}$ durch $\tan \theta_{23}$ beschreiben werden kann. Schließlich erhält man durch Quadrieren von Element $(1, 3)$ die Funktion $\sin^2 \theta_{13}$. Ist demnach die Matrix $V^{(\nu)}$ bekannt, so sind alle Winkel θ_{ij} separat bestimmbar.

Die auf diese Weise aus einer Theorie erhaltenen Werte sollten möglichst gut mit den aktuellen, in Tabelle 2.1 zusammengefassten experimentellen Daten übereinstimmen. Neben den Winkeln θ_{ij} gehen aus dieser Tabelle die Differenzen der Massenquadrate $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ hervor, wobei $\Delta m_{32}^2 = \Delta m_{31}^2 - \Delta m_{21}^2$ gilt. Es ist zu bemerken, dass aus den Oszillationsdaten lediglich Massendifferenzen und keine Absolutwerte bestimmt werden können, womit die Hierarchie der Masseneigenzustände ungeklärt bleibt.

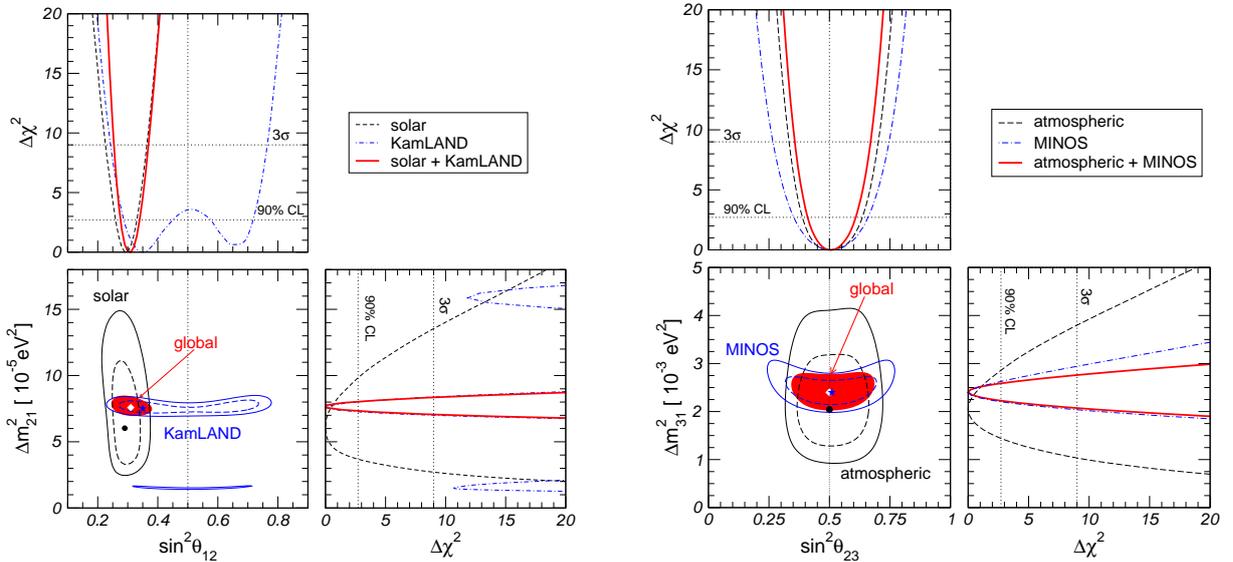
Die Abbildungen 2.1 und 2.2 zeigen den aktuellen Wissenstand aus dem Bereich der Neutrinophysik. Neben den die Wertebereiche beinhaltenden Grafiken sind zusätzlich Graphen dargestellt, die über die Fehlerermittlung mittels des χ^2 -Tests Aufschluß geben. Aufgrund der nach gemessener Größe klassifizierbaren Experimente sind in der Literatur ebenso folgende Definitionen geläufig:

$$\theta_{\text{sol}} = \theta_\odot = \theta_{12} \quad \theta_{\text{atm}} = \theta_{23} \quad \theta_{\text{R}} = \theta_{13} \quad (2.5)$$

$$\Delta m_{\text{sol}}^2 = \Delta m_\odot^2 = \Delta m_{12}^2 \quad \Delta m_{\text{atm}}^2 = \Delta m_{23}^2 \quad (2.6)$$

Messgrößen	beste Übereinstimmung (1σ)	2σ -Abweichung	3σ -Abweichung
Δm_{21}^2 [10^{-5} eV 2]	$7.65^{+0.23}_{-0.20}$	7.25 – 8.11	7.05 – 8.34
Δm_{31}^2 [10^{-2} eV 2]	$2.40^{+0.12}_{-0.11}$	2.18 – 2.64	2.07 – 2.75
$\sin^2 \theta_{12}$	$0.304^{+0.022}_{-0.016}$	0.27 – 0.35	0.25 – 0.37
$\sin^2 \theta_{23}$	$0.50^{+0.07}_{-0.06}$	0.39 – 0.63	0.36 – 0.67
$\sin^2 \theta_{13}$	$0.01^{+0.016}_{-0.011}$	≤ 0.040	≤ 0.056

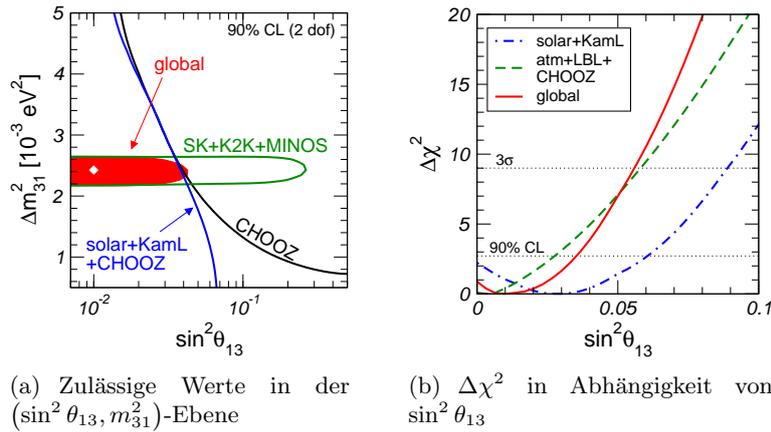
Tabelle 2.1: Werte mit bester Übereinstimmung (geringe Toleranz) und 2σ - sowie 3σ -Intervalle (1 Freiheitsgrad) der Parameter der Drei-Generationen-Neutrinooszillation resultierend aus solaren-, atmosphärischen-, Reaktor- (KamLAND und Chooz) und Beschleunigerdaten (K2K und MINOS) (entspricht Tabelle 1 in [16] - August 2008)



(a) Zulässige Werte in der $(\sin^2 \theta_{12}, m_{21}^2)$ -Ebene mit weißem Punkt, der bester Übereinstimmung mit globalen Daten entspricht, und Fehlern

(b) Zulässige Werte in der $(\sin^2 \theta_{23}, m_{31}^2)$ -Ebene mit weißem Punkt, der bester Übereinstimmung mit globalen Daten entspricht, und Fehlern

Abbildung 2.1: Darstellung des solaren und atmosphärischn Winkels (entnommen aus [16](Figure 1 und 2))

(a) Zulässige Werte in der $(\sin^2 \theta_{13}, m_{31}^2)$ -Ebene(b) $\Delta\chi^2$ in Abhängigkeit von $\sin^2 \theta_{13}$ **Abbildung 2.2:** Darstellung des Reaktorwinkels mit Fehler (entnommen aus [16](Figure 3))

Wie bereits erwähnt sieht das Standardmodell keine Massen für Neutrinos vor, so dass eine Erweiterung der Theorie unumgänglich ist. So wird abschließend der in der heutigen Zeit oftmals in dieser oder ähnlicher Form verwendete “seesaw”-Mechanismus knapp und nur für eine Neutrinogeneration erläutert. In späteren Kapiteln wird ausführlich auf die für diese Arbeit relevante Massenerzeugung durch R-Paritätsverletzung eingegangen.

Gegen Ende der 80iger Jahre des vergangenen Jahrhunderts dachte man bereits an eine Erweiterung des Standardmodells um ein von Eichwechselwirkungen unberührtes rechtshändiges Neutrino ν_R [17]. Als rechts- bzw. linkshändig bezeichnet man den Helizitätszustand eines Teilchens, der durch den Index L/R gekennzeichnet wird. Mit der Einführung eines solchen zusätzlichen Neutrinos sind in der Lagrangedichte neue Terme

$$\mathcal{L}_{\text{seesaw}} = \frac{1}{2} (\bar{\nu}_L, \bar{\nu}_R^c) M \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.}, \quad \text{wobei } M = \begin{pmatrix} m_L^M & m^D \\ m^D & m_R^M \end{pmatrix} \quad \text{gilt,} \quad (2.7)$$

möglich. Mit der Ladungskonjugationsmatrix C ist, wie für Dirac-Spinoren üblich, $\nu^c = C\bar{\nu}^T = C\gamma_0\nu^*$ (vgl. Abschnitt A.1). Wie aus der Lagrangedichte hervorgeht, gibt es Massenterme der Form $\propto \bar{\nu}_L\nu_L^c$ bzw. $\propto \bar{\nu}_R^c\nu_R$, die Majorana-Massenterme genannt werden und die Annahme voraussetzen, dass das Neutrino sein eigenes Antiteilchen ist $\nu = \nu^c$. Außerdem ergeben sie die aus dem Standardmodell bekannten, aber bislang für Neutrinos nicht vorhandenen Dirac-Massenterme $\propto \bar{\nu}_L\nu_R$.

Setzt man nun zur Erhaltung der Eichinvarianz die Majorana-Masse des linkshändigen Neutrino m_L^M gleich Null und nimmt $m_R^M \gg m^D$ an, so erhält man durch einfaches Diagonalisieren von M die beiden Neutrinomassen

$$m_1 \approx m_R^M \quad \text{und} \quad m_2 \approx \left| -\frac{(m^D)^2}{m_R^M} \right|. \quad (2.8)$$

An dieser Stelle wird klar, weshalb dieses Verfahren “seesaw”-, zu deutsch “Wippen”-Mechanismus genannt wird: Je kleiner die Masse des linkshändigen Neutrino m_2 , desto größer diejenige des rechtshändigen m_1 . Für eine Masse m_2 zwischen üblicherweise 0.1 und 1 GeV und einer Dirac-Masse m^D an der elektroschwachen Skala von ca. 174 GeV ist die Majorana-Masse m_R^M beispielsweise in der Größenordnung von 10^{14} GeV anzusiedeln. Man verschiebt demnach die Problematik bis an die experimentell unzugängliche, sogenannte GUT-Skala. Die Abkürzung GUT leitet sich

von der englischen Bezeichnung ‘‘Grand Unification Theory’’ ab, die eine Vereinheitlichung aller Kräfte bei hohen Energien vorsieht.

In den meisten Modellen erscheint dieses Vorgehen, vergleichbar mit dem später angerissenen Hierarchieproblem, nicht sehr natürlich und in der Tat versucht man Auswege zu finden. So befasst sich diese Arbeit unter anderem mit einer alternativen Massenerzeugung der Neutrinos. Zuletzt sei erwähnt, dass der Majorana-Charakter der Neutrinos noch nicht vollständig geklärt ist und man vornehmlich durch Messungen des neutrinolosen doppelten β -Zerfalls versucht Erkenntnisse darüber zu erlangen.

2.2 Inklusive B-Meson Zerfälle

Bevor die im Titel angedeuteten Zerfälle angesprochen werden, ist zunächst zu klären um was es sich bei einem B-Meson handelt. Im Allgemeinen sind Mesonen eine Untergruppe der Hadronen, Bindungszustände mehrerer Quarks und Antiquarks, welche die durch Gluonen vermittelte starke Kraft zusammenhält. Mit Meson bezeichnet man den Verbund genau eines Quarks und Antiquarks und insbesondere denjenigen mit B-Meson, der stets ein b -Quark enthält. Einige Beispiele sind $B^+ = u\bar{b}$, $B^0 = d\bar{b}$, $\bar{B}^0 = \bar{d}b$ und $B^- = \bar{u}b$.

Allerdings sind diese Objekte instabil und zerfallen. Ist bei solch einem Prozess der Endzustand bekannt, wie beispielsweise in $B \rightarrow Kl^+l^-$, spricht man von exklusiven Zerfällen, wobei das K -Meson den vier oben genannten Beispielen des B-Mesons mit jeweils einem s -Quark anstelle des b -Quarks entspricht. Im Falle eines unbekanntes Produkts wie in $B \rightarrow X_s l^+ l^-$ ist hingegen von inklusiven Zerfällen die Rede. Mit X_s werden jegliche Endzustände zusammengefasst, die ein s -Quark enthalten. Im Gegensatz zur experimentellen Physik, die exklusive Zerfälle aufgrund besserer Messbarkeit bevorzugt, ist in der Theorie der inklusive Zerfall beliebter, da leichter berechenbar.

In der Region einer niedrigen invarianten Masse des Zweilepton-Systems von 1 GeV^2 bis 6 GeV^2 liegen die derzeitigen Messwerte des Belle- [18] und BaBar-Experiments [19] bei

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(B \rightarrow X_s l^+ l^-) &= (1.493 \pm 0.504^{+0.411}_{-0.321}) \cdot 10^{-6} && \text{(Belle)} \\ \mathcal{B}(B \rightarrow X_s l^+ l^-) &= (1.8 \pm 0.7 \pm 0.5) \cdot 10^{-6} && \text{(BaBar)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

womit sich ein Gesamtdurchschnitt von [20]

$$\mathcal{B}(B \rightarrow X_s l^+ l^-) = (1.60 \pm 0.51) \cdot 10^{-6} \quad (2.10)$$

ergibt. Wenngleich Daten für höhere und niedrigere Energien des Zweilepton-Systems vorliegen, wählt man das angegebene Intervall, da mit steigender Energie die theoretische Genauigkeit durch nicht-störungstheoretische Effekte von J/Ψ , Ψ' abnimmt. Bei geringeren Energien wird der Prozess hauptsächlich durch ein reales internes Photon bestimmt, so dass gleiche Informationen über neue Physik wie aus einem Zerfall der Art $B \rightarrow X_s \gamma$ gewonnen werden.

Trotz allem gibt er Beschränkungen für neue Modelle vor. Denn im Standardmodell ist der zugrunde liegende Prozess $b \rightarrow s l^+ l^-$ auf Baumgraphniveau verboten. Erst in höherer Ordnung wird dieser flavourverandernde neutrale Strom (FCNC von ‘‘flavour changing neutral current’’) durch Box- sowie Pinguin-Diagramme realisiert und damit stark unterdrückt. In einer Physik jenseits des Standardmodells kann es jedoch schon auf Baumgraphniveau zu solchen Strömen kommen, so dass sie trotz abschwächender Effekte zum Teil beträchtlich zur Zerfallsbreite beitragen. Weitere Ausführungen hierzu finden sich in Kapitel 6.

2.3 Leptonzerfälle

Aus Abschnitt 2.1 ist bekannt, dass die Annahme masseloser Neutrinos im Standardmodell nicht länger tragbar ist. Ist sie allerdings erfüllt, so bringt sie eine Lepton-Generation-Erhaltung oder LFC (für "lepton flavour conservation") mit sich. Das bedeutet Elektron-, Myon- und Tau-Anzahl sind von einander getrennte Erhaltungsgrößen. In der Tat wurden bislang Prozesse wie $\tau \rightarrow \mu\mu^+\mu^-$, $\mu \rightarrow ee^+e^-$ oder ähnliche nicht beobachtet.

Die meisten Modelle zur Erweiterung des Standardmodells können abhängig von der Parameterwahl Zerfallsbreiten erzeugen, die bis an die oberen experimentellen Schranken in Tabelle 2.2 heranreichen oder darunter liegen. Erste Messdaten wurden 1987 von der Gruppe um das Experiment Sindrum [21] veröffentlicht und später im Jahr 2003 durch das Experiment BaBar [22] bestätigt und erweitert. Da die Prozesse strikte Grenzen liefern, die möglicherweise den Parameterraum eindämmen, ist man an weiterer Forschung auf diesem Gebiet interessiert.

Messgröße	obere Schranke
$\mathcal{B}(\mu \rightarrow eee)$	$1.0 \cdot 10^{-12}$
$\mathcal{B}(\tau^- \rightarrow e^-e^+e^-)$	$2.0 \cdot 10^{-7}$
$\mathcal{B}(\tau^- \rightarrow \mu^+e^-e^-)$	$1.1 \cdot 10^{-7}$
$\mathcal{B}(\tau^- \rightarrow \mu^-e^+e^-)$	$2.7 \cdot 10^{-7}$
$\mathcal{B}(\tau^- \rightarrow e^+\mu^-\mu^-)$	$1.3 \cdot 10^{-7}$
$\mathcal{B}(\tau^- \rightarrow e^-\mu^+\mu^-)$	$3.3 \cdot 10^{-7}$
$\mathcal{B}(\tau^- \rightarrow \mu^-\mu^+\mu^-)$	$1.9 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 2.2: Die Angaben wurden [21] und [22] entnommen und liegen jeweils im 90%-Vertrauensbereich ("confidence level", CL).

Ein gleichermaßen, vorrangig für supersymmetrische Modelle mit spontan gebrochener R-Parität wichtiger Prozess mit LFC-Verletzung, ist der Zerfall $l_i \rightarrow l_k J$ [23], wobei J ein Nambu-Goldstone-Boson bezeichnet, das aus der Brechung der $U(1)$ -Symmetrie resultiert. Dieses masselose Teilchen trägt den Namen Majoron und wird im Laufe dieser Arbeit häufiger Erwähnung finden.

Messgröße	obere Schranke	Experiment
$\mathcal{B}(\mu \rightarrow eJ)$	$2.6 \cdot 10^{-6}$	TRIUMF
$\mathcal{B}(\tau \rightarrow eJ)$	$7.12 \cdot 10^{-3}$	Mark III
$\mathcal{B}(\tau \rightarrow \mu J)$	$2.25 \cdot 10^{-2}$	Mark III

Tabelle 2.3: Die Angaben wurden [23] entnommen und haben ihren Ursprung in [24] und [25].

Leider sind die experimentellen Daten in diesem Bereich etwas limitiert. Der Grund ist vermutlich darin zu suchen, dass sie nur für spezielle Modelle von Relevanz sind, deren Nachweis ebenfalls durch andere Messungen erbracht werden kann.

3 Supersymmetrie

3.1 Motivation

Das Standardmodell zählt zu einer der herausragenden Leistungen der theoretischen Physik und beschreibt, wie aus unzähligen Experimenten hervorgeht, die Natur mit sehr guter Genauigkeit [26]. Aufgrund enormer experimenteller Fortschritte hinsichtlich Präzision und betrachtbarer Energieskalen gibt es heute jedoch starke Hinweise darauf, dass eine Physik jenseits des Standardmodells existiert.

Starke Hinweise kommen vor allem aus den Bereichen der Neutrino- und Astrophysik. So können Aussagen über die Masse von Neutrinos gemacht werden, obwohl diese Elementarteilchen im Standardmodell masselos sind. In der Astrophysik sprechen Phänomene wie dunkle Materie oder dunkle Energie dafür, dass es Erweiterungen gibt. Des Weiteren ist im Universum eine Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie zu beobachten, deren Ursprung ebenfalls ungeklärt ist.

Neben diesen, aus Beobachtungen stammenden Unstimmigkeiten, gibt es weitere prinzipielle Mängel des Standardmodells. Es gibt 19 freie Parameter, wie beispielsweise Yukawa-Kopplungen, deren Werte nicht durch das Modell vorhergesagt werden, sondern lediglich durch Messungen direkt oder indirekt bestimmbar sind. Zudem gibt es keine Beschreibung von Gravitation im Kontext des Standardmodells.

Zwar erklärt das Standardmodell zunächst keine Masse, jedoch gibt es mit dem Higgs-Mechanismus zur Brechung der elektroschwachen Symmetrie und dem postulierten Higgs-Boson einen vielversprechenden Kandidaten zur Massengenerierung. In auf diesem Zusatz basierenden Rechnungen erhält das Higgs allerdings durch Prozesse höherer Ordnung Quantenkorrekturen, welche dreißig Größenordnungen über seiner eigentlich zu erwartenden Masse liegen. Diese Problematik wird mit Hierarchieproblem bezeichnet.

Um das Standardmodell erhalten und viele seiner Widersprüche zur Natur lösen zu können, gibt es einige Erweiterungsvorschläge, wie die Stringtheorie oder Technicolor. Zur Zeit bietet eine supersymmetrische Erweiterung einen der ästhetischsten in der Natur möglicherweise realisierten Ansätze. Hierbei werden, wie im folgenden knapp dargestellt, fermionische mit bosonischen Zuständen verknüpft. Im Hierarchieproblem heben sich somit aufgrund des relativen Vorzeichens der beiden Teilchenarten Schleifenbeiträge auf.

3.2 Allgemeine Supersymmetrie

Ein Operator, der allgemein fermionische in bosonische Zustände umwandelt und umgekehrt, muss zunächst die Gleichungen

$$Q_- |\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle \quad \text{und} \quad Q_+ |\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle \quad (3.1)$$

erfüllen. Sind die Zustände im Hilbertraum durch $|\#_B \#_F\rangle$ mit der bosonischen (fermionischen) Besetzungszahl $\#_B$ ($\#_F$) definiert, ist leicht zu zeigen, dass die Operatoren $Q_- = b^+ \cdot f^-$ und $Q_+ = b^- \cdot f^+$ mit den bosonischen (fermionischen) Erzeugern bzw. Vernichtern $b^{+/-}$ ($f^{+/-}$) nicht

hermitesch sind. Da zur Beschreibung einer Algebra mittels (Anti-)Kommutatoren hermitesche Operatoren benötigt werden, ist es sinnvoll

$$Q_1 = Q_+ + Q_-, \quad Q_2 = i \cdot (Q_+ - Q_-) \quad (3.2)$$

zu definieren, da diese die gewünschte Eigenschaft erfüllen [27].

Wie im letzten Abschnitt erwähnt, sollte eine supersymmetrische Erweiterung im Grenzfall zu niedrigen Energien auf das bisherige Standardmodell führen. Aus diesem Grund muss nach Einführung der neuen Objekte die Lagrangedichte weiter invariant unter Lorentztransformation bleiben. Aus dem Coleman-Mandula-Theorem [28] folgen zusätzliche Einschränkungen für allgemeine Symmetrie-Generatoren, denn neben dem erhaltenen Impulsoperator P_μ als Generator der Translation ist kein weiterer vektorieller Generator möglich. Auch Tensoreigenschaften scheiden für das Objekt Q aus, da diese bereits der erhaltene Generator für Drehungen $M_{\mu\nu}$ besitzt. Das Haag-Lopuszanski-Theorem [29] erlaubt allerdings, dass sich Q wie ein Spinor unter Lorentztransformation verhält. Da Q durch eine Erhaltungsgröße charakterisiert werden soll, also ein 2-komponentiger spinorartiger Symmetrie-Generator sein muss, vertauscht er stets mit dem Hamilton-Operator:

$$[Q_i, H] = 0 \quad (3.3)$$

Ist dieser Kommutator erfüllt, folgt insbesondere, dass für den Antikommutator die Relation

$$\left[\{Q_i, Q_j^\dagger\}, H \right] = 0 \quad (3.4)$$

gilt. Der in den Indizes symmetrische Antikommutator besitzt offensichtlich drei unabhängige Komponenten, da $Q_{i/j}$ zweikomponentige Spinoren sind. Weiter ist jedoch anzunehmen, dass er sich wie ein Spin-1-Objekt transformiert, welches allerdings in relativistischen Theorien durch einen Viervektor zu beschreiben ist. Aus dem Coleman-Mandula-Theorem ist nun bekannt, dass der einzig mit dem Hamilton-Operator vertauschende und damit erhaltene Viervektor der Impulsoperator ist, so dass unweigerlich [30, 31]

$$\{Q_i, Q_j^\dagger\} \sim P_\mu \quad (3.5)$$

folgt. Schon an der Indexstruktur ist zu erkennen, dass weitere Faktoren fehlen. Aus einer genauen Betrachtung erhält man schließlich

$$\{Q_i, Q_j^\dagger\} = 2\sigma_{ij}^\mu P_\mu, \quad (3.6)$$

mit den Pauli-Matrizen σ^μ . Alle weiteren Antikommutatoren verschwinden. Ebenso ergeben alle Kommutatoren der Operatoren Q bzw. Q^\dagger mit dem Vierimpuls P_μ Null, was durch die Jakobiidentität gezeigt werden kann. Insbesondere gilt die Kommutatorrelation

$$\left[P^2, Q^{(\dagger)} \right] = \left[P_\mu, Q^{(\dagger)} \right] P^\mu + P^\mu \left[P_\mu, Q^{(\dagger)} \right] = \left[m^2, Q^{(\dagger)} \right] = 0, \quad (3.7)$$

aus der direkt abzulesen ist, dass alle Teilchen in einem Supermultiplett, einem Objekt, das sowohl bosonische als auch fermionische Anteile enthält, die gleiche Masse haben. Deshalb ist es nötig, wie später beschrieben, die Supersymmetrie zu brechen, da in bisherigen Experimente noch keine supersymmetrischen Teilchen zu beobachten waren.

Zudem enthält ein in einem Supermultiplett $|i\rangle$ beschriebener Zustand die gleiche Anzahl an bosonischen als auch fermionischen Freiheitsgraden, wie folgende Überlegung zeigt: Sei s der Spin, so hat der Operator $(-1)^{2s}$ aufgrund des Theorems der Spin-Statistik den Eigenwert 1, wirkt er auf bosonische, und den Eigenwert -1 für fermionische Zustände. Nun wandelt jeder bosonische Operator einen fermionischen in einen bosonischen Zustand um und umgekehrt. Deshalb muss $(-1)^{2s}$ mit jedem fermionischen Operator, insbesondere mit Q und Q^\dagger , antikommutieren.

Nimmt man weiter den Unterraum eines Supermultipletts mit denjenigen Zuständen $|i\rangle$ an, die den selben Eigenwert p^μ des Impulsoperators P^μ besitzen, so führt jede Anwendung von Q oder Q^\dagger oder einer Kombination der beiden auf $|i\rangle$ zu einem Zustand $|i'\rangle$ mit gleichem Eigenwert. Dies folgt aus dem Verschwinden der Kommutatoren zwischen Q bzw. Q^\dagger und P^μ . Zudem gilt die Vollständigkeitsrelation $\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$. Bildet man schließlich die Spur über all diese Zustände mit $(-1)^{2s} P^\mu$, so folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle i| (-1)^{2s} P^\mu |i\rangle &= \sum_i \langle i| (-1)^{2s} Q Q^\dagger |i\rangle + \sum_i \langle i| (-1)^{2s} Q^\dagger Q |i\rangle & (3.8) \\
&= \sum_i \langle i| (-1)^{2s} Q Q^\dagger |i\rangle + \sum_i \sum_j \langle i| (-1)^{2s} Q^\dagger |j\rangle \langle j| Q |i\rangle \\
&= \sum_i \langle i| (-1)^{2s} Q Q^\dagger |i\rangle + \sum_j \langle j| Q (-1)^{2s} Q^\dagger |j\rangle \\
&= \sum_i \langle i| (-1)^{2s} Q Q^\dagger |i\rangle - \sum_j \langle j| (-1)^{2s} Q Q^\dagger |j\rangle \\
&= 0 \\
&= \sum_i p^\mu \langle i| (-1)^{2s} |i\rangle = p^\mu \text{Sp} \left[(-1)^{2s} \right] & (3.9)
\end{aligned}$$

Da die Spur proportional zur Differenz von bosonischen n_B und fermionischen Freiheitsgraden n_F ist und diese verschwindet, muss folglich für jedes Supermultiplett die Relation

$$n_B = n_F \quad (3.10)$$

gelten, geht man von $p^\mu \neq 0$ aus. Die einfachste Konstruktion von Supermultipletts, die diese Gleichung erfüllt, besteht aus einem einzelnen Weyl-Fermion (vgl. Anhang A.1) mit, aufgrund der beiden möglichen Spinzustände, $n_F = 2$ und zwei reellen Skalarfeldern mit jeweils $n_B = 1$, wobei diese in einem komplexen Feld zusammengefasst werden können. Ein solches Supermultiplett heißt chirales Supermultiplett.

Die nächste einfache Kombination zur Formung eines Supermultipletts besteht aus einem, vor der Eichsymmetriebrechung masselosem Vektorboson mit Spin eins. Dieser Teil besitzt aufgrund zweier möglicher Spinzustände $n_B = 2$ Freiheitsgrade und ist demnach mit einem ebenfalls masselosen Weyl-Fermion mit $n_F = 2$ zu verbinden. Ein solches Multiplett wird mit Eich- oder Vektor-Supermultiplett bezeichnet.

Bei Formulierung der Lagrangedichte unter Verwendung dieser Supermultipletts fällt auf, dass diese lediglich für den on-shell-Fall invariant unter einer supersymmetrischen Transformation ist. Hier reduzieren sich aufgrund der Bewegungsgleichung für Weyl-Fermionen ψ deren Freiheitsgrade um die Hälfte auf zwei und Gleichung (3.10) ist erfüllt. Für den off-shell-Fall muss hingegen ein komplexes, skalares Hilfsfeld F eingeführt werden, welches zwei Freiheitsgrade aufnimmt, da ohne dieses Feld zunächst nur zwei durch das bosonische Feld ϕ getragene Freiheitsgrade vier fermionischen Freiheitsgraden gegenüber stehen. Die Lagrangedichte des Hilfsfeldes lautet

$\mathcal{L} = F^*F$, die Bewegungsgleichung $F = F^* = 0$, so dass es on-shell verschwindet. Nachfolgende linke Tabelle fasst dies nochmals zusammen [32].

Freiheitsgrade des chiralen Supermultipletts	ψ	ϕ	F	Freiheitsgrade des Vektor-Supermultipletts	λ	A_μ	D
off-shell	4	2	2	off-shell	4	3	1
on-shell	2	2	0	on-shell	2	2	0

Tabelle 3.1: links: Freiheitsgrade des Standardmodell-Weyl-Fermions ξ , des komplexen Skalarfelds ϕ und des komplexen Hilfsfelds F (nicht) auf der Massenschale; rechts: Freiheitsgrade des supersymmetrischen Weyl-Fermion λ , des Standardmodell-Vektorbosons A_μ und des reellen Hilfsfelds D (nicht) auf der Massenschale

Wie der rechten Tabelle zu entnehmen ist, muss auch bei Verwendung von Vektor-Supermultipletts im off-shell-Fall ein Hilfsfeld D eingeführt werden, denn das bosonische Vektorfeld A_μ verliert hier durch die geltende inhomogene Eichtransformation ein Freiheitsgrad und besitzt damit lediglich drei Freiheitsgrade, das supersymmetrische Weyl-Fermion λ trägt jedoch vier. Im Gegensatz zum Hilfsfeld F ist D allerdings ein reelles Feld, welches ebenso aufgrund seiner trivialen Bewegungsgleichung on-shell verschwindet und die Dimension (Masse)² besitzt.

Für die bezüglich der Teilchenzahl minimalsten supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells ergibt sich schließlich auf der Massenschale für chirale Multipletts der in Tabelle 3.2 dargestellte Teilchenkontext mit entsprechenden Darstellungen in den verschiedenen Eichgruppen. Weiter lassen sich diese, wie nachfolgend gezeigt, in Superfeldern zusammenfassen, die das Superpotential bilden. Der Teilchenkontext für Eich-Supermultipletts ist in Tabelle 3.3 gezeigt [32].

chirale Supermultipletts	Superfeldnotation	Spin-0-Teilchen	Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen	Darstellung/Quantenzahl der $SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
Squarks, Quarks ($\times 3$ Generationen)	\hat{Q}	$(\tilde{u}_L, \tilde{d}_L)$	(u_L, d_L)	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
	\hat{u}^c	\tilde{u}_R^*	u_R^\dagger	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$
	\hat{d}^c	\tilde{d}_R^*	d_R^\dagger	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$
Sleptons, Leptons ($\times 3$ Generationen)	\hat{L}	$(\tilde{\nu}_e, \tilde{e}_L)$	(ν_e, e_L)	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
	\hat{e}^c	\tilde{e}_R^*	e_R^\dagger	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$
Higgs, Higgsinos	\hat{H}_u	(H_u^+, H_u^0)	$(\tilde{H}_u^+, \tilde{H}_u^0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2})$
	\hat{H}_d	(H_d^0, H_d^-)	$(\tilde{H}_d^0, \tilde{H}_d^-)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$

Tabelle 3.2: Teilchen der chiralen Supermultipletts sowie Darstellung in den verschiedenen Eichgruppen

Vorangehender Tabelle ist zu entnehmen, dass die Nomenklatur der SUSY-Partnerteilchen von der des Standardmodells nur gering abweicht. So wird den Partnerteilchen der Quarks, den Squarks lediglich ein s vorangestellt, was darauf hinweisen soll, dass es sich um skalare Teilchen

handelt. Gleiches trifft für alle Generationen der Partner von Leptonen zu, die mit Sleptonen bezeichnet werden. Die Partnerteilchen der Gluonen, W- und B-Bosonen sowie Higgs-Bosonen erhalten die Endung -ino und heißen damit Gluino, Wino, Bino und Higgsino. Nachfolgende Tabelle fasst dies nochmals zusammen.

Eich-Supermultipletts	Spin- $\frac{1}{2}$ - Teilchen	Spin-1- Teilchen	Darstellung/Quantenzahl der $SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
Gluinos, Gluonen	\tilde{g}	g	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
Winos, W-Bosonen	$\tilde{W}^\pm, \tilde{W}_3^0$	W^\pm, W_3^0	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
Bino, B-Boson	\tilde{B}	B	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

Tabelle 3.3: Teilchen der Eich-Supermultipletts und deren Darstellung in den verschiedenen Eichgruppen

Aufgrund der erhöhten Teilchenzahl und der Einführung zugehöriger Hilfsfelder ist es sinnvoll die Theorie von Masse und Nicht-Eich-Wechselwirkung für die in den chiralen Supermultipletts zusammengefassten Teilchen allgemeiner zu formulieren, wobei die Wirkung stets invariant unter supersymmetrischen Transformationen bleiben muss. Die freie Lagrangedichte eines gewöhnlichen chiralen Supermultipletts, welches ein Weyl-Fermion ψ_i , ein komplexes skalares Feld ϕ_i und das dazugehörige Hilfsfeld F_i enthält, ist durch

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i - i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + F^{*i} F_i \quad (3.11)$$

gegeben, wobei über doppelt auftretende Indizes i zu summieren ist. Die allgemeinste, Wechselwirkungen beschreibende, mit Supersymmetrie im Einklang stehende und unter supersymmetrischen Transformationen invariante Lagrangedichte einer renormierbaren Theorie lautet:

$$\mathcal{L}_{\text{WW}} = \left(-\frac{1}{2} W^{ij} \psi_i \psi_j + W^i F_i\right) + \text{c.c.} \quad (3.12)$$

Die Parameter W^{ij} mit Massendimension eins und W^i mit Massendimension zwei sind zunächst als Polynome der skalaren Feldern ϕ_i und ϕ^{i*} zu betrachten, wobei auf die angegebenen Massendimensionen durch Potenzzählung geschlossen werden kann. Die komplette Variation dieser Lagrangedichte führt auf das Resultat, dass

$$W = \frac{1}{2} M^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} y^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \quad (3.13)$$

eine komplexe Funktion ist, in welche die skalaren Felder ϕ_i als komplexe Variablen eingehen. Weitere Variablen sind die symmetrische Massenmatrix M^{ij} und die unter Vertauschung von i, j und k total symmetrische Yukawa-Kopplung y^{ijk} eines skalaren mit zwei fermionischen Feldern. Die Funktion W ist der skalare Anteil des im Allgemeinen gleichermaßen, jedoch mit Superfeldern definierten Superpotentials \mathcal{W} . Mit W^{ij} und W^i in (3.12) sind die erste und zweite Ableitung bezeichnet.

$$\begin{aligned} W^{ij} &= \frac{\delta^2 W}{\delta \phi_i \delta \phi_j} = M^{ij} + y^{ijk} \phi_k \\ W^i &= \frac{\delta^2 W}{\delta \phi_i} = M^{ij} \phi_j + \frac{1}{2} y^{ijk} \phi_j \phi_k \end{aligned} \quad (3.14)$$

Tatsächlich kann mit dem Parameter L^i mit Massendimension zwei noch eine lineare Erweiterung gefunden werden

$$\mathcal{W} = L^i \phi_i + \frac{1}{2} M^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} y^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k, \quad (3.15)$$

die allerdings lediglich Auswirkungen auf den Teil der Lagrangedichte hat, der das Skalarpotential bildet, daneben aber kein verändertes Verhalten herbeiführt. Einzig muss an ϕ_i der Anspruch gestellt werden, dass es sich um ein Eichsinglett handelt, was zunächst in einer minimalen supersymmetrischen Theorie nicht auftritt, in Erweiterungen aber eingeführt werden kann.

Unter Verwendung des skalaren Anteils W des Superpotentials und der Bewegungsgleichungen des Hilfsfeldes kann dieses algebraisch in Form des skalaren Feldes ausgedrückt werden und die Lagrangedichte hat die Form

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i - i \psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{1}{2} \left(W^{ij} \psi_i \psi_j + W_{ij}^* \psi^{\dagger i} \psi^{\dagger j} \right) - W^i W_i^*, \quad (3.16)$$

wobei $W^i W_i^*$ als skalares Potential identifiziert werden kann, welches durch

$$\begin{aligned} V_{\text{chiral}}(\phi, \phi^*) &= W^k W_k^* = \\ & M_{ik}^* M^{kj} \phi^{*i} \phi_j + \frac{1}{2} M^{in} y_{jkn}^* \phi_i \phi^{*j} \phi^{*k} + \frac{1}{2} M_{ij}^* y^{jkn} \phi^{*i} \phi_j \phi_k + \frac{1}{4} y^{ijn} y_{ikln}^* \phi_i \phi_j \phi^{*k} \phi^{*l} \end{aligned} \quad (3.17)$$

gegeben ist. Einsetzen von (3.13) und (3.17) in (3.16) liefert schließlich die Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{chiral}} &= -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i - V(\phi, \phi^*) - i \psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{1}{2} M^{ij} \psi_i \psi_j - \frac{1}{2} M_{ij}^* \psi^{\dagger i} \psi^{\dagger j} \\ &\quad - \frac{1}{2} y^{ijk} \phi_i \psi_j \psi_k - \frac{1}{2} y_{ijk}^* \phi^{*i} \psi^{\dagger j} \psi^{\dagger k} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Zur Ergänzung dieser Formulierung für chirale Supermultipletts mit Eichwechselwirkung ist zunächst anzunehmen, dass sich die Multipletts unter entsprechender Eichgruppe mit den hermiteschen Matrizen $(T^a)_i^j$, welche der Vertauschungsrelation $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$ genügen, transformieren. Da supersymmetrische Transformationen und Eichtransformationen vertauschen müssen, ist es nötig, dass sich alle Elemente des Supermultipletts in der gleichen Darstellung der Eichgruppe befinden. Um eine eichinvariante Lagrangedichte zu erhalten sind in (3.16) alle gewöhnlichen durch eichkovariante Ableitungen zu ersetzen und die Transformation des Hilfsfeldes der chiralen Supermultipletts geschickt zu wählen:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi_i &\rightarrow D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i - ig A_\mu^a (T^a \phi)_i \\ \partial_\mu \phi^{i*} &\rightarrow (D_\mu \phi^i)^* = \partial_\mu \phi^{i*} + ig A_\mu^a (\phi^* T^a)^i \\ \partial_\mu \psi_i &\rightarrow D_\mu \psi_i = \partial_\mu \psi_i - ig A_\mu^a (T^a \psi)_i \end{aligned} \quad (3.19)$$

Es ist zu erkennen, dass diese Ersetzungen bereits zu einer Wechselwirkung zwischen den Vektorbosonen aus den Eich-Supermultipletts und den skalaren und fermionischen Teilen der chiralen Supermultipletts führt. Zudem sind drei weitere renormierbare Terme mit dimensionlosen Kopplungskonstanten notwendig, die ebenfalls eine Wechselwirkung erzeugen. Es handelt sich um Terme, die den supersymmetrischen Partner des entsprechenden Standardmodell-Eichbosons oder das Hilfsfeld D^a in Wechselwirkung treten lassen:

$$(\phi^* T^a \psi) \lambda^a, \quad \lambda^{* \dagger} \left(\psi^\dagger T^a \phi \right) \quad \text{und} \quad (\phi^* T^a \phi) D^a \quad (3.20)$$

Unter Berücksichtigung der Bewegungsgleichung $D^a = -g(\phi^* T^a \phi)$ für das Hilfsfeld im Eich-

Supermultiplett erhält man schließlich für die invariante Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{chiral}} - \frac{1}{2}g^2 (\phi^* T^a \phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - i\lambda^{\dagger a} \bar{\sigma}^{\mu} D_{\mu} \lambda^a \\ - \sqrt{2}g (\phi^* T^a \psi) \lambda^a - \sqrt{2}g \lambda^{\dagger a} (\psi^{\dagger} T^a \phi), \end{aligned} \quad (3.21)$$

wobei $\mathcal{L}_{\text{chiral}}$ durch (3.18) gegeben ist. Die übrigen Terme sind eine Kombination aus der Lagrangedichte der Eichfelder und der Wechselwirkungsterme (3.20). Weiter ist $F_{\mu\nu}^a = \partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a + g f^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c$ der gewöhnliche Yang-Mills-Feldstärketensor und $D_{\mu} \lambda^a = \partial_{\mu} \lambda^a + g f^{abc} A_{\mu}^b \lambda^c$ die kovariante Ableitung der Gauginos. Zu beachten ist, dass über die verschiedenen Eichgruppen mit unterschiedlichen Kopplungskonstanten zu summieren ist.

Wie bereits erwähnt haben die Teilchen des Standardmodells zunächst die gleichen Massen wie ihre supersymmetrischen Partner. Dies widerspricht jedoch allen bisherigen Experimenten, so dass in die Lagrangedichte weitere Terme eingefügt werden müssen, die diese Symmetrie brechen und damit zu Massendifferenzen führen. Das Hinzufügen von

$$\mathcal{L}_{\text{schwach}} = - \left(\frac{1}{2} M_a \lambda^a \lambda^a + \frac{1}{6} A^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \frac{1}{2} B^{ij} \phi_i \phi_j + t^i \phi_i - \frac{1}{2} C_i^{jk} \phi^{i*} \phi_j \phi_k \right) + \text{h.c.} - (m^2)_j^i \phi^{j*} \phi_i \quad (3.22)$$

bricht die Supersymmetrie wie gewünscht. Die Masse M_a der Gauginos, die skalaren Massenquadratsterme $(m^2)_j^i$ und B^{ij} , die dreifachskalaren Kopplungen A^{ijk} und C_i^{jk} , sowie die Kaulquappen-Kopplung t^i sind klein zu wählen, so dass Beiträge zu Quantenkorrekturen der Higgsmasse weiterhin klein bleiben und das Hierarchieproblem gelöst wird. Deshalb spricht man in diesem Zusammenhang von einer schwachen Symmetriebrechung, da die eigentlichen Symmetrieeigenschaften erhalten bleiben.

Die in (3.22) angegebenen Terme haben keine quadratischen Divergenzen in den Quantenkorrekturen der skalaren Massen, wobei der letzte Term in Klammern einige Voraussetzungen erfüllen muss, damit seine divergenten Beiträge verschwinden. Nach dem Einbeziehen der Eichwechselwirkung und dem schwachen Brechen der Supersymmetrie ist das Skalarpotential offensichtlich nicht mehr alleine durch (3.17) gegeben, sondern muss vielmehr zu

$$V_{\text{total}} = V_{\text{chiral}} + \frac{1}{2}g^2 (\phi_i^* T_a \phi_i) (\phi_j^* T_a \phi_j) - \mathcal{L}_{\text{schwach}} \quad (3.23)$$

erweitert werden. An der Struktur ist bereits zu erkennen, dass das komplett ausgeschriebene Skalarpotential unübersichtliche Ausmaße annehmen kann. Insgesamt wurden nun alle wesentlichen Punkte angesprochen mit denen sich eine konsistente supersymmetrische Theorie formulieren lässt. Im folgenden Abschnitt wird eine minimale Variante vorgestellt, auf der die meisten supersymmetrischen Theorien aufbauen.

3.3 Das Minimal Supersymmetrische Standardmodell

Das minimal-supersymmetrische Standardmodell, kurz MSSM, ist minimal in dem Sinne, dass es ein für die Phänomenologie brauchbares Modell darstellt, ohne alle zulässigen Erweiterungen der Lagrangedichte zu gebrauchen. Natürlich ist hier die Supersymmetrie schwach gebrochen, um nicht entartete Massen von Standardmodell-Teilchen und deren Superpartnern erzeugen zu können.

In voller Allgemeinheit lassen sich 105 freie Massen, Phasen und Mischungswinkel zählen, die nicht durch Rotationen und Neudefinitionen von Phasen und der Flavour-Basis von Quark- und

Lepton-Supermultipletts verschwinden und kein Gegenstück im Standardmodell haben [33]. Allerdings gibt es strenge experimentelle Grenzen für Flavourmischung und CP-Verletzung, so dass die Zahl der Parameter reduziert werden kann und in der Lagrangedichte [32]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{schwach}}^{\text{MSSM}} = & -\frac{1}{2} \left(M_3 \tilde{g} \tilde{g} + M_2 \tilde{W} \tilde{W} + M_1 \tilde{B} \tilde{B} + \text{h.c.} \right) \\
& - m_{\tilde{Q}}^2 |\tilde{Q}|^2 - m_{\tilde{L}}^2 |\tilde{L}|^2 - m_{\tilde{u}^c}^2 |\tilde{u}^c|^2 - m_{\tilde{d}^c}^2 |\tilde{d}^c|^2 - m_{\tilde{e}^c}^2 |\tilde{e}^c|^2 \\
& - m_{H_u}^2 |H_u|^2 - m_{H_d}^2 |H_d|^2 - (B\mu H_d^i H_u^j \epsilon_{ij} + \text{c.c.}) \\
& - \left(Y_e A_e \tilde{L}^j \tilde{e}^c H_d^i \epsilon_{ij} - Y_d A_d \tilde{Q}^{ja} \tilde{d}_a^c H_d^i \epsilon_{ij} - Y_u A_u \tilde{Q}^{ja} \tilde{u}_a^c H_u^i \epsilon_{ij} + \text{h.c.} \right) \quad (3.24)
\end{aligned}$$

anstelle von flavourmischenden (3×3) -Matrizen lediglich die in der Generationenbasis zur Diagonalmatrix in der Super-CKM-Basis proportionale Squark- und Sleptonmassenquadrate $m_{\tilde{Q}}^2$, $m_{\tilde{L}}^2$, $m_{\tilde{u}^c}^2$, $m_{\tilde{d}^c}^2$ und $m_{\tilde{e}^c}^2$ auftreten, die Massen also auch bei gleicher elektroschwachen Quantenzahl entartet sind. Weiter schließen die Massenquadrate $m_{\tilde{Q}}^2$, $m_{\tilde{u}^c}^2$, $m_{H_u}^2$ und $m_{H_d}^2$ zusätzliche komplexe Phasen aus, die zu starken CP-verletzenden Effekten führen können.

In der angegebenen Lagrangedichte wird weiter durch die Proportionalität der dreifachskalaren Kopplungen $Y_e A_e$, $Y_d A_d$ und $Y_u A_u$ mit der Dimension Masse zu den entsprechenden Yukawa-Kopplungs-Matrizen des Standardmodells sichergestellt, dass ausschließlich die dritte Generation größere Beiträge zu Flavour-Effekten liefert. Zuletzt treten neben den aus Tabelle 3.2 bekannten Superfeldern die drei Massen der Gauginos M_i sowie der zwischen Up- und Down-Higgs mischende Parameter $B\mu$ auf.

Die Variable μ führt auf das nach ihr benannte μ -Problem. Es ist nicht klar, weshalb sie sich grob in der Größenordnung von 10^2 bis 10^3 GeV befinden sollte, was eine Vakuumerwartungswert des Higgs-Bosons von circa 174 GeV ohne unnatürliche Aufhebungen des $|\mu|^2$ durch weitere Terme ermöglicht, und nicht beispielsweise in der Größenordnung der Planckmasse liegt. Zur Lösung dieser Fragestellung existieren bereits einige Erweiterungsansätze für das MSSM.

Darüberhinaus werden im MSSM keine Terme zugelassen, die eine als R-Parität bezeichnete Symmetrie verletzen. Näheres hierzu soll im folgenden Abschnitt erläutert werden, nachdem jetzt das Massenspektrum aller Teilchenklassen des MSSM angeführt und kurz erläutert wird. Die beiden neutralen Komponenten der Higgsinos mischen mit Bino und Wino zu vier neutralen Masseneigenzuständen, welche Neutralinos genannt werden. Als Charginos bezeichnet man die vier Masseneigenzustände, die eine Mischung zwischen den beiden geladenen Higgsinokomponenten mit den beiden geladenen Wino bilden.

Sleptonen und Squarks mischen in guter Näherung paarweise, d.h. links- und rechtshändige Teilchen gleicher Art bilden ebenso zwei Masseneigenzustände. Aufgrund ihrer relativ kleinen Yukawa-Kopplung wird die Links-Rechts-Mischung der ersten beiden Generationen oft vernachlässigt. Im Gegensatz zum Standardmodell beinhaltet die dritte Generation üblicherweise die leichtesten skalaren Partnerteilchen.

Acht Masseneigenzustände werden von den Higgs-Teilchen gebildet. Drei dieser Zustände sind Goldstonebosonen für die elektroschwache Symmetriebrechung und damit masselos. Sie lassen sich in die longitudinalen Freiheitsgrade von W- und Z-Boson absorbieren und treten demnach nicht weiter explizit in Erscheinung. Ein leichtes Higgs h , ein schweres Higgs H , zwei geladene Higgs H^\pm und ein CP-ungerader Zustand A^0 bilden die weiteren Masseneigenzustände. Der letzte Teilchentyp, die Gluinos, mischen nicht, so dass ihre Eichzustände den Masseneigenzuständen gleichen.

Eicheigenzustände	Masseneigenzustände
$H_u^0, H_d^0, H_u^+, H_d^-$	h, H, A^0, H^\pm
$\tilde{u}_L, \tilde{u}_R, \tilde{d}_L, \tilde{d}_R$ $\tilde{s}_L, \tilde{s}_R, \tilde{c}_L, \tilde{c}_R$ $\tilde{t}_L, \tilde{t}_R, \tilde{b}_L, \tilde{b}_R$	(identisch) (identisch) $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2$
$\tilde{B}, \tilde{W}^0, \tilde{H}_u^0, \tilde{H}_d^0$ $\tilde{W}^\pm, \tilde{H}_u^\pm, \tilde{H}_d^\pm$	$\chi_1^0, \chi_2^0, \chi_3^0, \chi_4^0$ χ_1^\pm, χ_2^\pm
\tilde{g}	(identisch)

Tabelle 3.4: Massenspektrum des minimal supersymmetrischen Standardmodell

3.4 R-Parität

Da die Lagrangedichte des MSSM ausschließlich die nötigsten Terme umfasst, die auf eine gültige phänomenologische Beschreibung der Natur führen, können weitere Ausdrücke hinzugefügt werden, welche die Lagrangedichte invariant unter Eich- und supersymmetrischen Transformationen lassen. Offensichtlich ermöglichen diese zusätzlichen Terme aber die Verletzung der Baryon- oder Leptonzahl oder beider, was weitreichende Folgen hat. So können beispielsweise durch solch eine Verletzung zwischen Standardmodell-Teilchen skalare Teilchen ausgetauscht werden. Dies führt zu extrem kurzen Lebensdauern von Protonen, die in der Natur jedoch als sehr stabiler Bindungszustand beobachtet werden können. Weiter würde das leichteste supersymmetrische Teilchen in Standardmodell-Teilchen zerfallen können und somit nicht länger als Kandidat für Dunkle Materie gelten [34].

Zur Erhaltung von Baryon- und Leptonzahl wurde in mehreren Schritten die sogenannte R-Parität entwickelt, welche in supersymmetrischen Modellen eine große Rolle spielt. Zunächst führte man eine kontinuierliche mit R-Symmetrie bezeichnete $U(1)$ -Symmetrie ein, deren Transformation auf Eichsuperfelder und die beiden Higgs-Superfelder wirkt und nicht mit supersymmetrischen Transformationen vertauscht. Eine solches ungebrochenes kontinuierliches Konstrukt bedingt jedoch, dass Gluinos selbst nach spontaner Brechung der Supersymmetrie masselos bleiben [35]. Dies führt zu relativ leichten, R-Hadronen genannten Bindungszuständen von Quarks, Antiquarks und Gluinos, die in der Natur nicht beobachtet werden [36]. Zudem wird verhindert, dass in gravitationumfassenden, supersymmetrischen Theorien, Gravitinos Masse besitzen.

Nun wurde die diskrete Materie-Parität [37] $P_M = (-1)^{3(B-L)}$ eingeführt, welche eichinvariante Superpotentialanteile, die ungerade unter P_M transformieren, von Beginn an verbietet und somit Erhaltungssätze für Baryon- und Leptonzahl ermöglicht. Es ist zu bemerken, dass in chiralen Supermultipletts alle linkshändigen Teilchen sowie supersymmetrische Partner (\hat{Q}_i) die Baryonzahl $B = +1/3$, alle rechtshändigen sowie Partner (\hat{u}_i^c, \hat{d}_i^c) die Baryonzahl $B = -1/3$ tragen und für die übrigen $B = 0$ gilt. Ganz ähnlich tragen linkshändige Leptonen sowie entsprechende Parterteilchen (\hat{L}_i) eine Leptonzahl von $L = 1$, rechtshändige sowie Partner eine Leptonzahl $L = -1$ und alle übrigen keine Leptonzahl.

Schließlich erweiterte man die bisherige Materie-Parität zur R-Parität, welche in einer Theorie mit Drehimpuls-Erhaltung äquivalent ist. Es handelt sich um eine diskrete Z_2 -Symmetrie, einer Untergruppe der oben genannten R-Symmetrie. Mit dem Spin s lautet die formale Beschreibung

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2s}. \quad (3.25)$$

Es ist sofort zu erkennen, dass alle aus dem Standard-Modell bekannten Teilchen die Quantenzahl $P_R = 1$ (gerade) und ihre supersymmetrischen Partner die Quantenzahl $P_R = -1$ (ungerade) tragen. Des Weiteren besitzen alle Higgs-Bosonen die Quantenzahl $P_R = 1$ [38].

Ist nun R-Parität exakt erfüllt, so gibt es keine Mischung zwischen supersymmetrischen und Standardmodell-Teilchen. Es kann weiter ausschließlich eine gerade Anzahl von R-Parität-ungeraden Teilchen mit denjenigen des Standardmodells wechselwirken. Insbesondere gibt es keinen Vertex mit nur einem supersymmetrischen Teilchen. Dies führt zwingend dazu, dass diese lediglich paarweise bzw. in gerader Zahl produziert werden können und das leichteste supersymmetrische Teilchen nicht in Standardmodell-Teilchen zerfallen kann, also stabil ist und damit einen guten Kandidaten für nicht baryonische Dunkle Materie darstellt.

Trotz den phänomenologischen Auswirkungen und damit verbundener Probleme wird ein Brechen der R-Parität diskutiert. Bislang werden durch Beobachtung bestätigte Neutrinomassen und -mischungen häufig mittels des sogenannten seesaw-Mechanismus erklärt, welcher rechtshändige Neutrinos bei einer Masse von $\sim 10^{14}$ GeV vorsieht. Ein Modell mit gebrochener R-Parität hat den großen Vorteil, dass Neutrinophysik schon im TeV-Bereich vollständig beschrieben werden kann und damit zeitnah experimentell zugänglich ist. Zudem fällt eine allzu große Skalendifferenz weg.

Zur Brechung der R-Parität gibt es mehrere Ansätze. So ist eine explizite Verletzung durch Terme der Massendimension zwei, drei und vier möglich. Im allgemeinsten Fall treten im wesentlichen bilineare, trilineare und schwache Massenterme auf und man erhält 96 zusätzliche, physikalisch bedeutsame Parameter [35]. Alternativ gibt es die Option R-Parität spontan zu brechen. Hierzu können rechtshändige Sneutrinos eingeführt werden, die aufgrund der Form des Potentials einen Vakuumerwartungswert besitzen. Dadurch entsteht ein masseloses Goldstone-Boson, Majoron genannt. Die auftretenden Vakuumerwartungswerte der linkshändigen Sneutrinos sind durch Experimente auf kleine Werte beschränkt.

3.5 Erweiterungen des MSSM

In diesem Abschnitt werden allgemeine Erweiterungsmöglichkeiten von supersymmetrischen Standardmodellen (SSM) sowie zwei spezielle Erweiterungen des MSSM aufgezählt und knapp erläutert [39]. Wie aus vorangehendem Abschnitt bereits hervorgeht, ist R-Parität und ihre Verletzung eine mögliche, allgemeine Erweiterung eines jeden SSM. Vor allem bei Fragestellungen nichtbaryonische dunkle Materie betreffend wird das in Verbindung mit exakter R-Parität stabile leichteste supersymmetrische Teilchen (LSP) als ein Kandidat für schwachwechselwirkende massive Teilchen (WIMP) betrachtet [40]. Aber auch in Modellen mit beispielsweise bilinearer R-Paritätsverletzung (BRpV) können Teilchen, wie das Axion, Axino oder das Gravitino [41], mit ähnlichen Eigenschaften gefunden werden.

Im lokalen Grenzwert ist es bei den meisten SSM möglich die Gravitation mit dem Standardmodell zu vereinigen. Dies führt auf die sogenannte Supergravitation (SUGRA), deren Vorteil darin besteht, dass viele Parameter bei niedriger Energie von nur wenigen an der GUT-Energieskala durch das Verfahren der Renormierungsgruppengleichungen abgeleitet werden kön-

nen. Für $Q = m_{\text{GUT}}$ gilt:

$$\begin{aligned} M_3 &= M_2 = M_1 = m_{1/2} \\ m_Q^2 &= m_{\tilde{u}^c}^2 = m_{\tilde{d}^c}^2 = m_{\tilde{L}}^2 = m_{\tilde{e}^c}^2 = m_0^2 \cdot \mathbb{1} \\ m_{H_d}^2 &= m_{H_u}^2 = m_0^2 \\ A_u &= A_d = A_e = A_0 \end{aligned}$$

Bei der späteren Parameterwahl wird stets von einer minimalen Version, dem mSUGRA-Szenario ausgegangen. Mittels Verletzung von SUGRA ist es möglich nicht nur dem supersymmetrischen Partner des Gravitons, dem Gravitino, sondern auch allen weiteren supersymmetrischen Partnern eine Masse zuzuordnen.

Im speziellen, dem MSSM nächsten Modell (NMSSM) wird ein zusätzliches unter der Eichgruppe des Standardmodells als Singlett transformierendes Superfeld $\hat{\Phi}$ eingeführt [42]. Anstelle des expliziten μ -Terms im MSSM der die Selbstwechselwirkung der Higgsbosonen bestimmt, wird durch die Kopplung $\hat{H}_d \hat{H}_u \hat{\Phi}$ im NMSSM ein effektiver μ -Term erzeugt, sofern $\hat{\Phi}$ einen Vakuumerwartungswert in der Größenordnung der schwach supersymmetriebrechenden Terme besitzt. Ist diese Skala nicht all zu hoch, befindet sich die effektive Selbstwechselwirkung automatisch in der Größenordnung der elektroschwachen Symmetriebrechung. So löst das NMSSM das μ -Problem und ist das einfachste Modell, das auch unter Supersymmetriehaltung die elektroschwache Symmetrie brechen kann. Der Teilchengehalt ist um ein CP-gerades Skalar, ein CP-ungerades Skalar sowie ein zusätzliches Neutralino erweitert, die jeweils mit den MSSM-Feldern mischen. Abschließend sei das $\mu\nu$ SSM erwähnt [43], welches ebenfalls das μ -Problem löst. Ausführlich heißt es μ von ν supersymmetrisches Standardmodell, da anstelle des aus dem MSSM bekannten μ -Terms ein Term tritt, der die Kopplung von möglicherweise mehreren Generationen von Eichsinglett-Neutrinosuperfeldern $\hat{\nu}_i^c$ mit den Higgs-Bosonen beschreibt. Besitzt die skalare Komponente dieser Superfelder einen Vakuumerwartungswert, wird eine effektive Kopplung $\mu \hat{H}_d \hat{H}_u$ erzeugt. Zudem kann eine explizite Brechung der R-Parität vorliegen und es können Neutrinos mit neutralen Eichbosonen sowie Higgsinos mischen.

4 Eine spezielle Erweiterung des MSSM

4.1 Superpotential und Symmetriebrechung

Im Folgenden wird ein spezielles supersymmetrisches Modell mit spontan gebrochener R-Parität eingeführt, das Gegenstand dieser Arbeit ist. Der bereits erläuterte Teilchenkontext des MSSM wird um drei Felder erweitert. Hinzu kommt dem NMSSM nachempfunden ein $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ Singlett-Superfeld $\hat{\Phi}$, welches an das elektroschwache Higgsdublett koppelt und keine Leptonzahl trägt. Außerdem werden die Felder $\hat{\nu}_i^c$ und \hat{S}_i hinzugefügt, bei denen es sich ebenfalls um $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ Singlett-Superfeld handelt und welche die Leptonzahlen -1 und 1 tragen. Das allgemeinste Superpotential, das diese Felder beinhaltet und die Leptonzahl erhält, lautet [44]:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{allgemein}} = \epsilon_{ab} & \left[h_u^{ij} \hat{Q}_i^a \hat{U}_j \hat{H}_u^b + h_d^{ij} \hat{Q}_i^b \hat{D}_j \hat{H}_d^a + h_e^{ij} \hat{L}_i^b \hat{E}_j \hat{H}_d^a + h_\nu^{ij} \hat{L}_i^a \hat{\nu}_j^c \hat{H}_u^b - \hat{\mu} \hat{H}_d^a \hat{H}_u^b \right. \\ & \left. - \left(h_0 \hat{H}_d^a \hat{H}_u^b - \delta^2 \right) \hat{\Phi} \right] + h^{ij} \hat{\Phi} \hat{\nu}_i^c \hat{S}_j + M_R^{ij} \hat{\nu}_i^c \hat{S}_j + \frac{1}{2} M_\Phi \hat{\Phi}^2 + \frac{\lambda}{3!} \hat{\Phi}^3 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Zusammen mit dem $\hat{\mu}$ -Term beschreiben die ersten drei Terme das R-Parität erhaltende MSSM, die letzten drei enthalten ausschließlich die neu hinzugekommenen Felder und die übrigen Terme verknüpfen das MSSM mit den zusätzlichen Singlett-Superfeldern. Wie auch bei den gewöhnlichen Yukawa-Kopplungen h_u^{ij} , h_d^{ij} und h_e^{ij} handelt es sich bei den Kopplungen h_ν^{ij} , h^{ij} und M_R^{ij} um zunächst beliebige, komplexe Matrizen im Generationen-Raum. Entlang der neutralen Richtung ergibt sich hieraus das allgemeine Skalarpotential (B.1). Der Einfachheit halber wird nachfolgend jedoch nur von einer Generation von Superfeldern $\hat{\nu}^c$ und \hat{S} ausgegangen, womit $h_\nu^{ij} \rightarrow h_\nu^i$, $h^{ij} \rightarrow h$ und $M_R^{ij} \rightarrow M_R$ gilt [45]. Weiter wird das Superpotential dahingehen vereinfacht, dass ausschließlich trilineare Terme betrachtet werden. Konkret werden die Größen $\hat{\mu}$, δ , M_R und M_Φ gleich Null gesetzt. Das Superpotential hat nun die Form [46]

$$\mathcal{W} = \epsilon_{ab} \left(h_u^{ij} \hat{Q}_i^a \hat{U}_j \hat{H}_u^b + h_d^{ij} \hat{Q}_i^b \hat{D}_j \hat{H}_d^a + h_e^{ij} \hat{L}_i^b \hat{E}_j \hat{H}_d^a + h_\nu^i \hat{L}_i^a \hat{\nu}^c \hat{H}_u^b - h_0 \hat{H}_d^a \hat{H}_u^b \hat{\Phi} \right) + h \hat{\Phi} \hat{\nu}^c \hat{S} + \frac{\lambda}{3!} \hat{\Phi}^3 \quad (4.2)$$

Es ergibt sich das skalare Potential (B.2) im neutralen Sektor. Die einfachste Möglichkeit R-Parität spontan zu brechen wird durch die Vakuumerwartungswerte der beiden Singlett-Felder, deren Leptonzahl ungleich Null ist, realisiert. Die energetische Größenordnung der Symmetriebrechung wird durch die Größe dieser Erwartungswerte, die ein globales Minimum darstellen [47], bestimmt.

$$\langle \tilde{\nu}^c \rangle = \frac{v_R}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \langle \tilde{S} \rangle = \frac{v_S}{\sqrt{2}} \quad (4.3)$$

Weiter wird die Verletzung der R-Parität durch die vornehmlich kleinen Vakuumerwartungswerte

$$\langle \tilde{\nu}_{Li} \rangle = \frac{v_{Li}}{\sqrt{2}} \quad (4.4)$$

der linkshändigen Sneutrinos gesteuert. Der Verlust von Leptonzahlerhaltung respektive R-Parität führt durch die resultierende Brechung der mit ihr verbundenen globalen Symmetrie zur Entstehung eines masselosen, CP-ungeraden skalaren Nambu-Goldstone-Bosons J , Majoron genannt, sowie eines massiven skalaren Teilchens S_J . Per Konstruktion handelt es sich bei $\tilde{\nu}^c$ um ein rechtshändiges Sneutrino, einem Singlett unter elektroschwacher Symmetrie. Die Folge ist ein geringer Beitrag des Goldstone-Bosons zur unsichtbaren Zerfallsbreite des Z -Bosons durch den Kanal $Z \rightarrow JS_J$, der durch strenge experimentelle Vorgaben beschränkt ist. Das Majoron kann mit dem Imaginärteil von [44, 45]

$$\frac{\sum_i v_{Li}^2}{Vv^2} (v_u H_u - v_d H_d) + \sum_i \frac{v_{Li}}{V} \tilde{\nu} + \frac{v_S}{V} S - \frac{v_R}{V} \tilde{\nu}^c, \quad (4.5)$$

identifiziert werden, wobei $V = \sqrt{v_R^2 + v_S^2} \sim \text{TeV}$ eine charakteristische Energieskala darstellt. Des Weiteren trägt es eine Leptonzahl von zwei.

Die Brechung der elektroschwachen Symmetrie ist wie üblich auch in diesem Modell von den Vakuumerwartungswerten der Higgs-Felder $\langle H_u \rangle = \frac{v_u}{\sqrt{2}}$ und $\langle H_d \rangle = \frac{v_d}{\sqrt{2}}$ getrieben, wobei für ihr Verhältnis $\tan \beta = \frac{v_u}{v_d}$ gilt. Die Größe dieser Erwartungswerte wird durch die Masse des W -Bosons $m_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4}$ mit $v^2 = v_u^2 + v_d^2 + \sum_i v_{Li}^2$ eingeschränkt. Der die Selbstkopplung der Higgsteilchen bestimmende μ -Parameter ist hier im Allgemeinen durch die Summe

$$\mu = \hat{\mu} + h_0 \frac{v_\Phi}{\sqrt{2}} \quad (4.6)$$

gegeben, wobei $\langle \Phi \rangle = \frac{v_\Phi}{\sqrt{2}}$ der Vakuumerwartungswert des dritten Singlettfelds beschreibt. Im speziellen Fall $\hat{\mu} = 0$ ist das μ -Problem nach der Art des NMSSM durch einen allein von v_Φ und h_0 abhängigen, effektiven μ -Parameter gelöst.

4.2 Massenbasis und Mischungen

Zur Berechnung von totalen Zerfallsbreiten bzw. Verzweigungsverhältnissen ist es notwendig die Eicheigenbasis zu verlassen und in die Masseneigenbasis zu wechseln. Vor allem bei intern propagierenden Teilchen hat diese Basis große Vorteile, da die Massenmatrizen Diagonalgestalt haben. Ein Basiswechsel erfolgt durch Multiplikation von Drehmatrizen. Zunächst lautet die Eicheigenbasis für ungeladene und geladene Fermionen [45, 48]

$$\psi'^{0T} = \left(\tilde{B}^0, \tilde{W}_3^0, \tilde{H}_d^0, \tilde{H}_u^0, \nu_i, \nu^c, S, \Phi \right) \quad (4.7)$$

$$\psi'^{-T} = \left(\tilde{W}^-, \tilde{H}_d^-, e, \mu, \tau \right) \quad (4.8)$$

$$\psi'^{+T} = \left(\tilde{W}^+, \tilde{H}_u^+, e^c, \mu^c, \tau^c \right) \quad (4.9)$$

Mit den die Massenmatrizen diagonalisierenden Rotationsmatrizen \mathcal{N} , \mathcal{V} und \mathcal{U} können die Eich- ψ_j^0, ψ_j^\pm in die jeweiligen Masseneigenzustände ψ_j^0, ψ_j^\pm transformiert werden:

$$\psi_i^0 = \mathcal{N}_{ij} \psi_j'^0, \quad \psi_i^+ = \mathcal{V}_{ij} \psi_j'^+, \quad \psi_i^- = \mathcal{U}_{ij} \psi_j'^- \quad (4.10)$$

Im Allgemeinen handelt es sich bei den Rotationsmatrizen um komplexwertige Objekte mit vollem Rang, deren exakte analytische Form schwer zu bestimmen ist. Da jedoch die einzelnen

Massenmatrizen diverse Eigenschaften erfüllen, die das Diagonalisierungsverfahren vereinfachen, können Näherungsformeln angegeben werden.

Bei den neutralen Fermionen lautet der entsprechende Massenterm in der Lagrangedichte der Eicheigenbasis $\mathcal{L}_{\text{mass}}^0 = -\frac{1}{2}\psi'^{0T} M_N \psi'^0 + \text{h.c.}$. Es kann zunächst angenommen werden, dass der die drei Neutrinogenerationen umfassende (3×3) -Block der Massenmatrix aufgrund der geringen Masse dieser Teilchen mit einem “seesaw“-artigen Verfahren effektiv ausgedrückt werden kann. Betrachtet man die volle Massenmatrix [45, 49]

$$M_N = \begin{pmatrix} M_{\chi^0} & m_{\chi^0\nu} & m_{\chi^0\nu^c} & 0 & m_{\chi^0\Phi} \\ m_{\chi^0\nu}^T & 0 & m_D & 0 & 0 \\ m_{\chi^0\nu^c}^T & m_D^T & 0 & M_{\nu^c S} & M_{\nu^c\Phi} \\ 0 & 0 & M_{\nu^c S}^T & 0 & M_{S\Phi} \\ m_{\chi^0\Phi}^T & 0 & M_{\nu^c\Phi}^T & M_{S\Phi}^T & M_\Phi \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

so dürfen hierfür die Untermatrizen $m_{\chi^0\nu}^T$ und m_D lediglich kleine Einträge enthalten. Dies trifft in der Tat zu, da es sich zum einen um die R-paritätsverletzende Neutrino-Neutralino-Mischmatrix

$$m_{\chi^0\nu}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}g'v_{Le} & \frac{1}{2}gv_{Le} & 0 & \epsilon_e \\ -\frac{1}{2}g'v_{L\mu} & \frac{1}{2}gv_{L\mu} & 0 & \epsilon_\mu \\ -\frac{1}{2}g'v_{L\tau} & \frac{1}{2}gv_{L\tau} & 0 & \epsilon_\tau \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$\text{mit } \epsilon_i = h_\nu^i \frac{v_R}{\sqrt{2}} \quad (4.13)$$

und zum anderen um die gewöhnlich definierte Diracmassenmatrix $(m_D)_i = \frac{1}{\sqrt{2}}h_\nu^i v_u$ handelt. Alle weiteren in (4.11) auftretenden Untermatrizen wie beispielsweise die Neutralino-Massenmatrix M_{χ^0} sind in Anhang B.2.1 zu finden. Die effektive Neutrino-Massenmatrix $m_{\nu\nu}^{\text{eff}}$ berechnet sich schließlich näherungsweise nach [45, 50]

$$m_{\nu\nu}^{\text{eff}} = -M_D^T \cdot M_H^{-1} \cdot M_D, \quad (4.14)$$

wobei M_H^{-1} die inverse Massenmatrix aller neutralen Fermionen M_N unter Ausschluß der Neutrinos bezeichnet und $M_D^T = \begin{pmatrix} m_{\chi^0\nu}^T & m_D & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt. Definiert man schließlich den neben ϵ_i zweiten, für die Neutrinophysik wichtigen Parameter

$$\Lambda_i = \epsilon_i v_d + \mu v_{Li}, \quad (4.15)$$

so lässt sich die effektive Neutrino-Massenmatrix nach einigen algebraischen Umformungen sowie der Vernachlässigung von Produkten $v_{Li} \cdot h_\nu^i$ in M_H auf Baumgraphenniveau schreiben als

$$-\left(m_{\nu\nu}^{\text{eff}}\right)_{ij} = a\Lambda_i\Lambda_j + b(\epsilon_i\Lambda_j + \epsilon_j\Lambda_i) + c\epsilon_i\epsilon_j. \quad (4.16)$$

Die benutzten Koeffizienten a , b und c sind ebenfalls in Anhang B.2.1 zu finden. Es ist zu bemerken, dass diese Koeffizienten weder von h_ν^i noch von v_{Li} abhängen, so dass die Neutrinomassen und -mischungswinkel rein über eine Variation von $\vec{\Lambda}$ und $\vec{\epsilon}$ bestimmt werden können. Bevor dies im folgenden Abschnitt genauer ausgeführt wird, sei zunächst noch der Entwicklungspara-

meter [49]

$$(\xi)_{ij} = (M_D^T M_H^{-1})_{ij} = K_\Lambda^j \Lambda_i + K_\epsilon^j \epsilon_i \quad (4.17)$$

definiert. Für die bereits angesprochene Näherung von ausschließlich trilinearen Termen im Superpotential sind die Koeffizienten \vec{K}_Λ und \vec{K}_ϵ erneut in Anhang B.2.1 aufgeführt. Mittels dieser Entwicklungsparametern und den damit verbundenen Näherungen lässt sich nun die Diagonalisierungsmatrix der neutralen Fermionen in der Form [48, 51]

$$\mathcal{N}^* = \begin{pmatrix} N^{0*} (1 - \frac{1}{2} \xi^\dagger \xi) & N^{0*} \xi^\dagger \\ -V^{(\nu)T} \xi & V^{(\nu)T} (1 - \frac{1}{2} \xi \xi^\dagger) \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

schreiben, wobei die beiden Matrizen

$$N^{0*} M_H N^{0\dagger} = \text{diag} \{M_{H_i}\} \quad (4.19)$$

$$V^{(\nu)T} m_{\nu\nu}^{\text{eff}} V^{(\nu)} = \text{diag} \{m_{\nu_i}\} \quad (4.20)$$

weiterhin als nur numerisch bekannt anzunehmen sind.

Im Bereich der geladenen Nicht-Standardmodell-Fermionen entspricht die Chargino-Massenmatrix M_{χ^\pm} exakt derjenigen des MSSM und ist Anhang B.2.2 zu entnehmen. Der Massenterm in der Lagrangedichte der Eigeigenbasis ist durch $\mathcal{L}_{\text{mass}}^\pm = -\frac{1}{2} (\psi_j'^{-T} M_\pm \psi_j'^+ + \psi_j'^+ M_\pm^T \psi_j'^-) + \text{h.c.}$ gegeben, wobei für die Massenmatrix [52]

$$M_\pm = \begin{pmatrix} M_{\chi^\pm} & E' \\ E & M_l \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

gilt, womit sie derjenigen in einem Modell mit bilinear gebrochener R-Parität gleicht. Die beiden Untermatrizen E und E' führen zu einer Mischung zwischen Chargino und geladenem Lepton und sind gegeben durch:

$$E_i = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} g v_{L_i}, \quad -\epsilon_i \right) \quad (4.22)$$

$$E_i'^T = \left(0, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j h_e^{ij} v_{L_j} \right) \quad (4.23)$$

Mit M_l ist die gewöhnliche Leptonmassenmatrix bezeichnet, die aus Produkten von Yukawakopplungen h_e^{ij} mit dem Vakuumerwartungswert v_d besteht. Für eine Diagonalisierung der Gesamtmatrix ist es deshalb notwendig, dass eine Diagonalisierung der Yukawakopplungen h_e^{ij} möglich ist. Da insgesamt die Massenmatrix der geladenen Fermionen M_\pm gegenüber derjenigen der neutralen Fermionen M_N nicht symmetrisch ist, werden für die Diagonalisierung zwei Matrizen \mathcal{V} und \mathcal{U} benötigt. Dies geht offensichtlich aus der Lagrangedichte und dem Transformationsverhalten (4.10) hervor und es gilt:

$$\mathcal{U}^* M_\pm \mathcal{V}^\dagger = \text{diag} \{m_{\chi_i^\pm}, m_i^l\} \quad \text{bzw.} \quad (4.24)$$

$$\mathcal{V} M_\pm^\dagger M_\pm \mathcal{V}^\dagger = \mathcal{U}^* M_\pm M_\pm^\dagger \mathcal{U}^T = \text{diag} \{m_{\chi_i^\pm}^2, m_i^{l,2}\} \quad (4.25)$$

Analog zu den neutralen Fermionen sind die R-paritätsverletzenden Terme der geladenen Fermionen klein, das heißt konkret $E' \approx 0$. Somit ist es erneut möglich Entwicklungsparameter zu

definieren, welche in eine genäherte Darstellung der Diagonalisierungsmatrizen eingehen. Mit [52]

$$\xi_L^* = EM_{\chi^\pm}^{-1} \quad \text{und} \quad (4.26)$$

$$\xi_R^* = M_l^\dagger EM_{\chi^\pm}^{-1} \left(M_{\chi^\pm}^{-1} \right)^T = M_l^\dagger \xi_L^* \left(M_{\chi^\pm}^{-1} \right)^T, \quad (4.27)$$

deren ausführliche Form Anhang B.2.2 zu entnehmen ist, und den beiden erneut lediglich numerisch bekannten Matrizen

$$U_R M_{\chi^\pm} U_L^\dagger = \text{diag} \left\{ M_{\chi_i^\pm} \right\} \quad (4.28)$$

$$V_L M^{(l)} V_R^\dagger = \text{diag} \{ m_{l_i} \} \quad (4.29)$$

können die beiden zur Diagonalisierung der Massenmatrix der geladenen Fermionen M_\pm benötigten Matrizen dargestellt werden in der Form [51]

$$\mathcal{U}^* = \begin{pmatrix} U_R \left(1 - \frac{1}{2} \xi^{LT} \xi^{L*} \right) & U_R \xi^{LT} \\ -V_L \xi^{L*} & V_L \left(1 - \frac{1}{2} \xi^{L*} \xi^{LT} \right) \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

$$\mathcal{V}^\dagger = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{1}{2} \xi^{RT} \xi^{R*} \right) U_L^\dagger & -\xi^{RT} V_R^\dagger \\ \xi^{R*} U_L^\dagger & \left(1 - \frac{1}{2} \xi^{R*} \xi^{RT} \right) V_R^\dagger \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Abschließend werden nun noch die Massenmatrizen der neutralen skalaren Bosonen sowie deren Diagonalisierung zur Massenbestimmung diskutiert. Hierzu ist die zweite Ableitung des allgemeinen Skalarpotentials (B.1) nach den jeweiligen Feldern zu bilden. Die noch in Eigeigenbasis

$$A^{0'T} = \left(H_d^0, \quad H_u^0, \quad \tilde{\nu}^i, \quad \Phi, \quad \tilde{S}, \quad \tilde{\nu}^c \right) \quad (4.32)$$

vorliegenden Terme haben jeweils einen CP-geraden Real- ($S^{0'}$) sowie einen CP-ungeraden Imaginärteil ($P^{0'}$). Mit den entsprechenden Rotationsmatrizen $\mathcal{R}_{ij}^{S^{0'}}$ und $\mathcal{R}_{ij}^{P^{0'}}$ können diese Zustände in die Massenbasis transformiert werden:

$$S_i^0 = \mathcal{R}_{ij}^{S^{0'}} S_j^{0'} \quad (4.33)$$

$$P_i^0 = \mathcal{R}_{ij}^{P^{0'}} P_j^{0'} \quad (4.34)$$

Die Elemente der beiden zu diagonalisierenden (8×8)-Massenmatrizen [45, 50]

$$M^{S^2} = \begin{pmatrix} M_{HH}^{S^2} & M_{HS}^{S^2} & M_{H\tilde{L}}^{S^2} \\ M_{HS}^{S^2T} & M_{SS}^{S^2} & M_{\tilde{L}S}^{S^2T} \\ M_{H\tilde{L}}^{S^2T} & M_{\tilde{L}S}^{S^2} & M_{\tilde{L}\tilde{L}}^{S^2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M^{P^2} = \begin{pmatrix} M_{HH}^{P^2} & M_{HS}^{P^2} & M_{H\tilde{L}}^{P^2} \\ M_{HS}^{P^2T} & M_{SS}^{P^2} & M_{\tilde{L}S}^{P^2T} \\ M_{H\tilde{L}}^{P^2T} & M_{\tilde{L}S}^{P^2} & M_{\tilde{L}\tilde{L}}^{P^2} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

sind in Anhang B.3 einsehbar. Obwohl es sich um symmetrische Matrizen handelt und die mit $M_{H\tilde{L}}^{S^2/P^2}$ bzw. $M_{\tilde{L}S}^{S^2/P^2}$ bezeichneten Mischungsblöcke zwischen higgs- bzw. singlett-artigen Zuständen und weitgehend entkoppelten sneutrino-artigen Zuständen klein sind, ist eine analytische Diagonalisierung analog zu den vorhergehenden Verfahren zu kompliziert. Die Form der einzuführenden Entwicklungsparameter ist von zu vielen unterschiedlichen Parametern und Parameterkombinationen bestimmt, als dass sie Aufschluß über einfache Zusammenhänge geben

könnte. Einzig kompakt darstellbar bleibt die Durchführung einer Givensrotation in erster Ordnung der Drehwinkel, nachdem bereits der higgs- und singlett-artige Block sowie der sneutrino-artige Block diagonalisiert sind. Spricht man in diesem Zusammenhang von erster Ordnung in den Drehwinkeln, so meint dies, dass auf der Diagonalen der Rotationsmatrizen $\cos \gamma_{ii} \approx 1$ und in den Nichtdiagonaleinträgen $\sin \gamma_{ij} \approx \gamma_{ij}$ genähert wird. Gilt also

$$K^{S^2} \begin{pmatrix} M_{HH}^{S^2} & M_{HS}^{S^2} \\ M_{HS}^{S^2T} & M_{SS}^{S^2} \end{pmatrix} K^{S^2T} = \text{diag} \{m_{S,i}^2\} \quad \text{und} \quad (4.36)$$

$$L^{S^2} \begin{pmatrix} M_{LL}^{S^2} \end{pmatrix} L^{S^2T} = \text{diag} \{m_{S,\tilde{\nu}i}^2\}, \quad (4.37)$$

so lässt sich mit der Matrix $C^{S^2T} = \begin{pmatrix} M_{HL}^{S^2} & M_{LS}^{S^2T} \end{pmatrix}$ die Bestimmungsgleichung der Winkel schreiben als

$$\gamma_{ij}^{S^2} = \sum_{k,l} \frac{1}{m_{S,j}^2 - m_{S,\tilde{\nu}i}^2} \cdot L_{ik}^{S^2} \cdot C_{lk}^{S^2} \cdot K_{jl}^{S^2}. \quad (4.38)$$

Analoges Vorgehen liefert die äquivalente Bestimmungsgleichungen im pseudoskalaren Sektor. Lediglich sind an den entsprechenden Stellen die Indizes S bzw. Exponenten S^2 gegen P und P^2 auszutauschen. Mit den auf diese Weise erhaltenen Matrizen der Drehwinkel γ^{S^2/P^2} kann ein Basiswechsel mit

$$\mathcal{R}^{S^0} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma^{S^0T} \\ -\gamma^{S^0} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K^{S^0} & 0 \\ 0 & L^{S^0} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{R}^{P^0} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma^{P^0T} \\ -\gamma^{P^0} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K^{P^0} & 0 \\ 0 & L^{P^0} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

durchgeführt werden. Die Eigenzustände der Massenbasis sind schließlich gegeben durch

$$(S^0)^T = (S_{h^0}, S_{H^0}, S_J, S_{J\perp}, S_\Phi, S_{\tilde{\nu}i}) \quad (4.40)$$

$$(P^0)^T = (P_{A^0}, P_{J\perp}, P_\Phi, P_{\tilde{\nu}i}, J, G^0). \quad (4.41)$$

In dieser Basis verdienen die beiden leichtesten, sogar masselosen pseudoskalaren Zustände besondere Beachtung, denn es handelt sich zum einen um das Goldstoneboson der elektroschwachen Symmetriebrechung G_0 und zum anderen um das zur R-Paritätsverletzung gehörende Majoron J . Diese beiden Zustände stehen orthogonal aufeinander und lassen sich als [45, 50]

$$G_0 = (N_0 v_d, -N_0 v_u, N_0 v_{Li}, 0, 0, 0) \quad (4.42)$$

$$J = N_4 (-N_1 v_d, N_1 v_u, N_2 v_{Li}, 0, N_3 v_S, -N_3 v_R) \quad (4.43)$$

mit den in Anhang B.4 angegebenen Faktoren N_i schreiben. Mittels den schon in (4.5) verwendeten Abkürzung $V = \sqrt{v_R^2 + v_S^2}$ sowie $v^2 = v_u^2 + v_d^2 + \sum_i v_{Li}^2$ und der meist gut erfüllten Näherung $v_{Li} \ll v$ kann der Masseneigenzustand des Majoron zu

$$J \simeq \left(-\frac{v_d v_L^2}{V v^2}, \frac{v_u v_L^2}{V v^2}, \frac{v_{Li}}{V}, 0, \frac{v_S}{V}, -\frac{v_R}{V} \right) \quad (4.44)$$

vereinfacht werden, wobei $v_L^2 = \sum_i v_{Li}^2$ bezeichnet. Die skalaren - und pseudoskalaren Masse-eigenzustände $S_{\tilde{\nu}i}$ und $P_{\tilde{\nu}i}$ bestehen aufgrund der bereits erwähnten kleinen Mischung hauptsächlich aus linkshändigen Sneutrinos. Die weiteren Zustände des Massenspektrums sind je nach

Parameterwahl eine größere oder kleinere Mischungen der duplett- und singlettartigen Felder. An dieser Stelle ist zu erwähnen, dass mit gewissen Grenzübergängen S_{h^0} , S_{H^0} und P_{A^0} den entsprechenden Zuständen im MSSM angeglichen werden können. Eine genauere Ausführung dieses Bereichs ist für diese Arbeit ohne Belang, so dass im folgenden Abschnitt auf die weitaus wichtigere Frage der speziellen Neutrinophysik in diesem Modell eingegangen wird.

4.3 Verbindung zur Neutrinophysik

Dieser Abschnitt verbindet das beschriebene Modell mit der in Abschnitt 2.1 erläuterten Neutrinophysik. Hierzu wird zunächst auf die Herleitung der effektiven Neutrino-Massenmatrix eingegangen. Aufgrund gleicher Quantenzahlen befinden sich die Neutrinos mit den Neutralinos in einem Supermultiplett und mischen über kleine R-paritätsverletzende Terme mit ihnen. Bereits erläutert wurde, dass wegen der vorliegenden Massenhierarchie, also der wesentlich kleineren Massen der Neutrinos im Vergleich zu den anderen Neutralinos, und der nur kleinen R-Paritätsverletzung mit Hilfe der Entwicklungsparameter ξ (4.17) eine Teildiagonalisierung der Neutralinomassenmatrix M_N (4.11) durchgeführt werden kann. Es handelt sich um ein dem "seesaw"-Mechanismus ähnelndes Verfahren.

Aus dieser Diagonalisierung erhält man zum einen den (7×7) -Block, der den Teilchengehalt der Neutralinos ohne die Neutrinos umfasst und durch die Matrix N^0 wie in (4.19) auf Diagonalgestalt gebracht werden kann. Da für diese Arbeit die Masseneigenwerte der betreffenden Teilchen nicht von Interesse sind, wird auf nähere Ausführungen verzichtet. Zum anderen erhält man die effektive (3×3) -Neutrinomassenmatrix $m_{\nu\nu}^{\text{eff}}$.

Diese Matrix kann auf die in (4.16) angegebene Form gebracht werden. Wie aus (4.20) hervorgeht wird sie durch entsprechendes Anwenden von $V^{(\nu)}$ diagonalisiert. Unter der Annahme, dass lediglich der Term $a\Lambda_i\Lambda_j$ einen Beitrag zu $m_{\nu\nu}^{\text{eff}}$ liefert, gilt [49]

$$\left(V^{(\nu)}\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}}{|\bar{\Lambda}|} & -\frac{\Lambda_1\Lambda_2}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}|\bar{\Lambda}|} & -\frac{\Lambda_1\Lambda_3}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}|\bar{\Lambda}|} \\ 0 & \frac{\Lambda_3}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}} & -\frac{\Lambda_2}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}} \\ \frac{\Lambda_1}{|\bar{\Lambda}|} & \frac{\Lambda_2}{|\bar{\Lambda}|} & \frac{\Lambda_3}{|\bar{\Lambda}|} \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Aus bereits in Abschnitt 2.1 angestellten Überlegungen folgen sofort die Näherungen

$$\tan^2 \theta_R \approx \left(\frac{\Lambda_1}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}}\right)^2 \quad \text{und} \quad \tan^2 \theta_{\text{atm}} \approx \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3}\right)^2. \quad (4.46)$$

Für den solaren Winkel θ_{sol} kann zunächst keine Näherung gefunden werden, da die ausschließlich aus den Größen Λ_i bestehende effektive Neutrinomassenmatrix zwei gleiche Eigenwerte Null besitzt, der Winkel also beliebige Werte annehmen kann. Erst nach einer zusätzlichen Berücksichtigung der Größen ϵ_i kann die Beschreibung

$$\tan^2 \theta_{\text{sol}} \approx \left(\frac{\tilde{\epsilon}_1}{\tilde{\epsilon}_2}\right)^2 \quad (4.47)$$

mit der neu definierten Größe $\vec{\tilde{\epsilon}} = (V^{(\nu)})^T \cdot \vec{\epsilon}$ hergeleitet werden. Zusammenfassend lässt sich demnach sagen, dass bei dominierendem Term $a\Lambda_i\Lambda_j$ in $m_{\nu\nu}^{\text{eff}}$ der atmosphärische sowie der Reaktorwinkel durch Variation von $\bar{\Lambda}$ und der solare Winkel durch Variation von $\vec{\epsilon}$ eingestellt werden

kann. Im nicht ausgeführten, jedoch analog zu behandelten Fall eines größten Terms $c\epsilon_i\epsilon_j$ in $m_{\nu\nu}^{\text{eff}}$ sind in den Formeln (4.45) bis (4.47) jeweils die Größen Λ_i mit ϵ_i zu vertauschen, sodass atmosphärischer und Reaktorwinkel durch $\vec{\epsilon}$ und der solare Winkel durch $\vec{\Lambda}$ gesteuert werden können. Wie genau diese Anpassung im später zur Datenerzeugung verwendeten Programm abläuft, ist Anhang C zu entnehmen.

Abschließend ist zu bemerken, dass die absolute Neutrinomassenskala kleine Verhältnisse $\frac{|\vec{\Lambda}|}{|M_1 M_2 \mu^2|}$ und $\frac{|\vec{\epsilon}|}{\mu}$ voraussetzt, wobei exakte Werte von einigen unbekanntem und damit frei wählbaren Parametern abhängen. So geben typische Massen der supersymmetrischen Teilchen in der Größenordnung ≈ 100 GeV eine Abschätzung von $\frac{|\vec{\Lambda}|}{|M_1 M_2 \mu^2|} \approx 10^{-6}, 10^{-5}$ vor. Sind die Massen der Singlett-Superfelder klein, d.h. an der Grenze zum TeV-Bereich oder knapp darüber, so ergibt sich $\frac{|\vec{\epsilon}|}{\mu} \approx 10^{-6}, 10^{-5}$. Andererseits kann $\frac{|\vec{\epsilon}|}{\mu} \sim 10^{-3}$ nicht überschritten werden, da sonst Korrekturen von Sbottom- und Stau-Schleifen zu große Beiträge zur Neutrinomassenmatrix liefern.

5 Leptonzerfälle

5.1 Leptonischer Dreikörperzerfall

In diesem Kapitel wird die Theorie zum leptonischen Dreikörperzerfall erläutert, die Grundlage einer Programmierung oder Interpretation erhaltener Daten ist. Es werden an dieser Stelle allgemein gehaltene Rechenmethoden vorgestellt, die in einem nächsten Schritt mit physikalischem Inhalt zu füllen sind.

5.1.1 Matrixelement des Dreikörperzerfalls

Unter anderem der Teil $\mathcal{W} = h_\nu^i \hat{L}_i^a \hat{\nu}^c \hat{H}_u^b$ des Superpotentials (4.2) ermöglicht den Zerfall eines einzelnen in drei Leptonen. Sei das zerfallende Objekt von Typ i und die drei entstehenden der Generationen j , m und n , so ergeben sich aufgrund der Ununterscheidbarkeit der Teilchen die beiden miteinander interferierenden Graphen:

$$\begin{array}{c}
 l_i(p) \xrightarrow{\quad} \bullet \begin{array}{l} \nearrow l_n(q_1) \\ \searrow S_a^0(k) \\ \bullet \begin{array}{l} \nearrow l_m(q_2) \\ \searrow \bar{l}_j(p') \end{array} \\ \text{---} \\ \bullet \begin{array}{l} \nearrow l_m(q_2) \\ \searrow \bar{l}_j(p') \end{array} \\ \text{---} \\ \bullet \begin{array}{l} \nearrow l_n(q_1) \\ \searrow \bar{l}_j(p') \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad - \quad
 \begin{array}{c}
 l_i(p) \xrightarrow{\quad} \bullet \begin{array}{l} \nearrow l_m(q_2) \\ \searrow S_b^0(k) \\ \bullet \begin{array}{l} \nearrow l_n(q_1) \\ \searrow \bar{l}_j(p') \end{array} \\ \text{---} \\ \bullet \begin{array}{l} \nearrow l_n(q_1) \\ \searrow \bar{l}_j(p') \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (5.1)$$

Es ist die Differenz der Graphen zu bilden, da sie für den Fall $a = b$ durch den Tausch zweier Fermionen $m \leftrightarrow n$ ineinander überführt werden können. Aufmerksamkeit verdient die Möglichkeit, dass weitere Interferenzen mit Graphen mit anderen internen Teilchen auftreten können. Dies deuten die Indizes a und b an. Zur Vereinfachung der Folgerechnung werden die Kopplungen C_{jma} , C_{ina} , C_{jnb} und C_{imb} zunächst als lediglich komplexe Größen angenommen. Ihre Indexstruktur weist jeweils darauf hin, welche Teilchen sie miteinander verknüpfen. Aus den Feynman-Regeln ergibt sich für das Matrixelement der Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} = & \bar{u}_m(q_2) C_{jma} v_j(p') \frac{i}{k^2 - m_{S_a^0}^2 + i\epsilon} \bar{u}_n(q_1) C_{ina} u_i(p) \\
 & - \bar{u}_n(q_1) C_{jnb} v_j(p') \frac{i}{k^2 - m_{S_b^0}^2 + i\epsilon} \bar{u}_m(q_2) C_{imb} u_i(p).
 \end{aligned}
 \quad (5.2)$$

Zur Berechnung des Betragsquadrats von \mathcal{M} wird zudem das Adjungierte der Gestalt

$$i\mathcal{M}^\dagger = \bar{v}_j(p') C_{jma}^* u_m(q_2) \frac{i}{k^2 - m_{S_a^0}^2 + i\epsilon} \bar{u}_i(p) C_{ina}^* u_n(q_1)$$

$$- \bar{v}_j(p') \mathcal{C}_{jnb}^* u_n(q_1) \frac{i}{k^2 - m_{S_b^0}^2 + i\epsilon} \bar{u}_i(p) \mathcal{C}_{imb}^* u_m(q_2) \quad (5.3)$$

benötigt. Um die weitere Rechnung übersichtlich zu gestalten, ist es sinnvoll sich vor Augen zu halten, dass den dominanten Anteil der intern austauschbaren Teilchen (Pseudo-)Skalare ausmachen. Diese erfüllen stets die Näherung $k^2 \ll m_{S_{a/b}^0}^2$. Damit kann ohne Bedenken $k^2 - m_{S_{a/b}^0}^2 + i\epsilon \approx -m_{S_{a/b}^0}^2$ gesetzt werden und es ergibt sich

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \mathcal{M} \mathcal{M}^\dagger = \\ &= \frac{1}{m_{S_a^0}^4} \bar{u}_m(q_2) \mathcal{C}_{jma} v_j(p') \bar{u}_n(q_1) \mathcal{C}_{ina} u_i(p) \bar{v}_j(p') \mathcal{C}_{jma}^* u_m(q_2) \bar{u}_i(p) \mathcal{C}_{ina}^* u_n(q_1) \\ &\quad - \frac{1}{m_{S_a^0}^2 m_{S_b^0}^2} \bar{u}_m(q_2) \mathcal{C}_{jma} v_j(p') \bar{u}_n(q_1) \mathcal{C}_{ina} u_i(p) \bar{v}_j(p') \mathcal{C}_{jnb}^* u_n(q_1) \bar{u}_i(p) \mathcal{C}_{imb}^* u_m(q_2) \\ &\quad - \frac{1}{m_{S_b^0}^2 m_{S_a^0}^2} \bar{u}_n(q_1) \mathcal{C}_{jnb} v_j(p') \bar{u}_m(q_2) \mathcal{C}_{imb} u_i(p) \bar{v}_j(p') \mathcal{C}_{jma}^* u_m(q_2) \bar{u}_i(p) \mathcal{C}_{ina}^* u_n(q_1) \\ &\quad + \frac{1}{m_{S_b^0}^4} \bar{u}_n(q_1) \mathcal{C}_{jnb} v_j(p') \bar{u}_m(q_2) \mathcal{C}_{imb} u_i(p) \bar{v}_j(p') \mathcal{C}_{jnb}^* u_n(q_1) \bar{u}_i(p) \mathcal{C}_{imb}^* u_m(q_2). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Zur späteren Berechnung der Zerfallsbreite ist die Spinsumme über $|\mathcal{M}|^2$ zu bilden und über den Spin des einlaufenden Fermions zu mitteln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{Spin}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{2m_{S_a^0}^4} \text{Sp}((\not{\epsilon}_2 + m_{l_m}) \mathcal{C}_{jma} (\not{p}' - m_{l_j}) \mathcal{C}_{jma}^*) \text{Sp}((\not{\epsilon}_1 + m_{l_n}) \mathcal{C}_{ina} (\not{p} + m_{l_i}) \mathcal{C}_{ina}^*) \\ &\quad - \frac{1}{2m_{S_a^0}^2 m_{S_b^0}^2} \text{Sp}((\not{\epsilon}_2 + m_{l_m}) \mathcal{C}_{jma} (\not{p}' - m_{l_j}) \mathcal{C}_{jnb}^* (\not{\epsilon}_1 + m_{l_n}) \mathcal{C}_{ina} (\not{p} + m_{l_i}) \mathcal{C}_{imb}^*) \\ &\quad - \frac{1}{2m_{S_b^0}^2 m_{S_a^0}^2} \text{Sp}((\not{\epsilon}_1 + m_{l_n}) \mathcal{C}_{jnb} (\not{p}' - m_{l_j}) \mathcal{C}_{jma}^* (\not{\epsilon}_2 + m_{l_m}) \mathcal{C}_{imb} (\not{p} + m_{l_i}) \mathcal{C}_{ina}^*) \\ &\quad + \frac{1}{2m_{S_b^0}^4} \text{Sp}((\not{\epsilon}_1 + m_{l_n}) \mathcal{C}_{jnb} (\not{p}' - m_{l_j}) \mathcal{C}_{jnb}^*) \text{Sp}((\not{\epsilon}_2 + m_{l_m}) \mathcal{C}_{imb} (\not{p} + m_{l_i}) \mathcal{C}_{imb}^*) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dieser Ausdruck lässt sich mittels einiger Rechenregeln für Spuren in Verbindung mit Gammamatrizen vereinfachen. Da in dieser Arbeit die Größenordnung der final berechneten Zerfallsbreiten und nicht deren exakter Wert ausschlaggebend ist, dürfen alle auslaufenden Teilchen als masselos angenommen werden $m_{l_m} = m_{l_n} = m_{l_j} = 0$. Selbst im Extremfall eines zerfallenden Tau-Leptons in drei Myonen, deren Masse aufsummiert knapp 20% der Taumasse beträgt, ist diese Näherung noch zulässig. Es folgt schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{Spin}} |\mathcal{M}|^2 &= \left[\frac{8}{m_{S_a^0}^4} |\mathcal{C}_{ina}|^2 |\mathcal{C}_{jma}|^2 - \frac{4}{m_{S_b^0}^2 m_{S_a^0}^2} \text{Re} [\mathcal{C}_{jnb} \mathcal{C}_{jma}^* \mathcal{C}_{imb} \mathcal{C}_{ina}^*] \right] (pq_1)(p'q_2) \\ &\quad + \left[\frac{8}{m_{S_b^0}^4} |\mathcal{C}_{imb}|^2 |\mathcal{C}_{jnb}|^2 - \frac{4}{m_{S_b^0}^2 m_{S_a^0}^2} \text{Re} [\mathcal{C}_{jnb} \mathcal{C}_{jma}^* \mathcal{C}_{imb} \mathcal{C}_{ina}^*] \right] (pq_2)(p'q_1) \end{aligned}$$

$$+ \frac{4}{m_{S_b^0}^2 m_{S_a^0}^2} \text{Re} [\mathcal{C}_{jnb} \mathcal{C}_{jma}^* \mathcal{C}_{imb} \mathcal{C}_{ina}^*] (p'p)(q_1 q_2) \quad (5.6)$$

Diese beispielhafte Rechnung ist dahingehend zu verallgemeinern, dass eine Kopplungsstruktur der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ina} &= \mathcal{C}_{ina}^L P_L + \mathcal{C}_{ina}^R P_R \\ \mathcal{C}_{jma} &= \mathcal{C}_{jma}^L P_L + \mathcal{C}_{jma}^R P_R \\ \mathcal{C}_{imb} &= \mathcal{C}_{imb}^L P_L + \mathcal{C}_{imb}^R P_R \\ \mathcal{C}_{jnb} &= \mathcal{C}_{jnb}^L P_L + \mathcal{C}_{jnb}^R P_R \end{aligned} \quad (5.7)$$

angenommen wird, wobei $P_{L/R} = \frac{1}{2} (1 \mp \gamma^5)$ die üblichen links-/rechtshändigen Projektionsoperatoren bezeichnet. Zudem handelt es sich bei allen Kopplungen $\mathcal{C}_{xxx}^{L/R}$ um komplexe Größen. Außerdem kommt es zu weiteren Interferenztermen. In den beiden Beispielgraphen werden zwar zwei unterschiedliche interne Teilchen S_a^0 und S_b^0 betrachtet, jedoch existieren im neutralen skalaren Sektor acht, so dass sich insgesamt 16 Graphen überlagern. Schließlich erhält man nach längerer Rechnung die gemittelte Spinsumme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{Spin}} |\mathcal{M}|^2 &= \sum_{a=1}^8 \sum_{b=1}^8 \frac{2}{m_{S_b^0}^2 m_{S_a^0}^2} \cdot \\ &\left(\text{Re} [\mathcal{C}_{ina}^R \mathcal{C}_{jma}^L \mathcal{C}_{imb}^{R*} \mathcal{C}_{jmb}^{L*}] + \text{Re} [\mathcal{C}_{ina}^R \mathcal{C}_{jma}^R \mathcal{C}_{imb}^{R*} \mathcal{C}_{jmb}^{R*}] + \text{Re} [\mathcal{C}_{ina}^L \mathcal{C}_{jma}^L \mathcal{C}_{imb}^{L*} \mathcal{C}_{jmb}^{L*}] \right. \\ &+ \text{Re} [\mathcal{C}_{ina}^L \mathcal{C}_{jma}^R \mathcal{C}_{imb}^{L*} \mathcal{C}_{jmb}^{R*}] - \text{Re} [\mathcal{C}_{ina}^R \mathcal{C}_{jma}^R \mathcal{C}_{imb}^{R*} \mathcal{C}_{jnb}^{R*}] - \text{Re} [\mathcal{C}_{ina}^L \mathcal{C}_{jma}^L \mathcal{C}_{imb}^{L*} \mathcal{C}_{jnb}^{L*}] \left. \right) (pq_1)(p'q_2) \\ &+ \left(\text{Re} [\mathcal{C}_{ima}^R \mathcal{C}_{jna}^L \mathcal{C}_{imb}^{R*} \mathcal{C}_{jnb}^{L*}] + \text{Re} [\mathcal{C}_{ima}^R \mathcal{C}_{jna}^R \mathcal{C}_{imb}^{R*} \mathcal{C}_{jnb}^{R*}] + \text{Re} [\mathcal{C}_{ima}^L \mathcal{C}_{jna}^L \mathcal{C}_{imb}^{L*} \mathcal{C}_{jnb}^{L*}] \right. \\ &+ \text{Re} [\mathcal{C}_{ima}^L \mathcal{C}_{jna}^R \mathcal{C}_{imb}^{L*} \mathcal{C}_{jnb}^{R*}] - \text{Re} [\mathcal{C}_{ina}^R \mathcal{C}_{jma}^R \mathcal{C}_{imb}^{R*} \mathcal{C}_{jnb}^{R*}] - \text{Re} [\mathcal{C}_{ina}^L \mathcal{C}_{jma}^L \mathcal{C}_{imb}^{L*} \mathcal{C}_{jnb}^{L*}] \left. \right) (pq_2)(p'q_1) \\ &+ \left(\text{Re} [\mathcal{C}_{ina}^R \mathcal{C}_{jma}^R \mathcal{C}_{imb}^{R*} \mathcal{C}_{jnb}^{R*}] + \text{Re} [\mathcal{C}_{ina}^L \mathcal{C}_{jma}^L \mathcal{C}_{imb}^{L*} \mathcal{C}_{jnb}^{L*}] \right) (pp')(q_1 q_2) \\ &- \left(\text{Im} [\mathcal{C}_{imb}^L \mathcal{C}_{jnb}^L \mathcal{C}_{ina}^{L*} \mathcal{C}_{jma}^{L*}] + \text{Im} [\mathcal{C}_{ina}^R \mathcal{C}_{jma}^R \mathcal{C}_{imb}^{R*} \mathcal{C}_{jnb}^{R*}] \right) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\mu p'_\nu q_{1\rho} q_{2\sigma}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Dieser kompakt dargestellte Ausdruck ist bereits für die weiteren Berechnungen im Phasenraum optimiert. Zur Überprüfung dieser zusammenfassenden Schreibweise wurde das Mathematica-Paket “feynCalc” [53] verwendet und diverse Grenzfälle betrachtet. Zuletzt sei erwähnt, dass im hier betrachteten Dreikörperzerfall stets $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\mu p'_\nu q_{1\rho} q_{2\sigma} = 0$ gilt, da die vier Impulse nie linear unabhängig sind. Deshalb tritt dieser Faktor nicht wieder in Erscheinung.

5.1.2 Kinematik des Dreikörperzerfalls

Im Allgemeinen gilt für die differentielle Zerfallsbreite eines n -Körper-Zerfalls [54]

$$d\Gamma = \frac{1}{2m} \frac{1}{\prod_i n_i!} |M|^2 d\Phi_n (2\pi)^4 (p; q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (5.9)$$

mit der Masse $m = \sqrt{p^2}$ des zerfallenden Teilchens, dem spingemittelten Betragsquadrat der Übergangsamplitude $|M|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\text{Spin}} |\mathcal{M}|^2$, der Zahlen n_i gleicher Teilchen im Endzustand und dem Phasenraumfaktor

$$d\Phi_n(p; p_1, \dots, p_n) = \delta^4(p - \sum_{i=1}^n q_i) \prod_{i=1}^n \widetilde{dq}_i = \delta^4(p - \sum_{i=1}^n q_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 \vec{q}_i}{(2\pi)^3 2E_i}. \quad (5.10)$$

Für den Dreikörper-Leptonzerfall $l_i \rightarrow l_m l_n \bar{l}_j$ mit Matrixelement (5.8) und den weiteren Bezeichnungen aus vorigem Abschnitt ergibt sich

$$d\Gamma = \sum_{a=1}^8 \sum_{b=1}^8 \frac{1}{2m_{l_i}} \frac{1}{1 + \delta_{mn}} \frac{2}{m_{S_a^0}^2 m_{S_b^0}^2} \widetilde{dp}' \widetilde{dq}_1 \widetilde{dq}_2 (2\pi)^4 \delta^4(p - p' - q_1 - q_2) \cdot \left[\mathcal{C}_1 \cdot (pq_1)(p'q_2) + \mathcal{C}_2 \cdot (pq_2)(p'q_1) + \mathcal{C}_3 \cdot (pp')(q_2q_1) \right], \quad (5.11)$$

wobei zur übersichtlicheren Darstellung die jeweiligen Kopplungskombinationen mit \mathcal{C}_x substituiert wurden. Zwei gleiche Leptonen im Endzustand $m = n$ erzeugen durch δ_{mn} den benötigten Faktor $\frac{1}{2}$. In Dreikörperzerfällen wie diesem kann die Phasenraumintegration dahingehend vereinfacht werden, dass man in einem ersten Schritt lediglich zwei auslaufende Impulse betrachtet. Mit dem Impuls $k = q_1 + q_2 = p - p'$ des internen Teilchens sei das Integral

$$I^{\mu\nu}(k) = \int \frac{d^3 \vec{q}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 \vec{q}_1}{(2\pi)^3 2E_1} q_1^\mu q_2^\nu (2\pi)^4 \delta^4(k - q_1 - q_2) \quad (5.12)$$

definiert, das Lorentz-invariant und deshalb ebenso in der Form [55]

$$I^{\mu\nu}(k) = g^{\mu\nu} A(k^2) + k^\mu k^\nu B(k^2) \quad (5.13)$$

dargestellt werden kann. Zur Bestimmung der Koeffizienten $A(k^2)$ und $B(k^2)$ ist das Integral unter anderem mit der Metrik $g_{\mu\nu}$ zu kontrahieren und in das Schwerpunktsystem der beiden Leptonen l_m und l_n zu wechseln. Hier gilt $q_1 = -q_2$. Außerdem muss erneut, wie schon in Abschnitt 5.1.1, die Näherung $m_{l_m} = m_{l_n} = 0$ eingesetzt werden. Es ergibt sich letztlich der Zusammenhang

$$I^{\mu\nu} = \frac{1}{96\pi} (g^{\mu\nu} k^2 + 2k^\mu k^\nu) \quad \Rightarrow \quad I_\mu^\mu = \frac{1}{16\pi} k^2, \quad (5.14)$$

der in die differentielle Zerfallsbreite eingesetzt wird:

$$d\Gamma = \sum_{a=1}^8 \sum_{b=1}^8 \frac{1}{m_{l_i} m_{S_a^0}^2 m_{S_b^0}^2 (1 + \delta_{mn})} \widetilde{dp}' \cdot \left[\mathcal{C}_1 \cdot p_\mu p'_\nu I^{\mu\nu} + \mathcal{C}_2 \cdot p_\nu p'_\mu I^{\mu\nu} + \mathcal{C}_3 \cdot (pp') I_\mu^\mu \right] \\ = \sum_{a=1}^8 \sum_{b=1}^8 \frac{1}{96\pi m_{l_i} m_{S_a^0}^2 m_{S_b^0}^2 (1 + \delta_{mn})} \widetilde{dp}' \cdot \left[(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) \cdot ((pp')k^2 + 2(pk)(p'k)) + 6\mathcal{C}_3 \cdot (pp')k^2 \right] \quad (5.15)$$

Zur Auswertung der Skalarprodukte bietet es sich an in das Ruhesystem des zerfallenden Leptons zu wechseln. In diesem gilt:

$$p = (m_{l_i}, 0), \quad p' = (E_{\bar{l}_j}, \vec{p}'), \quad k = (m_{l_i} - E_{\bar{l}_j}, -\vec{p}') \quad (5.16)$$

Die Anwendung der bekannten Näherung $m_{\bar{l}_j} \approx 0$ und der Annahme, dass sich \bar{l}_j auf der Massenschale befindet $E_{\bar{l}_j}^2 - \vec{p}'^2 = m_{\bar{l}_j}^2$, führen zu:

$$\left. \begin{array}{l} k^2 = m_{l_i}^2 - 2m_{l_i}E_{\bar{l}_j} \\ (p'k) \approx m_{l_i}E_{\bar{l}_j} = (pp') \\ (pk) = m_{l_i}^2 - m_{l_i}E_{\bar{l}_j} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} (pk)(p'k) = m_{l_i}^3E_{\bar{l}_j} - m_{l_i}^2E_{\bar{l}_j}^2 \\ (pp')k^2 = m_{l_i}^3E_{\bar{l}_j} - 2m_{l_i}^2E_{\bar{l}_j}^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (pp')k^2 + 2(pk)(p'k) = \\ 3m_{l_i}^3E_{\bar{l}_j} - 4m_{l_i}^2E_{\bar{l}_j}^2 \end{array} \quad (5.17)$$

Es ist zweckmäßig zur letzten Integration über das auslaufende Lepton \bar{l}_j Kugelkoordination zu wählen. Das entsprechende Differential hat die Form:

$$\widetilde{dp}' = \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3 2E_{\bar{l}_j}} = \frac{|\vec{p}'|^2 d|\vec{p}'| d\Omega}{(2\pi)^3 2E_{\bar{l}_j}} \Big|_{E_{\bar{l}_j}=|\vec{p}'|} = \frac{E_{\bar{l}_j}}{2(2\pi)^3} dE_{\bar{l}_j} d\Omega \quad (5.18)$$

Das Teilchen \bar{l}_j hat schließlich die maximale Energie $E_{\bar{l}_j, \max} = m_{l_i}/2$, wenn die beiden Leptonen l_m und l_n in zueinander entgegengesetzte Richtungen laufen, so dass sich mit dem Beitrag 4π aus der Winkelintegration die Zerfallsbreite wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{a=1}^8 \sum_{b=1}^8 \frac{1}{48(2\pi)^3 m_{l_i} m_{S_a^0}^2 m_{S_b^0}^2 (1 + \delta_{mn})} \\ &\quad \cdot \int_0^{m_{l_i}/2} dE_{\bar{l}_j} \cdot E_{\bar{l}_j} \left[(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) \cdot (3m_{l_i}^3 E_{\bar{l}_j} - 4m_{l_i}^2 E_{\bar{l}_j}^2) + 6\mathcal{C}_3 \cdot (m_{l_i}^3 E_{\bar{l}_j} - 2m_{l_i}^2 E_{\bar{l}_j}^2) \right] \\ &= \sum_{a=1}^8 \sum_{b=1}^8 \frac{m_{l_i}^5}{768(2\pi)^3 m_{S_a^0}^2 m_{S_b^0}^2 (1 + \delta_{mn})} \left[\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

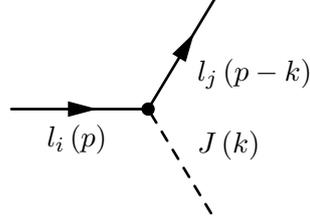
Mit den korrekten Kopplungen aus (5.8) erhält man die totale Zerfallsbreite

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{a=1}^8 \sum_{b=1}^8 \frac{m_{l_i}^5}{768(2\pi)^3 m_{S_a^0}^2 m_{S_b^0}^2 (1 + \delta_{mn})} \left(\text{Re} [c_{ina}^R c_{jma}^L c_{inb}^{R*} c_{jmb}^{L*}] + \text{Re} [c_{ina}^R c_{jma}^R c_{inb}^{R*} c_{jmb}^{R*}] \right. \\ &\quad + \text{Re} [c_{ina}^L c_{jma}^L c_{inb}^{L*} c_{jmb}^{L*}] + \text{Re} [c_{ina}^L c_{jma}^R c_{inb}^{L*} c_{jmb}^{R*}] + \text{Re} [c_{ina}^R c_{jma}^L c_{inb}^{R*} c_{jmb}^{L*}] \\ &\quad + \text{Re} [c_{ina}^R c_{jma}^R c_{inb}^{R*} c_{jmb}^{R*}] + \text{Re} [c_{ina}^L c_{jma}^L c_{inb}^{L*} c_{jmb}^{L*}] + \text{Re} [c_{ina}^L c_{jma}^R c_{inb}^{L*} c_{jmb}^{R*}] \\ &\quad \left. - \text{Re} [c_{ina}^R c_{jma}^R c_{inb}^{R*} c_{jmb}^{R*}] - \text{Re} [c_{ina}^L c_{jma}^L c_{inb}^{L*} c_{jmb}^{L*}] \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Setzt man die entsprechenden Massen und Kopplungen ein, so gilt dieses Ergebnis für skalare Teilchen S^0 und pseudoskalare Teilchen P^0 gleichermaßen. Zwischen den Graphen der beiden Sektoren treten aufgrund ihrer CP-Eigenschaften keine weiteren Interferenzen auf, so dass die totalen Zerfallsbreiten einfach zu addieren sind.

5.2 Leptonzerfall in Lepton und Majoron

Beispielsweise der Teil $\mathcal{W} = h_\nu^i \hat{L}_i^a \hat{\nu}^c \hat{H}_u^b$ des Superpotentials (4.2) lässt den Zerfall eines Leptons l_i in ein Lepton l_j und das masselose Majoron J zu. Der entsprechende Feynmangraph hat die Gestalt:



(5.21)

Mit dem durch die Anwendung der Feynman-Regeln resultierenden Matrixelement

$$i\mathcal{M} = i\bar{u}(p-k) [\mathcal{C}_{ijJ}^L P_L + \mathcal{C}_{ijJ}^R P_R] u(p), \quad (5.22)$$

ist wie Abschnitt 5.1.1 zu verfahren. Das Differential (5.10) ist auf den Zweikörperzerfall anzupassen, so dass man letztlich für die totale Zerfallsbreite den Ausdruck

$$\Gamma = \frac{(m_{l_i}^2 - m_{l_j}^2)}{32\pi |m_{l_i}|^3} \cdot \left((|\mathcal{C}_{ijJ}^L|^2 + |\mathcal{C}_{ijJ}^R|^2) \cdot (m_{l_i}^2 + m_{l_j}^2) + 4 \cdot \text{Re} [\mathcal{C}_{ijJ}^{L*} \mathcal{C}_{ijJ}^R] \cdot m_{l_i} \cdot m_{l_j} \right) \quad (5.23)$$

erhält. In Abschnitt E.1 sind die Chargino-Chargino-Pseudoskalar-Kopplungen analytisch dargestellt. Insbesondere findet sich an dieser Stelle ebenfalls die analytische Form der Kopplung mit dem Majoron unter Annahme diverser Näherungen der Diagonalisierungsmatrizen.

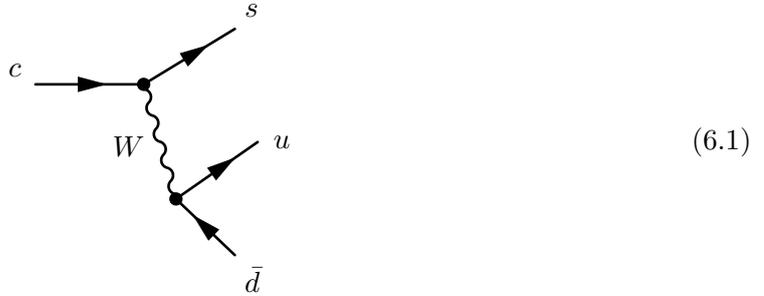
6 Inklusiver B-Meson-Zerfall

6.1 Operator-Produkt-Entwicklung in schwachen Zerfällen

Im Fortgang dieses Kapitels werden schwache hadronische Zerfälle genauer analysiert. Die im Hadron gebundenen Quarks werden durch die starke, durch Gluonen vermittelte Kraft zusammengehalten. Die hierfür charakteristische Energieskala liegt in der Größenordnung 1 GeV und ist damit sehr viel geringer als diejenige, auf der schwache Wechselwirkung stattfindet. Diese ist im Bereich der Massen von W - bzw. Z -Boson, also bei ungefähr 100 GeV anzusiedeln. Der von den Bosonen übertragene Impuls ist damit sehr viel geringer als deren Masse. Aus diesem Grund sind hadronische Zerfälle von Quarkzerfällen getrieben, so dass ein logischer Schritt zur Beschreibung dieser Prozesse die Entwicklung eines effektiven Niederenergieformalismus ist.

Mit der sogenannten Operator-Produkt-Entwicklung (OPE) wurde eine solche Theorie formuliert. Da in ihre korrekte Darstellung jedoch sehr viele unterschiedliche Sektoren einfließen und sie lediglich am Rande zu dieser Arbeit beiträgt, sei an dieser Stelle nur die zugrunde liegende Idee an einem einfachen Beispiel erläutert. Eine ausführliche Beschreibung kann beispielsweise [56] entnommen werden.

Betrachtet man den Standardmodell-Prozess $c \rightarrow s u \bar{d}$ auf Baumgraphenniveau, also unter Vernachlässigung von Effekten aus der Quanten-Chromo-Dynamik (QCD), wie harte Gluonen, so ergibt sich aus der Lagrangedichte ein Feynmangraph der Form:



Wendet man im nächsten Schritt die dazugehörigen Feynmanregeln an, so lautet die Übergangsamplitude

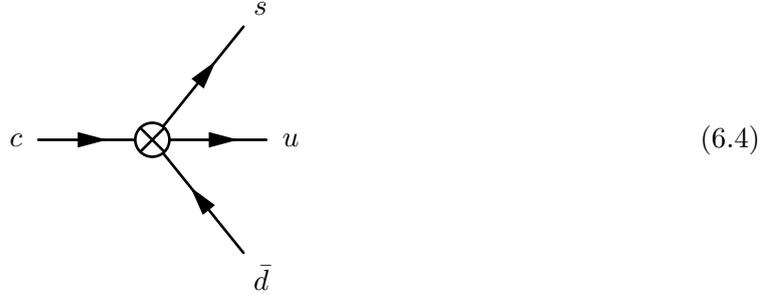
$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} \frac{m_W^2}{k^2 - m_W^2} \cdot (\bar{s} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) c) (\bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) d) \\
 &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} \cdot (\bar{s} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) c) (\bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) d) + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{m_W^2}\right),
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

mit der Fermi-Konstanten G_F , der W -Boson-Masse m_W und den Mischungselementen V_{ij} aus der Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix). In der zweiten Zeile kann der Faktor $\mathcal{O}\left(\frac{k^2}{m_W^2}\right)$ üblicherweise vernachlässigt werden, da wie eingangs erwähnt der vom W -Boson übertragene Impuls k sehr viel kleiner als die Bosonmasse ist. Diese Übergangsamplitude kann

demnach ebenso von einer effektiven Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} \cdot (\bar{s}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)c)(\bar{u}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)d) + \text{Operatoren höherer Dimension} \quad (6.3)$$

abgeleitet werden, wobei die Operatoren höherer Dimension vernachlässigt wurden. Der Feynman-Graph kann schließlich in der Gestalt eines effektiven Graphen



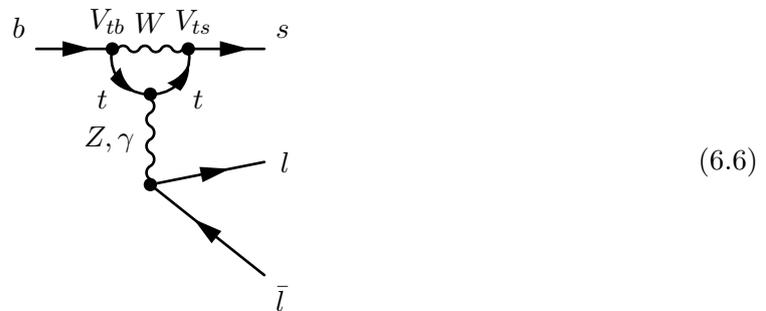
dargestellt werden. Zusammengefasst ist die Idee der OPE also die Entwicklung des Produkts zweier geladener Strom-Operatoren in einer Reihe lokaler Operatoren Q_i , deren Beitrag mit effektiven Kopplungskonstanten C_i , Wilson-Koeffizienten genannt, gewichtet wird. Formal lässt sich eine allgemeine effektive Hamilton-Funktion schreiben als

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_i V_{i,\text{CKM}} C_i(\mu) Q_i. \quad (6.5)$$

mit dem entsprechenden Mischungselement $V_{i,\text{CKM}}$ der CKM-Matrix. Im allgemeinen ist die Berechnung der Wilson-Koeffizienten von der Energieskala μ der Entwicklung abhängig. Deshalb ist es ratsam Methoden der Renormierungsgruppengleichungen anzuwenden, um QCD-Effekten und den sich mit der Energieskala ändernden Kopplungskonstanten der Kräfte Sorge zu tragen. Bei Präzisionsrechnungen werden zusätzlich höhere Ordnungen der Koeffizienten benötigt. Genaueres hierzu ist erneut in [56] zu finden.

6.2 Matrixelement und Kopplungen des B-Meson-Zerfalls

Der Zerfall eines b -Quarks ist ein im Standardmodell erst auf Einschleifenniveau erlaubter Prozess. Aus der für dieses Modell gültigen Yang-Mills-Lagrangedichte ist das Feynman-Diagramm



abzuleiten. Das Matrixelement \mathcal{M}_{SM} , das sich unter Anwendung der Feynmanregeln in Verbin-

dung mit der in Abschnitt 6.1 beschriebenen OPE ergibt, hat die Form [57]

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{SM}} = & \frac{G_F \alpha}{\sqrt{2}\pi} V_{ts}^* V_{tb} \left[(C_9^{\text{eff}} - C_{10}) \bar{s}_L \gamma_\mu b_L \bar{l}_L \gamma^\mu l_L \right. \\ & + (C_9^{\text{eff}} + C_{10}) \bar{s}_L \gamma_\mu b_L \bar{l}_R \gamma^\mu l_R \\ & \left. - 2C_7^{\text{eff}} \bar{s}_i \sigma_{\mu\nu} \frac{q^\nu}{q^2} (m_s P_L + m_b P_R) b \bar{l} \gamma^\mu l \right], \end{aligned} \quad (6.7)$$

mit der Differenz q zwischen b - und s -Quarkimpuls sowie der Kopplungskonstanten der Quanten-Elektro-Dynamik (QED) α . Bei den Größen C_7 , C_9^{eff} und C_{10} handelt es sich um die entsprechenden Wilson-Koeffizienten des Standardmodells, welche mit den Werten [57]

$$C_7 = -0.311, \quad C_9^{\text{eff,NDR}} = 4.153 \quad \text{und} \quad C_{10} = -4.546 \quad (6.8)$$

angenommen werden. Sie entstammen einer Rechnung erster Ordnung in QCD-Korrekturen und die Standardmodell-Parameter sind in Übereinstimmung mit [58] angepasst, wobei langreichweitige Effekte von Charmonium-Zuständen gemäß [59] berücksichtigt wurden. Der Exponent NDR steht für “naive dimensional regularization”. Da der Prozess im Standardmodell unterdrückt ist, kann neue Physik jenseits dieses Modells Beiträge liefern die einen großen Teil der Zerfallsbreite ausmachen. Aus diesem Grund ist ein erweitertes Matrixelement

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{SM}} + \mathcal{M}_{\text{neu}} \quad (6.9)$$

einzuführen, wobei für eine modellunabhängige Erweiterung [57]

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{neu}} = & \frac{G_F \alpha}{\sqrt{2}\pi} V_{ts}^* V_{tb} \left[C_{LL} \bar{s}_L \gamma_\mu b_L \bar{l}_L \gamma^\mu l_L + C_{LR} \bar{s}_L \gamma_\mu b_L \bar{l}_R \gamma^\mu l_R + C_{RL} \bar{s}_R \gamma_\mu b_R \bar{l}_L \gamma^\mu l_L \right. \\ & + C_{RR} \bar{s}_R \gamma_\mu b_R \bar{l}_R \gamma^\mu l_R + C_{LRLR} \bar{s}_L b_R \bar{l}_L l_R + C_{RLLR} \bar{s}_R b_L \bar{l}_L l_R + C_{LRRL} \bar{s}_L b_R \bar{l}_R l_L \\ & \left. + C_{RLRL} \bar{s}_R b_L \bar{l}_R l_L + C_T \bar{s} \sigma_{\mu\nu} b \bar{l} \sigma^{\mu\nu} l + i C_{TE} \bar{s} \sigma_{\mu\nu} b \bar{l} \sigma_{\alpha\beta} l \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \right] \end{aligned} \quad (6.10)$$

gilt. Die Faktoren C_x bezeichnen die Koeffizienten der Vierpunktwechselwirkung, die Wilson-Koeffizienten. Unter ihnen sind vier vektorartige Kopplungen C_{LL} , C_{LR} , C_{RL} und C_{RR} , von denen die zwei ersten mit $(C_9 \mp C_{10})$ aus dem Standardmodell konkurrieren. Die beiden anderen entstehen durch Vertauschung der Projektionsoperatoren P_L und P_R . Des Weiteren sind vier skalarartige C_{LRLR} , C_{RLLR} , C_{LRRL} und C_{RLRL} sowie zwei tensorielle C_T und C_{TE} Kopplungen möglich.

Entfernt man sich schließlich vom allgemeinen Fall und betrachtet das dieser Arbeit zu Grunde liegende Modell, so findet man, dass der Teil [48]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -g \sum_i \left\{ \bar{d}_k \left[\left(\mathcal{V}_{i1} P_R - \frac{m_{d_k} \mathcal{U}_{i2}^*}{\sqrt{2} M_W \cos \beta} P_L \right) \psi_i^{+c} \tilde{u}_{Lk} - \frac{m_{u_k} \mathcal{V}_{i2}}{\sqrt{2} M_W \sin \beta} P_L \psi_i^{+c} \tilde{u}_{Rk} \right] \right. \\ & \left. + \bar{\psi}_i^{+c} \left[\left(\mathcal{V}_{i1}^* P_L - \frac{m_{d_k} \mathcal{U}_{i2}}{\sqrt{2} M_W \cos \beta} P_R \right) d_k \tilde{u}_{Lk}^* - \frac{m_{u_k} \mathcal{V}_{i2}^*}{\sqrt{2} M_W \sin \beta} P_R d_k \tilde{u}_{Rk}^* \right] \right\} \\ =: & -g \sum_i \left\{ \bar{d}_k \left[\left(\mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}} P_L + \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}} P_R \right) \psi_i^{+c} \tilde{u}_{Lk} + \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Rk}} P_L \psi_i^{+c} \tilde{u}_{Rk} \right] \right. \\ & \left. + \bar{\psi}_i^{+c} \left[\left(\mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}^*} P_L + \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}^*} P_R \right) d_k \tilde{u}_{Lk}^* + \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Rk}^*} P_R d_k \tilde{u}_{Rk}^* \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.11)$$

so dass mit der üblichen Schreibweise $\bar{l}P_L l = \bar{l}_R l_L$ die Angleichung mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}} = & \frac{g^2}{m_{\tilde{u}_L}^2} \left(\frac{1}{2} \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_L^*} \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_L} (\bar{l}_L \gamma^\mu l_L \bar{s}_R \gamma_\mu b_R) + \frac{1}{2} \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_L^*} \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_L} (\bar{l}_R \gamma^\mu l_R \bar{s}_L \gamma_\mu b_L) \right. \\ & + \frac{1}{2} \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_L^*} \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_L} (\bar{l}_L l_R \bar{s}_L b_R) + \frac{1}{2} \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_L^*} \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_L} (\bar{l}_R l_L \bar{s}_R b_L) \\ & \left. + \frac{\mathcal{C}_L^{\tilde{u}_L^*} \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_L} + \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_L^*} \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_L}}{16} (\bar{l} \sigma^{\mu\nu} l \bar{s} \sigma_{\mu\nu} b) + i \frac{\mathcal{C}_R^{\tilde{u}_L^*} \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_L} - \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_L^*} \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_L}}{32} (\bar{l} \sigma_{\mu\nu} l \bar{s} \sigma_{\alpha\beta} b) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

abgeschlossen wird. Nun lassen sich die einzelnen Kopplungen der allgemeinen Rechnung denjenigen dieses Modells zuordnen, wobei an dieser Stelle nochmals eingehend daran erinnert wird, dass über alle sechs möglichen Squarks zu summieren ist.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}\pi}{G_F \alpha V_{ts}^* V_{tb}} \sum_{k=1}^6 \frac{g^2}{2m_{\tilde{u}_{Lk}}^2} \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}^*} \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}} & \equiv C_{LR} \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{G_F \alpha V_{ts}^* V_{tb}} \sum_{k=1}^6 \frac{g^2}{2m_{\tilde{u}_{Lk}}^2} \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}^*} \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}} & \equiv C_{RL} \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{G_F \alpha V_{ts}^* V_{tb}} \sum_{k=1}^6 \frac{g^2}{2m_{\tilde{u}_{Lk}}^2} \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}^*} \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}} & \equiv C'_{LRLR} \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{G_F \alpha V_{ts}^* V_{tb}} \sum_{k=1}^6 \frac{g^2}{2m_{\tilde{u}_{Lk}}^2} \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}^*} \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}} & \equiv C'_{RLRL} \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{G_F \alpha V_{ts}^* V_{tb}} \sum_{k=1}^6 \frac{g^2 (\mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}^*} \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}} + \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}^*} \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}})}{16m_{\tilde{u}_{Lk}}^2} & \equiv C_T \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{G_F \alpha V_{ts}^* V_{tb}} \sum_{k=1}^6 \frac{g^2 (\mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}^*} \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}} - \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}^*} \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}})}{32m_{\tilde{u}_{Lk}}^2} & \equiv C_{TE} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Eine semianalytische Näherung der Kopplungen $\mathcal{C}_{L/R}^{\tilde{u}_{Lk}^*}$ steht in Anhang E.2 zur Verfügung. Neben den bislang ausschließlich betrachteten internen Squark kann deren Platz ebenfalls von einem skalaren oder pseudoskalaren Teilchen eingenommen werden. Aus diesem Grund sind die skalarartigen Kopplungen entsprechend zu erweitern bzw. hinzuzunehmen, wobei bei der Summe über die pseudoskalaren Teilchen die beiden Goldstone-Bosonen auszuschließen sind.

$$\begin{aligned} C'_{LRLR} + \frac{\sqrt{2}\pi}{G_F \alpha V_{ts}^* V_{tb}} \left(\sum_{k=1}^8 \frac{1}{m_{S_k^0}^2} \mathcal{C}_{S_k^0}^{LRLR} + \sum_{k=1}^6 \frac{1}{m_{P_k^0}^2} \mathcal{C}_{P_k^0}^{LRLR} \right) & \equiv C_{LRLR} \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{G_F \alpha V_{ts}^* V_{tb}} \left(\sum_{k=1}^8 \frac{1}{m_{S_k^0}^2} \mathcal{C}_{S_k^0}^{RLLR} + \sum_{k=1}^6 \frac{1}{m_{P_k^0}^2} \mathcal{C}_{P_k^0}^{RLLR} \right) & \equiv C_{RLLR} \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{G_F \alpha V_{ts}^* V_{tb}} \left(\sum_{k=1}^8 \frac{1}{m_{S_k^0}^2} \mathcal{C}_{S_k^0}^{LRRL} + \sum_{k=1}^6 \frac{1}{m_{P_k^0}^2} \mathcal{C}_{P_k^0}^{LRRL} \right) & \equiv C_{LRRL} \\ C'_{RLRL} + \frac{\sqrt{2}\pi}{G_F \alpha V_{ts}^* V_{tb}} \left(\sum_{k=1}^8 \frac{1}{m_{S_k^0}^2} \mathcal{C}_{S_k^0}^{RLRL} + \sum_{k=1}^6 \frac{1}{m_{P_k^0}^2} \mathcal{C}_{P_k^0}^{RLRL} \right) & \equiv C_{RLRL} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Alle weiteren Kopplungen sind von dieser Erweiterung nicht betroffen, da der Prozess ohne eine Fierztransformation direkt aus der Lagrangedichte ableitbar ist.

6.3 Kinematik des inklusiven B-Meson-Zerfalls

Eine ausführliche kinematische Auswertung dieses Prozesses übersteigt den Umfang dieser Arbeit, sodass in diesem Abschnitt lediglich die wichtigsten Ergebnisse zusammen gefasst werden. Es wird sich größtenteils an der Literatur [57] orientiert, die eine modellunabhängige Betrachtung des Prozesses bietet. Geht man von einer allgemeinen Vierpunktfunktion $b(p_b) \rightarrow s(p_s) + l^+(p_+) + l^-(p_-)$ aus, was der ersten Ordnung in einer $1/m_b$ -Entwicklung entspricht, so kann diese durch zwei kinematische Variablen beschrieben werden:

$$\begin{aligned} s &= (p_p - p_s)^2 = (p_+ + p_-)^2 = m_b^2 + m_s^2 + m_{l^+}^2 + m_{l^-}^2 - t_+ - t_- \\ u &= t_+ - t_- \end{aligned} \quad (6.19)$$

Es gehen an dieser Stelle die Definitionen $t_{\pm} = (p_s + p_{\pm})^2 = (p_b - p_{\mp})^2$ ein. Im Schwerpunktsystem der beiden Leptonen, kann u als Funktion des Winkels θ , den der Impuls des B -Mesons und derjenige des l^+ bilden, geschrieben werden. Unter Verwendung der Abkürzung $z = \cos \theta$ gilt schließlich

$$u = -\eta(s) \cos \theta \equiv -\eta(s)z \quad (6.20)$$

mit der Funktion

$$\eta(s) = \sqrt{[s - (m_b + m_s)^2][s - (m_b - m_s)^2] (1 - 4m_l^2/s)}. \quad (6.21)$$

Der komplette Phasenraum wird durch die Intervalle $4m_l^2 \leq s \leq (m_b - m_s)^2$ und $-1 \leq z \leq 1$ abgedeckt. Nimmt man die beiden auslaufenden Leptonen als masselos an, so verschwinden Interferenzen zwischen tensoriellen bzw. skalaren mit vektoriellen Kopplungen und man erhält den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Gamma}{dsdz} &= \frac{1}{2m_b^8} \mathcal{B}_0 \left[A_1(s, z) \left\{ 4 |C_7|^2 \right\} \right. \\ &+ A_2(s, z) \left\{ \left| (C_9^{\text{eff}} - C_{10}) \right|^2 + \left| (C_9^{\text{eff}} + C_{10}) \right|^2 \right\} \\ &+ A_3(s, z) \left\{ \left| (C_9^{\text{eff}} - C_{10}) \right|^2 - \left| (C_9^{\text{eff}} + C_{10}) \right|^2 \right\} \\ &+ A_4(s, z) \left\{ 2\text{Re} \left[-2C_7(C_9^{\text{eff}*} - C_{10}^*) \right] + 2\text{Re} \left[-2C_7(C_9^{\text{eff}*} + C_{10}^*) \right] \right\} \\ &+ A_5(s, z) \left\{ 2\text{Re} \left[-2C_7(C_9^{\text{eff}*} - C_{10}^*) \right] - 2\text{Re} \left[-2C_7(C_9^{\text{eff}*} + C_{10}^*) \right] \right\} \\ &+ A_2(s, z) \left\{ 2\text{Re} \left[(C_9^{\text{eff}} - C_{10})C_{LL}^* \right] + 2\text{Re} \left[(C_9^{\text{eff}} + C_{10})C_{LR}^* \right] \right\} \\ &+ A_3(s, z) \left\{ 2\text{Re} \left[(C_9^{\text{eff}} - C_{10})C_{LL}^* \right] - 2\text{Re} \left[(C_9^{\text{eff}} + C_{10})C_{LR}^* \right] \right\} \\ &+ A_4(s, z) \left\{ 2\text{Re} \left[-2C_7(C_{LL}^* + C_{LR}^*) \right] \right\} + A_5(s, z) \left\{ 2\text{Re} \left[-2C_7(C_{LL}^* - C_{LR}^*) \right] \right\} \\ &+ A_6(s, z) \left\{ 2\text{Re} \left[-2C_7(C_{RL}^* + C_{RR}^*) \right] \right\} \\ &+ A_6(s, z) \left\{ -2\text{Re} \left[(C_9^{\text{eff}} - C_{10})C_{RL}^* \right] - 2\text{Re} \left[(C_9^{\text{eff}} + C_{10})C_{RR}^* \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +A_7(s, z) \{2\text{Re}[-2C_7(C_{RL}^* - C_{RR}^*)]\} \\
& +A_2(s, z) \left\{ |C_{LL}|^2 + |C_{LR}|^2 + |C_{RL}|^2 + |C_{RR}|^2 \right\} \\
& +A_3(s, z) \left\{ |C_{LL}|^2 - |C_{LR}|^2 - |C_{RL}|^2 + |C_{RR}|^2 \right\} \\
& +A_3(s, z) \{-4\text{Re}[C_{LRLR}(C_T^* - 2C_{TE}^*) + C_{RLRL}(C_T^* + 2C_{TE}^*)]\} \\
& +A_6(s, z) \{-2\text{Re}[C_{LL}C_{RL}^* + C_{LR}C_{RR}^*] + \text{Re}[C_{LRLR}C_{RLLR}^* + C_{LRRL}C_{RLRL}^*]\} \\
& +A_8(s, z) \left\{ |C_{LRLR}|^2 + |C_{RLLR}|^2 + |C_{LRRL}|^2 + |C_{RLRL}|^2 \right\} \\
& +A_9(s, z) \left\{ 16|C_T|^2 + 64|C_{TE}|^2 \right\}. \tag{6.22}
\end{aligned}$$

Die von s und z abhängigen kinematischen Funktionen A_i sind in Anhang D.1 nachzuschlagen. Neben der Vielzahl von Kopplungen geht ebenfalls der Normierungsfaktor \mathcal{B}_0 ein, welcher zur Fehlerreduzierung dient. Er ist definiert als

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_{sl}^{\text{exp}} \frac{3\alpha^2}{16\pi^2} \frac{|V_{ts}^* V_{tb}|^2}{|V_{cb}|^2} \frac{1}{f(\hat{m}_c)\kappa(\hat{m}_c)} \tag{6.23}$$

mit dem Phasenraumfaktor $f(\hat{m}_c = \frac{m_c}{m_b})$ und dem QCD-Korrekturfaktor $\kappa(\hat{m}_c)$, die für den Prozess $b \rightarrow c\nu$ in der Form

$$f(\hat{m}_c) = 1 - 8\hat{m}_c^2 + 8\hat{m}_c^6 - \hat{m}_c^8 - 24\hat{m}_c^4 \ln \hat{m}_c \tag{6.24}$$

$$\kappa(\hat{m}_c) = 1 - \frac{2\alpha_s(m_b)}{3\pi} \left[\left(\pi^2 - \frac{31}{4} \right) (1 - \hat{m}_c)^2 + \frac{3}{2} \right] \tag{6.25}$$

gegeben sind. Die zunächst in der Zerfallsbreite auftretenden Faktoren V_{ts}^* und V_{tb} der CKM-Matrix sind mit großen Fehlern verbunden. Um diese zu mindern behilft man sich damit, einen Faktor eins der Form $\frac{\mathcal{B}_{sl}^{\text{exp}}}{\mathcal{B}_{sl}^{\text{theo}}} \approx 1$ einzufügen, denn die sehr gut bekannten experimentellen Daten $\mathcal{B}_{sl}^{\text{exp}} = 10.4\%$ weisen eine hervorragende Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert $\mathcal{B}_{sl}^{\text{theo}}$ auf. Weiter gilt für die theoretische Größe $\mathcal{B}_{sl}^{\text{theo}} \sim |V_{cb}|^2 f(\hat{m}_c)\kappa(\hat{m}_c)$ mit den bereits eingeführten Funktionen, welche ebenfalls gut bekannt sind. Der entstehende Quotient $\frac{|V_{ts}^* V_{tb}|^2}{|V_{cb}|^2}$ kann, aus geometrischen Überlegungen die CKM-Matrix betreffend, auf eins gesetzt werden. Der Fehler dieser Näherung ist letztlich geringer als derjenige in den Elementen V_{tx} [54].

Zur weiteren Berechnung der totalen Zerfallsbreite wird im nächsten Schritt die Winkelintegration

$$\frac{d\Gamma}{ds} = \int_{-1}^1 \frac{d^2\Gamma}{dsdz} dz \tag{6.26}$$

durchgeführt. Bei dieser Integration fallen die Faktoren A_3 , A_5 und A_7 offensichtlich weg, da es sich um ungerade Funktionen bzgl. z handelt. Als Ergebnis erhält man [57]

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma}{ds} = & \frac{1}{2m_b^2} \mathcal{B}_0 \left[M_1(s) \left\{ 4|C_7|^2 \right\} \right. \\
& + M_2(s) \left\{ 2 \left| C_9^{eff} \right|^2 + |C_{10}|^2 + |C_{LL}|^2 + |C_{LR}|^2 + |C_{RL}|^2 + |C_{RR}|^2 \right. \\
& \left. \left. + 2\text{Re} \left[C_9^{eff} (C_{LL}^* + C_{LR}^*) \right] + 2\text{Re} \left[C_{10} (-C_{LL}^* + C_{LR}^*) \right] \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -M_4(s) \left\{ 4\text{Re} \left[C_7^* (2C_9^{eff*} + C_{LL} + C_{LR}) \right] \right\} \\
& -M_6(s) \left\{ 4\text{Re} [C_7^* (C_{RL} + C_{RR})] \right. \\
& \quad + 2\text{Re} \left[C_9^{eff} (C_{RL}^* + C_{RR}^*) \right] + 2\text{Re} [(C_{10}(-C_{RL}^*) + C_{RR}^*)] \\
& \quad \left. + 2\text{Re}(C_{LL}C_{RL}^* + C_{LR}C_{RR}^*) - \text{Re}(C_{LRLR}C_{RLLR}^* + C_{LRRL}C_{RLRL}^*) \right\} \\
& +M_8(s) \left\{ |C_{LRLR}|^2 + |C_{RLLR}|^2 + |C_{LRRL}|^2 + |C_{RLRL}|^2 \right\} \\
& +M_9(s) \left\{ 16 |C_T|^2 + 64 |C_{TE}|^2 \right\} \tag{6.27}
\end{aligned}$$

mit aus der Integration der verbleibenden A_i resultierenden kinematischen Funktionen M_i . Eine ausführliche Darstellung der Funktionen M_i ist Anhang D.2 zu entnehmen. Geht man abschließend davon aus, dass $s \in [1\text{GeV}^2, 6\text{GeV}^2]$, wie in Abschnitt 2.2 erläutert, für das Lepton-Lepton-System und $m_c = 1.2\text{ GeV}$, $m_b = 4.7\text{ GeV}$, $m_s = 0.1\text{ GeV}$, $\alpha = 1/137$ sowie $\alpha_s(m_b) = 0.4$ gilt, erhält man durch Integration für die totale Zerfallsbreite

$$\begin{aligned}
\Gamma = & 4.6133 \cdot 10^{-13} \left[1.84556 \cdot 10^6 \left\{ 4 |C_7|^2 \right\} \right. \\
& + 6.62919 \cdot 10^4 \left\{ 2 |C_9^{eff}|^2 + |C_{10}|^2 + |C_{LL}|^2 + |C_{LR}|^2 + |C_{RL}|^2 + |C_{RR}|^2 \right. \\
& \quad \left. + 2\text{Re} \left[C_9^{eff} (C_{LL}^* + C_{LR}^*) \right] + 2\text{Re} [C_{10}(-C_{LL}^* + C_{LR}^*)] \right\} \\
& + 1.53311 \cdot 10^5 \left\{ 4\text{Re} \left[C_7^* (2C_9^{eff*} + C_{LL} + C_{LR}) \right] \right\} \\
& - 1.18309 \cdot 10^3 \left\{ 4\text{Re} [C_7^* (C_{RL} + C_{RR})] \right. \\
& \quad + 2\text{Re} \left[C_9^{eff} (C_{RL}^* + C_{RR}^*) \right] + 2\text{Re} [(C_{10}(-C_{RL}^*) + C_{RR}^*)] \\
& \quad \left. + 2\text{Re} [C_{LL}C_{RL}^* + C_{LR}C_{RR}^*] - \text{Re} [C_{LRLR}C_{RLLR}^* + C_{LRRL}C_{RLRL}^*] \right\} \\
& + 1.1391 \cdot 10^4 \left\{ |C_{LRLR}|^2 + |C_{RLLR}|^2 + |C_{LRRL}|^2 + |C_{RLRL}|^2 \right\} \\
& \left. + 1.09802 \cdot 10^5 \left\{ 16 |C_T|^2 + 64 |C_{TE}|^2 \right\} \right] \tag{6.28}
\end{aligned}$$

In Anhang D.3 finden sich die analytischen Stammfunktionen vor Ausführung der Integration sowie die Integralwerte bei Vernachlässigung von m_s . Zu einer Implementierung oder weiteren Auswertung sind die im vorigen Abschnitt unter (6.17) und (6.18) angegebenen modellspezifischen Kopplungen einzusetzen.

7 Numerische Berechnungen

Die numerische Auswertung der analytischen Ausdrücke erfolgt mit einer aktuellen Version des Programmpakets SPheno [61]. Für das betrachtete Modell liegen bereits einige Programmteile vor, so dass lediglich eine Erweiterung um die Zerfälle vorzunehmen war. Im Folgenden werden nicht wie bislang Zerfallsbreiten Γ , sondern Verzweigungsverhältnisse \mathcal{B} angegeben, die nach der für SPheno üblichen Parametereingabe berechnet wurden. Die in Kapitel C beschriebene Anpassung an Neutrinodaten wurde stets in beiden Varianten verwendet.

7.1 Parameterwahl

7.1.1 Standardmodell-Parameter

Einige Parameter und Messgrößen des Standardmodells gehen in die angestellten Berechnungen ein. Sie sind in nachfolgender Tabelle zusammengefasst und auf vier Stellen gerundet angegeben. Bei aus Rechnungen resultierenden Größen, ist jeweils die verwendete Methode sowie die Energieskala vermerkt. Die Abkürzung $\overline{\text{MS}}$ steht für “minimal subtraction scheme”.

Parameter	Wert in GeV	Parameter	Wert
m_Z	91.19	$\alpha_{em}^{-1}(m_Z), \overline{\text{MS}}$	127.9
$m_b(m_b), \overline{\text{MS}}$	4.250	$\alpha_s(m_Z), \overline{\text{MS}}$	0.1172
m_t	172.7	G_F in GeV^2	$1.166 \cdot 10^{-5}$
m_τ	1.777		

Tabelle 7.1: Parametersatz aus dem Standardmodell

7.1.2 Referenzpunkt SPS1a

Schon in Abschnitt 3.3 ist die Rede von der großen Anzahl freier Größen in der Supersymmetrie. Zur Unterscheidung verschiedener Szenarien legte man im Bereich der GUT-Energieskala $Q = m_{\text{GUT}}$ Referenzpunkte, sogenannte “Snowmass Points and Slopes” (SPS) [62], fest. Zur besseren Vergleichbarkeit von Ergebnissen ist es seither üblich bei der Betrachtung eines Szenarios den entsprechenden Punkt im Parameterraum zu wählen.

Parameter	Wert in GeV	Parameter	Wert
$m_{1/2}$	250	$\text{sign}(\mu)$	+1
m_0	100	$\tan \beta$	10
A_0	-100		

Tabelle 7.2: Parametersatz des SPS1a bei $Q = m_{\text{GUT}}$ gemäß [62]

Einer der für die nachfolgende Auswertung gewählten Punkte ist SPS1a, der ein typisches mSUGRA-Szenario beschreibt und in der Mitte des kosmologischen Wertebereichs liegt. Die für ihn festgelegten Parameter an der GUT-Energieskala sind in Tabelle 7.2 dargestellt.

Die hier zu betrachtende Physik findet jedoch nicht an dieser Skala, sondern vielmehr im Bereich der elektroschwachen Symmetriebrechung statt. Deshalb ist es nötig durch das Verfahren der Renormierungsgruppengleichungen die Parameter anzupassen. Da für das besprochene Modell mit spontan gebrochener R-Parität diese Gleichungen noch nicht vorliegen, wurden diejenigen des MSSM verwendet. Für eine Energie von $Q = 454.7 \text{ GeV}$ gelten die Werte [63]:

Parameter	Wert in GeV	Parameter	Wert in GeV
M_1	99.1	A_t	-510.0
M_2	192.7	A_b	-772.7
M_3	595.2	A_τ	-254.2
μ	352.4	m_{A^0}	393.6
$(m_{\tilde{L}})_{11/22}$	196.6	$(m_{\tilde{L}})_{33}$	195.8
$(m_{\tilde{e}^c})_{11/22}$	136.2	$(m_{\tilde{e}^c})_{33}$	133.6
$(m_{\tilde{Q}})_{11/22}$	539.9	$(m_{\tilde{Q}})_{33}$	495.9
$(m_{\tilde{u}^c})_{11/22}$	521.7	$(m_{\tilde{u}^c})_{33}$	424.8
$(m_{\tilde{d}^c})_{11/22}$	519.5	$(m_{\tilde{d}^c})_{33}$	516.9

Tabelle 7.3: Parametersatz des SPS1a bei $Q = 454.7 \text{ GeV}$ gemäß [63]

Die verbleibenden Parameter, sofern sie nicht unter Abschnitt 7.1.4 aufgezählt sind, werden in SPheno berechnet und erfordern somit keiner weiteren Eingabe. Die in Tabelle 7.2 genannten Werte für $\tan\beta$ und $\text{sign}(\mu)$ bleiben erhalten.

7.1.3 Referenzpunkt SPS4

Als zweiter Parameterpunkt dient SPS4, der ebenfalls ein mSUGRA-Szenario beschreibt, allerdings einen weit größeren Wert für $\tan\beta$ beinhaltet. Dies wirkt sich vor allem auf den Higgs-Sektor aus und hat, wie später zu sehen, kaum Auswirkungen auf die B-Meson- und Leptonzerfälle. An der GUT-Energieskala gilt:

Parameter	Wert in GeV	Parameter	Wert
$m_{1/2}$	300	$\text{sign}(\mu)$	+1
m_0	400	$\tan\beta$	50
A_0	0		

Tabelle 7.4: Parametersatz des SPS4 bei $Q = m_{GUT}$ gemäß [62]

Wendet man auch hier das Verfahren der Renormierungsgruppengleichungen für das MSSM an, so erhält man bei einer Energie $Q = 571.3 \text{ GeV}$ folgende Werte:

Parameter	Wert in GeV	Parameter	Wert in GeV
M_1	120.8	A_t	-552.2
M_2	233.2	A_b	-729.5
M_3	721.0	A_τ	-102.3
μ	377.0	m_{A^0}	404.4
$(m_{\tilde{L}})_{11/22}$	445.9	$(m_{\tilde{L}})_{33}$	394.7
$(m_{\tilde{e}^c})_{11/22}$	414.2	$(m_{\tilde{e}^c})_{33}$	289.5
$(m_{\tilde{Q}})_{11/22}$	732.2	$(m_{\tilde{Q}})_{33}$	640.1
$(m_{\tilde{u}^c})_{11/22}$	716.0	$(m_{\tilde{u}^c})_{33}$	556.8
$(m_{\tilde{d}^c})_{11/22}$	713.9	$(m_{\tilde{d}^c})_{33}$	673.4

Tabelle 7.5: Parametersatz des SPS4 bei $Q = 571.3 \text{ GeV}$ gemäß [63]

7.1.4 Freie Parameter

Die durch die Referenzpunkte festgelegten und von SPheno berechneten Werte müssen lediglich um einige Angaben zu den modellspezifischen Singlett-Feldern Φ , S und ν^c erweitert werden. Soweit nichts gegenteiliges vermerkt ist, werden die Yukawakopplungen und die Supersymmetrie schwach brechenden Parameter wie in Tabelle 7.6 angenommen.

Parameter	Wert	Parameter	Wert in GeV
h_0	0.0028	A_{h_0}	3581
h	0.09	A_h	883
λ	-0.5	A_λ	500

Tabelle 7.6: Yukawakopplungen und Susy-Brechungsparameter der zusätzlichen Singlett-Felder

Der Vakuumerwartungswert von Φ ist des Weiteren über die Gleichung $\mu = h_0 \frac{v_\Phi}{\sqrt{2}}$ stets festgelegt, da μ durch den jeweiligen SPS-Punkt fixiert ist. Für die beiden R-paritätsverletzenden Vakuumerwartungswerte wird

$$v_R = v_S = 1000 \text{ GeV} \quad (7.1)$$

angenommen. Bei den verbleibenden neun Größen handelt es sich um Daten zu den Sneutrinos. Sowohl ihre Yukawakopplungen als auch ihre Vakuumerwartungswerte sind grundsätzlich frei wählbar, werden aber stets in Übereinstimmung mit den Neutrinodaten wie in Kapitel C beschrieben durch das in SPheno implementierte Anpassungsverfahren indirekt bestimmt. Diese Methode bildet über eine Variation der Größen

$$\Lambda_i = \epsilon_i v_d + \mu v_{Li} \quad \text{sowie} \quad \epsilon_i = h_\nu^i \frac{v_R}{\sqrt{2}} \quad (7.2)$$

stets mit den Experimenten zu vereinbarende Winkel θ_{sol} , θ_{atm} und θ_R . Die drei zu den Sneutrinos gehörenden Supersymmetrie brechenden Parameter werden programmintern über die ersten Ableitungen des Potentials, die sogenannten Tadpolegleichungen ermittelt.

7.2 Variation der Vakuumerwartungswerte v_R und v_S

In diesem Abschnitt durchlaufen die beiden Vakuumerwartungswerte v_R und v_S gleichermaßen, falls nichts anderes erwähnt ist, das Intervall $[0, 6000]$ GeV in 10 GeV-Schritten. Mit dieser Variation werden auch die R-paritätsverletzenden Parameter h_ν^i und v_{Li} aus dem Sneutrino-Sektor beeinflusst, da wie aus den Gleichungen (7.2) hervorgeht v_R über $\vec{\epsilon}$ in die Abstimmung mit den Neutrinodaten eingeht. So kann insgesamt ein Urteil gefällt werden, wie stark sich eine R-Paritätsverletzung auf die Prozesse auswirkt und an welcher Stelle deshalb der Wertebereich eingeschränkt werden muss.

7.2.1 Resultate des B-Mesonzerfalls

Die Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(b \rightarrow se^+e^-)$ und $\mathcal{B}(b \rightarrow s\mu^+\mu^-)$ zeigen weder für SPS1a noch für SPS4 eine Abhängigkeit von v_R und v_S . Sie liegen konstant bei $1.91758 \cdot 10^6$, gleichgültig welche Methode zur Neutrinodatenanpassung verwendet wird. Eine getrennte Variation der Art $v_R = \frac{1}{10}v_S$ im Bereich $v_S \in [0, 6000]$ GeV hat ebenfalls keine Auswirkungen. Das Ergebnis liegt im Rahmen der in Abschnitt 2.2 angegebenen experimentellen Grenze von $(1.60 \pm 0.51) \cdot 10^{-6}$. Zerfällt das b -Quark in zwei verschiedene Leptonen, sind Auswirkungen der Neutrino-fitroutine, wie beispielsweise ein Unterschied in den Maximalwerten, zu erkennen. Wird im Referenzpunkt SPS1a der atmosphärische Winkel durch $\vec{\Lambda}$ angepasst, entstehen Werte der Größenordnung $\mathcal{O}(10^{-23})$, bei einer Steuerung des Winkels über $\vec{\epsilon}$ ist der größte Wert $\mathcal{O}(10^{-22})$. Diese Resultate führen zu keinem Konflikt mit den experimentellen Ergebnissen. Eine graphische Darstellung findet sich in Abbildung 7.1.

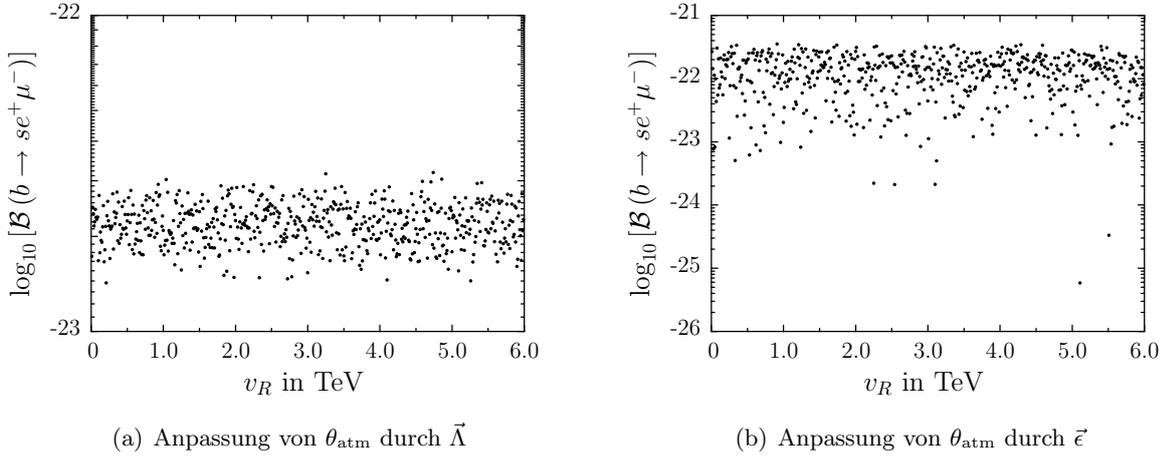


Abbildung 7.1: Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(b \rightarrow se^+\mu^-)$ für SPS1a über $v_R = v_S$ aufgetragen.

Für den Referenzpunkt SPS4 erhält man ein ähnliches Bild. Die Methode $\theta_{\text{atm}} \rightarrow \vec{\Lambda}$ liefert Maximalwerte von der Größenordnung $\mathcal{O}(10^{-21})$, für $\theta_{\text{atm}} \rightarrow \vec{\epsilon}$ ist der größte Wert $\mathcal{O}(10^{-20})$. Die Grenzen sind weiterhin gut erfüllt. Die bereits angesprochene Variation mit $v_R = \frac{1}{10}v_S$ ergibt identische Ergebnisse. Insgesamt ist damit für den Prozess $B \rightarrow X_s l^+ l^-$ der R-paritätsverletzende Anteil vernachlässigbar.

7.2.2 Resultate der Leptonzerfälle

Beispielhaft für den leptonischen Dreikörperzerfall sind die Resultate von $\mu \rightarrow ee^+e^-$ graphisch in den Abbildungen 7.2 für den Referenzpunkt SPS1a und in 7.3 für SPS4 dargestellt. Die erkennbare Streuung der Verzweigungsverhältnisse ist ausschließlich auf die NeutrinoFITroutine zurückzuführen. Daneben gibt es keine merkliche Abhängigkeit von den variierten Parametern $v_R = v_S$ respektive der R-Paritätsverletzung allgemein.

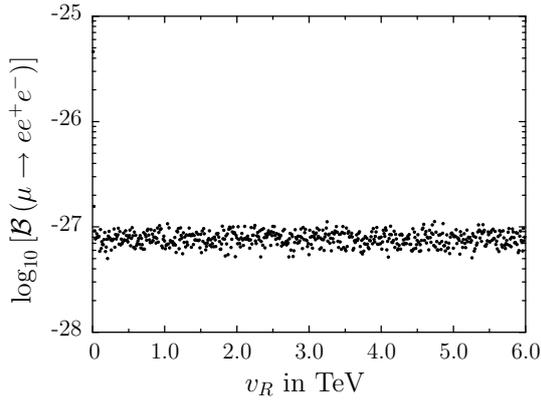
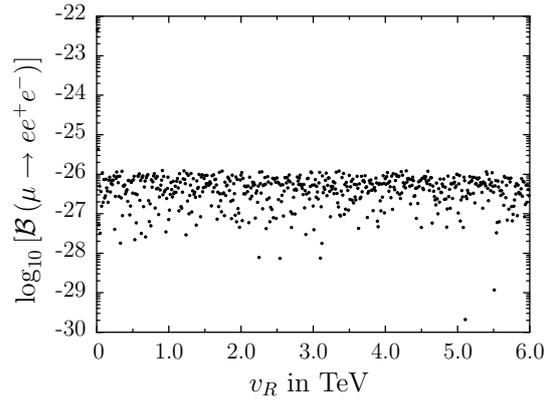
(a) Anpassung von θ_{atm} durch $\vec{\Lambda}$ (b) Anpassung von θ_{atm} durch $\vec{\epsilon}$

Abbildung 7.2: Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\mu \rightarrow ee^+e^-)$ für SPS1a über $v_R = v_S$ aufgetragen.

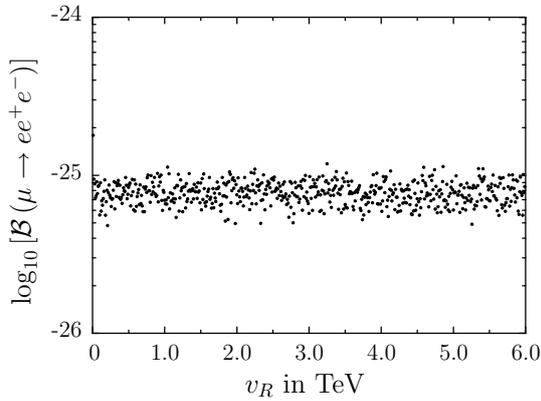
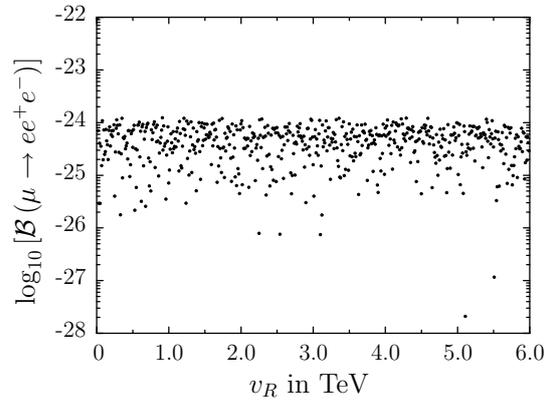
(a) Anpassung von θ_{atm} durch $\vec{\Lambda}$ (b) Anpassung von θ_{atm} durch $\vec{\epsilon}$

Abbildung 7.3: Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\mu \rightarrow ee^+e^-)$ für SPS4 über $v_R = v_S$ aufgetragen.

Steigen die Vakuumerwartungswerte auf die Art $v_R = \frac{1}{10}v_S$, zeigt das Verzweigungsverhältnis des Zerfalls $\tau \rightarrow e\mu^+e^-$ für beide Referenzpunkte und Verfahren zur NeutrinoFITroutine einen tendenziellen Anstieg zu kleinerem v_R hin. Die experimentellen Obergrenzen aus Abschnitt 2.3 werden allerdings in keinem der Fälle überschritten. In Tabelle 7.7 findet sich eine Zusammenfassung der maximalen Größenordnung der Verzweigungsverhältnisse für $v_R = v_S$.

Das Erscheinungsbild der dazugehörigen Graphen unterscheidet sich nur leicht von den hier beispielhaft gezeigt.

Verzweigungs- verhältnis	SPS1a		SPS4		experimentelle Grenze
	$\theta_{\text{atm}} \rightarrow \vec{\Lambda}$	$\theta_{\text{atm}} \rightarrow \vec{e}$	$\theta_{\text{atm}} \rightarrow \vec{\Lambda}$	$\theta_{\text{atm}} \rightarrow \vec{e}$	
$\mathcal{B}(\mu \rightarrow ee^+e^-)$	$\mathcal{O}(10^{-26})$	$\mathcal{O}(10^{-27})$	$\mathcal{O}(10^{-25})$	$\mathcal{O}(10^{-23})$	$1.0 \cdot 10^{-12}$
$\mathcal{B}(\tau^- \rightarrow e^-e^+e^-)$	$\mathcal{O}(10^{-24})$	$\mathcal{O}(10^{-25})$	$\mathcal{O}(10^{-24})$	$\mathcal{O}(10^{-21})$	$2.0 \cdot 10^{-7}$
$\mathcal{B}(\tau^- \rightarrow e^- \mu^+ e^-)$	$\mathcal{O}(10^{-24})$	$\mathcal{O}(10^{-32})$	$\mathcal{O}(10^{-24})$	$\mathcal{O}(10^{-21})$	$1.1 \cdot 10^{-7}$
$\mathcal{B}(\tau^- \rightarrow e^- \mu^- e^+)$	$\mathcal{O}(10^{-23})$	$\mathcal{O}(10^{-24})$	$\mathcal{O}(10^{-23})$	$\mathcal{O}(10^{-20})$	$2.7 \cdot 10^{-7}$
$\mathcal{B}(\tau^- \rightarrow e^- \mu^+ \mu^-)$	$\mathcal{O}(10^{-20})$	$\mathcal{O}(10^{-21})$	$\mathcal{O}(10^{-19})$	$\mathcal{O}(10^{-16})$	$3.3 \cdot 10^{-7}$
$\mathcal{B}(\tau^- \rightarrow \mu^- e^+ \mu^-)$	$\mathcal{O}(10^{-23})$	$\mathcal{O}(10^{-24})$	$\mathcal{O}(10^{-23})$	$\mathcal{O}(10^{-20})$	$1.3 \cdot 10^{-7}$
$\mathcal{B}(\tau^- \rightarrow \mu^- \mu^+ \mu^-)$	$\mathcal{O}(10^{-19})$	$\mathcal{O}(10^{-20})$	$\mathcal{O}(10^{-19})$	$\mathcal{O}(10^{-16})$	$1.9 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 7.7: Maximale Größenordnung der Verzweigungsverhältnisse des leptonicen Dreikörperzerfalls für verschiedene Parameterpunkte und Auswertungsverfahren sowie zugehörige experimentelle Obergrenzen

Variiert man $v_R = \frac{1}{10}v_S$, so ergeben sich neben der bereits erwähnten Erscheinung für $\tau \rightarrow e\mu^+e^-$ keinerlei Besonderheiten. Da in jedem Fall die ermittelten Werte weit unterhalb der experimentellen Grenzen liegen, wird auf weitere Ausführungen für den leptonicen Dreikörperzerfall verzichtet. Zudem ist auch hier der Einfluss durch R-paritätsverletzende Parameter bestenfalls mässig.

Im Gegensatz dazu ist der Zerfall $l_i \rightarrow l_j J$ bedeutender, da man sich insbesondere für $l_i = \mu$ an der experimentellen Grenze befindet. Diese obere Schranke bei $2.6 \cdot 10^{-6}$ wird in nachfolgenden Darstellungen durch eine rote Linie repräsentiert. Mit dem Parametersatz SPS1a und unter Verwendung beider Methoden zur Neutrinodatenanpassung ergeben sich die Abbildungen 7.4 bis 7.6, wobei $v_R = v_S$ gilt.

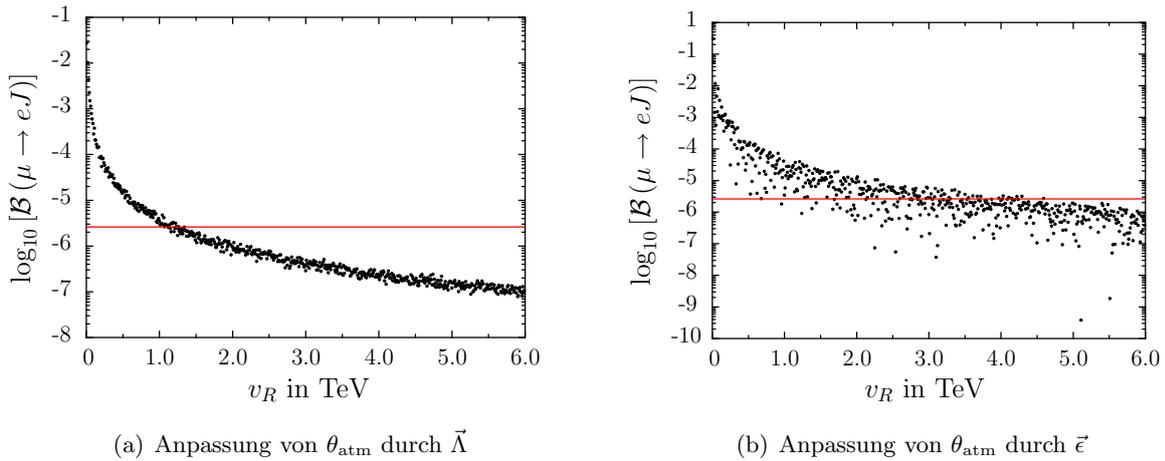


Abbildung 7.4: Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\mu \rightarrow eJ)$ für SPS1a über $v_R = v_S$ aufgetragen mit experimenteller Grenze bei $2.6 \cdot 10^{-6}$ (rote Linie).

Es ist deutlich zu erkennen, dass für den Myon-Zerfall im Rahmen der gewählten Parameter ein

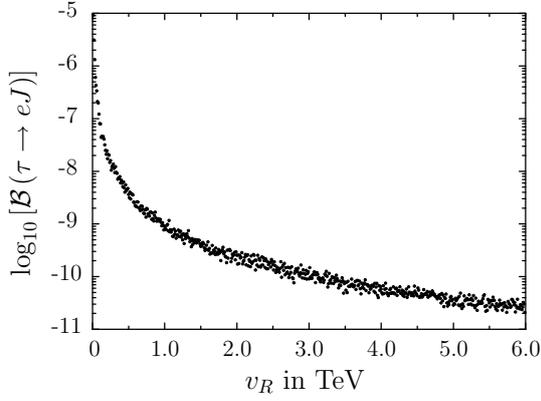
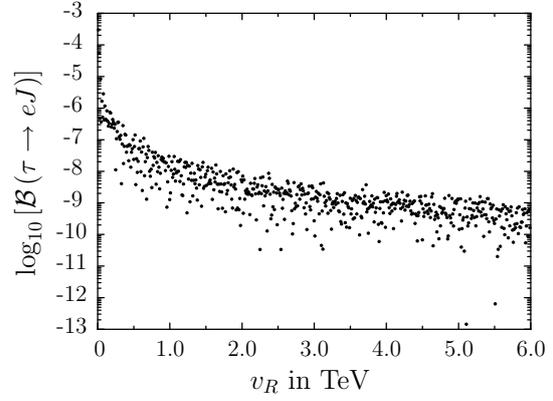
(a) Anpassung von θ_{atm} durch $\vec{\Lambda}$ (b) Anpassung von θ_{atm} durch $\vec{\epsilon}$

Abbildung 7.5: Verzweungsverhältnisse $\mathcal{B}(\tau \rightarrow eJ)$ für SPS1a über $v_R = v_S$ aufgetragen (experimentelle Obergrenze: $7.12 \cdot 10^{-3}$).

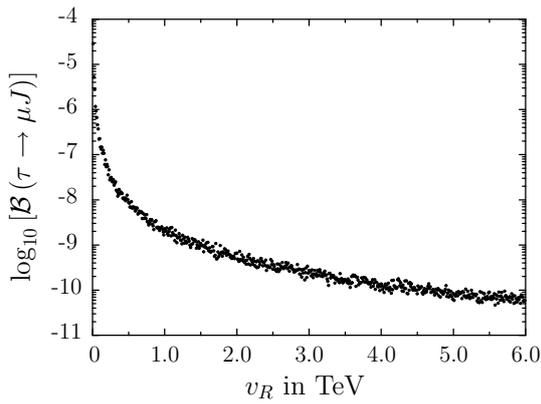
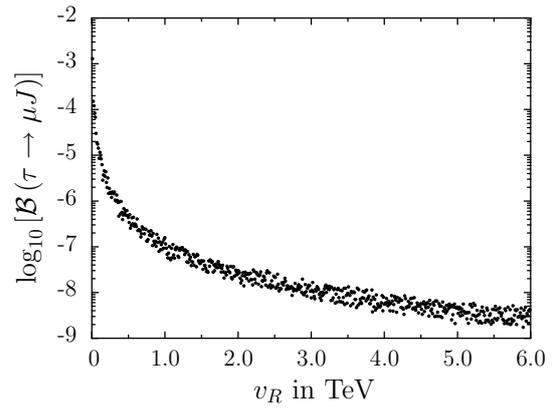
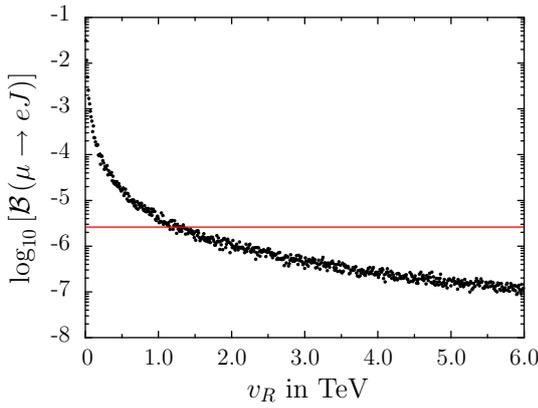
(a) Anpassung von θ_{atm} durch $\vec{\Lambda}$ (b) Anpassung von θ_{atm} durch $\vec{\epsilon}$

Abbildung 7.6: Verzweungsverhältnisse $\mathcal{B}(\tau \rightarrow \mu J)$ für SPS1a über $v_R = v_S$ aufgetragen (experimentelle Obergrenze: $2.25 \cdot 10^{-2}$).

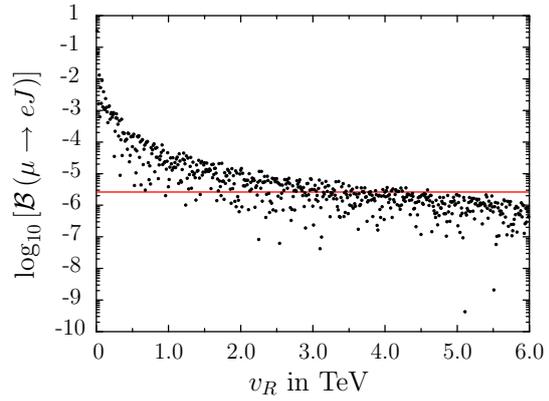
Vakuumerwartungswert von über $v_R = v_S = 1000 \text{ GeV}$ zur Einhaltung der experimentellen Daten benötigt wird, ist der atmosphärische Winkel über $\vec{\Lambda}$ gesteuert. Durch die breitere Streuung im Falle eines über $\vec{\epsilon}$ gebildeten atmosphärischen Winkels können die Vakuumerwartungswerte v_R und v_S etwas kleinere Werte annehmen. In diesem Fall muss allerdings mit den zunächst nur durch die Neutrino-Routine beschränkten Parameter h_ν^i und v_{Li} eine Feinabstimmung vorgenommen werden.

Der Zerfall eines τ -Leptons zeigt grundsätzlich ein gleiches Verhalten, allerdings dämmen hier die experimentellen Daten den Wertebereich für v_R bzw. v_S und die anderen R-paritätsverletzenden Parameter nicht ein. Man befindet sich jedoch in einem Bereich, in dem eine Verbesserung der Grenzen durch aktuelle Experimente realisierbar ist, so dass die Möglichkeit einer zusätzlichen Einschränkung durch den τ -Zerfall besteht.

In den Abbildungen 7.7 bis 7.9 sind die entsprechenden Verzweigungsverhältnisse für den Referenzpunkt SPS4 dargestellt. Hier treffen die gemachten Aussagen gleichermaßen zu, womit gezeigt ist, dass Parameterpunkte mit großem $\tan \beta$ ebenfalls betroffen sind. Abschließend ist zu erwähnen, dass sich die Verzweigungsverhältnisse bei einer Variation von $v_R = \frac{1}{10} v_S$ identisch verhalten und die in Kapitel 2.3 genannten Grenzen den Parameterraum beschränken.



(a) Anpassung von θ_{atm} durch $\vec{\Lambda}$



(b) Anpassung von θ_{atm} durch $\vec{\epsilon}$

Abbildung 7.7: Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\mu \rightarrow eJ)$ für SPS4 über $v_R = v_S$ aufgetragen mit experimenteller Grenze bei $2.6 \cdot 10^{-6}$ (rote Linie).

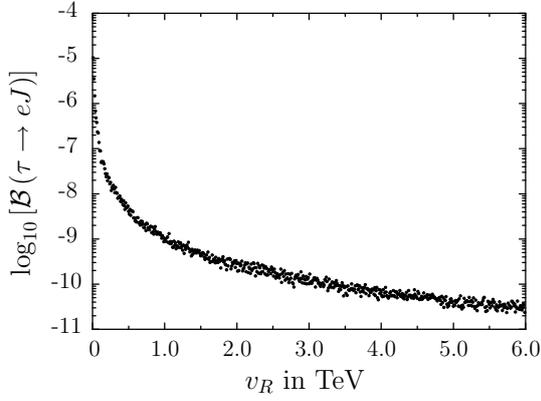
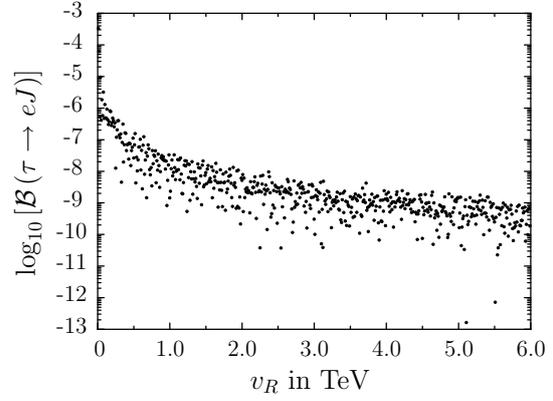
(a) Anpassung von θ_{atm} durch $\vec{\Lambda}$ (b) Anpassung von θ_{atm} durch $\vec{\epsilon}$

Abbildung 7.8: Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\tau \rightarrow eJ)$ für SPS4 über $v_R = v_S$ aufgetragen (experimentelle Obergrenze: $7.12 \cdot 10^{-3}$).

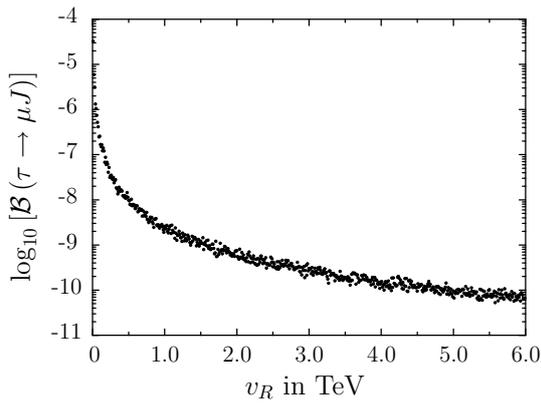
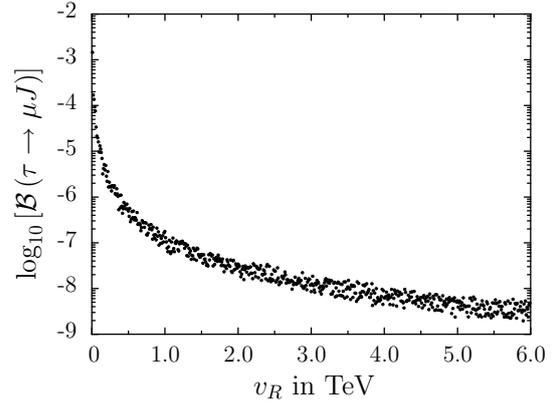
(a) Anpassung von θ_{atm} durch $\vec{\Lambda}$ (b) Anpassung von θ_{atm} durch $\vec{\epsilon}$

Abbildung 7.9: Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\tau \rightarrow \mu J)$ für SPS4 über $v_R = v_S$ aufgetragen (experimentelle Obergrenze: $2.25 \cdot 10^{-2}$).

7.3 Variation der Yukawakopplung h_0

In diesem Abschnitt wird die Abhängigkeit der Verzweigungsverhältnisse von h_0 untersucht. Mit einer Veränderung von h_0 wird ebenso der Vakuumerwartungswert des NMSSM-artigen Singlett-Felds v_Φ variiert, da der Parameter $\mu = h_0 \frac{v_\Phi}{\sqrt{2}}$ durch die Vorgabe eines Referenzpunktes fixiert ist. Grundsätzlich ist festzustellen, dass mit einer Erhöhung von h_0 bis auf den b -Quarkzerfall in zwei gleiche Leptonen alle weiteren Verzweigungsverhältnisse absinken, also sich weiter von möglichen experimentellen Grenzen entfernen. Bei Erniedrigung von h_0 steigen sie im Gegenzug an.

Dieses Verhalten wird am Beispiel des Zerfalls $\mu \rightarrow eJ$ gezeigt, da sich dieser Prozess am nächsten an der experimentellen Grenze befindet. Es gilt $v_R = v_S = 1000 \text{ GeV}$ für die beiden Vakuumerwartungswerte der weiteren Singlett-Felder. Die übrigen Parameter werden durch SPS1a festgelegt und es kommen beide Varianten der NeutrinoFITroutine zum Einsatz. Das Resultat ist Abbildung 7.10 zu entnehmen. Vergleichbares ergibt sich wie erwähnt nicht nur für alle weiteren Lepton-, sondern auch für die b -Quark-Zerfälle in zwei verschiedene Leptonen. Handelt es sich um zwei Leptonen der gleichen Generation, so bleibt das genannte Verzweigungsverhältnis auf konstantem Niveau.

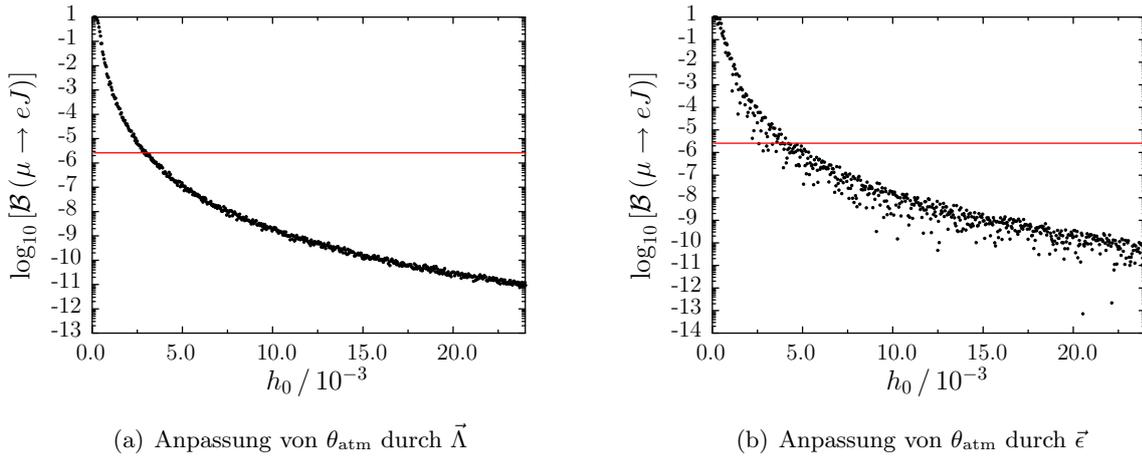


Abbildung 7.10: Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\mu \rightarrow eJ)$ für SPS1a über h_0 aufgetragen mit experimenteller Grenze bei $2.6 \cdot 10^{-6}$ (rote Linie).

8 Zusammenfassung

Aus den im vorherigen Kapitel präsentierten numerischen Resultaten lässt sich zunächst der generelle Schluß ziehen, dass für das besprochene Modell stets ein Parametersatz gefunden werden kann, der mit den experimentellen Daten in Einklang steht und sie erklären kann. Die in der Einleitung geschilderte Absicht zur Motivation weiterer experimenteller Nachforschungen kann allerdings nicht in allen behandelten Zerfällen erbracht werden.

Vor allem im Bereich der B-Meson-Physik stimmt, nach Berücksichtigung der Neutrinophysik, das numerische Ergebnis stets mit den experimentellen Werten im Rahmen der Fehlergrenzen überein, so dass keine weiteren Einschränkungen des Parameterraums durch Messungen zu erwarten sind. Die Abhängigkeit von R-paritätsverletzenden Parametern ist in diesem Sektor nahezu vernachlässigbar. Eine geringere Anzahl an Näherungen beinhaltende Rechnungen oder die Miteinbeziehung höherer Ordnungen könnten zu möglichen Einschränkungen führen.

Die Resultate im Bereich des leptonischen Dreikörperzerfalls zeigen ebenfalls keine zusätzlichen Grenzen auf. Der vorliegende Unterschied zwischen berechneten und aus aktuellen Experimenten bestimmbaren Daten ist zu groß und der Einfluß der R-Paritätsverletzung zu gering, so dass in diesem Bereich kaum auf baldige Einschränkungen gehofft werden kann. Eine wünschenswerte Entwicklung wäre die konkrete Messung der Prozesse. In diesem Fall müssten intensive Überlegungen angestellt werden, welche Schritte zur Anpassung des Modells nötig sind.

Der Zerfall eines Myons in ein Elektron und ein Majoron ist ein Prozess, der den Parameter Raum der Vakuumerwartungswerte der beiden Singlett-Felder $\tilde{\nu}^c$ und \tilde{S} in Verbindung mit der NMSSM-artigen Yukawa-Kopplung h_0 einschränkt. Bei dieser Begrenzung handelt es sich erneut um eine obere Schranke, so dass eine direkte Beobachtung die bisherigen Abstimmungen verbessern kann. Für ein zerfallendes τ -Lepton sind die experimentellen Schranken derzeit noch zu hoch, als dass sie sich auf den Parameterraum auswirken. Das zum Myon-Zerfall ähnliche Verhalten der Verzweigungsverhältnisse sollte hier jedoch Projekten wie MEGAPIE, BaBar, Belle oder Bess Anstoß zu einer genaueren Datenanalyse auf diesem Gebiet geben.

Zusammenfassend lässt sich demnach sagen, dass die Arbeit, wenn auch nicht in allen Bereichen, so doch in Teilen, den gewünschten Erfolg zeigt und Parameterkombinationen ausschließt bzw. Abhängigkeiten von einer R-Paritätsverletzung feststellt. Außerdem ist zu erkennen, dass vor allem im Bereich der Verletzung der Leptongeneration großes Potential für Nachforschungen besteht.

A Transformationen und Identitäten

A.1 Weyl-Darstellung

Im Allgemeinen können Lagrangedichten in verschiedenen Darstellungen geschrieben werden. Aufgrund ihrer Universalität wird sehr häufig die Dirac-Darstellung gewählt, doch da in der Supersymmetrie auch die Darstellung nach Weyl sehr gebräuchlich ist, wird diese hier kurz erläutert [32]. Sei zunächst die Lagrangedichte eines freien Feldes ψ mit Masse m bei Verwendung von Dirac-Spinoren durch

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (\text{A.1})$$

gegeben, wobei $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ gilt. Nun werden die vierkomponentigen Dirac-Spinoren ψ und $\bar{\psi}$ in die zweikomponentigen Weyl-Spinoren $\psi = (\xi, \eta^\dagger)^T$ und $\bar{\psi} = (\eta^T, \xi^*)$ umgeschrieben. Wirken die Projektionsoperatoren $P_{L/R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$ auf die neu dargestellten Zustände, so ergibt sich

$$\psi_L = P_L\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi_R = P_R\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^\dagger \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Demnach sind die ersten beiden Komponenten der linkshändige Anteil des Diracspinors ψ und bilden den Weyl-Spinor ξ . Analog ist der rechtshändige Anteil als Weyl-Spinor η^\dagger zu interpretieren. Insgesamt ergibt sich mit den abgewandelten Paulimatirxen $\bar{\sigma} = (\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3)$ für die Lagrangedichte in der Weyl-Darstellung

$$\mathcal{L} = i\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta + i\xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi - m(\xi\eta + \xi^\dagger\eta^\dagger). \quad (\text{A.3})$$

Wie zu erkennen ist, tragen sowohl links- als auch rechtshändige Anteile gleichermaßen zur Lagrangedichte bei. Betrachtet man jetzt den Dirac-Spinor des Antiteilchens

$$\psi^c = C\bar{\psi}^T = C\gamma_0\psi^*, \quad (\text{A.4})$$

mit der Ladungskonjugationsmatrix C , kann gezeigt werden, dass das ladungskonjugierte dessen linkshändigen Anteils äquivalent zu η^\dagger ist. Somit kann die Lagrangedichte derart umgeschrieben werden, dass sie ausschließlich linkshändigen Anteilen von (Anti-)Teilchen besteht. Deshalb kann in der Weyl-Darstellung auf die Projektionsoperatoren $P_{L/R}$ verzichtet werden. Die in der Supersymmetrie verwendeten chiralen Supermultipletts enthalten entsprechend lediglich das linkshändige Weyl-Fermion.

A.2 Fierztransformation

Unter Fierztransformation versteht man die Umformung eines in Dirac-Spinoren quartischen Ausdrucks. So lassen sich in einem Term der Form $[\bar{w}_1 M w_2][\bar{w}_3 M' w_4]$ - wobei w_n vierkomponentige Dirac-Spinoren und $M^{(\prime)}$ beliebige zahlenwertige (4×4) -Matirzen bezeichnet - die Spinoren unter Berücksichtigung der Transformationsregeln beliebig vertauschen [60].

Aus den Dirac-Matrizen lässt sich eine 16 dimensionale Basis konstruieren in der beliebige (4×4) -Matrizen, im speziellen die Matrizen M und M' , dargestellt werden können. In Spinoren quartische Terme lassen sich somit vollständig durch folgende Ausdrücke beschreiben:

$$\begin{aligned} e_S(1234) &= [\bar{w}_1 w_2] [\bar{w}_3 w_4], \\ e_V(1234) &= [\bar{w}_1 \gamma^\mu w_2] [\bar{w}_3 \gamma_\mu w_4], \\ e_T(1234) &= [\bar{w}_1 \sigma^{\mu\nu} w_2] [\bar{w}_3 \sigma_{\mu\nu} w_4], \\ e_A(1234) &= [\bar{w}_1 \gamma^\mu \gamma_5 w_2] [\bar{w}_3 \gamma_\mu \gamma_5 w_4], \\ e_P(1234) &= [\bar{w}_1 \gamma_5 w_2] [\bar{w}_3 w_4], \end{aligned}$$

wobei S für skalar, V für vektoriell, T für tensoriell, A für axial und P für pseudoskalar steht. Das Tauschen von Spinoren erfordert die Durchführung der Summation

$$e_I(1234) = \sum_J F_{IJ} e_J(1432), \quad \text{mit } I, J = S, V, T, A, P.$$

In Matrixform hat F die Gestalt

$$F = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 12 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ -4 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da in dieser Arbeit ein skalarer Ausdruck transformiert wird, ist lediglich die erste Zeile der Matrix F von Belang. Außerdem ist zu beachten, dass in Kapitel 6 keine Spinoren, sondern Felder transformiert werden, was sich in einem gesamtheitlichen Minuszeichen ausdrückt. Denn im Falle von Feldern sind die Kommutatoren der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zusätzlich zu berücksichtigen.

A.3 Rechenregeln

Die beiden ausschlaggebenden Identitäten zur Umformung der tensoriellen Kopplungen in Gleichung (6.15) lauten [64]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\beta} &= -2 \left(\delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\rho - \delta_\mu^\rho \delta_\nu^\lambda \right) \\ \gamma^5 \sigma^{\mu\nu} &= +\frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Seien $a \in \mathbb{C}$ und ϕ, ψ zwei Dirac-Spinoren, so sind folgende Identitäten leicht zu zeigen:

$$\begin{aligned} a\phi\gamma^5\psi_L &= -a\phi\psi_L \\ a\phi\gamma^5\psi_R &= -a\phi\psi_R \\ a\phi_{L/R}\sigma^{\mu\nu}\psi_{L/R} &= 0 \\ a\phi_{R/L}\gamma^\mu\psi_{L/R} &= 0 \end{aligned}$$

B Modellspezifische Definitionen

B.1 Skalarpotential

Durch die in Abschnitt 3.2 unter (3.23) beschriebene Kombination der Ableitung des Superpotentials (4.1) in Verbindung mit Eichkopplungen sowie der schwachen Supersymmetriebrechung erhält man im Allgemeinen im neutralen Sektor das skalare Potential [45]:

$$\begin{aligned}
V_{\text{allgemein}}^{\text{neutral}} = & \left| h\Phi\tilde{S} + h_\nu^i\tilde{\nu}H_u + M_R\tilde{S} \right|^2 + |h_0\Phi H_u + \hat{\mu}H_u|^2 + |h\Phi\tilde{\nu}^c + M_R\tilde{\nu}^c|^2 \\
& + \left| -h_0\Phi H_d - \hat{\mu}H_d + h_\nu^i\tilde{\nu}_i\tilde{\nu}^c \right|^2 + \left| -h_0H_uH_d + h\tilde{\nu}^c\tilde{S} - \delta^2 + M_\Phi\Phi + \frac{\lambda}{2}\Phi^2 \right|^2 \\
& + \sum_{i=1}^3 |h_\nu^i\tilde{\nu}^c H_u|^2 + \left[A_h h\Phi\tilde{\nu}^c\tilde{S} - A_{h_0}h_0\Phi H_uH_d + A_{h_\nu}h_\nu^i\tilde{\nu}_iH_u\tilde{\nu}^c - B\hat{\mu}H_uH_d \right. \\
& \left. - C_\delta\delta^2\Phi + B_{M_R}M_R\tilde{\nu}^c\tilde{S} + \frac{1}{2}B_{M_\Phi}M_\Phi\Phi^2 + \frac{1}{3!}A_\lambda\lambda\Phi^3 + \text{h.c.} \right] \\
& + \sum_\alpha \tilde{m}_\alpha^2 |z_\alpha|^2 + \frac{1}{8}(g^2 + g'^2) \left(|H_u|^2 - |H_d|^2 - \sum_{i=1}^3 |\tilde{\nu}_i|^2 \right)^2 \tag{B.1}
\end{aligned}$$

wobei z_α für jedes skalare Feld dieses Modells steht. Im Falle des speziellen Modells mit ausschließlich trilinearen Termen, respektive $\hat{\mu} = \delta = M_R = M_\Phi = 0$, gilt Superpotential (4.2) und das Skalarpotential im neutralen Bereich lautet:

$$\begin{aligned}
V^{\text{neutral}} = & \left| h\Phi\tilde{S} + h_\nu^i\tilde{\nu}H_u \right|^2 + |h_0\Phi H_u|^2 + |h\Phi\tilde{\nu}^c|^2 + \left| -h_0\Phi H_d + h_\nu^i\tilde{\nu}_i\tilde{\nu}^c \right|^2 \\
& + \left| -h_0H_uH_d + h\tilde{\nu}^c\tilde{S} + \frac{\lambda}{2}\Phi^2 \right|^2 + \sum_{i=1}^3 |h_\nu^i\tilde{\nu}^c H_u|^2 \\
& + \left[A_h h\Phi\tilde{\nu}^c\tilde{S} - A_{h_0}h_0\Phi H_uH_d + A_{h_\nu}h_\nu^i\tilde{\nu}_iH_u\tilde{\nu}^c + \frac{1}{3!}A_\lambda\lambda\Phi^3 + \text{h.c.} \right] \\
& + \sum_\alpha \tilde{m}_\alpha^2 |z_\alpha|^2 + \frac{1}{8}(g^2 + g'^2) \left(|H_u|^2 - |H_d|^2 - \sum_{i=1}^3 |\tilde{\nu}_i|^2 \right)^2 \tag{B.2}
\end{aligned}$$

B.2 Massenmatrizen der Fermionen

B.2.1 Neutrale Fermionen

In der Eicheigenbasis der neutralen Fermionen

$$\psi'^{0T} = \left(\tilde{B}^0, \tilde{W}_3^0, \tilde{H}_d^0, \tilde{H}_u^0, \nu_i, \nu^c, S, \Phi \right) \tag{B.3}$$

sind die Massenterme in der Lagrangedichte durch

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^0 = -\frac{1}{2}\psi'^{0T} M_N \psi'^0 + \text{h.c.} \quad (\text{B.4})$$

gegeben, wobei es sich bei M_N , wie bereits aus Abschnitt 4.2 hervorgeht, um eine komplexe symmetrische Matrix handelt. Im allgemeinen Modell hat diese Matrix die Form [45]

$$M_N = \begin{pmatrix} M_{\chi^0} & m_{\chi^0\nu} & m_{\chi^0\nu^c} & 0 & m_{\chi^0\Phi} \\ m_{\chi^0\nu}^T & 0 & m_D & 0 & 0 \\ m_{\chi^0\nu^c}^T & m_D^T & 0 & M_{\nu^c S} & M_{\nu^c\Phi} \\ 0 & 0 & M_{\nu^c S}^T & 0 & M_{S\Phi} \\ m_{\chi^0\Phi}^T & 0 & M_{\nu^c\Phi}^T & M_{S\Phi}^T & M_\Phi \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

mit der üblichen Neutralinomassenmatrix

$$M_{\chi^0} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -\frac{1}{2}g'v_d & +\frac{1}{2}g'v_u \\ 0 & M_2 & +\frac{1}{2}g'v_d & -\frac{1}{2}g'v_u \\ -\frac{1}{2}g'v_d & +\frac{1}{2}g'v_d & 0 & -\mu \\ +\frac{1}{2}g'v_u & -\frac{1}{2}g'v_u & -\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

wobei $\mu = \hat{\mu} + h_0 \frac{v_\Phi}{\sqrt{2}}$ gilt. Außerdem gehen die Diracmassenmatrix der Neutrinos $(m_D)_i = \frac{1}{\sqrt{2}}h_\nu^i v_u$, die R-paritätsverletzende Neutrino-Neutralino-Mischmatrix

$$m_{\chi^0\nu}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}g'v_{Le} & \frac{1}{2}g'v_{Le} & 0 & \epsilon_e \\ -\frac{1}{2}g'v_{L\mu} & \frac{1}{2}g'v_{L\mu} & 0 & \epsilon_\mu \\ -\frac{1}{2}g'v_{L\tau} & \frac{1}{2}g'v_{L\tau} & 0 & \epsilon_\tau \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

wobei $\epsilon_i = h_\nu^i \frac{v_R}{\sqrt{2}}$ gilt, sowie die weiteren Matrizen

$$m_{\chi^0\nu^c}^T = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i h_\nu^i v_{Li} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$m_{\chi^0\Phi}^T = \left(0 \quad 0 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}h_0 v_u \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}h_0 v_d \right) \quad (\text{B.9})$$

$$M_{\nu^c S} = M_R + h \frac{v_\Phi}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.10})$$

$$M_{\nu^c\Phi}^T = (\langle v_S \rangle) \quad \text{mit } \langle v_S \rangle = h \frac{v_S}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.11})$$

$$M_{S\Phi}^T = (\langle v_R \rangle) \quad \text{mit } \langle v_R \rangle = h \frac{v_R}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.12})$$

$$M_\Phi = M_\Phi + \lambda \frac{v_\Phi}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.13})$$

ein. An dieser Stelle sei erwähnt, dass bei einer größeren Anzahl an Generationen von rechtshändigen Sneutrinos und S -Felder die hier nur als Skalare auftretenden Matrizen (B.10) bis (B.12) entsprechend zu erweitern sind.

Zum Übergang in die Massenbasis ist es, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben, nötig eine Transformation $\psi_i^0 = \mathcal{N}_{ij} \psi_j'^0$ durchzuführen. Die unitäre Matrix \mathcal{N} diagonalisiert hierbei die Massenmatrix der neutralen Fermionen

$$M_{N,\text{diag}} = \mathcal{N}^* M_N \mathcal{N}^\dagger \quad (\text{B.14})$$

wie es aus den Rechenregeln für Matrizen hervorgeht. Im Hauptteil wurde bereits erläutert, dass mit Hilfe der Matrix [49]

$$M_H = \begin{pmatrix} M_{\chi^0} & 0 & 0 & m_{\chi^0\Phi} \\ 0 & 0 & M_{\nu^c S} & M_{\nu^c\Phi} \\ 0 & M_{\nu^c S}^T & 0 & M_{S\Phi} \\ m_{\chi^0\Phi}^T & M_{\nu^c\Phi}^T & M_{S\Phi}^T & M_\Phi \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

eine Näherungsformel dieser Matrix unter Verwendung der Entwicklungsparameter $(\xi)_{ij} = (M_D^T M_H^{-1})_{ij} = K_\Lambda^j \Lambda_i + K_\epsilon^j \epsilon_i$ angegeben werden kann. Für die Koeffizienten K_Λ^j und K_ϵ^j in der vereinfachten Darstellung der Entwicklungsparameter gelten für den Fall $\hat{\mu} = \delta = M_R = M_\Phi = 0$ die Beziehungen [49]

$$\begin{aligned} K_\Lambda^1 &= -\frac{2g' M_2 \mu}{m_\gamma} a, & K_\epsilon^1 &= -\frac{2g' M_2 \mu}{m_\gamma} b \\ K_\Lambda^2 &= \frac{2g M_1 \mu}{m_\gamma} a, & K_\epsilon^2 &= \frac{2g M_1 \mu}{m_\gamma} b \\ K_\Lambda^3 &= -v_u a + \frac{v_d b}{2v_u}, & K_\epsilon^3 &= -\frac{c}{2\mu v_u^2} \left(\frac{4 \det(M_H) a}{h^2 m_\gamma} - v_d v_u \mu \right) - \frac{v^2 b}{2v_u} \\ K_\Lambda^4 &= v_d a + \frac{b}{2}, & K_\epsilon^4 &= -\frac{h^2 \mu v_u}{4 \det(M_H)} (4M_1 M_2 \mu v_u - m_\gamma v_d v^2) \\ K_\Lambda^5 &= \frac{v_R b}{2v_u}, & K_\epsilon^5 &= \frac{v_R c}{2v_u} \\ K_\Lambda^6 &= \frac{v_S b}{2v_u}, & K_\epsilon^6 &= \frac{c}{2\sqrt{2} v_u v_R v_\Phi h} \left[\frac{8 \det(M_H) a}{h^2 m_\gamma} + \sqrt{2} h v_\Phi v_R v_S \right] - \frac{2\sqrt{2} \det(M_H) b^2}{h^3 m_\gamma v_u v_R v_\Phi} \\ K_\Lambda^7 &= -\frac{v_\Phi b}{2v_u}, & K_\epsilon^7 &= -\frac{v_\Phi c}{2v_u}, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

mit $m_\gamma = g^2 M_1 + g'^2 M_2$ und der Definition der Variablen a, b und c als

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_\gamma h^2 v_\Phi}{4\sqrt{2} \det(M_H)} (-h v_R v_S + \frac{1}{2} \lambda v_\Phi^2 + h_0 v_d v_u), \\ b &= \frac{m_\gamma h^2 \mu}{4 \det(M_H)} v_u (v_u^2 - v_d^2), \\ c &= \frac{h^2 \mu}{\det(M_H)} v_u^2 (2M_1 M_2 \mu - m_\gamma v_d v_u). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Für den trilinearen Fall ergibt sich für die Determinante von M_H :

$$\det(M_H) = \frac{1}{16} h_0 h^2 v_\Phi^2 \left[4(2M_1 M_2 \mu - m_\gamma v_d v_u) (-h v_R v_S + \frac{1}{2} \lambda v_\Phi^2 + h_0 v_d v_u) - h_0 m_\gamma (v_u^2 - v_d^2)^2 \right] \quad (\text{B.18})$$

Wird das allgemeine Modell betrachtet, so haben die Entwicklungsparameter eine weitaus kompliziertere Struktur. Allerdings lohnt es sich dennoch für diesen Fall $a_{\text{allgemein}}$, $b_{\text{allgemein}}$ und $c_{\text{allgemein}}$ anzugeben, da diese Variablen ebenfalls in die effektive Massenmatrix der Neutrinos

– $(m_{\nu\nu}^{\text{eff}})_{ij} = a\Lambda_i\Lambda_j + b(\epsilon_i\Lambda_j + \epsilon_j\Lambda_i) + c\epsilon_i\epsilon_j$ eingehen. Es gilt [45]:

$$a_{\text{allgemein}} = \frac{1}{4\mu \det(M_H)} \left[m_\gamma \hat{M}_R \left(-h^2 v_R v_S \mu + \hat{M}_\Phi \hat{M}_R \mu + h_0^2 \hat{M}_R v_d v_u \right) \right], \quad (\text{B.19})$$

$$b_{\text{allgemein}} = \frac{1}{8\mu \det(M_H)} \left[h_0 m_\gamma \hat{M}_R \left(h_0 \hat{M}_R + h\mu \right) v_u (v_u^2 - v_d^2) \right], \quad (\text{B.20})$$

$$c_{\text{allgemein}} = \frac{1}{4\mu \det(M_H)} \left[\left(h_0 \hat{M}_R + h\mu \right)^2 v_u^2 (2M_1 M_2 \mu - m_\gamma v_d v_u) \right], \quad (\text{B.21})$$

wobei $\hat{M}_R = M_R + h \frac{v_\Phi}{\sqrt{2}}$ und $\hat{M}_\Phi = M_\Phi + \lambda \frac{v_\Phi}{\sqrt{2}}$. Die Determinante lautet in der Verallgemeinerung:

$$\det_{\text{allgemein}}(M_H) = \frac{1}{8} \hat{M}_R \left\{ 8M_1 M_2 \mu \left(\hat{M}_\Phi \hat{M}_R \mu - h^2 \mu v_R v_S + h_0^2 \hat{M}_R v_d v_u \right) - m_\gamma \left[4\mu v_d \left(\hat{M}_\Phi \hat{M}_R - h^2 v_R v_S \right) v_u + h_0^2 \hat{M}_R (v_d^2 + v_u^2)^2 \right] \right\} \quad (\text{B.22})$$

Es ist schnell überprüfbar, dass für $\hat{\mu} = \delta = M_R = M_\Phi = 0$ die allgemeinen Variablen in diejenigen des speziellen Modells übergehen.

B.2.2 Geladene Fermionen

Die Lagrangedichte der geladenen Fermionen in der Eicheigenbasis

$$\psi'^{-T} = \left(\tilde{W}^-, \tilde{H}_d^-, e, \mu, \tau \right) \quad (\text{B.23})$$

$$\psi'^{+T} = \left(\tilde{W}^+, \tilde{H}_u^+, e^c, \mu^c, \tau^c \right) \quad (\text{B.24})$$

ist durch die Massenterme

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^\pm = -\frac{1}{2} \left(\psi_j'^{-T} M_\pm \psi_j'^+ + \psi_j'^{+T} M_\pm^T \psi_j'^- \right) + \text{h.c.} \quad (\text{B.25})$$

gegeben. Wie bereits in Abschnitt 4.2 erläutert handelt es sich bei M_\pm um die unsymmetrische Matrix [52]

$$M_\pm = \begin{pmatrix} M_{\chi^\pm} & E' \\ E & M_l \end{pmatrix} \quad (\text{B.26})$$

$$= \begin{pmatrix} M_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} g v_u & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} g v_d & \mu & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j h_e^{1j} v_{Lj} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j h_e^{2j} v_{Lj} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j h_e^{3j} v_{Lj} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} g v_{L1} & -\epsilon_1 & \frac{1}{\sqrt{2}} h_e^{11} v_d & \frac{1}{\sqrt{2}} h_e^{12} v_d & \frac{1}{\sqrt{2}} h_e^{13} v_d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} g v_{L2} & -\epsilon_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} h_e^{21} v_d & \frac{1}{\sqrt{2}} h_e^{22} v_d & \frac{1}{\sqrt{2}} h_e^{23} v_d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} g v_{L3} & -\epsilon_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} h_e^{31} v_d & \frac{1}{\sqrt{2}} h_e^{32} v_d & \frac{1}{\sqrt{2}} h_e^{33} v_d \end{pmatrix}, \quad (\text{B.27})$$

wobei dieser Gleichung die Definitionen der Chargino-Massenmatrix und der anderen Untermatrizen entnommen werden können. Außerdem ist die Leptonmassenmatrix M_l stets in derjenigen Basis gegeben, in der sie Diagonalgestalt hat oder kann aufgrund seiner relativen Größe gar nur durch das (3, 3)-Element repräsentiert werden. Die vormalig eingeführten Vorschriften

$$\psi_i^+ = \mathcal{V}_{ij} \psi_j'^+ \quad \text{und} \quad \psi_i^- = \mathcal{U}_{ij} \psi_j'^- \quad (\text{B.28})$$

zur Transformation in die Massenbasis, legen die Diagonalisierungsmatrizen der Matrix M_{\pm} zu

$$\mathcal{U}^* M_{\pm} \mathcal{V}^{\dagger} = \text{diag} \left\{ m_{\chi_i^{\pm}}, m_i^l \right\} \quad (\text{B.29})$$

fest. Die in Abschnitt 4.2 angesprochenen, zur Näherung der Rotationsmatrizen \mathcal{U} und \mathcal{V} brauchbaren Entwicklungsparameter

$$\xi_L^* = E M_{\chi^{\pm}}^{-1} \quad \text{und} \quad (\text{B.30})$$

$$\xi_R^* = M_l^{\dagger} E M_{\chi^{\pm}}^{-1} \left(M_{\chi^{\pm}}^{-1} \right)^T = M_l^{\dagger} \xi_L^* \left(M_{\chi^{\pm}}^{-1} \right)^T, \quad (\text{B.31})$$

sind durch

$$\xi_{L,i1}^* = \frac{g \Lambda_i}{\sqrt{2} \det(M_{\chi^{\pm}})} \quad (\text{B.32})$$

$$\xi_{L,i2}^* = -\frac{\epsilon_i}{\mu} - \frac{g^2 v_u \Lambda_i}{2\mu \det(M_{\chi^{\pm}})} \quad (\text{B.33})$$

$$\xi_{R,i1}^* = \frac{h_e^{ii} g v_d}{2\mu \det(M_{\chi^{\pm}})} \left(v_u \epsilon_i + \frac{2\mu^2 + g^2 v_u^2}{2 \det(M_{\chi^{\pm}})} \Lambda_i \right) \quad (\text{B.34})$$

$$\xi_{R,i2}^* = -\frac{\sqrt{2} h_e^{ii} v_d}{2\mu \det(M_{\chi^{\pm}})} \left(M_2 \epsilon_i + \frac{g^2 (v_d \mu + v_u M_2)}{2 \det(M_{\chi^{\pm}})} \Lambda_i \right) \quad (\text{B.35})$$

gegeben, wobei in die Berechnung der hier angegebenen ξ_R^* die Leptonmassenmatrix M_l als eine reelle Diagonalmatrix eingeht.

B.3 Massenmatrizen skalarer Teilchen

Die Berechnung der Massenmatrix skalarer Teilchen erfolgt über die quadratischen Terme des kompletten Skalarpotentials (3.23). Da im Folgenden ausschließlich neutrale Skalare betrachtet werden, genügt es das in (B.1) gegebene Potential auszuwerten. Eine Transformation der in der Eigeigenbasis

$$A^{0'T} = \left(H_d^0, H_u^0, \tilde{\nu}^i, \Phi, \tilde{S}, \tilde{\nu}^c \right) \quad (\text{B.36})$$

vorliegenden Terme, ist wie in Abschnitt 4.2 beschrieben analytisch kaum möglich. Da dies selbst für das Modell mit ausschließlich trilinearen Termen gilt und damit genauere Analysen der Massenmatrizen ausbleiben, werden diese in allgemeiner Form angegeben. Zur übersichtlicheren Darstellung gelten nachfolgende die Abkürzungen:

$$\Omega = B\mu - \delta^2 h_0 + \frac{\lambda}{4} h_0 v_{\Phi}^2 + \frac{1}{2} h h_0 v_R v_S + \frac{1}{\sqrt{2}} A_{h_0} h_0 v_{\Phi} + \frac{1}{\sqrt{2}} h_0 M_{\Phi} v_{\Phi}, \quad (\text{B.37})$$

$$\Gamma = B_{M_R} M_R - \delta^2 h + \frac{1}{4} h \lambda v_{\Phi}^2 - \frac{1}{2} h h_0 v_u v_d + \frac{1}{\sqrt{2}} h (A_h + M_{\Phi}) v_{\Phi}, \quad (\text{B.38})$$

$$\hat{M}_R = M_R + h \frac{v_{\Phi}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{M}_{\Phi} = M_R + \lambda \frac{v_{\Phi}}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.39})$$

B.3.1 Neutrale Skalare (CP-gerade)

In der unrotierten Basis der Realteile $(S^{0'})^T = (H_d^0, H_u^0, \tilde{\nu}^i, \Phi, \tilde{S}, \tilde{\nu}^c)$ enthält das Skalarpotential relevante quadratische Terme, die sich in der Form

$$\frac{1}{2} (S^{0'})^T M^{S^2} S^{0'} \quad (\text{B.40})$$

schreiben lassen. Es erweist sich als zweckmäßig die Matrix in Blöcke zu unterteilen [45, 50]

$$M^{S^2} = \begin{pmatrix} M_{HH}^{S^2} & M_{HS}^{S^2} & M_{H\bar{L}}^{S^2} \\ M_{HS}^{S^2T} & M_{SS}^{S^2} & M_{LS}^{S^2T} \\ M_{H\bar{L}}^{S^2T} & M_{LS}^{S^2} & M_{LL}^{S^2} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.41})$$

die jeweils eine Teilchengattung oder Mischungen zwischen den Gattungen beinhalten. Die verwendeten Blöcke sind gegeben durch:

- Higgsblock

$$M_{HH_{11}}^{S^2} = \frac{1}{4} (g^2 + g'^2) v_d^2 + \Omega \tan \beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \mu \frac{v_R}{v_d} \sum_{i=1}^3 h_\nu^i v_{Li} \quad (\text{B.42})$$

$$M_{HH_{12}}^{S^2} = -\frac{1}{4} (g^2 + g'^2) v_d v_u - \Omega + h_0^2 v_u v_d \quad (\text{B.43})$$

$$M_{HH_{22}}^{S^2} = \frac{1}{4} (g^2 + g'^2) v_u^2 + \Omega \cot \beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_R}{v_u} \sum_{i=1}^3 A_{h_\nu} h_\nu^i v_{Li} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{M}_R \frac{v_S}{v_u} \sum_{i=1}^3 h_\nu^i v_{Li} \quad (\text{B.44})$$

- Block der zusätzlichen Singlettfelder

$$\begin{aligned} M_{SS_{11}}^{S^2} &= \frac{1}{2} \lambda^2 v_\Phi^2 + \delta^2 (C_\delta + M_\Phi) \frac{\sqrt{2}}{v_\Phi} - \frac{1}{\sqrt{2}} (v_d^2 + v_u^2) \frac{h_0 \hat{\mu}}{v_\Phi} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \lambda (A_\lambda + 3M_\Phi) v_\Phi \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} h (A_h + M_\Phi) \frac{v_R v_S}{v_\Phi} + \frac{1}{\sqrt{2}} h_0 (A_{h_0} + M_\Phi) \frac{v_u v_d}{v_\Phi} + \frac{1}{2} h_0 \frac{v_d v_R}{v_\Phi} \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \\ &\quad - \frac{1}{2} h \frac{v_S v_u}{v_\Phi} \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} - \frac{1}{\sqrt{2}} h M_R \frac{v_S^2 + v_R^2}{v_\Phi} \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

$$M_{SS_{12}}^{S^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} h (A_h + \hat{M}_\Phi) v_R + \sqrt{2} h \hat{M}_R v_S + \frac{1}{2} h v_u \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.46})$$

$$M_{SS_{13}}^{S^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} h (A_h + \hat{M}_\Phi) v_S - \frac{1}{2} h_0 v_d \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} + \sqrt{2} h \hat{M}_R v_R \quad (\text{B.47})$$

$$M_{SS_{22}}^{S^2} = -\Gamma \frac{v_R}{v_S} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_u}{v_S} \hat{M}_R \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.48})$$

$$M_{SS_{23}}^{S^2} = \Gamma + h^2 v_R v_S \quad (\text{B.49})$$

$$M_{SS_{33}}^{S^2} = -\Gamma \frac{v_S}{v_R} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mu v_d}{v_R} \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_u}{v_R} \sum_{k=1}^3 A_{h_\nu} h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.50})$$

- Sneutrino block

$$M_{\tilde{L}\tilde{L}ij}^{S^2} = \frac{1}{4} (g^2 + g'^2) v_{Li} v_{Lj} + \frac{1}{2} (v_R^2 + v_u^2) h_\nu^i h_\nu^j + \delta_{ij} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_u v_R}{v_{Li}} A_{h_\nu} h_\nu^i + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_d v_R}{v_{Li}} h_\nu^i \mu - \frac{1}{2} \frac{v_R^2 + v_u^2}{v_{Li}} h_\nu^i \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{M}_R \frac{v_S v_u}{v_{Li}} h_\nu^i \right) \quad (\text{B.51})$$

- Mischung zwischen Higgs und Singlettfeldern

$$M_{HS_{11}}^{S^2} = \sqrt{2} h_0 \mu v_d - \frac{1}{\sqrt{2}} h_0 (A_{h_0} + \hat{M}_\Phi) v_u - \frac{1}{2} h_0 v_R \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.52})$$

$$M_{HS_{12}}^{S^2} = -\frac{1}{2} h h_0 v_R v_u \quad (\text{B.53})$$

$$M_{HS_{13}}^{S^2} = -\frac{1}{2} h h_0 v_S v_u - \frac{1}{\sqrt{2}} \mu \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.54})$$

$$M_{HS_{21}}^{S^2} = \sqrt{2} h_0 \mu v_u - \frac{1}{\sqrt{2}} h_0 (A_{h_0} + \hat{M}_\Phi) v_d + \frac{1}{2} h v_S \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.55})$$

$$M_{HS_{22}}^{S^2} = -\frac{1}{2} h h_0 v_R v_d + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{M}_R \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.56})$$

$$M_{HS_{23}}^{S^2} = -\frac{1}{2} h h_0 v_S v_d + v_u v_R \sum_{k=1}^3 h_\nu^k h_\nu^k + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^3 A_{h_\nu} h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.57})$$

- Mischung zwischen Sneutrinos und Singlettfeldern

$$M_{LS_{i1}}^{S^2} = -\frac{1}{2} h_0 v_d v_R h_\nu^i + \frac{1}{2} h v_u v_S h_\nu^i \quad (\text{B.58})$$

$$M_{LS_{i2}}^{S^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{M}_R v_u h_\nu^i \quad (\text{B.59})$$

$$M_{LS_{i3}}^{S^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_u A_{h_\nu} h_\nu^i - \frac{1}{\sqrt{2}} h_\nu^i \mu v_d + h_\nu^i v_R \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.60})$$

- Mischung zwischen Higgs und Sneutrinos

$$M_{H\tilde{L}i}^{S^2} = \frac{1}{4} (g^2 + g'^2) v_d v_{Li} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mu v_R h_\nu^i \quad (\text{B.61})$$

$$M_{H\tilde{L}2i}^{S^2} = -\frac{1}{4} (g^2 + g'^2) v_d v_{Li} + \frac{1}{\sqrt{2}} v_R A_{h_\nu} h_\nu^i + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{M}_R v_S h_\nu^i + v_u h_\nu^i \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.62})$$

Eine Rotation in die Masseneigenbasis $(S^0)^T = (S_{h^0}, S_{H^0}, S_J, S_{J\perp}, S_\Phi, S_{\tilde{\nu}_i})$ folgt der Vorschrift $S_i^0 = \mathcal{R}_{ij}^{S^0} S_j^{0'}$.

B.3.2 Neutrale Pseudoskalare (CP-ungerade)

Die für die Massenmatrix der neutralen Pseudoskalare relevanten, quadratischen Terme des Skalarpotentials lassen sich in der Form

$$\frac{1}{2} \left(P^{0'} \right)^T M^{P^2} P^{0'} \quad (\text{B.63})$$

mit der Eicheigenbasis der Imaginärteile $\left(P^{0'} \right)^T = \left(H_d^0, H_u^0, \tilde{\nu}^i, \Phi, \tilde{S}, \tilde{\nu}^c \right)$ schreiben. Wie bereits bei den neutralen Skalaren ist eine Unterteilung in Blöcke [45, 50]

$$M^{P^2} = \begin{pmatrix} M_{HH}^{P^2} & M_{HS}^{P^2} & M_{H\tilde{L}}^{P^2} \\ M_{HS}^{P^2T} & M_{SS}^{P^2} & M_{\tilde{L}S}^{P^2T} \\ M_{H\tilde{L}}^{P^2T} & M_{\tilde{L}S}^{P^2} & M_{\tilde{L}\tilde{L}}^{P^2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.64})$$

sinnvoll. Die Untermatrizen repräsentieren erneut einzelne Teilchengattungen oder Mischungen und sind gegeben durch:

- Higgsblock

$$M_{HH_{11}}^{P^2} = \Omega \tan \beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \mu \frac{v_R}{v_d} \sum_{i=1}^3 h_\nu^i v_{Li} \quad (\text{B.65})$$

$$M_{HH_{12}}^{P^2} = \Omega \quad (\text{B.66})$$

$$M_{HH_{22}}^{P^2} = \Omega \cot \beta - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_R}{v_u} \sum_{i=1}^3 A_{h\nu} h_\nu^i v_{Li} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{M}_R \frac{v_S}{v_u} \sum_{i=1}^3 h_\nu^i v_{Li} \quad (\text{B.67})$$

- Block der zusätzlichen Singlettfelder

$$\begin{aligned} M_{SS_{11}}^{P^2} = & \delta^2 (C_\delta + M_\Phi) \frac{\sqrt{2}}{v_\Phi} - \frac{1}{\sqrt{2}} (v_d^2 + v_u^2) \frac{h_0 \hat{\mu}}{v_\Phi} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \lambda (3A_\lambda + M_\Phi) v_\Phi - 2B_{M_\Phi} M_\Phi \\ & - \frac{1}{\sqrt{2}} h (A_h + M_\Phi) \frac{v_R v_S}{v_\Phi} + \frac{1}{\sqrt{2}} h_0 (A_{h_0} + M_\Phi) \frac{v_u v_d}{v_\Phi} + \frac{1}{2} h_0 \frac{v_d v_R}{v_\Phi} \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \\ & + 2\delta^2 \lambda + \lambda h_0 v_u v_d - \lambda h v_R v_S - \frac{1}{2} h \frac{v_S v_u}{v_\Phi} \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} - \frac{1}{\sqrt{2}} h M_R \frac{v_S^2 + v_R^2}{v_\Phi} \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

$$M_{SS_{12}}^{P^2} = - \frac{1}{\sqrt{2}} h (A_h - \hat{M}_\Phi) v_R - \frac{1}{2} h v_u \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.69})$$

$$M_{SS_{13}}^{P^2} = - \frac{1}{\sqrt{2}} h (A_h - \hat{M}_\Phi) v_S - \frac{1}{2} h_0 v_d \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.70})$$

$$M_{SS_{22}}^{P^2} = - \Gamma \frac{v_R}{v_S} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_u}{v_S} \hat{M}_R \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.71})$$

$$M_{SS_{23}}^{P^2} = - \Gamma \quad (\text{B.72})$$

$$M_{SS33}^{P2} = -\Gamma \frac{v_S}{v_R} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mu v_d}{v_R} \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_u}{v_R} \sum_{k=1}^3 A_{h_\nu} h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.73})$$

- Sneutrino block

$$M_{\tilde{L}\tilde{L}ij}^{P2} = \frac{1}{2} (v_R^2 + v_u^2) h_\nu^i h_\nu^j + \delta_{ij} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_u v_R}{v_{Li}} A_{h_\nu} h_\nu^i + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_d v_R}{v_{Li}} h_\nu^i \mu - \frac{1}{2} \frac{v_R^2 + v_u^2}{v_{Li}} h_\nu^i \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{M}_R \frac{v_S v_u}{v_{Li}} h_\nu^i \right) \quad (\text{B.74})$$

- Mischung zwischen Higgs und Singlettfeldern

$$M_{HS11}^{P2} = \frac{1}{\sqrt{2}} h_0 (A_{h_0} - \hat{M}_\Phi) v_u + \frac{1}{2} h_0 v_R \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.75})$$

$$M_{HS12}^{P2} = -\frac{1}{2} h h_0 v_R v_u \quad (\text{B.76})$$

$$M_{HS13}^{P2} = -\frac{1}{2} h h_0 v_S v_u - \frac{1}{\sqrt{2}} \mu \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.77})$$

$$M_{HS21}^{P2} = \frac{1}{\sqrt{2}} h_0 (A_{h_0} - \hat{M}_\Phi) v_d + \frac{1}{2} h v_S \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.78})$$

$$M_{HS22}^{P2} = -\frac{1}{2} h h_0 v_R v_d + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{M}_R \sum_{k=1}^3 h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.79})$$

$$M_{HS23}^{P2} = -\frac{1}{2} h h_0 v_S v_d - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^3 A_{h_\nu} h_\nu^k v_{Lk} \quad (\text{B.80})$$

- Mischung zwischen Sneutrinos und Singlettfeldern

$$M_{\tilde{L}S_{i1}}^{P2} = -\frac{1}{2} h_0 v_d v_R h_\nu^i + \frac{1}{2} h v_u v_S h_\nu^i \quad (\text{B.81})$$

$$M_{\tilde{L}S_{i2}}^{P2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{M}_R v_u h_\nu^i \quad (\text{B.82})$$

$$M_{\tilde{L}S_{i3}}^{P2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} v_u A_{h_\nu} h_\nu^i + \frac{1}{\sqrt{2}} h_\nu^i \mu v_d \quad (\text{B.83})$$

- Mischung zwischen Higgs und Sneutrinos

$$M_{H\tilde{L}_{1i}}^{P2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mu v_R h_\nu^i \quad (\text{B.84})$$

$$M_{H\tilde{L}_{2i}}^{P2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} v_R A_{h_\nu} h_\nu^i - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{M}_R v_S h_\nu^i \quad (\text{B.85})$$

Die Diagonalisierung dieser Matrix und der damit verbundene Wechsel in die Masseneigenbasis $(P^0)^T = (P_{A^0}, P_{J^\perp}, P_\Phi, P_{\tilde{\nu}_i}, J, G^0)$ kann durch die Vorschrift $P_i^0 = \mathcal{R}_{ij}^{P^0} P_j^{0'}$ bewerkstelligt werden.

B.4 Definitionen zu Normierungsparametern

Die zur verkürzten Schreibweise des Goldstoneboson G_0 und des Majoron J verwendeten Koeffizienten N_i sind definiert als [45]:

$$N_0 = \frac{1}{\sqrt{v_d^2 + v_u^2 + \sum_{i=1}^3 v_{Li}^2}} = \frac{1}{v} \quad (\text{B.86})$$

$$N_1 = \sum_i v_{Li}^2 \quad (\text{B.87})$$

$$N_2 = v_d^2 + v_u^2 = v^2 - N_1 \quad (\text{B.88})$$

$$N_3 = N_1 + N_2 = v^2 \quad (\text{B.89})$$

$$N_4 = \frac{1}{\sqrt{N_1^2 N_2 + N_2^2 N_1 + N_3^2 (v_R^2 + v_S^2)}} = \frac{1}{v \sqrt{N_1 N_2 + v^2 (v_R^2 + v_S^2)}} \quad (\text{B.90})$$

C Verfahren zur Neutrinoanpassung

Das Programmpaket SPheno [61] bietet in der derzeitigen Version die Möglichkeit durch eine automatische Variation der Größen $\vec{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ und $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ respektive h_ν^i und $v_{\nu i}$ einen mit den aktuellen Neutrinoexperimenten konformen Datensatz zu erzeugen. Hierzu finden die in (4.46) und (4.47) angegebenen Näherungen

$$\tan^2 \theta_R \approx \left(\frac{\Lambda_1}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}} \right)^2, \quad \tan^2 \theta_{\text{atm}} \approx \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3} \right)^2 \quad \text{und} \quad \tan^2 \theta_{\text{sol}} \approx \left(\frac{\tilde{\epsilon}_1}{\tilde{\epsilon}_2} \right)^2 \quad (\text{C.1})$$

der Mischungswinkel Verwendung. Weiter sind vor allem die Koeffizienten a bzw. c der effektiven Neutrinomassenmatrix (4.16)

$$- \left(m_{\nu\nu}^{\text{eff}} \right)_{ij} = a\Lambda_i\Lambda_j + b(\epsilon_i\Lambda_j + \epsilon_j\Lambda_i) + c\epsilon_i\epsilon_j \quad (\text{C.2})$$

von Belang. In der folgenden Routine ist es sinnvoll die in (B.19) und (B.20) angegebenen allgemeinen Koeffizienten $a_{\text{allgemein}}$ und $c_{\text{allgemein}}$ zu benutzen. Im Weiteren wird jedoch die Schreibweise a und c beibehalten.

Bereits in Abschnitt 4.3 wurde erläutert, dass durch äquivalentes Vorgehen entweder $\vec{\Lambda}$ den atmosphärischen und Reaktorwinkel sowie $\vec{\epsilon}$ den solaren Winkel bestimmen oder analog umgekehrt. Deshalb wird im Nachfolgenden lediglich diejenige Variante ausgeführt, bei der $(m_{\nu\nu}^{\text{eff}})$ durch den Term $a\Lambda_i\Lambda_j$ dominiert wird. An dieser Stelle sei nochmals auf die Definition

$$\vec{\epsilon} = \left(V^{(\nu)} \right)^T \vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}}{|\vec{\Lambda}|} & -\frac{\Lambda_1\Lambda_2}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}|\vec{\Lambda}|} & -\frac{\Lambda_1\Lambda_3}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}|\vec{\Lambda}|} \\ 0 & \frac{\Lambda_3}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}} & -\frac{\Lambda_2}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}} \\ \frac{\Lambda_1}{|\vec{\Lambda}|} & \frac{\Lambda_2}{|\vec{\Lambda}|} & \frac{\Lambda_3}{|\vec{\Lambda}|} \end{pmatrix} \vec{\epsilon} \quad (\text{C.3})$$

hingewiesen. Mit der Zufallszahl ρ aus dem Intervall $[0, 1]$ wählt des Weiteren die Vorschrift $(x, y)_\rho = x + \rho \cdot (y - x)$ eine zufällige Zahl zwischen x und y aus. Zur Erzeugung von ρ wird der fortraninterne Zufallszahlengenerator verwendet, der bei jedem globalen Programmstart dieselben Anfangsbedingungen vorweist, aber natürlich für jeden Durchlauf andere Zahlen erzeugt. Dies hat den Vorteil, dass erzeugte Daten reproduzierbar und damit auch zu einem späteren Zeitpunkt überprüfbar sind.

Die experimentell zulässigen Intervall der Neutrinoanpassung gehen in der Form $(\tan^2 \theta_{\text{min}}, \tan^2 \theta_{\text{max}})_\rho$ bzw. $\sin \theta_{\text{max}}$ paarweise bzw. einzeln in die Routine ein. Zu Beginn werden die Hilfsbeträge

$$\begin{aligned} |\vec{\Lambda}|_H &= \sqrt{\frac{1}{|a|} \sqrt{(\Delta m_{\text{atm}, \text{min}}^2, \Delta m_{\text{atm}, \text{max}}^2)_\rho}} \quad \text{und} \\ |\vec{\epsilon}|_H^2 &= \left| \frac{1}{|c|} \sqrt{(\Delta m_{\text{sol}, \text{min}}^2, \Delta m_{\text{sol}, \text{max}}^2)_\rho} \right| \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

erzeugt und anschließend die Fitgrößen

$$\begin{aligned}
\Lambda_{f1} &= \sqrt{\sin \theta_{R,\max} \cdot \rho}, & \Lambda_{f2} &= \sqrt{(\tan^2 \theta_{\text{atm},\min}, \tan^2 \theta_{\text{atm},\max})_\rho}, & \Lambda_{f3} &= 1 \\
\epsilon_{f1} &= \sqrt{(\tan^2 \theta_{\text{sol},\min}, \tan^2 \theta_{\text{sol},\max})_\rho}, & \epsilon_{f2} &= 1, \\
\epsilon_{f3} &= \sqrt{\tan^2 \theta_{\text{sol},\min} + 0.8 \cdot (\tan^2 \theta_{\text{sol},\max} - \tan^2 \theta_{\text{sol},\min})}
\end{aligned} \tag{C.5}$$

festgelegt. Bei der Zuordnung der Fitgrößen zu den ursprünglichen Größen wird gleichzeitig eine Normierung vorgenommen:

$$\frac{\vec{\Lambda}_f |\vec{\Lambda}|_H}{|\vec{\Lambda}_f|} \longrightarrow \vec{\Lambda}_{\text{neu}} \tag{C.6}$$

$$\frac{\vec{\epsilon}_f |\vec{\epsilon}|_H}{|\vec{\epsilon}_f|} \longrightarrow \vec{\epsilon}_{\text{neu}} \tag{C.7}$$

Bevor die auf diese Weise neu gewonnen Vektoren an das Hauptprogramm übergeben werden, erfahren die einzelnen Komponenten einen zufälligen Vorzeichenwechsel, wobei am Ende stets die Bedingung

$$\frac{\Lambda_2 \cdot \epsilon_2}{\Lambda_3 \cdot \epsilon_3} > 0 \tag{C.8}$$

erfüllt ist. Die so erhaltenen Vektoren $\vec{\Lambda}$ und $\vec{\epsilon}$ bzw. die aus ihnen bestimmbaren Größen h_ν^i und $v_{\nu i}$ sind bereits nach einem Durchlauf an die Neutrinodaten angepasst und werden im Hauptprogramm SPheno weiter verwendet.

Wünscht man anstelle des beschriebenen Verfahrens eine Anpassung von $\vec{\epsilon}$ an die atmosphärischen sowie Reaktordaten und soll $\vec{\Lambda}$ den solaren Winkel prägen, so sind in (C.5) die Vertauschungen $\Lambda_{fi} \leftrightarrow \epsilon_{fi}$ und in (C.5) die Ersetzung sol \leftrightarrow atm vorzunehmen. Als dritte Option bleibt es dem Anwender überlassen eigene Parameter h_ν^i und $v_{\nu i}$ einzufügen, die nicht auf Übereinstimmung mit den Neutrinodaten gebracht werden.

D Kinematische Funktionen des B-Meson Zerfalls

In diesem Kapitel finden sich ausführlichere Darstellungen der kinematischen Funktionen aus Abschnitt 6.3. Wie in diesem Abschnitt eingeführt, werden erneut die Definitionen

$$u = -\eta(s) \cos \theta \equiv -\eta(s)z \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} \eta(s) &= \sqrt{[s - (m_b + m_s)^2][s - (m_b - m_s)^2] (1 - 4m_l^2/s)} \\ &\approx \sqrt{[s - (m_b + m_s)^2][s - (m_b - m_s)^2]} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

zur Vereinfachung angewandt.

D.1 Allgemeine kinematische Funktionen A_i

Nachfolgend sind die in Verbindung mit (6.22) auftretenden kinematischen Funktionen mit Winkel- und Energieabhängigkeit dargestellt [57].

$$A_1(s, z) = \frac{1}{2}\eta(s) \left\{ -16m_b^2 m_s^2 s + (m_b^2 + m_s^2) \cdot [-2s^2 + 2\eta(s)^2 z^2 + 2(m_b^2 - m_s^2)^2] \right\} \quad (\text{D.3})$$

$$A_2(s, z) = \eta(s) \left\{ -\eta(s)^2 z^2 + s^2 - s^2 + (m_b^2 - m_s^2)^2 \right\} \quad (\text{D.4})$$

$$A_3(s, z) = 2\eta(s)^2 z s \quad (\text{D.5})$$

$$A_4(s, z) = \eta(s) \left\{ 2(m_b^2 + m_s^2)^2 s - 2(m_b^2 - m_s^2)^2 \right\} \quad (\text{D.6})$$

$$A_5(s, z) = -2(m_b^2 + m_s^2) \eta(s)^2 z \quad (\text{D.7})$$

$$A_6(s, z) = 4m_b m_s s \eta(s) \quad (\text{D.8})$$

$$A_7(s, z) = 4m_b m_s \eta(s)^2 z \quad (\text{D.9})$$

$$A_8(s, z) = \eta(s) (m_b^2 + m_s^2 - s) s \quad (\text{D.10})$$

$$A_9(s, z) = \eta(s) \left\{ -2\eta(s)^2 z^2 - 2s(m_b^2 + m_s^2) + 2(m_b^2 - m_s^2)^2 \right\} \quad (\text{D.11})$$

D.2 Kinematische Funktionen M_i (ohne Winkelanteil)

Zur Ausführung der Winkelintegration der Funktionen A_i ist es möglich neben dem klassischen Vorgehen die analytische Vorschrift [57]

$$M_n(s) = \int_{-1}^1 A_n(s, z) dz = 2A_n(s, \sqrt{1/3})$$

zu benutzen. Wie bereit in Abschnitt 6.3 erwähnt, entfallen aus Symmetriegründen die Funktionen M_3 M_5 und M_7 . Für die Übrigen ergibt sich:

$$M_1(s) = 2\eta(s) \frac{1}{s} \left[-16m_b^2 m_s^2 s + (m_b^2 + m_s^2) \cdot \left(-2s^2 + \frac{2}{3}\eta(s)^2 + 2(m_b^2 - m_s^2)^2 \right) \right] \quad (\text{D.12})$$

$$M_2(s) = -2\eta(s) \left[\frac{1}{3}\eta(s)^2 + s^2 - (m_b^2 - m_s^2)^2 \right] \quad (\text{D.13})$$

$$M_4(s) = 2\eta(s) \left[2(m_b^2 + m_s^2)^2 s - 2(m_b^2 - m_s^2)^2 \right] \quad (\text{D.14})$$

$$M_6(s) = 2\eta(s) [4m_b m_s s] \quad (\text{D.15})$$

$$M_8(s) = 2\eta(s) [s(m_b^2 + m_s^2 - s)] \quad (\text{D.16})$$

$$M_9(s) = 2\eta(s) \left[-\frac{2}{3}\eta(s)^2 - 2(m_b^2 + m_s^2) s + 2(m_b^2 - m_s^2)^2 \right] \quad (\text{D.17})$$

D.3 Kinematische Parameter

Nimmt man wie bereits zu Beginn des Kapitels angedeutet eine verschwindende Leptonmasse $m_l = 0$ an, lauten die unbestimmten Integrale $\int M_i(s) ds$

$$\begin{aligned} \int M_1(s) ds = & -\frac{8}{9}\eta(s) \left(-8m_b^6 + (s - 22m_s^2) m_b^4 + (-22m_s^4 + 20sm_s^2 + s^2) m_b^2 \right. \\ & - 8m_s^6 + m_s^2 s^2 + m_s^4 s + \left(6(m_b^2 + m_s^2) \log \left(\frac{1 - \frac{(m_b - m_s)(m_b + m_s)(m_b^2 - m_s^2 + \omega)}{(m_b^2 + m_s^2)s}}{(m_b - m_s)^5 (m_b + m_s)^5} \right) \right. \\ & \cdot (m_b^2 - m_s^2)^3 + 6(m_b^8 - 2m_s^2 m_b^6 - 18m_s^4 m_b^4 - 2m_s^6 m_b^2 + m_s^8) \\ & \left. \left. \cdot \log(-m_b^2 - m_s^2 + \omega + s) \right) \omega^{-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

$$\begin{aligned} \int M_2(s) ds = & \frac{2}{3}\eta(s) \left(-m_b^6 + (7m_s^2 + s) m_b^4 + \frac{24m_s^4 \log(-m_b^2 - m_s^2 + \omega + s) m_b^4}{\omega} \right. \\ & \left. + (7m_s^4 + s^2) m_b^2 - (m_s^2 - s)^2 (m_s^2 + s) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

$$\begin{aligned} \int M_4(s) ds = & \frac{4}{3}\eta(s) \left(m_b^6 - (7m_s^2 + 2s) m_b^4 - \frac{24m_s^4 \log(-m_b^2 - m_s^2 + \omega + s) m_b^4}{\omega} \right. \\ & \left. + (-7m_s^4 + 2sm_s^2 + s^2) m_b^2 + (m_s^3 - m_s s)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

$$\begin{aligned} \int M_6(s) ds = & \frac{4}{3}m_b m_s \eta(s) \left(-m_b^4 - 10m_s^2 m_b^2 - \frac{12m_s^2 (m_b^2 + m_s^2) \log(-m_b^2 - m_s^2 + \omega + s) m_b^2}{\omega} \right. \\ & \left. - m_s^4 + 2s^2 - (m_b^2 + m_s^2) s \right) \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

$$\int M_8(s)ds = \frac{1}{6}\eta(s) \left(-m_b^6 + (7m_s^2 - s) m_b^4 + \frac{24m_s^4 \log(-m_b^2 - m_s^2 + \omega + s) m_b^4}{\omega} \right. \\ \left. + (7m_s^4 + 4sm_s^2 + 5s^2) m_b^2 - (m_s^2 - s)^2 (m_s^2 + 3s) \right) \quad (D.22)$$

$$\int M_9(s)ds = \frac{1}{3}\eta(s) \left(-3m_b^6 + (21m_s^2 + 5s) m_b^4 + \frac{72m_s^4 \log(-m_b^2 - m_s^2 + \omega + s) m_b^4}{\omega} \right. \\ \left. + (3m_s^2 - s) (7m_s^2 + s) m_b^2 - (m_s^2 - s)^2 (3m_s^2 + s) \right) \quad (D.23)$$

wobei $\omega = \left(\sqrt{s - (m_b + m_s)^2} \right) \cdot \left(\sqrt{s - (m_b - m_s)^2} \right)$ gilt. Eine bestimmte Integration der Funktionen M_i mit den Grenzen eins und sechs liefert:

$$\int_1^6 M_1(s)ds = 1.84556 \cdot 10^6 \stackrel{m_s=0}{\approx} 1.84847 \cdot 10^6 \quad (D.24)$$

$$\int_1^6 M_2(s)ds = 6.62919 \cdot 10^4 \stackrel{m_s=0}{\approx} 6.63923 \cdot 10^4 \quad (D.25)$$

$$\int_1^6 M_4(s)ds = -1.53311 \cdot 10^5 \stackrel{m_s=0}{\approx} -1.53601 \cdot 10^5 \quad (D.26)$$

$$\int_1^6 M_6(s)ds = 1.18309 \cdot 10^3 \stackrel{m_s=0}{\approx} 0 \quad (D.27)$$

$$\int_1^6 M_8(s)ds = 1.1391 \cdot 10^4 \stackrel{m_s=0}{\approx} 1.13939 \cdot 10^4 \quad (D.28)$$

$$\int_1^6 M_9(s)ds = 1.09802 \cdot 10^5 \stackrel{m_s=0}{\approx} 1.09997 \cdot 10^5 \quad (D.29)$$

E Kopplungen

Die zur Berechnung der Zerfälle nötigen Kopplungen werden in diesem Kapitel in einer grob genäherten, jedoch analytischen Form angegeben. Zum einen werden die Diagonalisierungsmatrizen aus (4.18) sowie (4.31) in Abschnitt 4.2 in der Form

$$\mathcal{N}^* = \begin{pmatrix} N^{0*} \left(1 - \frac{1}{2} \xi^\dagger \xi\right) & N^{0*} \xi^\dagger \\ -V^{(\nu)T} \xi & V^{(\nu)T} \left(1 - \frac{1}{2} \xi \xi^\dagger\right) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} N^0 & N^0 \xi^T \\ -V^{(\nu)T} \xi & V^{(\nu)T} \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

$$\mathcal{U}^* = \begin{pmatrix} U_R \left(1 - \frac{1}{2} \xi^{LT} \xi^{L*}\right) & U_R \xi^{LT} \\ -V_L \xi^{L*} & V_L \left(1 - \frac{1}{2} \xi^{L*} \xi^{LT}\right) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} U_R & U_R \xi^{LT} \\ -\xi_L^* & \mathbb{1}_{(3 \times 3)} \end{pmatrix} \quad (\text{E.2})$$

$$\mathcal{V}^\dagger = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{1}{2} \xi^{RT} \xi^{R*}\right) U_L^\dagger & -\xi^{RT} V_R^\dagger \\ \xi^{R*} U_L^\dagger & \left(1 - \frac{1}{2} \xi^{R*} \xi^{RT}\right) V_R^\dagger \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} U_L^\dagger & -\xi_R^T \\ \xi_R^* U_L^\dagger & \mathbb{1}_{(3 \times 3)} \end{pmatrix} \quad (\text{E.3})$$

angenommen. Zum anderen werden alle in den Kopplungen auftretenden im Allgemeinen komplexen Größen in diesem Kapitel reell gesetzt. Diese beiden Näherungen sind vertretbar, da lediglich eine grobe Abhängigkeit sichtbar gemacht werden soll.

E.1 Kopplungen des Leptonzerfalls in Lepton und Majoron

Die allgemeinen links- bzw. rechtshändigen Kopplungen zwischen Lepton i , Lepton j und einem pseudoskalaren Teilchen haben die Form:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ijJ}^L = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(R_{(J,1)}^{P0} \cdot \left(g \cdot \mathcal{V}_{i1}^* \cdot \mathcal{U}_{j2}^* - \sum_{k=1}^3 h_e^{kk} \cdot \mathcal{V}_{i(k+2)}^* \cdot \mathcal{U}_{j(k+2)}^* \right) + g \cdot R_{(J,2)}^{P0} \cdot \mathcal{V}_{i2}^* \cdot \mathcal{U}_{j1}^* \right. \\ & + \sum_{k=1}^3 \left(R_{(J,k+2)}^{P0} \cdot \left(g \cdot \mathcal{V}_{i1}^* \cdot \mathcal{U}_{j(k+2)}^* + h_e^{kk} \cdot \mathcal{V}_{i(k+2)}^* \cdot \mathcal{U}_{j2}^* \right) \right) - h_0 \cdot R_{(J,6)}^{P0} \cdot \mathcal{V}_{i2}^* \cdot \mathcal{U}_{j2}^* \\ & \left. + R_{(J,8)}^{P0} \cdot \sum_{k=1}^3 h_\nu^k \cdot \mathcal{V}_{i2}^* \cdot \mathcal{U}_{j(k+2)}^* \right) \quad (\text{E.4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ijJ}^R = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(R_{(J,1)}^{P0} \cdot \left(g \cdot \mathcal{V}_{j1} \cdot \mathcal{U}_{i2} - \sum_{k=1}^3 h_e^{kk*} \cdot \mathcal{V}_{j(k+2)} \cdot \mathcal{U}_{i(k+2)} \right) + g \cdot R_{(J,2)}^{P0} \cdot \mathcal{V}_{j2} \cdot \mathcal{U}_{i1} \right. \\ & + \sum_{k=1}^3 \left(R_{(J,k+2)}^{P0} \cdot \left(g \cdot \mathcal{V}_{j1} \cdot \mathcal{U}_{i(k+2)} + h_e^{kk*} \cdot \mathcal{V}_{j(k+2)} \cdot \mathcal{U}_{i2} \right) \right) - h_0 \cdot R_{(J,6)}^{P0} \cdot \mathcal{V}_{j2} \cdot \mathcal{U}_{i2} \\ & \left. + R_{(J,8)}^{P0} \cdot \sum_{k=1}^3 h_\nu^{k*} \cdot \mathcal{V}_{j2} \cdot \mathcal{U}_{i(k+2)} \right) \quad (\text{E.5}) \end{aligned}$$

Geht man von den eingangs des Kapitels angeführten Näherungen aus und setzt für das Pseudoskalar den approximativen Masseneigenzustand des Majorons (4.44) ein, lautet die linkshändige Kopplung:

$$\begin{aligned}
C_{ijJ}^L &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-v_d v_L^2}{V v^2} \cdot \left(g \cdot \mathcal{V}_{i1} \cdot \mathcal{U}_{j2} - \sum_{k=1}^3 h_e^{kk} \cdot \mathcal{V}_{i(k+2)} \cdot \mathcal{U}_{j(k+2)} \right) + g \cdot \frac{v_u v_L^2}{V v^2} \cdot \mathcal{V}_{i2} \cdot \mathcal{U}_{j1} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{v_{Lk}}{V} \cdot \left(g \cdot \mathcal{V}_{i1} \cdot \mathcal{U}_{j(k+2)} + h_e^{kk} \cdot \mathcal{V}_{i(k+2)} \cdot \mathcal{U}_{j2} \right) \right) - \frac{v_R}{V} \cdot \sum_{k=1}^3 h_\nu^k \cdot \mathcal{V}_{i2} \cdot \mathcal{U}_{j(k+2)} \right) \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-v_d v_L^2}{V v^2} \cdot (g \cdot \xi_{R,i1} \cdot \xi_{L,j2} - \delta_{ij} h_e^{ij}) + g \cdot \frac{v_u v_L^2}{V v^2} \cdot \xi_{R,i2} \cdot \xi_{L,j1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{v_{Lj}}{V} \cdot g \cdot \xi_{R,i1} - \frac{v_{Li}}{V} h_e^{ii} \cdot \xi_{L,j2} + \frac{v_R}{V} \cdot h_\nu^j \cdot \xi_{R,i2} \right) \\
&= \frac{v_d v_L^2 \delta_{ij} h_e^{ij}}{\sqrt{2} V v^2} + h_e^{ii} \cdot \left[\left(\frac{v_L^2 g^2 v_d^2 v_u - 2 v_d v^2 \mu M_2}{2 \sqrt{2} V v^2 \mu^2 \det(M_{\chi^\pm})} \right) \epsilon_i \epsilon_j - \left(\frac{v_d g^2 v_{Lj} v_u}{2 \sqrt{2} V \mu \det(M_{\chi^\pm})} \right) \epsilon_i \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{v_{Li}}{\sqrt{2} V \mu} \right) \epsilon_j + \left(\frac{g^2 v_L^2 v_u v_d (g^2 v_d v_u - 2 \mu M_2)}{4 \sqrt{2} V v^2 \mu^2 \det^2(M_{\chi^\pm})} \right) \epsilon_i \Lambda_j \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{g^2 v_d (2 \mu^2 v_d (v_d^2 + v_u^2) + v_u (2 v^2 \mu M_2 - v_L^2 g^2 v_d v_u))}{4 \sqrt{2} V v^2 \mu^2 \det^2(M_{\chi^\pm})} \right) \Lambda_i \epsilon_j \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{g^4 v_L^2 v_u v_d (\det(M_{\chi^\pm}) v_d (2 \mu^2 + g^2 v_u^2) - 2 \mu (v_d \mu + v_u M_2))}{8 \sqrt{2} V v^2 \mu^2 \det^3(M_{\chi^\pm})} \right) \Lambda_i \Lambda_j \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{g^2 v_d v_{Lj} (2 \mu^2 + g^2 v_u^2)}{4 \sqrt{2} V \mu \det^2(M_{\chi^\pm})} \right) \Lambda_i + \left(\frac{v_{Li} g^2 v_u}{2 \sqrt{2} V \mu \det(M_{\chi^\pm})} \right) \Lambda_j \right] \tag{E.6}
\end{aligned}$$

Die rechtshändige Kopplung C_{ijJ}^R geht insbesondere durch die Annahme rein reeller Größen aus der linkshändigen Kopplung nach Tausch der Indizes $i \leftrightarrow j$ hervor.

E.2 Kopplungen des inklusiven B-Meson-Zerfalls

In der Lagrangedichte (6.11) werden Lepton-Quark-Squark-Kopplungen definiert, für die im rein reellen Fall mit der entsprechenden Näherung der Drehmatrizen

$$\begin{aligned}
C_L^{\tilde{u}Rk} &= C_R^{\tilde{u}*Rk} = - \frac{m_t \mathcal{V}_{i2}}{\sqrt{2} M_W \sin \beta} \approx \frac{m_t \xi_{R,i2}}{\sqrt{2} M_W \sin \beta} = - \frac{m_t \cdot \frac{\sqrt{2} h_e^{ii} v_d}{2 \mu \det(M_{\chi^\pm})} \left(M_2 \epsilon_i + \frac{g^2 (v_d \mu + v_u M_2)}{2 \det(M_{\chi^\pm})} \Lambda_i \right)}{\sqrt{2} M_W \sin \beta} \\
C_L^{\tilde{u}Lk} &= C_R^{\tilde{u}*Lk} = - \frac{m_s \mathcal{U}_{i2}}{\sqrt{2} M_W \cos \beta} \approx \frac{m_s \xi_{L,i2}}{\sqrt{2} M_W \cos \beta} = - \frac{m_s \left(\frac{\epsilon_i}{\mu} + \frac{g^2 v_u \Lambda_i}{2 \mu \det(M_{\chi^\pm})} \right)}{\sqrt{2} M_W \cos \beta} \\
C_R^{\tilde{u}Lk} &= C_L^{\tilde{u}*Lk} = V_{i1} \approx -\xi_{R,i1} = - \frac{h_e^{ii} g v_d}{2 \mu \det(M_{\chi^\pm})} \left(v_u \epsilon_i + \frac{2 \mu^2 + g^2 v_u^2}{2 \det(M_{\chi^\pm})} \Lambda_i \right) \tag{E.7}
\end{aligned}$$

gilt. Der freie Index i zeigt die Leptongeneration an und der vormals eingeführte Index k der Quarkmassen ist auf zwei bzw. drei gesetzt, da ausschließlich in s -Quarks zerfallende b -Quarks betrachtet werden.

Die Zuordnung aus Gleichung (6.17) vereinfachen unter den gemachten Annahmen zu:

$$\sum_{k=1}^6 \frac{g^2}{2m_{\tilde{u}_{Lk}}^2} \left(\mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}} \right)^2 \equiv C_{LR}, \quad \sum_{k=1}^6 \frac{g^2}{2m_{\tilde{u}_{Lk}}^2} \left(\mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}} \right) \equiv C_{RL} \quad (\text{E.8})$$

$$\sum_{k=1}^6 \frac{g^2}{2m_{\tilde{u}_{Lk}}^2} \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}^*} \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}} = \sum_{k=1}^6 \frac{g^2}{2m_{\tilde{u}_{Lk}}^2} \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}^*} \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}} \equiv C'_{LRLR} = C'_{RLRL} \quad (\text{E.9})$$

Für die verbleibenden beiden Kopplungen ergibt sich keine Vereinfachung, so dass sie weiterhin

$$\sum_{k=1}^6 \frac{g^2 (\mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}^*} \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}} + \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}^*} \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}})}{16m_{\tilde{u}_{Lk}}^2} \equiv C_T, \quad \sum_{k=1}^6 \frac{g^2 (\mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}^*} \mathcal{C}_R^{\tilde{u}_{Lk}} - \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}^*} \mathcal{C}_L^{\tilde{u}_{Lk}})}{32m_{\tilde{u}_{Lk}}^2} \equiv C_{TE} \quad (\text{E.10})$$

lauten. Auf das Einsetzen wird aus $\mathcal{C}_{L/R}^{\tilde{u}_{Lk}^{(*)}}$ wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Die Abhängigkeiten sind bereits in dieser Schreibweise klar erkennbar.

F Verwendete Software

Zur Anfertigung dieser Arbeit wurde folgende Software benutzt:

- Bei der numerischen Auswertung kam eine an das Modell angepasste Version des Programmpakets “SPehno” von Werner Porod [61] basierend auf der aktuellen Version 3.0.beta, die unter <http://theorie.physik.uni-wuerzburg.de/~porod/SPheno.html> zur Verfügung steht zum Einsatz. Die Berechnungen wurden an zwei unterschiedlichen 32-Bit Rechnern durchgeführt und lieferten gleiche Ergebnisse.
- Die Kompilierung des Fortran-Codes erfolgte mit dem nach Registrierung für nicht kommerzielle Nutzung frei zugänglichen ifort Fortran Compiler 10.1 von Intel®
- Zur Textverarbeitung wurden die Versionen 1.9 und 2.0 von Kile in Verbindung mit $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ verwendet. Im Internet finden sich weitere Informationen unter:
<http://www.latex-project.org/>
<http://kile.sourceforge.net/>
- Zur Erstellung der Feynmangraphen wurde das auf MetaPost basierende \LaTeX -Paket feynmp von Thorsten Ohl benutzt.
- Grafiken zur Auswertung wurden zunächst mit OriginPRO 8 von OriginLab® angefertigt. Dieses Programm kann mit einer Studentenlizenz von den Seiten des Rechenzentrums der Universität Würzburg heruntergeladen werden.
- Eine Nachbearbeitung der Abbildungen, insbesondere die Anbringung der \LaTeX -Beschriftungen, erfolgte nach Verwendung von pdftoipe mit ipe. Informationen hierzu befinden sich im Internet unter <http://tclab.kaist.ac.kr/ipe/>
- Für Berechnungen und zur vorläufigen Datenauswertung wurde Mathematica 5.2 verwendet, welches auf den Arbeitsplatzrechnern mit einer Lizenz des physikalischen Instituts nutzbar ist.
- Diverse Rechnungen wurden mit Hilfe des Mathematica-Pakets Feyn Calc [53] überprüft. Weitere Informationen sind im Internet einsehbar:
<http://www.feyncalc.org/>

Abbildungsverzeichnis

2.1	Darstellung des solaren und atmosphärischn Winkels (entnommen aus [16](Figure 1 und 2))	5
2.2	Darstellung des Reaktorwinkels mit Fehler (entnommen aus [16](Figure 3))	6
7.1	Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(b \rightarrow se^+\mu^-)$ für SPS1a über $v_R = v_S$ aufgetragen.	46
7.2	Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\mu \rightarrow ee^+e^-)$ für SPS1a über $v_R = v_S$ aufgetragen.	47
7.3	Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\mu \rightarrow ee^+e^-)$ für SPS4 über $v_R = v_S$ aufgetragen.	47
7.4	Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\mu \rightarrow eJ)$ für SPS1a über $v_R = v_S$ aufgetragen mit experimenteller Grenze bei $2.6 \cdot 10^{-6}$ (rote Linie).	48
7.5	Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\tau \rightarrow eJ)$ für SPS1a über $v_R = v_S$ aufgetragen (experimentelle Obergrenze: $7.12 \cdot 10^{-3}$).	49
7.6	Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\tau \rightarrow \mu J)$ für SPS1a über $v_R = v_S$ aufgetragen (experimentelle Obergrenze: $2.25 \cdot 10^{-2}$).	49
7.7	Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\mu \rightarrow eJ)$ für SPS4 über $v_R = v_S$ aufgetragen mit experimenteller Grenze bei $2.6 \cdot 10^{-6}$ (rote Linie).	50
7.8	Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\tau \rightarrow eJ)$ für SPS4 über $v_R = v_S$ aufgetragen (experimentelle Obergrenze: $7.12 \cdot 10^{-3}$).	51
7.9	Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\tau \rightarrow \mu J)$ für SPS4 über $v_R = v_S$ aufgetragen (experimentelle Obergrenze: $2.25 \cdot 10^{-2}$).	51
7.10	Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\mu \rightarrow eJ)$ für SPS1a über h_0 aufgetragen mit experimenteller Grenze bei $2.6 \cdot 10^{-6}$ (rote Linie).	52

Literaturverzeichnis

- [1] W.-M. Yao et al., *Review of Particle Physics*, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics **33**(1), 1–1232 (2006).
- [2] R. Davis, *A review of the Homestake solar neutrino experiment*, Prog. Part. Nucl. Phys. **32**, 13–32 (1994).
B. T. Cleveland et al., *Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector*, Astrophys. J. **496**, 505–526 (1998).
K. Lande et al., *The Homestake solar neutrino program*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **77**, 13–19 (1999).
- [3] J. N. Abdurashitov et al. (SAGE Collaboration), *Measurement of the solar neutrino capture rate with gallium metal*, Phys. Rev. **C60**, 055801 (1999), astro-ph/9907113.
D. N. Abdurashitov et al. (SAGE Collaboration), *Solar neutrino results from SAGE*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **77**, 20–25 (1999).
- [4] W. Hampel et al. (GALLEX Collaboration), *GALLEX solar neutrino observations: Results for GALLEX IV*, Phys. Lett. **B447**, 127–133 (1999).
M. Altmann et al. (GNO Collaboration), *GNO solar neutrino observations: Results for GNO I*, Phys. Lett. **B490**, 16–26 (2000), hep-ex/0006034.
C. M. Cattadori (GNO Collaboration), *Update of solar neutrino interaction rate measurements from GNO at LNGS*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **110**, 311–314 (2002).
- [5] Y. Fukuda et al. (Kamiokande Collaboration), *Solar neutrino data covering solar cycle 22*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1683–1686 (1996).
- [6] S. Fukuda et al. (Super-Kamiokande Collaboration), *Solar B-8 and he p neutrino measurements from 1258 days of Super-Kamiokande data*, Phys. Rev. Lett. **86**, 5651–5655 (2001), hep-ex/0103032.
M. B. Smy, *A unique oscillation solution to the solar neutrino problem?*, (2002), hep-ex/0202020.
S. Fukuda et al. (Super-Kamiokande Collaboration), *Determination of solar neutrino oscillation parameters using 1496 days of Super-Kamiokande-I data*, Phys. Lett. **B539**, 179–187 (2002), hep-ex/0205075.
A. W. P. Poon, *Review of solar and reactor neutrinos*, Int. J. Mod. Phys. **A21**, 1855–1868 (2006), hep-ex/0509024.
- [7] Q. R. Ahmad et al. (SNO Collaboration), *Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*, Phys. Rev. Lett. **89**, 011301 (2002), nucl-ex/0204008.

- Q. R. Ahmad et al. (SNO Collaboration), *Measurement of day and night neutrino energy spectra at SNO and constraints on neutrino mixing parameters*, Phys. Rev. Lett. **89**, 011302 (2002), nucl-ex/0204009.
- S. N. Ahmed et al. (SNO Collaboration), *Measurement of the total active B-8 solar neutrino flux at the Sudbury Neutrino Observatory with enhanced neutral current sensitivity*, Phys. Rev. Lett. **92**, 181301 (2004), nucl-ex/0309004.
- B. Aharmim et al. (SNO Collaboration), *Electron energy spectra, fluxes, and day-night asymmetries of B-8 solar neutrinos from the 391-day salt phase SNO data set*, Phys. Rev. **C72**, 055502 (2005), nucl-ex/0502021.
- [8] K. Daum et al. (Frejus. Collaboration), *Determination of the atmospheric neutrino spectra with the Frejus detector*, Z. Phys. **C66**, 417–428 (1995).
- [9] R. Becker-Szendy et al., *The Electron-neutrino and muon-neutrino content of the atmospheric flux*, Phys. Rev. **D46**, 3720–3724 (1992).
- [10] M. Aglietta et al. (The NUSEX Collaboration), *Experimental study of atmospheric neutrino flux in the NUSEX experiment*, Europhys. Lett. **8**, 611–614 (1989).
- [11] K. S. Hirata et al. (Kamiokande-II Collaboration), *Observation of a small atmospheric ν_μ/ν_e ratio in Kamiokande*, Phys. Lett. **B280**, 146–152 (1992).
- Y. Fukuda et al. (Kamiokande Collaboration), *Atmospheric muon-neutrino / electron-neutrino ratio in the multiGeV energy range*, Phys. Lett. **B335**, 237–245 (1994).
- [12] M. Apollonio et al. (CHOOZ Collaboration), *Search for neutrino oscillations on a long base-line at the CHOOZ nuclear power station*, Eur. Phys. J. **C27**, 331–374 (2003), hep-ex/0301017.
- [13] S. Abe et al. (KamLAND Collaboration), *Precision Measurement of Neutrino Oscillation Parameters with KamLAND*, Phys. Rev. Lett. **100**, 221803 (2008), arXiv:0801.4589.
- [14] E. Aliu et al. (K2K Collaboration), *Evidence for muon neutrino oscillation in an accelerator-based experiment*, Phys. Rev. Lett. **94**, 081802 (2005), hep-ex/0411038.
- [15] D. G. Michael et al. (MINOS Collaboration), *Observation of muon neutrino disappearance with the MINOS detectors and the NuMI neutrino beam*, Phys. Rev. Lett. **97**, 191801 (2006), hep-ex/0607088.
- P. Adamson et al. (MINOS Collaboration), *Measurement of Neutrino Oscillations with the MINOS Detectors in the NuMI Beam*, (2008), arXiv:0806.2237.
- [16] T. Schwetz, M. Tortola and J. W. F. Valle, *Three-flavour neutrino oscillation update*, (2008), arXiv:0808.2016.
- [17] P. Minkowski, *$\mu \rightarrow e\gamma$ at a Rate of One Out of 1-Billion Muon Decays?*, Phys. Lett. **B67**, 421 (1977).
- T. Yanagida, Prog. Theor. Phys. B **135**, 66 (1978).
- M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, *in Supergravity: Proceedings of the Supergravity Workshop at Stony Brook, New York*, (1979, September 27-29).

-
- [18] M. Iwasaki et al. (Belle Collaboration), *Improved measurement of the electroweak penguin process $B \rightarrow X/s l+ l-$* , Phys. Rev. **D72**, 092005 (2005), hep-ex/0503044.
- [19] B. Aubert et al. (BABAR Collaboration), *Measurement of the $B \rightarrow X_s \ell^+ \ell^-$ branching fraction with a sum over exclusive modes*, Phys. Rev. Lett. **93**, 081802 (2004), hep-ex/0404006.
- [20] T. Huber, E. Lunghi, M. Misiak and D. Wyler, *Electromagnetic logarithms in anti- $B \rightarrow X/s l+ l-$* , Nucl. Phys. **B740**, 105–137 (2006), hep-ph/0512066.
- [21] U. Bellgardt et al. (SINDRUM Collaboration), *Search for the Decay $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$* , Nucl. Phys. **B299**, 1 (1988).
- [22] B. Aubert et al. (BABAR Collaboration), *Search for lepton flavor violation in the decay $\tau^- \rightarrow \ell^- \ell^+ \ell^-$* , Phys. Rev. Lett. **92**, 121801 (2004), hep-ex/0312027.
- [23] J. C. Romao, N. Rius and J. W. F. Valle, *Supersymmetric signals in muon and tau decays*, Nucl. Phys. **B363**, 369–384 (1991).
- [24] A. Jodidio, B. Balke, J. Carr, G. Gidal, K. A. Shinsky, H. M. Steiner, D. P. Stoker, M. Strovink, R. D. Tripp, B. Gobbi and C. J. Oram, *Search for right-handed currents in muon decay*, Phys. Rev. D **34**(7), 1967–1990 (Oct 1986).
- [25] R. M. Baltrusaitis, J. J. Becker, G. T. Blaylock, J. S. Brown, K. O. Bunnell, T. H. Burnett, R. E. Cassell, D. Coffman, V. Cook, D. H. Coward, S. Dado, D. E. Dorfan, G. P. Dubois, A. L. Duncan, K. F. Einsweiler, B. I. Eisenstein, R. Fabrizio, G. Gladding, F. Grancagnolo, R. P. Hamilton, J. Hauser, C. A. Heusch, D. G. Hitlin, L. Köpke, W. S. Lockman, U. Mallik and P. M. Mockett, *τ Leptonic Branching Ratios and a Search for Goldstone-Boson Decay*, Phys. Rev. Lett. **55**(18), 1842–1845 (Oct 1985).
- [26] S. F. Novaes, *Standard model: An introduction*, (1999), hep-ph/0001283.
- [27] M. F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, Phys. Rept. **128**, 39–204 (1985).
- [28] R. Coleman, Sidney and J. Mandula, *All possible Symmetries of the s Matrix*, Phys. Rev. **159**, 1251–1256 (1967).
- [29] R. Haag, J. T. Lopuszanski and M. Sohnius, *All possible Generators of Supersymmetries of the s Matrix*, Nucl. Phys. **B88**, 257 (1975).
- [30] J. Wess and B. Zumino, *Supergauge Transformations in Four-Dimensions*, Nucl. Phys. **B70**, 39–50 (1974).
- [31] J. Wess and B. Zumino, *A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations*, Phys. Lett. **B49**, 52 (1974).
- [32] S. P. Martin, *A supersymmetry primer*, (1997), hep-ph/9709356.
- [33] S. Dimopoulos and D. W. Sutter, *The Supersymmetric flavor problem*, Nucl. Phys. **B452**, 496–512 (1995), hep-ph/9504415.
- [34] H. Goldberg, *Constraint on the Photino Mass from Cosmology*, Phys. Rev. Lett. **50**(19), 1419–1422 (May 1983).
- D. V. Nanopoulos, K. Olive and M. Srednicki, *Supersymmetric relics from the big bang*, Nucl. Phys. **B238**(2), 453–476 (June 1984).

-
- [35] R. Barbier et al., *R-parity violating supersymmetry*, Phys. Rept. **420**, 1–202 (2005), hep-ph/0406039.
- [36] G. R. Farrar and P. Fayet, *Bounds on r Hadron Production from Calorimetry Experiments*, Phys. Lett. **B79**, 442 (1978).
G. R. Farrar and P. Fayet, *Phenomenology of the Production, Decay, and Detection of New Hadronic States Associated with Supersymmetry*, Phys. Lett. **B76**, 575–579 (1978).
- [37] S. Dimopoulos and H. Georgi, *Softly Broken Supersymmetry and $SU(5)$* , Nucl. Phys. **B193**, 150 (1981).
S. Weinberg, *Supersymmetry at Ordinary Energies. 1. Masses and Conservation Laws*, Phys. Rev. **D26**, 287 (1982).
N. Sakai and T. Yanagida, *Proton Decay in a Class of Supersymmetric Grand Unified Models*, Nucl. Phys. **B197**, 533 (1982).
S. Dimopoulos, S. Raby and F. Wilczek, *Proton Decay in Supersymmetric Models*, Phys. Lett. **B112**, 133 (1982).
- [38] P. Fayet, *Supersymmetry and Weak, Electromagnetic and Strong Interactions*, Phys. Lett. **B64**, 159 (1976).
P. Fayet, *Spontaneously Broken Supersymmetric Theories of Weak, Electromagnetic and Strong Interactions*, Phys. Lett. **B69**, 489 (1977).
- [39] C. Munoz, *SUSY: New perspectives and variants*, (2007), arXiv:0705.2007.
- [40] C. Munoz, *Dark matter detection in the light of recent experimental results*, Int. J. Mod. Phys. **A19**, 3093–3170 (2004), hep-ph/0309346.
- [41] F. Takayama and M. Yamaguchi, *Gravitino dark matter without R -parity*, Phys. Lett. **B485**, 388–392 (2000), hep-ph/0005214.
M. Hirsch, W. Porod and D. Restrepo, *Collider signals of gravitino dark matter in bilinearly broken R -parity*, JHEP **03**, 062 (2005), hep-ph/0503059.
W. Buchmuller, L. Covi, K. Hamaguchi, A. Ibarra and T. Yanagida, *Gravitino dark matter in R -parity breaking vacua*, JHEP **03**, 037 (2007), hep-ph/0702184.
- [42] P. Fayet, *Supergauge invariant extension of the Higgs mechanism and a model for the electron and its neutrino*, Nucl. Phys. **B90**, 104 (1975).
J. M. Frère, D. R. T. Jones and S. Raby, *Fermion masses and induction of the weak scale by supergravity*, Nucl. Phys. **B222**, 11 (1983).
J. P. Derendinger¹ and C. A. Savoy, *Quantum effects and $SU(2) \times U(1)$ breaking in supergravity gauge theories*, Nucl. Phys. **B237**, 307 (1984).
- [43] D. E. Lopez-Fogliani and C. Munoz, *Proposal for a new minimal supersymmetric standard model*, Phys. Rev. Lett. **97**, 041801 (2006), hep-ph/0508297.
- [44] J. C. Romao, F. de Campos and J. W. F. Valle, *New Higgs signatures in supersymmetry with spontaneously broken R parity*, Phys. Lett. **B292**, 329–336 (1992), hep-ph/9207269.
- [45] M. Hirsch, J. C. Romao, J. W. F. Valle and A. Villanova del Moral, *Invisible Higgs boson decays in spontaneously broken R -parity*, Phys. Rev. **D70**, 073012 (2004), hep-ph/0407269.

-
- [46] A. Masiero and J. W. F. Valle, *A model for spontaneous R parity breaking*, Phys. Lett. **B251**, 273–278 (1990).
- [47] J. C. Romao, C. A. Santos and J. W. F. Valle, *R-parity can spontaneously break*, (1992), hep-ph/9205206.
- [48] M. Frank and K. Huitu, *Spontaneous R-parity violation bounds*, Phys. Rev. **D64**, 095015 (2001), hep-ph/0106004.
- [49] M. Hirsch, A. Vicente and W. Porod, *Spontaneous R-parity violation: Lightest neutralino decays and neutrino mixing angles at future colliders*, Phys. Rev. **D77**, 075005 (2008), arXiv:0802.2896.
- [50] M. Hirsch, J. C. Romao, J. W. F. Valle and A. Villanova del Moral, *Production and decays of supersymmetric Higgs bosons in spontaneously broken R-parity*, Phys. Rev. **D73**, 055007 (2006), hep-ph/0512257.
- [51] A. Faessler, S. Kovalenko and F. Simkovic, *Bilinear R-parity Violation in Neutrinoless Double Beta Decay*, Phys. Rev. **D58**, 055004 (1998), hep-ph/9712535.
- [52] M. Hirsch and J. W. F. Valle, *Neutrinoless double beta decay in supersymmetry with bilinear R-parity breaking*, Nucl. Phys. **B557**, 60–78 (1999), hep-ph/9812463.
- [53] R. Mertig, M. Böhm and A. Denner, *Feyn Calc - Computer-algebraic calculation of Feynman amplitudes*, Comp. Phys. Comm. (1991).
- [54] C. Amsler et al. (Particle Data Group Collaboration), *Review of particle physics*, Phys. Lett. **B667**, 1 (2008).
- [55] F. Mandl and G. Shaw, *Quantenfeldtheorie*, Aula Verlag, 1993.
- [56] A. J. Buras, *Weak Hamiltonian, CP violation and rare decays*, (1998), hep-ph/9806471.
- [57] S. Fukae, C. S. Kim, T. Morozumi and T. Yoshikawa, *A model independent analysis of the rare B decay $B \rightarrow X/s l+ l-$* , Phys. Rev. **D59**, 074013 (1999), hep-ph/9807254.
- [58] C. S. Kim, T. Morozumi and A. I. Sanda, *$B \rightarrow X/q l+ l-$ ($q = d, s$) and determination of $|V(td)/V(ts)|$* , Phys. Rev. **D56**, 7240–7246 (1997), hep-ph/9708299.
T. M. Aliev, C. S. Kim and M. Savci, *Exclusive $B \rightarrow M l+ l-$ ($M = \pi, K, \rho, K^*$) decays and determinations of $|V(ts)|$ and/or $|V(td)/V(ts)|$* , Phys. Lett. **B441**, 410–418 (1998), hep-ph/9804456.
- [59] C. S. Lim, T. Morozumi and A. I. Sanda, *A Prediction for d gamma ($b \rightarrow s$ Lepton anti-Lepton) / d q**2 Including the Long Distance Effects*, Phys. Lett. **B218**, 343 (1989).
N. G. Deshpande, J. Trampetic and K. Panose, *Resonance Background to the Decays $b \rightarrow s$ Lepton+ Lepton-, $B \rightarrow K^*$ Lepton+ Lepton- and $B \rightarrow K$ Lepton+ Lepton-*, Phys. Rev. **D39**, 1461 (1989).
P. J. O'Donnell and H. K. K. Tung, *Resonance contributions to the decay $b \rightarrow s (l+ l-)$* , Phys. Rev. **D43**, 2067–2069 (1991).
N. Paver and Riazuddin, *On the interference between short distance and long distance contributions to $b \rightarrow s l+ l-$* , Phys. Rev. **D45**, 978–979 (1992).

- F. Kruger and L. M. Sehgal, *CP violation in the decay $B \rightarrow X/d e^+ e^-$* , Phys. Rev. **D55**, 2799–2805 (1997), hep-ph/9608361.
- [60] M. Fierz, *Zur Fermischen Theorie des β -Zerfalls*, Z. Physik **104**, 553–565 (1937).
J. F. Nieves and P. B. Pal, *Generalized Fierz identities*, Am. J. Phys. **72**, 1100–1108 (2004), hep-ph/0306087.
- [61] W. Porod, *SPheno, a program for calculating supersymmetric spectra, SUSY particle decays and SUSY particle production at $e^+ e^-$ colliders*, Comput. Phys. Commun. **153**, 275–315 (2003), hep-ph/0301101.
- [62] B. C. Allanach et al., *The Snowmass points and slopes: Benchmarks for SUSY searches*, (2002), hep-ph/0202233.
- [63] G. Weiglein, *The LHC / LC study group and the snowmass points and slopes*, (2003), hep-ph/0301111.
N. Ghodbane and H.-U. Martyn, *Compilation of SUSY particle spectra from Snowmass 2001 benchmark models*, (2002), hep-ph/0201233.
- [64] V. I. Borodulin, R. N. Rogalev and S. R. Slabospitsky, *CORE: COmpendium of RElations: Version 2.1*, (1995), hep-ph/9507456.

Danksagung

Vorrangig möchte ich mich an dieser Stelle bei Werner Porod für die interessante Aufgabenstellung sowie die Betreuung der Arbeit bedanken. Die gelungene Mischung aus Diskussion und selbstständiger Tätigkeit hat es stets ermöglicht sich ausführlich mit den Problemstellungen zu beschäftigen und sie schließlich zu lösen. Weiter ist der Arbeitsgruppe und dem gesamten Lehrstuhl für Theoretische Physik II zu danken, deren Mitglieder bereitwillig auf weiterführende Fragen eingingen. Ebenso ist mein Bekannten- und Freundeskreis zu erwähnen, der mich stets unterstützt und bestärkt hat. Abschließend danke ich meiner Mutter, die mir gleichermaßen zur Seite stand.

Erklärung zur Anfertigung der Diplomarbeit

Ich erkläre hiermit, dass ich die Diplomarbeit selbstständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Ort, Datum

Name

