Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Fakultät für Physik und Astronomie

Diplomarbeit

Neutrinophysik und Beschleunigerobservablen in einem Modell mit gebrochener R-Parität

von:
Stefan Liebler

vorgelegt bei:
Prof. Dr. Werner Porod

August 2008

Lehrstuhl für Theoretische Physik II
Institut für Theoretische Physik und Astrophysik
Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur **vii**
0.1. Vektoren, Spinoren und Helizitäten . . . vii
0.2. Weitere Nomenklatur . . . ix

1. Einleitung **1**

2. Theoretische Grundlagen **3**
2.1. Das Standardmodell der Teilchenphysik . . . 3
2.2. Spontane Symmetriebrechung und Higgs-Mechanismus . . . 3
2.3. Neutrinophysik . . . 5

3. Supersymmetrie **9**
3.1. Darstellung und Schlussfolgerungen aus der SUSY-Algebra . . . 9
3.2. Konstruktion von Supermultiplets - MSSM . . . 10
3.3. Supersymmetrische Lagrangedichte . . . 12
3.3.1. Chirales Supermultiplet . . . 12
3.3.2. Gesamte Lagrangedichte . . . 12
3.4. Superfeldnotation . . . 13
3.5. Superpotential im MSSM . . . 14
3.6. Schwache SUSY-Brechung . . . 15
3.7. Massenspektrum des MSSM . . . 16
3.8. R-Parität . . . 17
3.9. Mögliche Erweiterungen des MSSM . . . 19
3.9.1. Modelle mit verletzter R-Parität . . . 19
3.9.2. Neutrinophysik im MSSM . . . 19
3.9.3. NMSSM . . . 20
3.9.4. Spontan gebrochene R-Parität . . . 20

4. $\mu\nu$SSM **23**
4.1. Mischung der Teilchen im $\mu\nu$SSM . . . 24
4.2. Mischung der neutralen Fermionen im $\mu\nu$SSM . . . 25
4.3. Massenermittlung durch Diagonalisierung der Mischmatrix . . . 27
4.4. Mischung der geladenen Fermionen im $\mu\nu$SSM . . . 30
4.5. Massenermittlung durch Diagonalisierung der Mischmatrix . . . 31

5. Neutrinophysik auf Einschleifenniveau **33**
5.1. Regularisierung und Renormierung . . . 33
5.2. Passarino-Veltman-Integrale . . . 35
5.3. Renormierungsgruppengleichungen . . . 37
5.4. Renormierung der Zweipunktfunktion . . . 38
5.5. Berechnung relevanter Einschleifengraphen . . . 39

5.5.1. Einschleifengraph mit Beteiligung eines Skalars . . . 40
5.5.2. Einschleifengraph mit Beteiligung eines Eichbosons . . . 42
5.5.3. Tadpolegraphen . . . 43
5.6. Einschleifen-korrigierte Neutrinomassenmatrix . . . 43

6. Zerfälle **47**
6.1. Zweikörperzerfälle . . . 47
6.1.1. Zerfall in geladenes Fermion und W . . . 47
6.1.2. Zerfall in geladenes Fermion und geladenes Skalar . . . 49
6.2. Dreikörperzerfälle . . . 50

7. Technische Fragen **55**
7.1. Tadpolegleichungen . . . 55
7.1.1. Umstellung Variante 1 . . . 56
7.1.2. Umstellung Variante 2 . . . 57
7.2. LEP Grenzen . . . 62

8. Ergebnisse **65**
8.1. Auswertung mit SPheno . . . 65
8.2. Parameter . . . 65
8.3. Singlet-artiges Neutralino χ_1^0 . . . 66
8.3.1. Parameterbestimmung . . . 67
8.3.2. Neutrinodaten . . . 68
8.3.3. Massenspektrum . . . 69
8.3.4. LEP-Grenzen . . . 70
8.3.5. Zerfälle des leichtesten Skalars und Pseudoskalars . . . 71
8.3.6. Produktion und Zerfall des leichtesten Neutralinos . . . 72
8.4. Abhängigkeit von κ im Falle des Singlet-artigen Neutralinos χ_1^0 . . . 75
8.5. Bino-artiges Neutralino χ_1^0 . . . 77
8.5.1. Parameterbestimmung . . . 78
8.5.2. Neutrinodaten . . . 78
8.5.3. Massenspektrum . . . 79
8.5.4. Zerfall des leichtesten Neutralinos . . . 79
8.6. Korrelation zwischen Zerfällen und den Neutrinomischungswinkeln . . . 80

9. Zusammenfassung **85**

A. Massenmatrizen **87**
A.1. Skalare Massenmatrizen . . . 87
A.1.1. Geladene Skalare . . . 87
A.1.2. CP-gerade neutrale Skalare . . . 89
A.1.3. CP-ungerade neutrale Skalare . . . 91
A.1.4. Squarks . . . 92
A.2. Fermionische Massenmatrizen . . . 93
A.2.1. Neutrale Fermionen . . . 93
A.2.2. Geladene Fermionen . . . 94

B. Kopplungen **97**
B.1. Neutralino Kopplungen . . . 97
B.1.1. Chargino-Neutralino-W . . . 98
B.1.2. Neutralino-Neutralino-Z . . . 98
B.1.3. Chargino-Neutralino-Geladenes Skalar . . . 98
B.1.4. Neutralino-Neutralino-Skalar . . . 99
B.1.5. Neutralino-Neutralino-Pseudo Skalar . . . 99
B.1.6. Neutralino-Up Quark-Up Squark . . . 100
B.1.7. Neutralino-Down Quark-Down Squark . . . 100
B.2. Chargino-Kopplungen . . . 100
B.2.1. Chargino-Chargino-Skalar . . . 100
B.2.2. Chargino-Chargino-Pseudoskalar . . . 101
B.3. Kopplungen neutraler Skalare . . . 101
B.3.1. Neutrales Skalar-Neutrales Skalar-Neutrales Skalar . . . 102
B.3.2. Skalar-Pseudoskalar-Pseudoskalar . . . 103
B.3.3. Skalar-Geladenes Skalar-Geladenes Skalar . . . 104
B.3.4. Skalar-Up Squarks-Up Squarks . . . 105
B.3.5. Skalar-Down Squarks-Down Squarks . . . 106
B.3.6. Skalar-W^+-W^- . . . 106
B.3.7. Skalar-Z^0-Z^0 . . . 106
B.3.8. Skalar-Quark-Quark . . . 107
B.3.9. Skalar-Chargino-Chargino und Skalar-Neutralino-Neutralino . . . 107

C. Einschleifen-Selbstenergien **109**
C.1. W und Z Einschleifengraphen . . . 109
C.2. Einschleifengraphen mit Skalaren . . . 109

D. Neutrinofitroutine **111**

E. Verwendete Software **113**

Abbildungsverzeichnis **115**

Literaturverzeichnis **117**

Erklärung zur Anfertigung der Diplomarbeit **123**

Nomenklatur

0.1. Vektoren, Spinoren und Helizitäten

Indizes des griechischen Alphabetes stehen abgesehen von α und β in dieser Arbeit wie üblich für die Raumzeit und laufen daher von $\mu, \nu, \rho, \ldots = 0, 1, 2, 3$. Es ist dann

$$x^\mu = (t, \vec{x}) \qquad \text{und} \qquad p^\mu = (E, \vec{p}) \tag{0.1}$$

mit der Metrik $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1, +1, +1, +1)$. Für die bekannten vierkomponentigen Dirac-Spinoren u und v [1], welche Teilchen und Antiteilchen repräsentieren, findet in dieser Arbeit üblicherweise die Notation u und u^c Anwendung, wobei das c für Ladungskonjugation steht. Es gilt dabei aber genauso

$$u^c = v = C\overline{u}^T = C\gamma_0 u^* \qquad \text{mit} \quad \overline{u} = u^\dagger \gamma_0 \tag{0.2}$$

und der Ladungskonjugationsmatrix C. Die Helizitätszustände mit Helizität $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ sind dann gegeben durch

$$u_{R/L} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \gamma_5\right) u \qquad \text{und} \qquad u^c_{R/L} = \frac{1}{2}\left(1 \mp \gamma_5\right) u^c \qquad . \tag{0.3}$$

Dies impliziert auch die Festlegung der Projektionsoperatoren in der Form

$$P_L = \frac{1}{2}\left(1 - \gamma_5\right) \qquad \text{und} \qquad P_R = \frac{1}{2}\left(1 + \gamma_5\right) \qquad . \tag{0.4}$$

Im Zusammenhang mit supersymmetrischen Theorien werden auch zweikomponentige Weyl-Spinoren benutzt, deren exakte Darstellung mit gepunkteten und ungepunkteten Indizes unterdrückt wird. Anhand der Indizes soll nur kurz klar gemacht werden, wie sich der Weyl-Spinor aufbaut und mit dem Dirac-Spinor u in Zusammenhang steht:

$$u = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \eta^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \qquad \text{mit den Weylspinoren} \qquad \chi_\alpha \quad \text{und} \quad \eta^{\dagger\dot{\alpha}} \tag{0.5}$$

Nun ist $(\eta)^{\dagger\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (\eta)^\dagger_{\dot{\beta}}$ mit der ϵ-Matrix aus der nachfolgenden Tabelle. Dies entspricht gerade der Form von Matrizen, die bei der Operation $u^c = C\overline{u}^T$ auftreten. Tatsächlich ist der erste Weyl-Spinor auch äquivalent zum linkshändigen Anteil des Dirac-Spinors u und der zweite Weyl-Spinor äquivalent zum Ladungskonjugierten des linkshändigen Anteils des Dirac-Spinors des Antiteilchens u^c (in Anlehnung an [2]), welches rechtshändig transformiert. Damit kommt die gesamte Notation mit nur linkshändigen Weyl-Spinoren χ und η aus, die durch hermitesch Konjugieren in rechtshändige Weyl-Spinoren übergehen. Ungepunktet sind die Zusammenhänge

$$u = \begin{pmatrix} \chi \\ \eta^\dagger \end{pmatrix} \qquad \text{und somit} \qquad \overline{u} = \begin{pmatrix} \eta \\ \chi^\dagger \end{pmatrix}^T \qquad , \tag{0.6}$$

sowie

$$P_L u = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad P_R u = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^\dagger \end{pmatrix} \tag{0.7}$$

von Relevanz. Weiterhin ist in dieser Notation [2]

$$\overline{u}_i P_L u_j = \chi_i \eta_j, \qquad \overline{u}_i P_R u = \chi_i^\dagger \eta_j^\dagger \tag{0.8}$$

$$\overline{u}_i \gamma^\mu P_L u_j = \chi_i^\dagger \overline{\sigma}^\mu \chi_j, \qquad \overline{u}_i \gamma^\mu P_R u_j = \eta_i \sigma^\mu \chi_j^\dagger \tag{0.9}$$

mit den in 2×2-Blocks zerlegten γ-Matrizen entsprechend der nachfolgenden Tabelle. Die Vorteile sind sofort erkennbar: Da die oberen zwei Indizes des Dirac-Spinors nun getrennt von den unteren beiden Indizes mit anderen Quantenzahlen sind, entfallen Projektionsoperatoren, die Weyl-Spinoren leben von vornherein in unterschiedlichen Darstellungen der Lorentzgruppe. Weiterhin werden in der Supersymmetrie später chirale Supermultiplets eingeführt, die stets nur ein linkshändiges Weyl-Fermion enthalten.
Anhand eines Beispiels, wie es auch später auftritt, sei der Zusammenhang erneut aufgezeigt: Die Masseneigenzustände der geladenen Fermionen tragen in der Weyl-Notation die Bezeichnung $F_i^\pm$, die der neutralen Fermionen die Bezeichnung F_i^0 und setzen sich nach

$$\chi_i^- = \begin{pmatrix} F_i^- \\ (F_i^+)^\dagger \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \chi_i^0 = \begin{pmatrix} F_i^0 \\ (F_i^0)^\dagger \end{pmatrix} \tag{0.10}$$

zum Dirac-Spinor χ_i^- der geladenen Fermionen und zum Dirac-Spinor χ_i^0 der neutralen Fermionen zusammen. Schon an der Notation wird hier deutlich, dass die neutralen Fermionen Majorana-Teilchen sind.
Weiterhin beinhaltet bezüglich der Eicheigenzustände das Superfeld $\widehat{e}^c$ das Skalar $\tilde{e}^c = \tilde{e}_R^*$ als supersymmetrischen Partner und den Weyl-Spinor $e^c = e_R^\dagger$. Die Notation c ist dabei entsprechend obiger Interpretation mit Indizes zu verstehen und nicht zu verwechseln mit der Ladungskonjugation bei Dirac-Spinoren.
Es bleibt festzuhalten, dass in dieser Arbeit sowohl Weyl- und Dirac-Spinoren verwendet werden, je nachdem ob es beispielsweise um die Bestimmung von Massenmatrizen aus der Lagrangedichte mit Hilfe des Superpotentials (Weyl-Notation) oder die Berechnung von Einschleifengraphen oder Zerfälle (Dirac-Notation) geht. Welche Notation greift, sollte jedoch stets leicht einsichtig sein.

0.2. Weitere Nomenklatur

Verwendete Symbole - Spinornotation	
σ^μ	$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{\sigma}^0, \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\overline{\sigma}^1, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\overline{\sigma}^2$ und $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\overline{\sigma}^3$
	Insbesondere ist hier darauf zu achten, dass die später auftretenden Skalare σ_d^0 und σ_u^0 nicht mit σ^0 verwechselt werden. Aufgrund der jedoch so üblichen Notation wurde auf Umbenennungen verzichtet.
ϵ^{ab}	$\epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0, \epsilon^{12} = +1, \epsilon^{21} = -1$
ϕ	skalares Feld
ψ	chirales Feld (Weylspinor)
$\widehat{\phi}$	chirales Superfeld, in der Form $\widehat{\phi} = \phi + \theta\psi + \frac{1}{2}\theta\theta F$
θ	fermionische Koordinate in der Superfeldnotation
Verwendete Symbole - Teilchenphysik	
T^a	Generator der $SU(N)$, entweder $\frac{\lambda^a}{2}$ mit $a = 1, \ldots, 8$ der $SU(3)$ oder $\frac{\sigma^a}{2}$ mit $a = 1, \ldots, 3$ der $SU(2)$
g, g'	Eichkopplungen der $SU(2)_L$ bzw $U(1)_Y$
θ_W	schwacher Mischungswinkel, Weinbergwinkel
G_F	Fermikonstante $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}$
m_Z, m_W	Massen des Z- und der W-Bosonen
v_d, v_u	Vakuumerwartungswerte der Higgsbosonen H_d und H_u
$\tan\beta$	Verhältnis der Vakuumerwartungswerte $\tan\beta = v_u/v_d$
v_c	Vakuumerwartungswert des rechtshändigen Sneutrinos $\tilde{\nu}^c$
v_i	Vakuumerwartungswerte der linkshändigen Sneutrinos $\tilde{\nu}_i, i = 1, 2, 3$
u^2, v^2	$u^2 = v_d^2 - v_u^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, $v^2 = v_d^2 + v_u^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$
s	Mandelstam-Variable, Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$
Buchstaben in häufiger Anwendung	
m, n	typische Summationsindizes
Wortabkürzungen englischer Bezeichnungen	
BRpV	Bilinear R-parity violation
VEV	Vacuum Expectation Value
SPS	Snowmass Points and Slopes, siehe [3]
GUT	Grand Unification Theory
H.c.	Hermitian conjugate (†)
LEP	Large Electron-Positron Collider am Cern, Betrieb 1989-2000
LHC	Large Hadron Collider am Cern, Betrieb ab 2008

1. Einleitung

In den nächsten Monaten beginnt der Betrieb des "Large Hadron Colliders" (LHC), zu deutsch "Großer Hadronen Beschleuniger", am europäischen Kernforschungszentrum CERN, welcher erstmals in energetische Bereiche vordringt, die heutzutage in der Teilchenphysik von besonderem Interesse sind. Man erhofft sich die Klärung einiger ungelöster Fragen: Zwar ist das Standardmodell der Teilchenphysik eine heute etablierte Theorie, jedoch erklärt es nur einen Teil beobachtbarer Phänomene. So liefert es beispielsweise keine Erklärung für die offenbar vorhandenen Massen von Teilchen. Eine seit langem diskutierte Erweiterung, der sogennante Higgs-Mechanismus, löst dieses Problem, indem ein weiteres Teilchen, das Higgs-Teilchen, eingeführt wird. Ob dieses wirklich verantwortlich für die Massenerzeugung ist, stellt eine der Fragen dar, welche den Bau des LHC bestimmt haben. Man hofft zudem zumindest im Ansatz klären zu können, welche theoretischen Modelle beispielsweise zur Beschreibung dunkler Materie, heutiger Neutrinophysik oder der Vereinigung von Eichkopplungen auch aus experimenteller Sicht in Frage kommen. Wie später erläutert wird, ist eine der einfachsten Erweiterungen des Standardmodells die Supersymmetrie (SUSY), welche im Grundansatz jedem Teilchen einen supersymmetrischen Partner zuordnet. Da seit nunmehr 10 Jahren auch bekannt ist, dass Neutrinos untereinander mischen und daher eine Masse aufweisen, stellt Supersymmetrie mit gebrochener R-Parität eine Besonderheit dar, denn sie erlaubt auf einfache Weise die Beschreibung massiver Neutrinos. Gleichwohl ist die Brechung von R-Parität mit Vorsicht zu handhaben, da starke experimentelle Grenzen bezüglich des Protonzerfalls oder flavourverletzender Zerfälle existieren.
Diese Arbeit beschäftigt sich mit genau einem solchen supersymmetrischen Modell mit gebrochener R-Parität, welches versucht sowohl Neutrinophysik zu betreiben als auch das sogennante μ-Problem zu lösen. Letzteres beinhaltet die Fragestellung, warum der μ-Parameter mit der elektroschwachen Skala zusammenfällt. Im Gegensatz zum NMSSM, welches weitere skalare Felder benötigt, können hier beide Problemstellungen nur durch die Einführung eines rechtshändigen Neutrinos angegangen werden.
Die nachfolgende Arbeit gliedert sich dabei wie folgt: Im anschließenden Kapitel 2 werden die für diese Arbeit relevanten, theoretischen Grundlagen heutiger Teilchenphysik erläutert. Dazu zählen das Standardmodell der Teilchenphysik, spontane Symmetriebrechung sowie experimentelle Resultate zur Neutrinophysik. Das darauffolgende Kapitel 3 führt in größerer Ausführlichkeit Supersymmetrie ein. Neben der generellen Konstruktion des Teilchenspektrums, der Darstellung der Lagrangedichte und der daraus resultierenden Teilchenmischung erfolgt hier eine detaillierte Einführung zur R-Parität und eine Vorstellung verschiedener Modelle mit gebrochener R-Parität. Sodann folgt in Kapitel 4 das in dieser Arbeit betrachtete Modell, welches unter dem Namen $\mu\nu$SSM eingeführt wird. Insbesondere relevant ist dabei die Mischung der neutralen Fermionen, weil diese der Ursprung der möglichen Beschreibung von Neutrinophysik ist. Da jedoch nicht das gesamte Spektrum der Neutrinodaten auf Baumgraphenniveau erfüllt werden kann, beschäftigt sich Kapitel 5 mit Korrekturen zur Massenmatrix der neutralen Fermionen auf Einschleifenniveau. Nachdem die gesamte Neutrinophysik schließlich beschrieben werden kann, folgt Kapitel 6 mit einer Abhandlung zu Zwei- und Dreikörperzerfällen des leichtesten Neutralinos, welches in einem Modell mit gebrochener R-Parität kein stabiles Teilchen mehr darstellt. In Kapitel 7 werden schließlich einige technische Fragestellungen diskutiert. Dazu gehört die Umstellung der

sogennanten Tadpolegleichungen, welche aus der Minimierung des skalaren Potentials resultieren, sowie ein Abschnitt zum "Large Electron-Positron"-Beschleuniger (LEP), welcher experimentelle Grenzen an Skalar- und Pseudoskalarmassen stellt. Zuletzt werden in Kapitel 8 die Ergebnisse der numerischen Auswertung im wesentlichen für einen Parameterpunkt präsentiert. Dazu gehört die Präsentation des Massenspektrums auch in Bezug auf die LEP-Grenzen, die Erfüllung der Neutrinodaten, sowie die Darstellung der möglichen Zerfälle des leichtesten Skalars, Pseudoskalars und Neutralinos. Hierbei muss eine Unterscheidung zwischen einem Singlet- und einem Bino-artigen leichtesten Neutralino erfolgen. Im letzten Abschnitt von Kapitel 8 werden Zusammenhänge zwischen den Zerfällen und den Neutrinomischungswinkeln aufgezeigt, bevor die Arbeit mit der Zusammenfassung in Kapitel 9 schließt.

2. Theoretische Grundlagen

2.1. Das Standardmodell der Teilchenphysik

Grundlage der heutigen theoretischen Teilchenphysik sind zweifellos die relativistische Quantenfeldtheorie und die Gruppentheorie, auf welchen das bekannte Standardmodell der Teilchenphysik aufbaut. Diese Arbeit fußt letztlich auf fundierte Kenntnisse in diesen genannten Gebieten, kann aber keine detaillierte Einführung geben. Dafür sei insbesondere auf [1],[4],[5] verwiesen.
Die Anwendung von Feynmanregeln in der noch genauer einzuführenden Supersymmetrie ist in den späteren Kapiteln über Einschleifen-Korrekturen und einfache Zerfälle zu sehen. Dort kommen auch Methoden zur Regularisierung und Renormierung zum Einsatz, die dort im Detail genauer erläutert werden.
Hier soll nur kurz der Teilcheninhalt des bekannten Standardmodells $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ erläutert werden, da dieser elementar für die spätere supersymmetrische Erweiterung ist. Das Standardmodell beschreibt die drei fundamentalen Kräfte der starken, schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung, wobei die Eichbosonen, welche als Spin-1-Teilchen die Wechselwirkung hervorrufen, Elemente der Eichgruppen $SU(3)_C$ (Acht Gluonen g_μ^α), $SU(2)_L$ (Drei Bosonen W_μ^i) und $U(1)_Y$ (Boson B_μ) in der adjungierten Darstellung sind. Dabei charakterisieren die Quantenzahlen C für die Farbladung ("color") der starken Wechselwirkung, L für den schwachen Isospin und Y für die Hyperladung ein Teilchen, womit abgesehen von den Yukawakopplungen die Wechselwirkungseigenschaften festgelegt sind. Neben den Eichbosonen treten im Standardmodell die fermionischen Leptonen und Quarks in jeweils drei Familien auf. Zu den Leptonen zählen die Neutrinos ν sowie Elektron e, Myon μ und Tau τ und deren Antiteilchen. Das Standardmodell beinhaltet dabei nur Neutrinos mit linkshändiger Helizität und Antineutrinos mit rechtshändiger Helizität. Zu den Quarks gehören das u(up)- und d(down)-Quark, das c(charme)- und s(strange)-Quark sowie das t(top)- und b(bottom)-Quark und deren Antiteilchen. Die Quantenzahlen werden später in der Supersymmetrie präsentiert, jedoch nur für die erste Familie, da sich die anderen beiden Familien nur in ihrer Masse unterscheiden. Letztere ist im oben aufgeführten Standardmodell $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ primär nicht gegeben, alle aufgeführten Teilchen weisen also keine Masse auf. Bis heute ist diese Unzulänglichkeit des Standardmodells ungeklärt, wenngleich ein vielversprechender Kandidat der Higgs-Mechanismus ist, der aufgrund der Bedeutung der spontanen Symmetriebrechung nachfolgend genauer erläutert wird.

2.2. Spontane Symmetriebrechung und Higgs-Mechanismus

Betrachtet man ein komplexes, skalares Feld $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(x) + i\phi_2(x)\right)$ mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \partial^\nu \phi(x) \left(\partial_\nu \phi(x)\right)^\dagger - V(\phi) \quad \text{und potentieller Energie} \quad V(\phi) = \mu^2 \left|\phi(x)\right|^2 + \lambda \left|\phi(x)\right|^4 \ , \tag{2.1}$$

so ist diese invariant unter einer globalen $U(1)$-Phasentransformation $\phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x)$. Fragt man nach der minimalen potentiellen Energie, dem Grundzustand, so sind folgende Fälle zu unterscheiden: Ist der Parameter $\mu^2 > 0$, so liegt das Minimum von $V(\phi)$ offenbar bei $\phi(x) = 0$

und somit beschreibt $\phi(x)$ ein massives skalares Boson. Für den Fall $\mu^2 < 0$ befindet sich das Minimum von $V(\phi)$ jedoch bei

$$|\phi(x)| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2}}v > 0 \quad , \tag{2.2}$$

was Abbildung 2.1 zu entnehmen ist.

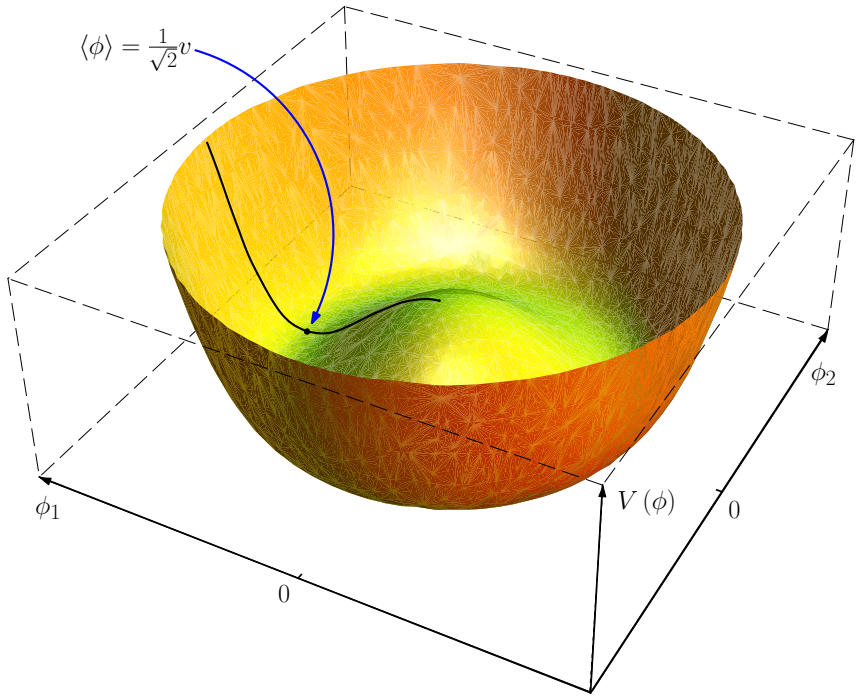


Abbildung 2.1.: Illustration des Potentials $V(\phi)$ zur spontanen Symmetriebrechung

Entwickelt man die Felder um den sogenannten Vakuumerwartungswert (vacuum expectation value - VEV) v neu, so liegt die ursprüngliche Symmetrie der Lagrangedichte nicht mehr vor. Daraus resultiert auch der Name "Spontane Symmetriebrechung".
Konkret ergibt die Verschiebung der Felder in Richtung des Vakuumerwartungswertes v nach $\phi_1(x) = v + \sigma(x)$ und $\phi_2(x) = \eta(x)$ mit zwei reellen Feldern $\sigma(x)$ und $\eta(x)$ folgende Lagrangedichte mit quadratischen Termen in den Feldern

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\nu\sigma(x)\partial_\nu\sigma(x) - \frac{1}{2}\left(2\lambda v^2\right)\sigma^2(x) + \frac{1}{2}\partial^\nu\eta(x)\partial_\nu\eta(x) \quad . \tag{2.3}$$

Dies entspricht zwei Bosonen, dem σ-Boson mit Masse $\sqrt{2\lambda v^2}$ und dem masselosen η-Boson, genannt Goldstoneboson. Geht man von der globalen $U(1)$-Transformation zu einer lokalen $SU(2)$- und $U(1)$-Transformation, so kann auf gleiche Art und Weise durch zusätzliche Kopplungen an die Eichbosonen eine Masse für jene erzeugt werden. Als Lagrangedichte bleibt dann ohne Wechselwirkungsanteile in σ

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F^\dagger_{W,\mu\nu}F^{\mu\nu}_W + m_W^2 W^\dagger_\mu W^\mu \\ &- \frac{1}{4}F_{Z,\mu\nu}F^{\mu\nu}_Z + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2}\left(\partial^\mu\sigma\right)\left(\partial_\mu\sigma\right) - \frac{1}{2}m_H^2\sigma^2 \quad .\end{aligned} \tag{2.4}$$

Die zuvor eingeführten Eichbosonen W_μ^i der $SU(2)_L$ und B_μ der $U(1)_Y$ des Standardmodells mischen hier zu den massiven, geladenen Eichbosonen $W_\mu^{(\pm)}$, dem massiven, aber neutralen Boson Z_μ und dem weiterhin masselosen Photonfeld A_μ nach:

$$\begin{aligned} W_\mu^{(\pm)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^1 \mp W_\mu^2\right) \quad \text{mit Masse} \quad m_W = \frac{1}{2}vg \quad , \\ Z_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left(gW_\mu^3 - g'B_\mu\right) \quad \text{mit Masse} \quad m_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2+g'^2}v \quad , \\ A_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left(g'W_\mu^3 + gB_\mu\right) \quad \text{mit Masse} \quad m_A = 0 \quad , \end{aligned} \tag{2.5}$$

wobei g bzw. g' die Eichkopplung der $SU(2)_L$ bzw. $U(1)_Y$ und v den schon bekannten Vakuumerwartungswert bezeichnet. Da später der schwache Mischungswinkel (Weinbergwinkel) und die Elementarladung auftreten, seien diese noch definiert:

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \qquad e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \tag{2.6}$$

Man bezeichnet dies als elektroschwache Symmetriebrechung, welche die $SU(2)_L \times U(1)_Y$ zur elektromagnetischen Kraft $U(1)_{\mathrm{EM}}$ bricht. Auf diese Weise lassen sich ebenfalls die Massen für andere Teilchen des Standardmodells generieren. Auffällig ist das Verschwinden des masselosen und unphysikalischen Goldstonebosons η in Beziehung (2.4), welches aufgrund der Lokalität der $SU(2) \times U(1)$-Phasentransformation wegtransformiert werden kann. Dies ist jedoch nur in der unitären Eichung ($\xi \to \infty$) der Fall. Da in der weiteren Arbeit insbesondere wegen der zu berechnenden Einschleifenkorrekturen jedoch die Landau-Eichung $\xi = 0$ zum Einsatz kommt, bleibt das masselose Goldstoneboson als unphysikalischer Beitrag in der Matrix der Pseudoskalare erhalten. Weitere Details zur Eichfreiheit und der Eichfixierung sowie auftretender Geistfelder sind erneut [1] zu entnehmen.

2.3. Neutrinophysik

Seit Mitte der 90iger Jahre scheint klar zu sein, dass Neutrinos eine Masse aufweisen müssen [6]. Diskrepanzen zwischen den theoretischen Vorhersagen von solaren Neutrinos und Messungen auf der Erde haben genauso wie auch die Erzeugung atmosphärischer Neutrinos darauf hingedeutet, dass Oszillationen zwischen den Neutrinos erfolgen. So produziert die Sonne eine nach modernen Sonnenmodellen gut berechenbare Rate an im wesentlichen Elektron-Neutrinos ν_e, die auf der Erde ankommende Rate, welche durch zahlreiche Detektoren wie Homestake, SAGE, GALLEX, Kamiokande, Super-Kamiokande und SNO gemessen wurde [7], entspricht jedoch nur einem Bruchteil der Erwartung. Ähnliche Probleme zeigen sich auch bei der Betrachtung von Neutrinos aus hadronischen Schauern, welche in der Atmosphäre entstehen [8], hier spricht man vom atmosphärischen Problem. Als komfortable Lösung bieten sich die angesprochenen Neutrinooszillationen an, welche beispielhaft dargestellt werden sollen:
Betrachtet man die Mischung der Eicheigenzustände des Elektron- ν_e und des Myon-Neutrinos ν_μ und schreibt diese als Funktion zweier Masseneigenzustände ν_1 und ν_2, so folgt aus

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

die Wahrscheinlichkeit P, dass ein Neutrino-Flip $\nu_\mu \to \nu_e$ nach der Distanz L von der Quelle stattgefunden hat [4]:

$$P\left(\nu_\mu \to \nu_e\right) = \sin^2\alpha \sin^2\left[\frac{(m_2^2 - m_1^2)L}{4E}\right] \tag{2.8}$$

Dabei bezeichnet E die Strahlenergie in der Näherung $E \gg m_i$. Eine ausführlichere Behandlung dieser Oszillationen ist beispielsweise [9] zu entnehmen. Der Beziehung ist sofort anzusehen, dass nur für den Fall massiver Neutrinos die beobachtbaren Neutrinooszillationen auftreten. Gleiches gilt auch für das atmosphärische Problem, welches im wesentlichen einer Mischung des Myon-ν_μ und Tau-Neutrinos ν_τ entspricht, wohingegen die Mischung zwischen Elektron- ν_e und Tau-Neutrino ν_τ nach Reaktor-Messungen nahezu verschwindend zu sein scheint [10].
Geht man von drei Neutrinogenerationen aus, was naheliegend aber nicht zwangsläufig sein muss, so sind die Neutrinooszillationen letztlich Inhalt der leptonischen (3×3)-Mischungsmatrix $\mathcal{U}$, welche die Eicheigenzustände $\nu_l;\ l = e, \mu, \tau$ mit den Masseneigenzuständen $\nu_i;\ i = 1, 2, 3$ in der Form

$$\nu_l = \sum_i \mathcal{U}_{li}^* \nu_i \tag{2.9}$$

in Verbindung bringt. Die Mischungsmatrix $\mathcal{U}$ kann allgemein geschrieben werden [9]

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s13e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s13e^{i\delta} & -c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

wobei die Abkürzungen $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$ und $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$ mit den drei Neutrinomischungswinkeln θ_{ij} verwendet werden. Die Größen δ, α_1 und α_2 sind CP-verletzende Phasen, wobei insbesondere α_1 und α_2 als Majorana-Phasen nur auftreten können, wenn Neutrinos Majorana-Teilchen, also ihre eigenen Antiteilchen, sind. Außerdem spielen sie offenbar keine Rolle, was die Neutrinooszillationen anbelangt, jedoch betreffen sie den neutrinolosen doppelten β-Zerfall und ähnliche Prozesse [11].
Nach neuesten Angleichungen an gemesse Neutrinodaten, welche insbesondere von MINOS [12] und KamLAND [6] stammen, ergeben sich für die Mischungswinkel θ_{ij} und die Massendifferenzen der Masseneigenzustände $m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ folgende Bereiche [6]:

Parameter	Bester Fit	2σ	3σ
$m_{21}^2\left[10^{-5}\mathrm{eV}^2\right]$	$7,6$	$7,3 - 8,1$	$7,1 - 8,3$
$m_{31}^2\left[10^{-3}\mathrm{eV}^2\right]$	$2,4$	$2,1 - 2,7$	$2,0 - 2,8$
$\sin^2\theta_{12}$	$0,32$	$0,28 - 0,37$	$0,26 - 0,40$
$\sin^2\theta_{23}$	$0,50$	$0,38 - 0,63$	$0,34 - 0,67$
$\sin^2\theta_{13}$	0.007	≤ 0.033	≤ 0.050

Tabelle 2.1.: Bester Fit, 2σ und 3σ-Abweichungen (1 d.o.f.) für das drei Neutrinogenerationen-Modell mit Daten aus solaren, atmosphärischen, Reaktor-(KamLAND und CHOOZ) und Beschleunigerexperimenten (K2K und MINOS) (entnommen aus [6](Table D1), Update September 2007)

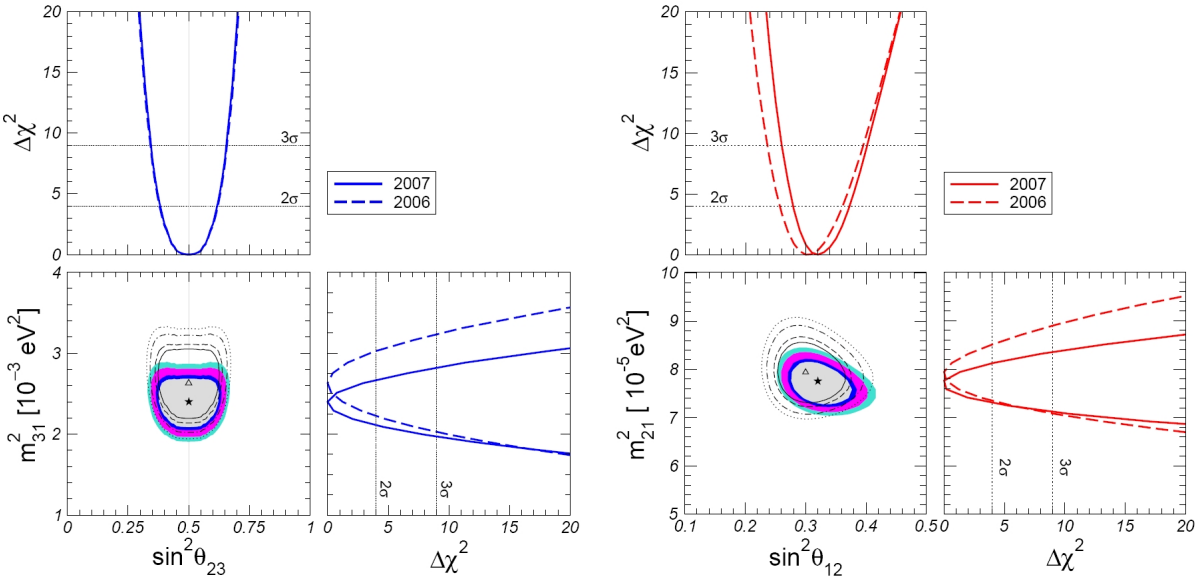


Abbildung 2.2.: Linke Hälfte: Erlaubter Bereich in der $(\sin^2\theta_{23}, m^2_{31})$-Ebene vor (Linien) und nach (farbiger Bereich) Einfügen der neuesten MINOS Daten; Rechte Hälfte: Erlaubter Bereich in der $(\sin^2\theta_{12}, m^2_{21})$-Ebene vor (Linien) und nach (farbiger Bereich) Einfügen der neuesten KamLAND Daten - (entnommen und nachbearbeitet aus [6](Figure D1))

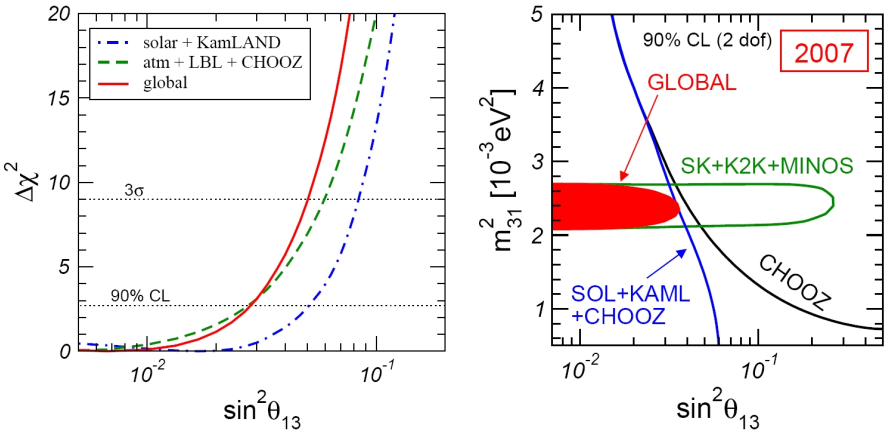


Abbildung 2.3.: Linke Hälfte: $\Delta\chi^2$-Profil als Funktion von θ_{13} für verschiedene Datenauswertungen; Rechte Hälfte: 90% C.L. ("confidence level", Vertrauensbereich) für $\sin^2\theta_{13}$ (2 d.o.f.) aus der Kombination aller Neutrinodaten als Funktion von m^2_{31} - (entnommen und nachbearbeitet aus [6](Figure D2))

Die Abbildungen 2.2 und 2.3 auf Seite 7 verdeutlichen die Kenntnisse der heutigen Neutrinophysik. Aufgrund der Beziehung zum atmosphärischen und solaren Problem sowie den Messungen aus den Reaktor-Experimenten seien des Weiteren die nachfolgenden Größen definiert:

$$\begin{aligned} \theta_{\text{sol}} &= \theta_{12}, \qquad \theta_{\text{atm}} = \theta_{23}, \qquad \theta_{\text{R}} = \theta_{13} \\ m^2_{\text{sol}} &= m^2_{21}, \qquad m^2_{\text{atm}} = m^2_{32} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Offenbar besteht die einfache Relation $m^2_{32} = m^2_{31} - m^2_{21}$, so dass ein Bezug zu Tabelle 2.3 leicht möglich ist. Experimente liefern dabei durch Vermessung der Oszillationen nur die Massendifferenzen und nie Absolutwerte. Es ist demnach nicht bekannt, welche Hierarchie an Masseneigenzuständen auftritt. Im Gegensatz zu früheren Fits ist der Bestwert für $\sin\theta_{13}$ auch nicht länger verschwindend.
Offen geblieben ist nun die theoretische Ursache der Neutrinomassen, für die das Standardmodell keine Lösung bereithält. Mittlerweile bieten einige Modelle Möglichkeiten zur Massenerzeugung bei Neutrinos. Neben der später dargestellten Version in der Supersymmetrie durch Brechung der R-Parität soll zumindest das gängige Modell des "seesaw"-Mechanismus für eine Neutrinogeneration kurz angerissen werden, welches seinen Ursprung bereits um 1980 hat [13]: Erweitert man das Standardmodell um ein rechtshändiges Neutrino ν_R, welches keine Eichwechselwirkung erfährt, so lässt sich folgende Lagrangedichte aufstellen [14]:

$$\mathcal{L}_{\text{seesaw}} = -\frac{1}{2}\left(\overline{\nu}_L, \overline{\nu}^c_R\right) M \begin{pmatrix} \nu^c_L \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{H.c.} \qquad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} m^M_L & m^D \\ m^D & m^M_R \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Dabei bedeutet $\nu^c = C\overline{\nu}^T = C\gamma_0\nu^*$ mit der Ladungskonjugationsmatrix C entsprechend der Regel für Dirac-Spinoren und L, R bezeichnen die Helizitäten. Neben den typischen Dirac-Massentermen $\propto \overline{\nu}_L\nu_R$ wie man sie auch von anderen Teilchen des Standardmodells kennt, treten hier auch Majorana-Massenterme auf, es wird also davon ausgegangen, dass das Neutrino sein eigenes Antiteilchen $\nu = \nu^c$ darstellt. Bei den geladenen Fermionen des Standardmodells hingegen ist dies nicht möglich, da dort stets zu unterscheiden ist zwischen dem Teilchen mit "spin-up" und "spin-down" und dem Antiteilchen mit ebenfalls zwei Spinzuständen. Lässt man hierbei $m^M_L = 0$ zum Erhalt der Eichinvarianz und setzt $m^M_R \gg m^D$, so erhalten die Masseneigenzustände approximativ die Massen

$$m_1 \approx m^M_R \qquad \text{und} \qquad m_2 \approx \left| -\frac{\left(m^D\right)^2}{m^M_R} \right| \quad , \tag{2.13}$$

so dass ein leichtes, linkshändiges und ein schweres, rechtshändiges Neutrino generiert werden. Die Namensgebung "seesaw" (Wippe) liegt in der Tatsache begründet, dass je schwerer m_1 ist, desto leichter wird m_2. Weiterhin ist anzumerken, dass die schweren Masseneigenzustände nahe an der GUT-Skala ("Grand Unification Theory"), genauso wie bei den später auftretenden supersymmetrischen Modellen mit verletzter R-Parität, interessant für die frühe Entwicklung des Universums (Baryogenese) sind. Zur genaueren Untersuchung, ob Neutrinos wirklich Majorana-Teilchen sind, eignet sich insbesondere der schon angesprochene neutrinolose doppelte β-Zerfall [11].

3. Supersymmetrie

Nach diesem sehr kurz gehaltenen Abriss zum Standardmodell der Teilchenphysik, der Massenerzeugung durch den Higgs-Mechanismus und die Problematik der Neutrinophysik soll in größerer Ausführlichkeit in die Supersymmetrie (SUSY), einer möglichen Erweiterung des bewährten Standardmodells, eingeführt werden. Das Standardmodell weißt in einigen, sowohl phänomenologischen als auch theoretischen Punkten Probleme auf, die durch SUSY gelöst werden können. So führt die supersymmetrische Erweiterung zu einer Vereinigung aller drei Eichkopplungen bei einer hohen GUT-Energieskala von ca. 10^{16} GeV, die im Standardmodell noch nicht gegeben ist, aber für eine Vereinheitlichung der elektromagnetischen, schwachen und starken Kraft in einer GUT von Relevanz ist. Weiter existieren in SUSY mögliche Kanditaten für kalte dunkle Materie in Form des sogenannten leichtesten SUSY-Teilchens, welches je nach SUSY-Modell ein Neutralino, ein Slepton oder beispielsweise auch das Gravitino sein kann. In theoretischer Hinsicht lassen sich darüber hinaus als durch SUSY lösbare Probleme das Hierarchie-Problem, sowie die elektroschwache Symmetriebrechung anführen. Ersteres beinhaltet die Fragestellung, warum die Higgs-Masse im Vergleich zur Planck-Skala so klein ist, insbesondere weil man aufgrund von fermionischen Schleifengraphen eine große Massenkorrektur erwarten würde. Ungebrochene SUSY löst dies, da Schleifenkorrekturen von skalaren SUSY-Partnern ins Spiel kommen, welche die fermionische Massenkorrektur aufheben. Betrachtet man zusätzlich SUSY-brechende Terme, so erfolgt die elektroschwache Symmetriebrechung in SUSY durch eine unterhalb der elektroschwachen Energieskala negativ werdende Higgsmasse $m_{H_u}^2 < 0$. Dieses Verhalten ergibt sich durch Anwendung der Renormierungsgruppengleichungen quasi automatisch.
Nachfolgend soll kurz die grundlegende Idee von Supersymmetrie, das Minimale Supersymmetrische Standardmodell (MSSM) sowie der Begriff der R-Parität eingeführt werden, da insbesondere diese im in dieser Arbeit behandelten Modell verletzt sein wird. Eine detaillierte Einführung in die Supersymmetrie, an welcher sich auch die hier dargestellte Notation anlehnt, ist beispielsweise Stephen P. Martins Abhandlung [2] zu entnehmen. Alternativ ist auch [15] als übersichtliche Quelle zu nennen.

3.1. Darstellung und Schlussfolgerungen aus der SUSY-Algebra

Supersymmetrie stellt eine kontinuierliche Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen dar und weist daher nach dem Noether-Theorem eine erhaltene Ladung Q_α auf, welche kein Lorentzskalar, sondern eine spinorielle Größe ist. Für einen Teilchenzustand mit Spin J gilt demnach

$$Q_\alpha^{(\dagger)} |J\rangle = \left|J \pm \tfrac{1}{2}\right\rangle, \quad \text{mit } \alpha = 1,2 \text{ für die Spinor-Komponenten.} \tag{3.1}$$

Tatsächlich erlaubt das Haag-Lopuszanski-Sohnius-Theorem [16] im Zusammenhang mit dem Coleman-Mandula-Theorem [17] neben P_μ und $M_{\mu\nu}$ (welche den Pauli-Lubanski-Vektor bilden) keine weitere vektorielle oder tensorielle Ladung, sondern eine spinorielle Größe, wie angegeben, stellt die einzige weitere Möglichkeit einer erhaltenen Ladung dar. Die Werte $\alpha = 1,2$ lassen bereits darauf schließen, dass hier die zweikomponentige Weyl-Notation statt der vierkomponentigen Dirac-Notation Anwendung findet. Für die angegebenen spinoriellen Ladungen ergeben

sich folgende (Anti-)Vertauschungsrelationen, deren Motivation aber auch exakte Berechnung beispielsweise [2] zu entnehmen ist

$$\begin{aligned} \left\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\right\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\beta} P_\mu \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \left\{Q_\alpha^\dagger, Q_\beta^\dagger\right\} = 0 \\ [P_\mu, Q_\alpha] &= \left[P_\mu, Q_\beta^\dagger\right] = 0 \qquad . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Damit gilt insbesondere $\left[P^2, Q_\alpha\right] = 0$, woraus wegen $P^2 = P_\mu P^\mu = m^2$ sofort folgt, dass alle Teilchen desselben Supermultiplets, die also durch Anwendung von Q_α auf einen Teilchenzustand entstehen, in exakter SUSY gleiche Massen aufweisen. Da experimentell jedoch beispielsweise zum Elektron kein supersymmetrisches, skalares Teilchen mit gleicher Masse gefunden wurde, muss zwangsläufig SUSY eine gebrochene Symmetrie sein.
Um die Anzahl an bosonischen und fermionischen Freiheitsgraden in einem Supermultiplet zu berechnen, führt man den Operator $(-1)^{2s}$ mit Teilchenspin s ein, welcher mit der spinoriellen Ladung Q_α antivertauscht, da letztere die Fermionen- bzw. Bosonenzahl um eine Einheit ändert. Eine einfache Rechnung [2] mit Hilfe von (3.2) zeigt schließlich, dass für alle Teilchen $|i\rangle$ eines Supermultiplets mit der Vollständigkeitsrelation $\sum_i |i\rangle \langle i| = 1$ aufgrund des gleichen 4-Impulses p^μ folgende Relation gilt:

$$p^\mu \mathrm{tr}\left[(-1)^{2s}\right] = \sum_i p^\mu \langle i| (-1)^{2s} |i\rangle = \sum_i \langle i| (-1)^{2s} P^\mu |i\rangle = 0 \tag{3.3}$$

Dies macht deutlich, dass die fermionische Zahl an Freiheitsgraden n_F der bosonischen Zahl an Freiheitsgraden n_B in einem Supermultiplet mit $p^\mu \neq 0$ entsprechen muss. Insbesondere dieser letzte Punkt spielt bei der nachfolgenden Konstruktion von Supermultiplets eine entscheidende Rolle.

3.2. Konstruktion von Supermultiplets - MSSM

Im nächsten Schritt können nun chirale und Eichsupermultiplets gebildet, also zu jedem Weyl-Fermion ψ (zweikomponentiger Spinor) und jedem Eichboson A_μ des Standardmodells ein supersymmetrischer Partner eingeführt werden. Dies führt letztlich auf das minimale supersymmetrische Standardmodell (MSSM). Aufgrund der notwendigen Übereinstimmung fermionischer und bosonischer Freiheitsgrade muss "off-shell" im Falle des chiralen Supermultiplets ein komplexes skalares Feld F und im Falle des Eichsupermultiplets ein reelles skalares Feld D eingeführt werden. Diese müssen beide "on-shell" verschwinden, denn sie weisen aufgrund der Gleichheit von fermionischen und bosonischen Freiheitsgraden "on-shell" keinen kinetischen Term in der Lagrangedichte auf ($\mathcal{L} = F^* F + \frac{1}{2} DD$).

Ganz allgemein ergibt sich also folgendes Bild bei der Konstruktion von Supermultiplets:

Chirales Supermultiplet Freiheitsgrade	ϕ	ψ	F
off-shell	2	4	2
on-shell	2	2	0

Eichsupermultiplet Freiheitsgrade	A_μ	λ	D
off-shell	3	4	1
on-shell	2	2	0

Die auftretenden Hilfsfelder F und D spielen zwar "on-shell" keine Rolle und werden somit nicht als Teilchen identifiziert, ergeben jedoch neue Wechselwirkungen, die zumeist als F- bzw. D-Terme bezeichnet werden. Der Teilcheninhalt des MSSM, also der einfachsten supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells, gestaltet sich wie folgt:

Chirale Supermultiplets	Superfeld-notation	Spin 0	Spin $\frac{1}{2}$	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
Squarks, Quarks	$\widehat{Q}$	$\left(\tilde{u}_L, \tilde{d}_L\right)$	(u_L, d_L)	$\left(\mathbf{3}, \quad \mathbf{2}, \quad \frac{1}{6}\right)$
(×3 Familien)	$\widehat{u}^c$	$\tilde{u}_R^*$	$u_R^\dagger$	$\left(\bar{\mathbf{3}}, \quad \mathbf{1}, \quad -\frac{2}{3}\right)$
	$\widehat{d}^c$	$\tilde{d}_R^*$	$d_R^\dagger$	$\left(\bar{\mathbf{3}}, \quad \mathbf{1}, \quad \frac{1}{3}\right)$
Sleptonen, Leptonen	$\widehat{L}$	$(\tilde{\nu}_e, \tilde{e}_L)$	(ν_e, e_L)	$\left(\mathbf{1}, \quad \mathbf{2}, \quad -\frac{1}{2}\right)$
(×3 Familien)	$\widehat{e}^c$	$\tilde{e}_R^*$	$e_R^\dagger$	$(\mathbf{1}, \quad \mathbf{1}, \quad 1)$
Higgs, Higgsinos	$\widehat{H}_u$	$\left(H_u^+, H_u^0\right)$	$\left(\tilde{H}_u^+, \tilde{H}_u^o\right)$	$\left(\mathbf{1}, \quad \mathbf{2}, \quad \frac{1}{2}\right)$
	$\widehat{H}_d$	$\left(H_d^0, H_d^-\right)$	$\left(\tilde{H}_d^0, \tilde{H}_d^-\right)$	$\left(\mathbf{1}, \quad \mathbf{2}, \quad -\frac{1}{2}\right)$

Eichsupermultiplets	Spin $\frac{1}{2}$	Spin 1	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
Gluinos, Gluonen	$\tilde{g}$	g	$(\mathbf{8}, \quad \mathbf{1}, \quad 0)$
Winos, W-Bosonen	$\tilde{W}^\pm, \tilde{W}_3^0$	$W^\pm, W_3^0$	$(\mathbf{1}, \quad \mathbf{3}, \quad 0)$
Bino, B-Boson	$\tilde{B}$	B	$(\mathbf{1}, \quad \mathbf{1}, \quad 0)$

Statt der Schreibweise $\tilde{u}_R^*$ findet in dieser Diplomarbeit, wie bereits angedeutet, auch sehr häufig die Schreibweise $\tilde{u}^c$ für die rechtshändigen Supermultiplets Anwendung. Erkennbar ist weiterhin die Superfeldnotation für die chiralen Supermultiplets, die unter Benutzung von Grassmannvariablen das skalare, das fermionische und auch das Hilfsfeld in nachfolgender Form zusammenfasst und in Abschnitt 3.4 genauer erläutert wird:

$$\widehat{\Phi} = \phi + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta F \tag{3.4}$$

Die einzige Besonderheit stellt die Einführung eines weiteren Higgsdubletts dar, deren Notwendigkeit an verschiedenen Punkten deutlich wird: Erstens treten mit nur einem Higgsdublett

Eichanomalien auf, die nur durch ein weiteres Dublett beseitigt werden können, da mit anderer Hyperladung die Bedingungen $\mathrm{tr}\left[T_3^2 Y\right] = \mathrm{tr}\left[Y^3\right] = 0$ erfüllt sind. Zweitens benötigt man aufgrund der Struktur von SUSY zwei Felder, eines welches die Kopplung an die u-Squarks/Quarks und eines welches die Kopplung an die d-Squarks/Quarks erlaubt. Zuletzt ist auch anzuführen, dass das später auftretende Superpotential eine holomorphe Funktion sein muss, so dass Terme wie $H_u^* H_u$ nicht gestattet sind, da diese zwangsläufig die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen verletzen.

3.3. Supersymmetrische Lagrangedichte

3.3.1. Chirales Supermultiplet

Exemplarisch ist nachfolgend die freie Lagrangedichte eines chiralen Supermultiplets in Weyl-Notation noch ohne Anwendung der Superfeldnotation gezeigt:

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = \partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i + i\psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + F^{*i} F_i \tag{3.5}$$

Die möglichen Wechselwirkungen sowie Massenterme werden in Form des sogenannten Superpotentials W geschrieben, welches eine holomorphe Funktion von Skalarfeldern darstellt:

$$W = \frac{1}{2} M^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} y^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \tag{3.6}$$

Tatsächlich werden die auftretenden Kopplungen maximal trilinear gewählt, da höhere Terme zu nicht renormierbaren Termen führen. Weiterhin sind die Kopplungen M^{ij} und y^{ijk} total symmetrisch in ihren Indizes. In dieser Definition sind die Wechselwirkungen schließlich gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{WW}} = \left(-\frac{1}{2} W^{ij} \psi_i \psi_j + W^i F_i \right) + \text{H.c.} \quad \text{mit} \quad W^i = \frac{\partial W}{\partial \phi_i}, W^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \phi_i \partial \phi_j}. \tag{3.7}$$

Die Bewegungsgleichungen, welche sich für die Hilfsfelder F ergeben, sind von der Form

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} + \mathcal{L}_{\text{WW}}|_F = F^{*i} F_i + W^i F_i + W^{*i} F_i^* \quad \Longrightarrow \quad F_i = -W_i^*, F^{*i} = -W^i. \tag{3.8}$$

Dies erlaubt eine Umformulierung der gesamten Lagrangedichte ohne Benutzung der Hilfsfelder F, welche ursprünglich eingeführt wurden, um die Zahl der bosonischen Freiheitsgrade den fermionischen Freiheitsgraden anzupassen, nun jedoch auf eine neue Wechselwirkung führen:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i + i\psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{1}{2} \left(W^{ij} \psi_i \psi_j + W^{*ij} \psi_i^\dagger \psi_j^\dagger \right) - W^i W_i^*. \tag{3.9}$$

3.3.2. Gesamte Lagrangedichte

Betrachtet man chirale und Eichsupermultiplets und deren mögliche Wechselwirkungen, so ist die gesamte Lagrangedichte gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &- D^\mu \phi^{*i} D_\mu \phi_i - i\psi^{\dagger i} \overline{\sigma}^\mu D_\mu \psi_i - \frac{1}{2} \left(W^{ij} \psi_i \psi_j + W^{ij*} \psi_i^\dagger \psi_j^\dagger \right) - W^i W_i^* \\ &- \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - i\lambda^{\dagger a} \overline{\sigma}^\mu D_\mu \lambda_a + \frac{1}{2} D^a D_a \\ &- \sqrt{2} g_a \left(\phi^{*i} T^a \psi_i \right) \lambda_a - \sqrt{2} g_a \lambda_a^\dagger \left(\psi^{\dagger i} T^a \phi_i \right) + g_a \left(\phi^{*i} T^a \phi_i \right) D_a \qquad , \end{aligned} \tag{3.10}$$

wobei die Generatoren T^a natürlich passend zum Superpartner λ^a des entsprechenden Eichbosons gewählt werden müssen. Weiterhin ergibt sich als Bewegungsgleichung für die D-Terme

$$D^a = -g_a \left(\phi^{*i} T^a \phi_i\right) \quad . \tag{3.11}$$

Die kovarianten Ableitungen sind bei obiger Lagrangedichte gegeben durch

$$\begin{aligned} D_\mu \phi_i &= \partial_\mu \phi_i - i g_a A^a_\mu \left(T^a \phi\right)_i \\ D_\mu \phi^{*i} &= \partial_\mu \phi^{*i} + i g_a A^a_\mu \left(\phi^* T^a\right)^i \\ D_\mu \psi_i &= \partial_\mu \psi_i - i g_a A^a_\mu \left(T^a \psi\right)_i \\ D_\mu \lambda^a &= \partial_\mu \lambda^a + g f^{abc} A^b_\mu \lambda^c \quad . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Außderdem ist der Feldstärketensor wie üblich im Allgemeinen von der Form

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \quad . \tag{3.13}$$

Obige Lagrangedichte liefert als vollständiges skalares Potential

$$V\left(\phi_i, \phi_i^*\right) = W^i W_i^* + \frac{1}{2} \left| \sum_{a,i} g_a \left(\phi^{*i} T^a \phi_i\right) \right|^2 \geq 0 \ , \tag{3.14}$$

welches insbesondere nicht negativ werden kann.

3.4. Superfeldnotation

Nach diesem allgemeinen Abschnitt über die Form der Lagrangedichte soll knapp in die Superfeldnotation eingeführt werden, um im Anschluss das Superpotential des MSSM in Superfeldnotation zu präsentieren. Ein ausführliches Werk zum Superspace stellt beispielsweise [18] dar. Grundlage der Superfeldnotation sind Grassmannvariablen, die folgender Relation genügen:

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0 \quad \text{und damit insbesondere} \quad \theta_i^2 = 0 \ . \tag{3.15}$$

Außerdem vertauschen Grassmanvariablen mit jeder komplexen und reellen Zahl. Weitere Rechenregeln, insbesondere bezüglich Differentation oder Integration, werden hier nicht angeführt. Für linkshändige Superfelder werden spinorielle Grassmannvariablen benötigt, die der Eigenschaft $\theta_1^2 = \theta_2^2 = 0$ genügen und damit Terme unabhängig von θ, proportional zu θ und proportional zu $\theta_1\theta_2$ erlauben. Mit dem Skalarprodukt $\theta_a\theta_b = -\frac{1}{2}\epsilon_{ab}\theta\cdot\theta$ schreibt man ein chirales Superfeld in der bereits angegebenen Form

$$\widehat{\Phi}\left(\theta\right) = \phi + \sqrt{2}\theta\cdot\psi + \theta\cdot\theta F \ , \tag{3.16}$$

Beachtet man die Rechenregel (vgl. [15])

$$\theta\cdot\psi_i\theta\cdot\psi_j = -\frac{1}{2}\theta\cdot\theta\psi_i\psi_j \ , \tag{3.17}$$

so ergibt sich für Produkte von Superfeldern

$$\widehat{\Phi}_i\left(\theta\right)\widehat{\Phi}_j\left(\theta\right) = \phi_i\phi_j + \sqrt{2}\theta\cdot\left(\psi_i\phi_j + \psi_j\phi_i\right) + \theta\cdot\theta\left(\phi_i F_j + \phi_j F_i - \psi_i\psi_j\right) \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}_i(\theta)\,\widehat{\Phi}_j(\theta)\,\widehat{\Phi}_k(\theta) =& \phi_i\phi_j\phi_k + \sqrt{2}\theta\cdot(\psi_i\phi_j\phi_k + \psi_j\phi_i\phi_k + \psi_k\phi_i\phi_j)\\ &+ \theta\cdot\theta\,(\phi_i\phi_k F_j + \phi_j\phi_k F_i + \phi_i\phi_j F_k\\ &-\phi_k\psi_i\psi_j - \phi_i\psi_j\psi_k - \phi_j\psi_i\psi_k)\end{aligned} \tag{3.19}$$

Betrachtet man nur die Terme proportional zu $\theta\cdot\theta$, welche auch F-Terme genannt und in der Form $\left[\widehat{\Phi}_i\widehat{\Phi}_j\right]_F$ bzw. $\left[\widehat{\Phi}_i\widehat{\Phi}_j\widehat{\Phi}_k\right]_F$ notiert werden, so lässt sich der Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte hervorgerufen durch das Superpotential

$$W(\widehat{\Phi}) = \frac{1}{2}M^{ij}\widehat{\Phi}_i\widehat{\Phi}_j + \frac{1}{6}y^{ijk}\widehat{\Phi}_i\widehat{\Phi}_j\widehat{\Phi}_k \tag{3.20}$$

einfach schreiben in der Form

$$\mathcal{L}_{WW} = \left(\left[W(\widehat{\Phi})\right]_F + \text{H.c.}\right)\ . \tag{3.21}$$

Dabei ist erneut zu beachten, dass die Hilfsfelder F_i wie folgt ersetzt werden können

$$F_i = -W_i^* = -m_{ij}\phi_i - \frac{1}{2}\lambda_{ijk}\phi_j\phi_k\ . \tag{3.22}$$

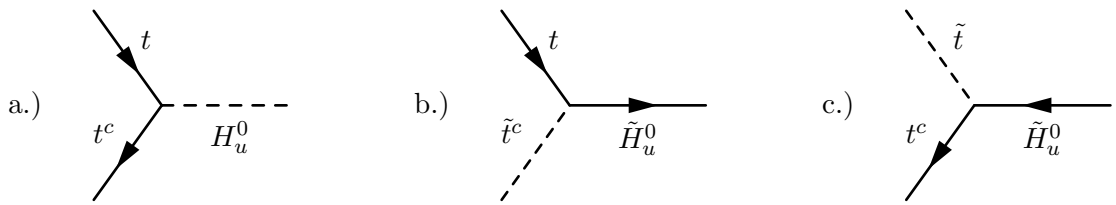
Dieses dargestellte einfachste Modell einer Supersymmetrie mit chiralen und Eichsupermultiplets geht zurück auf Wess und Zumino [19] und ist daher auch als Wess-Zumino-Modell bekannt.

3.5. Superpotential im MSSM

In diesem Abschnitt soll das zum Teilcheninhalt des MSSM gehörige Superpotential vorgestellt werden, das im Rahmen obiger Erläuterung in die Lagrangedichte des MSSM einfließt. In Superfeldnotation ist das Superpotential von der Form

$$W_{\text{MSSM}} = \epsilon_{ab}\left((Y_u)_{ij}\,\widehat{H}_u^b\widehat{Q}_i^a\widehat{u}_j^c + (Y_d)_{ij}\,\widehat{H}_d^a\widehat{Q}_i^b\widehat{d}_j^c + (Y_e)_{ij}\,\widehat{H}_d^a\widehat{L}_i^b\widehat{e}_j^c - \mu\widehat{H}_d^a\widehat{H}_u^b\right)\quad . \tag{3.23}$$

Hier treten erstmals auch $SU(2)$-Felder im Superpotential auf, welche gemäß den Indizes a, b mit der Matrix ϵ (vgl. Nomenklatur) zu kontrahieren sind. Die Indizes i, j summieren über die drei Generationen, während auf die Farbindizes der $SU(3)$ in der folgenden Arbeit verzichtet wird. Diese sind stets in der Form $\epsilon_{ab}\left((Y_u)_{ij}\,\widehat{H}_u^b\widehat{Q}_i^{a\alpha}\widehat{u}_{j\alpha}^c\right)$ mit dem Farbindex α ergänzbar. Wie bereits unter (3.3.1) angedeutet, ist das Superpotential wieder nur maximal trilinear in den Superfeldern, da höhere Ordnungen zu nicht renormierbaren Termen führen. Problematisch bleibt hier der Ursprung der Größenordnung des μ-Parameters, welcher quasi die elektroschwache Skala markiert, in diesem Modell aber nicht motivierbar ist. Man spricht in diesem Zusammenhang vom μ-Problem, welches durch Erweiterungen wie das NMSSM oder auch das in dieser Arbeit vorgestellte Modell gelöst werden kann. Nachfolgend sind beispielhaft die Wechselwirkungen der top-Squarks/Quarks mit einem Higgs/Higgsino dargestellt, welche aus dem ersten Term des Superpotentials resultieren:



(3.24)

Der erste Graph a.) existiert in dieser Form ebenfalls im Standardmodell, die beiden Weiteren b.) und c.) hingegen sind die zusätzlichen Beiträge aus der Supersymmetrie. Diese erhält man, indem zwei Teilchen jeweils gegen ihre supersymmetrischen Partner getauscht werden. Alle drei dargestellten Wechselwirkungen haben die Kopplungsstärke $(Y_u)_{33}$. Weiterhin soll nur angedeutet werden, dass in der Supersymmetrie insbesondere Wechselwirkungen mit vier skalaren Teilchen eine Rolle spielen und auch die fermionischen Partner der Eichbosonen, die Gauginos, neue Arten von Wechselwirkungen erlauben, welche jedoch alle aus (3.10) mit dem Superpotential (3.23) ermittelt werden können.
Die gesamte Lagrangedichte des MSSM in vollständiger Superfeldnotation, die hier nicht aufgeführt ist, findet sich beispielsweise in [20], während alle daraus resultierenden Feynmanregeln für das MSSM in [21] nachgeschlagen werden können.

3.6. Schwache SUSY-Brechung

Wie bereits angedeutet, muss Supersymmetrie eine gebrochene Symmetrie sein, da bislang noch kein supersymmetrischer Partner mit gleicher Masse gefunden wurde. Für gewöhnlich erfolgt die Brechung der Supersymmetrie im MSSM explizit durch Einfügen der nachfolgenden Terme mit Massen für die Higgsbosonen, die skalaren Teilchen und die Gauginos sowie neuen trilinearen Kopplungen T und einem Term B_μ entsprechend dem μ-Term:

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{\text{SB,MSSM}} = &\left(m^2_{\tilde{Q}}\right)_{ij} \tilde{Q}^{a*}_i \tilde{Q}^a_j + \left(m^2_{\tilde{u}^c}\right)_{ij} \tilde{u}^{c*}_i \tilde{u}^c_j + \left(m^2_{\tilde{d}^c}\right)_{ij} \tilde{d}^{c*}_i \tilde{d}^c_j + \left(m^2_{\tilde{L}}\right)_{ij} \tilde{L}^{a*}_i \tilde{L}^a_j \\
&+ \left(m^2_{\tilde{e}^c}\right)_{ij} \tilde{e}^{c*}_i \tilde{e}^c_j + m^2_{H_d} H^{a*}_d H^a_d + m^2_{H_u} H^{a*}_u H^a_u \\
&+ \epsilon_{ab} \Big[(T_u)_{ij} H^b_u \tilde{Q}^a_i \tilde{u}^c_j + (T_d)_{ij} H^a_d \tilde{Q}^b_i \tilde{d}^c_j \\
&\qquad + (T_e)_{ij} H^a_d \tilde{L}^b_i \tilde{e}^c_j - B_\mu H^a_d H^b_u + \text{H.c.} \Big] \\
&+ \frac{1}{2} \left(M_1 \tilde{B}^0 \tilde{B}^0 + M_2 \tilde{W}^d \tilde{W}^d + M_3 \tilde{g}^e \tilde{g}^e + \text{H.c.} \right)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Hierbei stehen die Indizes d, e für die drei bzw. acht Eichbosonen der $SU(2)_L$ bzw. $SU(3)_C$. Anzumerken ist des Weiteren, dass die aufgeführten (3×3)-Kopplungen T und B_μ komplex und die (3×3)-Matrizen der Massenquadrate hermitesch gewählt werden können, so dass die Lagrangedichte insgesamt reell bleibt. Tatsächlich führen diese Terme zu keiner weiteren quadratischen Divergenz, so dass das Hierarchie-Problem nach wie vor gelöst bleibt und die Brechung in diesem Sinne als schwach verstanden wird. Diese explizite Brechung führt in der Summe auf 105 unbestimmte Massen, Phasen und Mischungswinkel [22], die nicht durch Rotationen der Phasen und Umdefinition der Flavourbasis minimiert werden können. Dies liefert zwar einerseits einen großen möglichen Parameterraum für supersymmetrische Modelle, widerstrebt andererseits aber dem Vereinheitlichungsgedanken. Tatsächlich gibt es verschiedene Ansätze zur Vereinheitlichung, insbesondere da (3.25) auf Flavourmischung und CP-verletzende Prozesse führt, die vom Experiment stark eingeschränkt sind. Wählt man beispielsweise die hier aufgeführten Kopplungen T proportional zu den Yukawakopplungen Y und die (3×3)-Matrizen der Massenquadrate diagonal, wird aber bereits klar, dass solche zusätzlichen Effekte vermieden werden können. Einzelheiten sind wieder [2] zu entnehmen. Ungeklärt ist der Ursprung der Supersymmetriebrechung. Es gibt verschiedene Ansätze zur spontanen Supersymmetriebrechung über einen Vakuumerwartungswert der F- oder D-Terme, welche nicht zu einem masselosen Goldstoneboson, sondern aufgrund der spinoriellen Ladung der Supersymmetrie zu einem masselosen neutralen Weyl-Fermion, dem Goldstino, führen. Problematisch jedoch bleiben hierbei

Summenregeln für die Massen der supersymmetrischen Teilchen. Geht man beispielsweise von keiner Generationenmischung der Leptonen aus, so mischen die Eicheigenzustände $\tilde{e}_L$ und $\tilde{e}_R$ zu den Masseneigenzuständen $\tilde{e}_1$ und $\tilde{e}_2$, welche der Gleichung [2]

$$m_{\tilde{e}_1}^2 + m_{\tilde{e}_2}^2 = 2m_e^2 \tag{3.26}$$

genügen müssen. Auch bei Berücksichtigung von Generationenmischung bedingt dies sehr leichte, nicht beobachtete supersymmetrische Teilchen. Daher verschiebt man die Brechung von Supersymmetrie in einen unsichtbaren Sektor ("hidden sector"), welcher mit dem sichtbaren Sektor ("visible sector"), dem MSSM, durch (sehr) schwache Wechselwirkungen in Verbindung steht. Die populärsten Ansätze einer solcher Wechselwirkung sind: minimal supergravity (mSUGRA) [23], gauge-mediated SUSY breaking (GMSB) [24] und anomaly-mediated SUSY breaking (AMSB) [25]. Diese Szenarien unterscheiden sich in der Art und Weise der Wechselwirkung. So ist es bei mSUGRA beispielsweise eine auf Gravitation basierende Wechselwirkung, während bei GMSB Eichwechselwirkungen entscheidend sind. Später werden insbesondere mSUGRA-Szenarien genauer betrachtet. Ausgehend von

$$\begin{aligned}
&M_3 = M_2 = M_1 = m_{1/2} \\
&m_{\tilde{Q}}^2 = m_{\tilde{u}^c}^2 = m_{\tilde{d}^c}^2 = m_{\tilde{L}}^2 = m_{\tilde{e}^c}^2 = m_0^2 \cdot I_3, \quad m_{H_d}^2 = m_{H_u}^2 = m_0^2 \\
&T_u = A_0 Y_u, \quad T_d = A_0 Y_d, \quad T_e = A_0 Y_e \\
&B_\mu = B_0 \mu
\end{aligned} \tag{3.27}$$

mit den skalaren Parametern $m_{1/2}$, m_0^2, A_0 und B_0 sowie der (3×3)-Einheitsmatrix I_3, sind in den "Snowmass Points and Slopes" [3] unterschiedliche, mit dem Experiment weitestgehend vereinbare Parameterkombinationen von $m_{1/2}$, m_0^2, A_0 und B_0 und dem Vorzeichen des μ-Parameters für mSUGRA-Szenarien (SPS 1 bis SPS 6) gegeben, um Parameterstudien für verschiedene SUSY-Modelle vergleichbar zu machen.

3.7. Massenspektrum des MSSM

Nach der elektroschwachen Symmetriebrechung stellt sich das Massenspektrum des MSSM, welches offensichtlich auch entscheidend von der Wahl der Parameter der SUSY-Brechung aus dem letzten Abschnitt abhängt, wie folgt dar:

1. Neutralinos und Charginos
   Während die neutralen Komponenten der Higgsinos mit dem Bino und dem neutralen Wino zu vier neutralen Masseneigenzuständen, den Neuralinos $\chi_1^0, \ldots, \chi_4^0$, mischen, bilden die geladenen Winos und die geladenen Higgsinos die sogennanten Charginos, zumeist bezeichnet mit $\chi_1^\pm, \chi_2^\pm$. Die für die Neutralinos auftretende Massenmatrix im MSSM, welche an dieser Stelle nicht präsentiert wird, tritt später in sehr ähnlicher Form im in dieser Arbeit behandelten Modell auf. Weiterhin bezeichnet χ_1^0 das leichteste Neutralino, welches in Modellen mit erhaltener R-Parität einen möglichen Kanditat für dunkle Materie darstellt. Die Neutralinos sind wie auch die Neutrinos im "seesaw"-Mechanismus Majorana-Teilchen.

2. Sleptonen und Squarks
   Sowohl die Sleptonen als auch die Squarks mischen in guter Näherung paarweise. Die linkshändigen Teilchen mischen also mit den rechtshändigen Teilchen zu zwei Masseneigenzuständen. Insbesondere sei darauf hingewiesen, dass im Gegensatz zu den Leptonen

und Quarks in vielen supersymmetrischen Modellen die dritte Generation der Skalare die leichteste Generation darstellt.

3. Higgs
   Die Higgsbosonen, deren Skalarfelder aus zwei komplexen $SU(2)$-Dubletts - also 8 Freiheitsgraden - bestehen, bilden insgesamt 8 Masseneigenzustände. Davon sind drei die Goldstonebosonen G^0 und $G^\pm$, welche der elektroschwachen Symmetriebrechung und damit den longitudinalen Komponenten der Z- und $W^\pm$-Bosonen zugeordnet werden können. Die Anderen bilden ein leichtes Higgs h, ein schweres Higgs H, ein CP-ungerades Higgs A^0 und zwei geladene Higgs $H^\pm$. Im MSSM ergibt sich für das leichteste Higgs unter Beachtung von Schleifen-Korrekturen eine maximale Masse von $m_h \lesssim 135$ GeV, was mit der momentanen experimentellen Grenze $m_h \gtrsim 114$ GeV durchaus noch vereinbar ist [26].

4. Gluinos
   Die Gluinos mischen nicht.

Für Einzelheiten, insbesondere in Bezug auf die Form der Massenmatrizen und dem daraus resultierenden Spektrum der Massen, sei erneut auf [2] verwiesen. Zusammenfassend ergibt sich das in der nachfolgenden Tabelle gezeigte Bild von Masseneigenzuständen im MSSM, wobei auf die Sleptonen und die ersten beiden Generationen der Squarks verzichtet wird.

Eicheigenzustände	Masseneigenzustände
$H_u^0,\ H_d^0,\ H_u^+,\ H_d^-$	$h,\ H,\ A^0,\ H^\pm$
$\tilde{t}_L,\ \tilde{t}_R,\ \tilde{b}_L,\ \tilde{b}_R$	$\tilde{t}_1,\ \tilde{t}_2,\ \tilde{b}_1,\ \tilde{b}_2$
$\tilde{B},\ \tilde{W}^0,\ \tilde{H}_u^0,\ \tilde{H}_d^0$ $\tilde{W}^\pm,\ \tilde{H}_u^+,\ \tilde{H}_d^-$	$\chi_1^0,\ \chi_2^0,\ \chi_3^0,\ \chi_4^0$ $\chi_1^\pm,\ \chi_2^\pm$
$\tilde{g}$	(keine Mischung)

3.8. R-Parität

Nach der vollständigen Einführung des MSSM soll die R-Parität angesprochen werden. Neben den unter (3.23) präsentierten Termen des Superpotentials im MSSM W_{MSSM} verbietet keine Symmetrie die zusätzlichen Terme

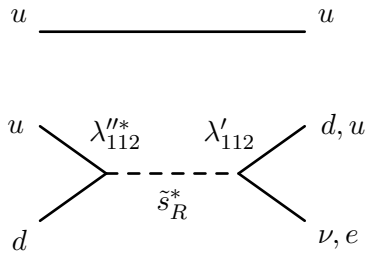
$$\begin{aligned} W &= W_{\text{MSSM}} + W_{\not{R}} \quad \text{mit} \\ W_{\not{R}} &= \epsilon_{ab}\left(\frac{1}{2}\lambda_{ijk}\widehat{L}_i^a\widehat{L}_j^b\widehat{e}_k^c + \lambda'_{ijk}\widehat{L}_i^a\widehat{Q}_j^b\widehat{d}_k^c - \epsilon_i\widehat{L}_i^a\widehat{H}_u^b\right) + \frac{1}{2}\lambda''_{ijk}\widehat{u}_i^c\widehat{d}_j^c\widehat{d}_k^c \quad , \end{aligned} \tag{3.28}$$

welche ebenfalls nur maximal trilinear in den Superfeldern sind. Dabei gilt aufgrund der Eichsymmetrie der Teilchen zwangsläufig $\lambda_{ijk} = -\lambda_{jik}$ und $\lambda''_{ijk} = -\lambda''_{ikj}$. Durch eine Rotation von $\widehat{H}_d$ und $\widehat{L}_i$ lässt sich zwar theoretisch der bilineare ϵ_i-Term in den Termen mit λ_{ijk} und λ'_{ijk} absorbieren, jedoch treten spätestens in der entsprechenden zusätzlichen Lagrangdichte zur schwachen SUSY-Brechung Terme wie

$$-\mathcal{L}_{\text{SB},\not{R}} = -B_i\tilde{L}_iH_u + \ldots \tag{3.29}$$

auf, welche sich aufgrund nicht zwangsläufiger Parallelität von ϵ_i und B_i nicht wegrotieren lassen. Offenbar verletzen die Terme (3.28) mit λ_{ijk}, λ'_{ijk} und ϵ_i die Leptonzahl um eine Einheit, während

der Term mit λ''_{ijk} die Baryonzahl um eine Einheit verletzt. So sind die Baryonzahlen für $\widehat{Q}_i$ gleich $B = +\frac{1}{3}$, für $\widehat{u}_i^c, \widehat{d}_i^c$ gilt $B = -\frac{1}{3}$, während alle anderen Teilchen die Baryonzahl $B = 0$ tragen. Entsprechend gilt $L = +1$ für $\widehat{L}_i$ und $L = -1$ für $\widehat{e}_i^c$, sonst ebenfalls $L = 0$. Da bekanntlich Leptonzahl- und Baryonzahlverletztung gleichzeitig zu einem Zerfall des Protons führen können, welcher experimentell nicht beobachtet wird, sind diese Terme mit Vorsicht zu handhaben. Betrachtet man beispielsweise die Zerfälle $p \to \pi^0 e^+$ und $p \to \pi^+ \nu$, so sind diese mit obiger Notation beispielsweise in der Form



(3.30)

darstellbar. Dies führt wegen

$$\Gamma_{p\to e^+\pi^0} \propto \sum_{k=2,3} \frac{1}{m^4_{\tilde{d}_k}} \left|\lambda'_{11k}\lambda''_{11k}\right|^2 \tag{3.31}$$

und einer Lebenszeit des Protons von über 10^{32} Jahren zu einer einfachen Abschätzung

$$\lambda'_{11k}\lambda''^*_{11k} \leq 2 \cdot 10^{-27} \left(\frac{m_{\tilde{d}_k}}{100\text{GeV}}\right)^2 \tag{3.32}$$

für einige der Koeffizienten [2]. Da auch das Standardmodell bei Beschränkung auf renormierbare Terme keine Terme enthält, welche Baryon- oder Leptonzahl verletzen, führt man in der Supersymmetrie eine neue Symmetrie, die R-Parität ein. Diese ist in der Form

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2s} \tag{3.33}$$

mit dem Spin s eines Teilchens definiert. Tatsächlich verbietet die Einführung dieser Symmetrie alle Terme aus (3.28) und stellt eine mögliche exakte, diskrete Z_2-Symmetrie dar. Nun zeigt einfaches Einsetzen, dass alle Teilchen des Standardmodells und die Higgsbosonen die R-Parität $P_R = +1$ aufweisen, während alle Squarks, Sleptonen, Gauginos und auch Higgsinos die R-Parität $P_R = -1$ haben. Fordert man daher eine exakt erhaltene Symmetrie, hat dies weitreichende phänomenologische Auswirkungen, da keine Mischung zwischen supersymmetrischen Teilchen und Standardmodellteilchen auftreten kann. An jeder Wechselwirkung müssen zwangsläufig immer eine gerade Zahl an supersymmetrischen Teilchen mit $P_R = -1$ beteiligt sein. Dies impliziert sofort, dass das leichteste supersymmetrische Teilchen (lightest supersymmetric particle - LSP) absolut stabil sein muss und damit insbesondere, wenn es neutral ist, einen Kanditaten für dunkle Materie darstellt. Außerdem wird jedes supersymmetrische Teilchen zwangsläufig in einen Zustand mit einer ungeraden Anzahl an $P_R = -1$-Teilchen zerfallen, so dass am Ende eines Kaskadenzerfalls nur das LSP bleibt. An Beschleunigern können darüber hinaus supersymmetrische Teilchen immer nur in Paaren erzeugt werden.
Dennoch muss zum Ende noch einmal betont werden, dass die eingeführte R-Parität aus theoretischer Sicht keineswegs notwendig ist, sondern aus experimentellen Daten resultiert. Da weiterhin die typischen diskreten Symmetrien des Standardmodells (Ladungskonjugation C, Parität P und Zeitumkehr T) für sich keine exakten Symmetrien darstellen, ist auch die Exaktheit der

R-Parität nur bedingt motivierbar. Ihre Ursprünge gehen auf [27] zurück.
Zudem gibt es Ansätze anderer Symmetrien wie beispielsweise einer Z_3-Symmetrie [28], genannt "baryon triality", die hier nicht behandelt werden sollen. Eine Diskussion, welche Phänomene eine Verletzung der R-Parität mit sich bringt, ist in [2] enthalten.

3.9. Mögliche Erweiterungen des MSSM

Mögliche Erweiterungen des MSSM sind in [26] zusammengefasst. Hier werden diese nur kurz angerissen. Insbesondere die Erweiterung des $\mu\nu$SSM, welches Grundlage dieser Arbeit ist, wird dann im nachfolgenden Kapitel in größerer Ausführlichkeit besprochen.

3.9.1. Modelle mit verletzter R-Parität

Wie soeben angeschnitten, ist die R-Parität eine eher experimentell motivierte Symmetrie. Daher gehen einige Modelle, so auch diese Arbeit, von einer Verletzung der R-Parität in einer Form aus, die durch kleine R-paritätsverletzende Terme verhindert, dass keine flavourverletzenden Zerfälle wie $\tau^- \to \mu^-, \mu^+, \mu^-$ in Größenordnungen auftreten, die nicht mit dem Experiment vereinbar sind. Weiterhin gibt es zum Erhalt der Stabilität des Protons zwei Möglichkeiten: Entweder man erhält die Baryonenzahl und wählt daher nur die ersten drei Terme aus (3.28) als zusätzliche Terme der Lagrangedichte oder man erhält die Leptonenzahl und wählt den letzten Term von (3.28). Der Vorteil des ersten geschilderten Falles ist Folgender: Aufgrund dann möglicher Kopplungen zwischen Sneutrinos, Neutrinos und Neutralinos muss die Massenmatrix der Neutralinos $\tilde{B}^0, \tilde{W}^0, \tilde{H}_d^0$ und $\tilde{H}_u^0$ um die drei Neutrinos erweitert werden, da dort eine Mischung zwischen den ursprünglichen Neutralinos und den Neutrinos auftritt, welche proportional zu ϵ_i und gv_i bzw. $g'v_i$ mit den Vakuumerwartungswerten v_i der Sneutrinos ist. Dies erlaubt eine im Standardmodell nicht mögliche Form von Neutrinophysik, die später noch genauer erläutert wird. In diesem Zusammenhang sind insbesondere bilineare R-paritätsverletzende Modelle (BRpV - Bilinear R-parity Violation) mit dem Term $-\epsilon_i \widehat{L}_i^a \widehat{H}_u^b$ aus (3.28) bereits in großer Ausführlichkeit behandelt worden. Hierbei ist anzumerken, dass dieser Term ohne die Einführung rechtshändiger Neutrinosuperfelder $\tilde{\nu}^c$ auskommt. Gleichzeitig unterstützt er jedoch das μ-Problem, da zusätzliche ϵ_i-Terme auftreten, deren Größenordnung ebenfalls schwer theoretisch motivierbar ist. Ob R-Parität verletzt ist oder nicht, lässt sich leicht am Zerfall des leichtesten Neutralinos χ_1^0 erkennen, da jenes für explizite Modelle zumeist mit großem Verzweigungsverhältnis sichtbar zerfällt.

3.9.2. Neutrinophysik im MSSM

Möchte man alternativ Neutrinophysik im MSSM ohne R-Paritätsverletzung betreiben, so lässt sich das Superpotential unter Einführung rechtshändiger Neutrinosuperfelder $\widehat{\nu}_i^c$ um nachfolgende Terme erweitern:

$$W = W_{\text{MSSM}} + \epsilon_{ab} \left(Y_\nu\right)_{ij} \widehat{H}_u^b \widehat{L}_i^a \widehat{\nu}_j^c + \left(m^M\right) \widehat{\nu}_i^c \widehat{\nu}_j^c \tag{3.34}$$

Mit den Yukawakopplungen für die Neutrinos Y_ν führt dies einerseits auf Dirac-Massen $m^D = Y_\nu v_u$, andererseits können explizit Majorana-Massen m^M eingeführt werden. Für den Fall $m^D \ll m^M$ ergeben sich schließlich wie beim in Abschnitt 2.3 beschriebenen "seesaw"-Mechanismus sehr

leichte Neutrinos mit einer Masse der Größenordnung [26]

$$m_\nu \propto \frac{m_D^2}{m_M} \quad . \tag{3.35}$$

Eine derartige SUSY-Erweiterung ist in vielen Arbeiten wie [29] ausführlich diskutiert worden.

3.9.3. NMSSM

Insbesondere zur Lösung des μ-Problems, also der Größenordnung des μ-Parameters, welcher deutlich kleiner als die Planckskala ausfallen muss, bietet sich das Hinzufügen eines weiteren chiralen Supermultiplets $\widehat{\Phi}$ in Form eines Eichsingletts zum MSSM an. Das resultierende Modell trägt zumeist den Namen "next-to-minimal supersymmetric standard model" (NMSSM) und ist charakterisiert durch das nachfolgende Superpotential

$$W_{\text{NMSSM}} = \epsilon_{ab}\left((Y_u)_{ij}\,\widehat{H}_u^b\widehat{Q}_i^a\widehat{u}_j^c + (Y_d)_{ij}\,\widehat{H}_d^a\widehat{Q}_i^b\widehat{d}_j^c + (Y_e)_{ij}\,\widehat{H}_d^a\widehat{L}_i^b\widehat{e}_j^c - \lambda\widehat{\Phi}\widehat{H}_d^a\widehat{H}_u^b\right) + \frac{1}{3!}\kappa\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}\widehat{\Phi} \tag{3.36}$$

Erhält die skalare Komponente des neuen Superfeldes $\widehat{\Phi}$ einen Vakuumerwartungswert, so wird in diesem Modell offensichtlich ein effektiver μ-Term der Form $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\langle\Phi\rangle$ erzeugt. Diese effektive Kopplung ist von der Größenordnung der elektroschwachen Skala. Der letzte Term vermeidet das Auftreten eines Goldstonebosons aufgrund einer globalen $U(1)$-Symmetrie $H_dH_u \to e^{i\alpha}H_dH_u, \Phi \to e^{-i\alpha}\Phi$ (Peccei-Quinn-Symmetrie [30]), was im MSSM durch den μ-Term gewährleistet wird. Weiter ist anzuführen, dass nur trilineare Kopplungen auftreten, was einen Ursprung in der Stringtheorie deutlich erleichtert [31]. Das Superpotential (3.36) weist darüber hinaus eine diskrete Z_3-Symmetrie auf. Transformiert man alle Superfelder nach $\widehat{\phi} \to e^{2\pi i/3}\widehat{\phi}$, so ändert sich das Superpotential nicht. Mit der Symmetriebrechung und dem effektiven Auftreten von bilinearen Termen wie dem μ-Term, bricht man jedoch diese diskrete Z_3-Symmetrie spontan. Die Schwierigkeit ist nun, dass dies im frühen Universum während der elektroschwachen Symmetriebrechung aufgrund kausaler Horizonte zur Ausbildung von Domänen mit separierten Vakuua führt, die durch "domain walls" getrennt sind [32]. Man spricht daher vom "domain wall"-Problem. Eine Lösung stellen nichtrenormierbare Operatoren [33] dar, welche die Z_3-Symmetrie im Superpotential brechen, die Phänomenologie jedoch nicht merklich beeinflussen. Hier sei insbesondere auf [34] verwiesen. Alternativ kann die Problematik auch mit einer weiteren $U(1)$-Symmetrie angegangen werden, was in [35] zusammengefasst ist.
Auf Basis des NMSSM gibt es eine Vielzahl von Erweiterungen zur Neutrinophysik durch Hinzunahme weiterer rechtshändiger Neutrinosuperfelder $\widehat{\nu}_i^c$ oder wiederum durch bilineare Terme. Zumindest eine Erweiterung soll nachfolgend angesprochen werden, weil eine gewisse Verwandschaft zum Modell dieser Arbeit besteht.

3.9.4. Spontan gebrochene R-Parität

Das Superpotential bei spontan gebrochener R-Parität ergibt sich als Erweiterung des NMSSM zu

$$W_{\not{R}} = W_{\text{NMSSM}} + \epsilon_{ab}\left((Y_\nu)_{ij}\,\widehat{H}_u^b\widehat{L}_i^a\widehat{\nu}_j^c\right) + h\widehat{\Phi}\widehat{\nu}^c\widehat{S} \quad . \tag{3.37}$$

Hier treten neben dem Singletsuperfeld $\widehat{\Phi}$ nun auch ein Singletsuperfeld $\widehat{S}$ und ein rechtshändiges Neutrinosuperfeld $\widehat{\nu}^c$ mit den Leptonzahlen $L = 0, 1, -1$ auf. Offenbar führt dies dazu, dass die Leptonzahl und damit die R-Parität ohne Symmetriebrechung erhalten ist. Durch Vakuumerwartungswerte aller genannten skalaren Komponenten der Superfelder und die linkshändigen

Sneutrinos jedoch kann die Leptonzahl und damit die R-Parität spontan gebrochen werden. Dies führt auf ein Goldstoneboson, welches Majoron J genannt wird und dieses Modell von anderen Modellen mit gebrochener R-Parität deutlich unterscheidet. Der Grund liegt im möglichen unsichtbaren Zerfall des leichtesten Neutralinos in der Form $\chi_1^0 \to J, \nu_i$ oder sogar $\chi_1^0 \to J, J$, welcher zum Teil Verzweigungsverhältnisse von nahezu 100% aufweist [36].
Unschön jedoch bleibt die große Zahl an zusätzlichen Feldern, die einer Vereinheitlichung in gewisser Weise stets widersprechen. Dies führt auf das in dieser Arbeit betrachtete nachfolgende Modell.

4. $\mu\nu$SSM

Wie bereits diskutiert, lässt sich durch Einführen eines rechtshändigen Neutrinosuperfeldes $\widehat{\nu}^c$ auf einfache Art und Weise Neutrinophysik betreiben. Statt jedoch wie im NMSSM ein Singletsuperfeld $\widehat{\Phi}$ zur Lösung des μ-Problems einzuführen, indem die skalare Komponente einen Vakuumerwartungswert erhält, bietet es sich an, das rechtshändige Neutrinosuperfeld auch für diesen Zweck zu nutzen und statt

$$\epsilon_{ab}\left(\lambda\widehat{\Phi}\widehat{H}_d^a\widehat{H}_u^b\right) \qquad \text{den Term} \qquad \epsilon_{ab}\left(\lambda\widehat{\nu}^c\widehat{H}_d^a\widehat{H}_u^b\right) \tag{4.1}$$

zu verwenden. Dies reduziert die Zahl an notwendigen Feldern und "schlägt zwei Fliegen mit einer Klappe", da sich eine Lösung des μ-Problems ergibt und gleichzeitig Neutrinophysik betrieben werden kann, falls die linkshändigen und das rechtshändige Sneutrino einen Vakuumerwartungswert erhalten. Daraus resultiert auch der Name "μ from ν" Supersymmetric Standard Model ($\mu\nu$SSM) [37], welches erstmals von Lopez-Fogliani and Muñoz im Jahre 2005 vorgeschlagen wurde, bislang allerdings wenig untersucht ist. Natürlich ist nach [37] auch das Einfügen mehrerer rechtshändiger Neutrinosuperfelder möglich, jedoch soll eine Untersuchung der daraus resultierenden Modelle nicht Inhalt dieser Arbeit sein, selbst wenn sie später noch einmal erwähnt werden.
Fügt man, wie im NMSSM, für das Singletsuperfeld $\widehat{\Phi}$ den weiteren Term $\widehat{\nu}^c\widehat{\nu}^c\widehat{\nu}^c$ ein, um zu verhindern, dass Axionen durch eine globale $U(1)$-Symmetrie auftreten, so erzeugt dieser weiterhin effektive Majoranamassen für die Neutrinos, was ein zusätliches Novum dieses Modells ist. Jedoch bricht dieser Term genauso wie der neue Term unter (4.1) die R-Parität, es handelt sich also um ein Modell mit explizit gebrochener R-Parität. Das Superpotential im $\mu\nu$SSM in Superfeldnotation ist gegeben durch [37]

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu\text{SSM}} = \epsilon_{ab}\Big(&(Y_u)_{ij}\,\widehat{H}_u^b\widehat{Q}_i^a\widehat{u}_j^c + (Y_d)_{ij}\,\widehat{H}_d^a\widehat{Q}_i^b\widehat{d}_j^c + (Y_e)_{ij}\,\widehat{H}_d^a\widehat{L}_i^b\widehat{e}_j^c + (Y_\nu)_i\,\widehat{H}_u^b\widehat{L}_i^a\widehat{\nu}^c\Big) \\ &- \epsilon_{ab}\lambda\widehat{\nu}^c\widehat{H}_d^a\widehat{H}_u^b + \frac{1}{3!}\kappa\widehat{\nu}^c\widehat{\nu}^c\widehat{\nu}^c \qquad . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Abermals sei auf die Indizes verwiesen: a, b bezeichnen $SU(2)_L$-Indizes und sind mit ϵ (vgl. Nomenklatur) zu kontrahieren. i, j summieren über die Generationen, während auf die Farbindizes der $SU(3)_C$ verzichtet wird.
Gibt man sowohl den neutralen Higgsbosonen als auch den Sneutrinos Vakuumerwartungswerte und entwickelt die skalaren Felder wie in Kapitel 2.2 über spontane Symmetriebrechung um diese Werte nach

$$\begin{aligned} H_d^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_d^0 + v_d + i\phi_d^0\right), & H_u^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_u^0 + v_u + i\phi_u^0\right) \\ \tilde{\nu}^c &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\nu}^{cR} + v_c + i\tilde{\nu}^{cI}\right), & \tilde{\nu}_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\nu}_j^R + v_j + i\tilde{\nu}_j^I\right) \end{aligned} \tag{4.3}$$

mit den Vakuumerwartungswerten v_d, v_u, v_c und $v_j, j = 1,2,3$ und den skalaren sowie pseudoskalaren Komponenten, so ist also

$$\left\langle H_d^0 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_d, \qquad \left\langle H_u^0 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_u, \qquad \left\langle \tilde{\nu}^c \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_c, \qquad \left\langle \tilde{\nu}_j \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_j \quad . \tag{4.4}$$

Dies generiert einen effektiven μ-Term der Form $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda v_c$. Weiterhin kommt es zu effektiv bilinearen Termen $\propto \widehat{H}_u \widehat{L}$ aus dem vierten Term des Superpotentials (4.2), wie sie in Modellen mit expliziter bilinearer R-Paritätsbrechung (BRpV) auftreten und welche zu Diracmassen $m^D = (Y_\nu)_i \, v_i$ führen. Im Gegensatz zu diesen Modellen treten hier ursprünglich jedoch trilineare Terme auf, die wie auch im NMSSM verträglich sind mit dem Niederenergielimes von Stringtheorien, welche nur trilineare Terme enthalten. Auch weist das Superpotential (4.2) eine diskrete Z_3-Symmetrie auf, die zu einem "domain wall"-Problem führt, welches aber genauso wie im NMSSM angegangen werden kann.
Aufgrund der Verletzung der R-Parität ist das leichteste supersymmetrische Teilchen, zumeist das leichteste Neutralino χ_1^0, nicht mehr stabil, wenngleich es an anderen Kanditaten für dunkle Materie nicht mangelt. So bleiben das Gravitino [38], das Axion [39] oder dessen supersymmetrischer Partner, das Axino [40]. Zuletzt ist noch anzumerken, dass die explizite Brechung der Leptonzahl nicht zu einem masselossen Goldstoneboson (Majoron) wie im Modell mit spontan gebrochener R-Parität führt. Damit ist bereits an dieser Stelle klar, dass die Zerfälle des leichtesten Neutralinos χ_1^0 sehr wahrscheinlich sichtbar sind, außer es treten reine Neutrinozerfälle auf.
Die Brechung der Supersymmetrie erfolgt im $\mu\nu$SSM durch folgende "soft breaking"-Lagrangedichte, welche abgesehen von Termen mit Sneutrinos und dem B_μ-Term dem MSSM entspricht,

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{\text{soft},\mu\nu} = & \left(m_{\tilde{Q}}^2\right)_{ij} \tilde{Q}_i^{a*} \tilde{Q}_j^a + \left(m_{\tilde{u}^c}^2\right)_{ij} \tilde{u}_i^{c*} \tilde{u}_j^c + \left(m_{\tilde{d}^c}^2\right)_{ij} \tilde{d}_i^{c*} \tilde{d}_j^c + \left(m_{\tilde{L}}^2\right)_{ij} \tilde{L}_i^{a*} \tilde{L}_j^a \\
& + \left(m_{\tilde{e}^c}^2\right)_{ij} \tilde{e}_i^{c*} \tilde{e}_j^c + m_{H_d}^2 H_d^{a*} H_d^a + m_{H_u}^2 H_u^{a*} H_u^a + m_{\tilde{\nu}^c}^2 \tilde{\nu}^{c*} \tilde{\nu}^c \\
& + \epsilon_{ab} \Big[(T_u)_{ij} \, H_u^b \tilde{Q}_i^a \tilde{u}_j^c + (T_d)_{ij} \, H_d^a \tilde{Q}_i^b \tilde{d}_j^c \\
& + (T_e)_{ij} \, H_d^a \tilde{L}_i^b \tilde{e}_j^c + (T_\nu)_i \, H_u^b \tilde{L}_i^a \tilde{\nu}^c + \text{H.c.} \Big] \\
& + \left[-\epsilon_{ab} \, (T_\lambda) \, \tilde{\nu}^c H_d^a H_u^b + \frac{1}{3!} \, (T_\kappa) \, \tilde{\nu}^c \tilde{\nu}^c \tilde{\nu}^c + \text{H.c.} \right] \\
& + \frac{1}{2} \left(M_1 \tilde{B}^0 \tilde{B}^0 + M_2 \tilde{W}^c \tilde{W}^c + M_3 \tilde{g}^d \tilde{g}^d + \text{H.c.} \right) \quad ,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

wobei über doppelt auftretende Indizes $i, j = 1,2,3$ der Generationen und $a, b = 1,2$; $c = 1,2,3$ sowie $d = 1, \ldots, 8$ zu Summieren ist.

4.1. Mischung der Teilchen im $\mu\nu$SSM

Nachfolgend wird die Mischung der Teilchen im $\mu\nu$SSM behandelt, da diese letztlich die Phänomenologie des Modells ausmacht. Zuerst wird der relevante Teilcheninhalt angegeben: Fasst man die neutralen und geladenen Fermionen in Vektoren der Form

$$\begin{aligned}
\left(\psi^0\right)^T &= \left(\tilde{B}^0, \tilde{W}_3^0, \tilde{H}_d^0, \tilde{H}_u^0, \nu^c, \nu_1, \nu_2, \nu_3 \right) \\
\left(\psi^+\right)^T &= \left(\tilde{W}^+, \tilde{H}_u^+, e^c, \mu^c, \tau^c \right)
\end{aligned}$$

$$\left(\psi^-\right)^T = \left(\tilde{W}^-, \tilde{H}_d^-, e, \mu, \tau\right) \tag{4.6}$$

zusammen, so mischen diese durch nachfolgende Matrizen zu Masseneigenzuständen

$$F_i^0 = \mathcal{N}_{is}\psi_s^0, \qquad F_i^+ = V_{it}\psi_t^+ \qquad \text{und} \qquad F_i^- = U_{it}\psi_t^- \qquad , \tag{4.7}$$

wobei die Mischmatrizen, wie später beschrieben, die Massenmatrizen der jeweiligen Teilchen diagonalisieren. F_i^0 bezeichnet die 8 Masseneigenzustände der neutralen Fermionen, welche neben den bekannten 4 Neutralinos auch die Masseneigenzustände resultierend aus den links- und dem rechtshändigen Neutrinos umfassen. Die Charginos beinhalten die zwei bekannten Charginos, sowie die Masseneigenzustände der Leptonen, also das Elektron, Myon und Tau. Die Weylspinoren F können dabei nach folgender Regel entsprechend der Nomenklatur in Diracspinoren umgeschrieben werden, wobei nochmal deutlich wird, dass die neutralen Fermionen Majoranateilchen sind:

$$\begin{aligned}
\chi_i^0 &= \begin{pmatrix} F_i^0 \\ (F_i^0)^\dagger \end{pmatrix}, \qquad \chi_i^+ = \begin{pmatrix} F_i^+ \\ (F_i^-)^\dagger \end{pmatrix}, \qquad \chi_i^- = \begin{pmatrix} F_i^- \\ (F_i^+)^\dagger \end{pmatrix} \\
\overline{\chi_i^0} &= \left(F_i^0, (F_i^0)^\dagger\right), \qquad \overline{\chi_i^+} = \left(F_i^-, (F_i^+)^\dagger\right), \qquad \overline{\chi_i^-} = \left(F_i^+, (F_i^-)^\dagger\right)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Ebenso ergeben sich für die neutralen und geladenen Skalare sowie die Pseudoskalare ausgehend von

$$\begin{aligned}
\left(S^{0'}\right)^T &= \left(\sigma_d^0, \sigma_u^0, \tilde{\nu}^{cR}, \tilde{\nu}_1^R, \tilde{\nu}_2^R, \tilde{\nu}_3^R\right) \\
\left(P^{0'}\right)^T &= \left(\phi_d^0, \phi_u^0, \tilde{\nu}^{cI}, \tilde{\nu}_1^I, \tilde{\nu}_2^I, \tilde{\nu}_3^I\right) \\
\left(S^{+'}\right)^T &= \left(\left(H_d^-\right)^*, H_u^+, \tilde{e}^*, \tilde{\mu}^*, \tilde{\tau}^*, \tilde{e}^c, \tilde{\mu}^c, \tilde{\tau}^c\right) \\
\left(S^{-'}\right)^T &= \left(H_d^-, \left(H_u^+\right)^*, \tilde{e}, \tilde{\mu}, \tilde{\tau}, (\tilde{e}^c)^*, (\tilde{\mu}^c)^*, (\tilde{\tau}^c)^*\right)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Mischungen der Form

$$S_i^\pm = R_{ij}^{S^\pm} S_j^{\pm'}, \qquad S_i^0 = R_{ij}^{S^0} S_j^{0'}, \qquad P_i = R_{ij}^{P^0} P_j' \qquad . \tag{4.10}$$

Der Teilcheninhalt umfasst die unter Abschnitt 3.7 aufgeführten Masseneigenzustände, die jeweils um 4 weitere Zustände zu ergänzen sind. Die Mischung der Squarks unterscheidet sich hingegen nicht von derer des MSSM. Alle Massenmatrizen, deren Diagonalisierung die angegebenen Mischmatrizen bestimmen, sind aus Platzgründen in Anhang A angegeben. Abhängig davon, ob es sich um reell symmetrische, hermitesche oder komplex symmetrische Massenmatrizen handelt, sind dort auch die Eigenschaften der entsprechenden Mischmatrizen zu finden. Insbesondere die Mischung der neutralen Fermionen wird nachfolgend nochmal detaillierter beleuchtet, da die entscheidende Neutrinophysik auf diesen Massenmatrizen beruht. Im Anschluss wird auch die Massenmatrix der geladenen Fermionen diskutiert.

4.2. Mischung der neutralen Fermionen im $\mu\nu$SSM

Für die Phänomenologie des $\mu\nu$SSM ist die Mischung der neutralen Fermionen von entscheidender Relevanz, da auf diese Weise Neutrinomassen generiert werden können. Exemplarisch

folgt die Herleitung der Massenmatrix der neutralen Fermionen. Setzt man die $SU(2)_L$-Felder $\widehat{H}_u^T = \left(\widehat{H}_u^+, \widehat{H}_u^0\right), \widehat{H}_d^T = \left(\widehat{H}_d^0, \widehat{H}_d^-\right)$ und $\widehat{L}_i^T = (\widehat{\nu}_i, \widehat{e}_i)$ in (4.2) ein, so ist der für die Mischung der neutralen Fermionen relevante Anteil des Superpotentials

$$W = (Y_\nu)_i \, \widehat{H}_u^0 \widehat{\nu}_i \widehat{\nu}^c - \lambda \widehat{\nu}^c \widehat{H}_d^0 \widehat{H}_u^0 + \frac{1}{3!} \kappa \widehat{\nu}^c \widehat{\nu}^c \widehat{\nu}^c, \tag{4.11}$$

wobei noch immer die Superfeldnotation greift, die Summation über die $SU(2)$-Indizes a, b aber ausgeführt ist. Mit den Vakuumerwartungswerten (4.4) liefert das Superpotential (4.2) nach den Regeln von (3.10) zusammen mit den Massentermen für die SUSY-Partner der Eichbosonen aus der "soft-breaking" Lagrangedichte (4.5) die folgende, für die Mischung der neutralen Fermionen relevante Lagrangedichte:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{neutral}}^{\text{mass}} = -\frac{1}{2} \Bigg(& \frac{1}{\sqrt{2}} \kappa v_c \nu^c \nu^c + M_1 \tilde{B}^0 \tilde{B}^0 + M_2 \tilde{W}_3^0 \tilde{W}_3^0 - \sqrt{2} \lambda v_c \tilde{H}_u^0 \tilde{H}_d^0 \\
& - \sqrt{2} \lambda v_u \nu^c \tilde{H}_d^0 - \sqrt{2} \lambda v_d \nu^c \tilde{H}_u^0 + \sqrt{2} Y_\nu^k v_u \nu_k \nu^c + \sqrt{2} Y_\nu^k v_c \tilde{H}_u^0 \nu_k v_c \\
& + \sqrt{2} Y_\nu^k \tilde{H}_u^0 v_k \nu^c - g v_u \tilde{H}_u^0 \tilde{W}_3^0 + g v_d \tilde{H}_d^0 \tilde{W}_3^0 + g' v_u \tilde{H}_u^0 \tilde{B}^0 \\
& - g' v_d \tilde{H}_d^0 \tilde{B}^0 + g v_k \nu_k \tilde{W}_3^0 - g' v_k \nu_k \tilde{B}^0 \Bigg) + \text{H.c.}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Exemplarisch wird die Herkunft der Kopplungsterme hier einmal gezeigt: Für die Higgs-Higgsino-Gaugino-Kopllung $-\sqrt{2} g (\phi^\dagger T^a \psi) \lambda^a$ aus der letzten Zeile von (3.10) folgt mit den Vakuumerwartungswerten aus (4.4) unter anderem

$$-\sqrt{2} g \left(0, \frac{v_u}{\sqrt{2}}\right) \frac{\sigma^3}{2} \begin{pmatrix} \tilde{H}_u^+ \\ \tilde{H}_u^0 \end{pmatrix} \tilde{W}_3^0 + \text{H.c.} = \frac{1}{2} g v_u \tilde{H}_u^0 \tilde{W}_3^0 + \text{H.c.} \quad , \tag{4.13}$$

wobei σ^3 die gemäß der Nomenklatur dritte Paulimatrix bezeichnet. Die anderen Terme ergeben sich durch Einsetzen der zur entsprechenden Eichgruppe gehörenden Generatoren T^a völlig analog. In der bereits angegebenen Basis $\left(\psi^0\right)^T = \left(\tilde{B}^0, \tilde{W}_3^0, \tilde{H}_d^0, \tilde{H}_u^0, \nu^c, \nu_1, \nu_2, \nu_3\right)$ erhält man somit für die neutralen Fermionen Massenterme, welche in der Form

$$\mathcal{L}_{\text{neutral}}^{\text{mass}} = -\frac{1}{2} \left(\psi^0\right)^T \mathcal{M}_n \psi^0 + \text{H.c.} \tag{4.14}$$

geschrieben werden können mit der (8×8)-Matrix

$$\mathcal{M}_n = \begin{pmatrix} M_n & m \\ m^T & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Entnimmt man der (5×5)-Untermatrix

$$M_n = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -\frac{1}{2} g' v_d & \frac{1}{2} g' v_u & 0 \\ 0 & M_2 & \frac{1}{2} g v_d & -\frac{1}{2} g v_u & 0 \\ -\frac{1}{2} g' v_d & \frac{1}{2} g v_d & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda v_c & -\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda v_u \\ \frac{1}{2} g' v_u & -\frac{1}{2} g v_u & -\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda v_c & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \left((Y_\nu)_m v_m - \lambda v_d \right) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda v_u & \frac{1}{\sqrt{2}} \left((Y_\nu)_m v_m - \lambda v_d \right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \kappa v_c \end{pmatrix} \quad , \tag{4.16}$$

den oberen (4×4)-Block und formt mit Hilfe von $\tan\beta = v_u/v_d$, $4m_Z^2 = v^2\left(g^2+g'^2\right) \approx \left(v_d^2+v_u^2\right)\left(g^2+g'^2\right)$ sowie $\sqrt{g^2+g'^2}\sin\theta_W = g'$ entsprechend der Nomenklatur um, so ergibt sich die bekannte Neutralino-Mischmatrix des MSSM, wie sie beispielsweise [2] zu entnehmen ist

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & -m_Z\sin\theta_W\cos\beta & m_Z\sin\theta_W\sin\beta \\ 0 & M_2 & m_Z\cos\theta_W\cos\beta & -m_Z\cos\theta_W\sin\beta \\ -m_Z\sin\theta_W\cos\beta & m_Z\cos\theta_W\cos\beta & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda v_c \\ m_Z\sin\theta_W\sin\beta & -m_Z\cos\theta_W\sin\beta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda v_c & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

sofern man $\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda v_c = \mu$ interpretiert. Die 5×3-Untermatrix m^T ist von der Gestalt

$$m^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}g'v_1 & \frac{1}{2}gv_1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_\nu\right)_1 v_c & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_\nu\right)_1 v_u \\ -\frac{1}{2}g'v_2 & \frac{1}{2}gv_2 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_\nu\right)_2 v_c & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_\nu\right)_2 v_u \\ -\frac{1}{2}g'v_3 & \frac{1}{2}gv_3 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_\nu\right)_3 v_c & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_\nu\right)_3 v_u \end{pmatrix} . \tag{4.18}$$

4.3. Massenermittlung durch Diagonalisierung der Mischmatrix

Um nun die aus diesem Modell erhaltenen Neutrinomassen zu ermitteln, gilt es die angegebene komplexe, jedoch symmetrische Matrix $\mathcal{M}_n$ zu diagonalisieren. Nach [41] ist die Diagonalisierung von komplexen, aber symmetrischen Matrizen A in der Form $SAS^T = T_{\text{dia.}}$ mit einer unitären Matrix $SS^\dagger = 1$ möglich. Die Masseneigenzustände ergeben sich schließlich nach

$$F_i^0 = \mathcal{N}_{is}\psi_s^0 \tag{4.19}$$

mit der unitären Rotationsmatrix $\mathcal{N}$. Zur Bestimmung derselben wird gemäß [42] vorgegangen und die Diagonalisierung näherungsweise in der Form

$$\mathcal{N}^*\mathcal{M}_n\mathcal{N}^\dagger = \mathcal{M}_{n,\text{dia.}} \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{N}^* = \begin{pmatrix} N^* & 0 \\ 0 & \mathcal{V}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}\xi^\dagger\xi & \xi^\dagger \\ -\xi & 1-\frac{1}{2}\xi\xi^\dagger \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

vorgenommen. Dabei ist $\mathcal{N}^*$ aufgrund der gewählten Form für kleine ξ, also $(\xi)_{ij} \ll 1$, in guter Näherung unitär, da N^* und $\mathcal{V}^T$ unitäre Matrizen seien. Durch die Wahl $\xi = m^T M_n^{-1}$ kann damit die folgende Transformation durchgeführt werden:

$$\mathcal{N}^*\mathcal{M}_n\mathcal{N}^\dagger \approx \begin{pmatrix} N^* & 0 \\ 0 & \mathcal{V}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_n & 0 \\ 0 & -m^T M_n^{-1} m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N^\dagger & 0 \\ 0 & \mathcal{V} \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

sofern man höhere Ordnungen in ξ vernachlässigt. Mit der Definition $m_{\text{eff.}} = -m^T M_n^{-1} m$ und der Wahl

$$N^* M_n N^\dagger = M_{n,\text{dia.}} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{V}^T m_{\text{eff.}}\mathcal{V} = \text{Diag}(0,0,m_\nu) \tag{4.22}$$

liegt die Matrix $\mathcal{M}_n$ in Diagonalform vor, wobei aufgrund der besonderen Form von $m_{\text{eff.}}$ die Matrix $\mathcal{V}$ so gewählt werden kann, dass nur ein Neutrino Masse erhält [43], was später gezeigt wird. Somit erlaubt die Spurbildung den einfachen Zusammenhang $m_\nu = \text{tr}\left(m_{\text{eff.}}\right)$.
Zur Darstellung der konkreten Form werden folgende übliche Abkürzungen eingeführt:

$$\Lambda_i = \frac{1}{\sqrt{2}}v_c\left(\lambda v_i + \left(Y_\nu\right)_i v_d\right) = \mu v_i + v_d\epsilon_i$$

$$\text{mit} \qquad \mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda v_c \qquad \text{und} \qquad \epsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_\nu\right)_i v_c$$
$$\begin{aligned} m_R &= \frac{1}{\sqrt{2}}\kappa v_c \\ m_\gamma &= g^2 M_1 + g'^2 M_2 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Damit ergibt sich die Determinante der Matrix M_n zu

$$\begin{aligned} \det\left(M_n\right) =& \frac{1}{8} m_\gamma \left(4 m_R \mu v_d v_u + \lambda^2 \left(v_d^2 + v_u^2\right)^2 - 2\lambda \left(Y_\nu\right)_m v_m v_d \left(v_d^2 + 2v_u^2\right) + v_d^2 \left(\left(Y_\nu\right)_m v_m\right)^2\right) \\ & - M_1 M_2 \left(\mu \lambda^2 v_d v_u + \mu^2 m_R \frac{1}{\sqrt{2}} v_u v_c \left(Y_\nu\right)_m v_m\right) \\ \approx& \frac{1}{8}\left(4 m_R \mu v_d v_u + \lambda^2 \left(v_d^2 + v_u^2\right)^2\right) - M_1 M_2 \mu \left(\lambda^2 v_d v_u + \mu m_R\right) \quad , \end{aligned} \tag{4.24}$$

wobei über m zu Summieren ist und die letzte Zeile in der Näherung $\left(Y_\nu\right)_m v_m \ll \lambda v_d$ gilt. Diese Näherung erweist sich tatsächlich auch als sehr zweckmäßig, da die Vakuumerwartungswerte der linkshändigen Sneutrinos und die Yukawakopplungen Y_ν klein gewählt werden, um Neutrinophysik vernünftig zu betreiben. Führt man als weitere Abkürzung

$$\eta^2 = \lambda^2 v_d v_u + \frac{1}{2}\lambda\kappa v_c^2 - \lambda v_u \left(Y_\nu\right)_m v_m \approx \lambda^2 v_d v_u + \mu m_R \tag{4.25}$$

ein, so lässt sich zum einen konkret die (3×5)-Entwicklungsmatrix $\xi = m^T M_n^{-1}$, welche im Anhang A unter (A.53) zu finden ist, und zum anderen die Matrix $m_{\text{eff.}} = -m^T M_n^{-1} m$ angeben. Die Entwicklungsmatrix ist von der Form $\xi_{i\alpha} = f_\alpha \epsilon_i + g_\alpha \Lambda_i$ und auch die effektive Neutrinomassenmatrix ist von sehr einfacher Gestalt, so dass die Spur und damit die Neutrinomasse eine einfache Abhängigkeit unter Einführung von $\vec{\Lambda} = \left(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\right)^T$ zeigt:

$$\begin{aligned} \left(m_{\text{eff.}}\right)_{ij} &= \frac{m_\gamma \eta^2}{4\mu \text{Det}\left(M_n\right)} \Lambda_i \Lambda_j \\ m_\nu = \text{tr}\left(m_{\text{eff.}}\right) &= \frac{m_\gamma \eta^2}{4\mu \text{Det}\left(M_n\right)} |\vec{\Lambda}|^2 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Tatsächlich weist eine Matrix der Form $\propto \Lambda_i \Lambda_j$ nur einen echten Eigenwert auf, die anderen beiden Eigenwerte sind stets Null. Dies bestätigt, dass nur ein Neutrino eine Masse erhält. Der Grund liegt auch nicht in der durchgeführten Näherung der Form $m_{\text{eff.}} = -m^T M_n^{-1} m$ unter Annahme von $(\xi)_{ij} \ll 1$, denn das charakteristische Polynom der gesamten Massenmatrix der neutralen Fermionen $\mathcal{M}_n$ ist analytisch von der Form

$$\det\left(\mathcal{M}_n - \rho I_8\right) = \rho^2 P\left(\rho\right) \tag{4.27}$$

mit einem Polynom $P\left(\rho\right)$ vom Grade 6. Es treten demnach zwei Eigenwerte $\rho = 0$ auf, nur ein Neutrino erhält in diesem Modell auf Baumgraphenniveau also eine Masse. Da dies nicht das gesamte Neutrinospektrum abdecken kann, genügt zur Diagonalisierung dieser Matrix mit $\mathcal{V}$ auch nur ein Ausschnitt der gesamten Mischmatrix der Neutrinos $\mathcal{U}$ (2.10), welcher in Anlehnung

an [42] folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{23} & \sin\theta_{23} \\ 0 & -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta_{13} & 0 & \sin\theta_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_{13} & 0 & \cos\theta_{13} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_{13} & 0 & \sin\theta_{13} \\ -\sin\theta_{13}\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23} & \cos\theta_{13}\sin\theta_{23} \\ -\sin\theta_{13}\cos\theta_{23} & -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{13}\cos\theta_{23} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

Die solare Mischung $\theta_{\text{sol}} = \theta_{12}$ wird in diesem Beispiel demnach nicht erfasst, die anderen beiden Mischungswinkel können hingegen einfach durch die Größen Λ_i ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\tan^2\theta_{\text{R}} = \tan^2\theta_{13} &= \left(\frac{\Lambda_1}{\sqrt{\Lambda_2^2+\Lambda_3^2}}\right)^2 \\ \tan^2\theta_{\text{atm}} = \tan^2\theta_{23} &= \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3}\right)^2 \end{aligned} \tag{4.29}$$

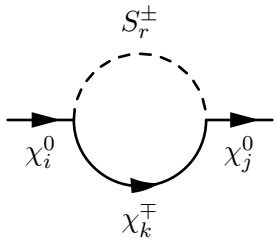
Die Tatsache, dass das gesamte Neutrinospektrum so nicht beschreibbar ist, ruft geradezu nach einem anderen Lösungsansatz. Generell bieten sich hier zwei Varianten an:

- Man bleibt auf Baumgraphenniveau und führt dafür ein zweites rechtshändiges Neutrinosuperfeld $\widehat{\nu}_2^c$ neben dem schon vorhandenen $\widehat{\nu}^c = \widehat{\nu}_1^c$ mit dem Superpotential

$$\begin{aligned} W =& \epsilon_{ab}\left((Y_u)_{ij}\,\widehat{H}_u^b\widehat{Q}_i^a\widehat{u}_j^c + (Y_d)_{ij}\,\widehat{H}_d^a\widehat{Q}_i^b\widehat{d}_j^c + (Y_e)_{ij}\,\widehat{H}_d^a\widehat{L}_i^b\widehat{e}_j^c + (Y_\nu)_{ij}\,\widehat{H}_u^b\widehat{L}_i^a\widehat{\nu}_j^c\right) \\ &- \epsilon_{ab}\lambda_i\widehat{\nu}_i^c\widehat{H}_d^a\widehat{H}_u^b + \frac{1}{3!}\kappa_{ijk}\widehat{\nu}_i^c\widehat{\nu}_j^c\widehat{\nu}_k^c \qquad , \end{aligned} \tag{4.30}$$

  ein, wobei bei den rechtshändigen Neutrinosuperfeldern über zwei Indizes zu summieren ist.

- Man geht auf Einschleifenniveau und berechnet die korrigierte Massenmatrix der neutralen Fermionen, indem man zusätzliche Einschleifenbeiträge beispielsweise der Form



(4.31)

  berücksichtigt. Wie sich später zeigt, liefert dies eine korrigierte Massenmatrix der neutralen Fermionen $\mathcal{M}_{nL}$, die das Neutrinospektrum vollständig abdeckt.

In dieser Arbeit wird die zweite Variante nachfolgend näher betrachtet, da sie vom Teilcheninhalt einfacher erscheint und entsprechende Einschleifenkorrekturen ausreichend für die Neutrinophysik sind. Die erste Variante kann Inhalt späterer Untersuchungen sein.

Bevor zu den Einschleifenkorrekturen übergegangen wird, soll auch die Massenmatrix der geladenen Fermionen präsentiert werden.

4.4. Mischung der geladenen Fermionen im $\mu\nu$SSM

Zuerst wird die gesamte Lagrangedichte $\mathcal{L}^{\text{mass}}_{\text{charged}}$ der geladenen Fermionen präsentiert, bevor diese in Matrixform dargestellt wird. Aus dem Superpotential (4.2) ist der für die geladenen Fermionen relevante Anteil in Superfeldnotation mit über die $SU(2)$-Indizes a, b ausgeführter Summation

$$W = -\left(Y_\nu\right)_i \widehat{H}_u^+ \widehat{e}_i \widehat{\nu}^c + \left(Y_e\right)_{ij} \widehat{H}_d^0 \widehat{e}_i \widehat{e}_j^c - \left(Y_e\right)_{ij} \widehat{H}_d^- \widehat{\nu}_i \widehat{e}_j^c - \lambda \widehat{v}^c \widehat{H}_d^- \widehat{H}_u^+ . \tag{4.32}$$

Weiterhin für die gesuchte Lagrangedichte relevant sind erneut die Massenterme für die Superpartner der Eichbosonen aus der "soft breaking"-Lagrangedichte (4.5) und Higgs-Higgsino-Gaugino- bzw. Sfermion-Fermion-Gaugino-Kopplungen aus der letzten Zeile von (3.10). Diese werden nachfolgend erneut detaillierter diskutiert, wobei gleich die Vakuumerwartungswerte aus (4.4) einfließen: Für die Higgs-Higgsino-Gaugino-Kopplungen folgen mit den Definitionen von $W^{(\pm)}$ aus (2.5) Terme der Form

$$\begin{aligned}
&-\sqrt{2}g \left\{ \left(0, \frac{v_u}{\sqrt{2}}\right) \left[\frac{\tau^1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{H}_u^+ \\ \tilde{H}_u^0 \end{pmatrix} \tilde{W}_1 + \frac{\tau^2}{2} \begin{pmatrix} \tilde{H}_u^+ \\ \tilde{H}_u^0 \end{pmatrix} \tilde{W}_2 \right] \right\} + \text{H.c.} \\
&\quad = -\frac{1}{2} g v_u \tilde{H}_u^+ \left(\tilde{W}_1 + i\tilde{W}_2\right) + \text{H.c.} \\
&\quad = -\frac{1}{\sqrt{2}} g v_u \tilde{H}_u^+ \tilde{W}^- + \text{H.c.}, \\
&\quad \text{und analog} \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}} g v_d \tilde{H}_d^- \tilde{W}^+ + \text{H.c.} \quad .
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Für die Sfermion-Fermion-Gaugino-Kopplungen ergeben sich folgende Terme:

$$\begin{aligned}
&-\sqrt{2}g \left\{ \left(\frac{v_i}{\sqrt{2}}, 0\right) \left[\frac{\tau^1}{2} \begin{pmatrix} \nu_i \\ e_i \end{pmatrix} \tilde{W}_1 + \frac{\tau^2}{2} \begin{pmatrix} \nu_i \\ e_i \end{pmatrix} \tilde{W}_2 \right] \right\} + \text{H.c.} \\
&\quad = -\frac{1}{2} g v_i e_i \left(\tilde{W}_1 - i\tilde{W}_2\right) + \text{H.c.} \\
&\quad = -\frac{1}{\sqrt{2}} g v_i e_i \tilde{W}^+ + \text{H.c.}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Mit $-\frac{1}{2} M_2 \tilde{W}_1 \tilde{W}_1 - \frac{1}{2} M_2 \tilde{W}_2 \tilde{W}_2 = -\frac{1}{2} M_2 \left(\tilde{W}_1 + i\tilde{W}_2\right)\left(\tilde{W}_1 - i\tilde{W}_2\right) = -M_2 \tilde{W}^+ \tilde{W}^-$ folgt schließlich für die relevante Lagrangedichte der geladenen Fermionen mit den Vakuumerwartungswerten der neutralen skalaren Teilchen aus (4.4)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\text{mass}}_{\text{charged}} = \Bigg(&-M_2 \tilde{W}^+ \tilde{W}^- - \frac{1}{\sqrt{2}} g v_u \tilde{H}_u^+ \tilde{W}^- - \frac{1}{\sqrt{2}} g v_d \tilde{H}_d^- \tilde{W}^+ - \frac{1}{\sqrt{2}} g v_i e_i \tilde{W}^+ \\
&- \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda v_c \tilde{H}_d^- \tilde{H}_u^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} Y_\nu^i v_c \tilde{H}_u^+ e_i - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Y_e\right)_{ij} v_d e_i e_j^c + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Y_e\right)_{ij} v_i \tilde{H}_d^- e_j^c \Bigg) + \text{H.c.},
\end{aligned} \tag{4.35}$$

wobei über doppelt auftretende Indizes in den Termen zu Summieren ist. Definiert man die Basis

$$\begin{aligned}\left(\psi^-\right)^T &= \left(\tilde{W}^-, \tilde{H}_d^-, e, \mu, \tau\right)\\ \left(\psi^+\right)^T &= \left(\tilde{W}^+, \tilde{H}_u^+, e^c, \mu^c, \tau^c\right),\end{aligned} \tag{4.36}$$

so kann die gesamte Lagrangedichte der geladenen Fermionen auch geschrieben werden in der Form

$$\mathcal{L}_{\text{charged}}^{\text{mass}} = -\frac{1}{2}\left(\left(\psi^-\right)^T \mathcal{M}_c \psi^+ + \left(\psi^+\right)^T \mathcal{M}_c^T \psi^-\right) + \text{H.c.} \tag{4.37}$$

mit der (5×5)-Matrix

$$\mathcal{M}_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}M_2 & g v_u & 0 & 0 & 0 \\ g v_d & \lambda v_c & -(Y_e)_{m1} v_m & -(Y_e)_{m2} v_m & -(Y_e)_{m3} v_m \\ g v_1 & -(Y_\nu)_1 v_c & (Y_e)_{11} v_d & (Y_e)_{12} v_d & (Y_e)_{13} v_d \\ g v_2 & -(Y_\nu)_2 v_c & (Y_e)_{21} v_d & (Y_e)_{22} v_d & (Y_e)_{23} v_d \\ g v_3 & -(Y_\nu)_3 v_c & (Y_e)_{31} v_d & (Y_e)_{32} v_d & (Y_e)_{33} v_d \end{pmatrix}, \tag{4.38}$$

wobei wieder wie üblich $(Y_e)_{mj} v_m = (Y_e)_{1j} v_1 + (Y_e)_{2j} v_2 + (Y_e)_{3j} v_3$ gilt. Die Yukawakopplungen Y_e können hierbei nach [42] diagonal gewählt werden.

4.5. Massenermittlung durch Diagonalisierung der Mischmatrix

Die Diagonalisierung kann aufgrund der nicht symmetrischen Form der Massenmatrix der geladenen Fermionen $\mathcal{M}_c$ nicht in so einfacher Weise erfolgen wie es für die neutralen Fermionen der Fall war. In Anlehnung an [2] erfolgt die Rotation der positiv und negativ geladenen Basen $\psi^\pm$ unabhängig voneinander durch

$$F_i^+ = V_{it}\psi_t^+ \qquad \text{und} \qquad F_i^- = U_{it}\psi_t^- \quad , \tag{4.39}$$

wobei diese die angegebene Massenmatrixmatrix $\mathcal{M}_c$ diagonalisieren:

$$\mathcal{M}_{c,\text{dia.}} = U^* \mathcal{M}_c V^{-1} \tag{4.40}$$

Die hier auftretenden Matrizen V und U sind insbesondere nicht zu verwechseln mit den Matrizen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{U}$ die bei der Diagonalisierung der Neutrinomassenmatrix aufgetreten sind. Die Bestimmung von V und U kann aus der Beziehung

$$\mathcal{M}_{c,\text{dia.}}^2 = V \mathcal{M}_c^\dagger \mathcal{M}_c V^{-1} = U^* \mathcal{M}_c \mathcal{M}_c^\dagger \left(U^*\right)^{-1} \tag{4.41}$$

erfolgen, da offensichtlich sofort folgt, dass V die Matrix $\mathcal{M}_c^\dagger \mathcal{M}_c$ und U^* die Matrix $\mathcal{M}_c \mathcal{M}_c^\dagger$ diagonalisiert. Ähnlich wie bei den neutralen Fermionen kann für die geladenen Fermionen eine approximative Diagonalisierung über zwei Entwicklungsmatrizen erfolgen. Definiert man (4.38) in

$$\mathcal{M}_c = \begin{pmatrix} M_c & E' \\ E & M_l \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

mit der (3×3)-Leptonmassenmatrix M_l und der (2×2)-Charginomassenmatrix um, so lassen sich für $E' \approx 0$, was für kleine Vakuumerwartungswerte der Sneutrinos v_i gerechtfertigt ist, die

zwei Entwicklungsmatrizen schreiben in der Form

$$\begin{aligned}\xi_L^* &= EM_c^{-1} \\ \xi_R^* &= M_l^\dagger EM_c^{-1}\left(M_c^{-1}\right)^T = M_l^\dagger \xi_L^*\left(M_c^{-1}\right)^T ,\end{aligned} \tag{4.43}$$

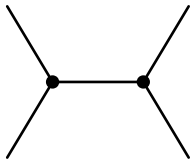
welche schließlich in V und U ähnlich wie in (4.20) einfließen und im letzten Abschnitt 8.6 nochmals auftreten werden. Die Einzelheiten sind beispielsweise [42] zu entnehmen. Natürlich bleibt anzumerken, dass die Diagonalisierung nicht zuletzt von der Form der (3×3)-Massenmatrix der Leptonen abhängt, welche Diracmassen der Form $(Y_e)_{ij}\, v_d$ enthält. Liegen die Yukawakopplungen Y_e in Diagonalform vor, so lassen sich die drei Yukawakopplungen $(Y_e)_{11}$, $(Y_e)_{22}$ und $(Y_e)_{33}$ so festlegen, dass die drei leichtesten Eigenwerte von $\mathcal{M}_c$ den Massen der drei geladenen Fermionen Elektron, Myon und Tau entsprechen, die sehr gut bekannt sind. Entsprechende Werte werden später in den Ergebnissen in Kapitel 8 präsentiert.
Nach dieser Diskussion kann nun zu den Einschleifenkorrekturen der Massenmatrix der neutralen Fermionen übergegangen werden.

5. Neutrinophysik auf Einschleifenniveau

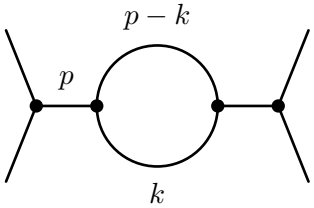
Im vorherigen Kapitel wurde gezeigt, dass auf Baumgraphenniveau die effektive Massenmatrix der Neutrinos $m_{\text{eff.}}$ eine Form $\propto \Lambda_i \Lambda_j$ aufweist. Da diese Matrix nur einen echten Eigenwert aufweist, erhält auch nur ein Neutrino Masse. Um dieser Unzulänglichkeit des Modells entgegenzukommen, wird in diesem Kapitel die Massenmatrix der neutralen Fermionen auf Einschleifenniveau berechnet. Zuerst folgt ein allgemeiner Abschnitt zu Regularisierung und Renormierung, bevor im Anschluss Passarino-Veltman-Integrale eingeführt werden. Anschließend werden Renormierungsgruppengleichungen angeschnitten, auf die die Renormierung der Zweipunktfunktion folgt, um zuletzt die relevanten Einschleifengraphen und deren Beiträge zur Massenmatrix der Neutralinos und Neutrinos zu diskutieren, wobei sich die dortige Vorgehensweise an [44] orientiert. Diese Arbeit ist dabei nicht in der Lage alle Details von Regularisierung und Renormierung wiederzugeben, welche jedoch in zahlreichen Lehrbüchern wie [1] in umfassender Weise dargelegt werden. Insbesondere das Konzept der Renormierung ist anhand der einfachsten Beispiele in einer Arbeit von Jorge Romão oder einem Übungsskript von Thomas Binoth zur Herbstschule für Hochenergiephysik "Maria Laach" [45] gut nachvollziehbar.

5.1. Regularisierung und Renormierung

Die Grundlage von relativistischer Quantenfeldtheorie ist die Entwicklung von Wechselwirkungen als Störung der Theorie freier Felder in einer Reihe. Das Baumgraphenniveau ("tree-level"), oder auch Bornsche Näherung, ist dabei die nullte Ordnung der Entwicklung. Stellt man diese nullte Ordnung zusammen mit einem(!) Prozess der ersten Ordnung als Feynmangraph dar, so haben diese beispielsweise die Formen



und



. (5.1)

Die Problematik liegt nun in der Integration über den unbestimmten Impuls k des umlaufenden Teilchens in der dargestellten Schleife, welche grundsätzlich bei allen Ein- und auch Mehrschleifengraphen auftritt. Um der Entwicklung trotz auftretender Divergenzen der Integrale eine physikalische Bedeutung zu geben, ist es nötig, die störungstheoretische Reihe zu regularisieren. Dies meint die Wahl einer bestimmten Berechnungsmethode der Integrale, welche die divergenten Anteile klar erkennen lässt. Anschließend erfolgt die Renormierung, welche letztlich der Subtraktion der divergenten Terme entspricht und die neuen physikalischen Größen wie Massen und Felder um die endlichen Beiträge der Integrale ergänzt. Formal kann dies auch beschrieben werden durch die Einführung neuer Feynmangraphen, den sogennanten Countertermen, welche die divergenten Anteile gerade aufheben. Natürlich darf das dann endliche Resultat nicht von der ursprünglichen Methode der Regularisierung abhängen.
Bei diesen Rechnungen treten zwei Arten von Divergenzen der Integrale auf: Zum einen kann der Integrand bei kleinen Impulsen divergent werden, man spricht dann von einer Infrarot(IR)-

Divergenz. Dies ist bei masselosen Eichbosonen, welche mit sehr kleinen Impulsen quasi unbemerkt abgestrahlt werden können, der Fall. Prinzipiell bereiten diese Graphen jedoch keine großen Schwierigkeiten, da sich die IR-divergenten Beiträge aller möglichen Feynmangraphen aufheben. Da diese hier keine Probleme bereiten, sei stellvertretend auf [1] verwiesen.
Wesentlich problematischer ist das Auftreten von Ultraviolett(UV)-Divergenzen bei großen Impulsen. Die nachfolgende Diskussion derselben orientiert sich an [46]. Am einfachsten kann die Regularisierung durch ein Abschneiden des Integrals ("cut-off") erfolgen. Dazu vollführt man eine Wickrotation der Integrationsvariable d^4k auf euklidische Koordinaten und eine dortige Beschränkung des Integrationsraumes auf eine 4-dimensionale Kugel mit Radius Λ. Zwar wird so jedes Integral konvergent, weist also einen endlichen Wert auf, jedoch zerstört man die Poincaré-Invarianz. Gittereichtheorien [47], welche in der Quantenchromodynamik bei versagender Störungsentwicklung gerne benutzt werden, arbeiten auf einer diskretisierten Raumzeit. Der Gitterabstand führt zu einer Art der Regularisierung, die äquivalent zur "cut-off"-Methode ist und damit ähnliche Probleme bereitet.
Eine bereits elegantere Regularisierungsmethode, welche zudem die Kovarianz nicht verletzt, ist die Substitution des Propagators $G_F(x-y,m)$ in der Form

$$G_F^{\text{reg}}(x-y,m) = G_F(x-y,m) + \sum_k C_k G_F(x-y,M_k) \tag{5.2}$$

mit Koeffizienten C_k, welche Funktionen der Massen m und M_k sind. Durch eine bestimmte Zahl von Summanden lässt sich so jeder Feynmangraph endlich machen. Das bekannteste Beispiel dieser Regularisierung ist die Pauli-Villars-Regularisierung [48] des Photon-Propagators in der Quantenelektrodynamik, wie man sie beispielsweise in [1] findet.
Die wahrscheinlich am häufigsten angewandte Methode der Regularisierung, die auch hier Anwendung findet, basiert auf einer Reduktion der Raum-Zeit-Dimensionen. Zählt man die Massendimensionen bei Schleifenintegralen ("power counting"), so kann man den Grad der Divergenz schnell einsehen und entsprechend durch eine Verminderung der Raum-Zeit-Dimensionen dieser Divergenz entgegensteuern. "power counting" erlaubt auf einfache Art und Weise eine Unterscheidung zwischen nicht renormierbaren Theorien, renormierbaren Theorien und superrenormierbaren Theorien [1]. Diese sogenannte dimensionale Regularisierung geht konzeptionell auf 't Hooft und Veltman zurück. Man führt dabei alle Integrale in d Dimensionen ($d < 4$, nichtganzzahlig) aus und kann schließlich die Divergenzen als Pole des dimensionalen Parameters d abspalten und erhält so die endlichen Anteile. Dazu soll eine kurze Betrachtung der Massendimensionen unterschiedlicher Felder und Kopplungen erfolgen:
Aus dem kinetischen Term eines Fermions (Dirac-Spinor) $\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ folgt, dass die Massendimension $[\psi] = (d-1)/2$ sein muss, denn die Dimension der Lagrangedichte sollte d entsprechen. Äquivalent erhält man für skalare Felder und die Eichbosonen $[\phi] = [A_\mu] = (d-2)/2$. Während die elektrische Kopplung e in 4 Dimensionen keine Massendimension aufweist, muss wegen der Kopplung $e\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ in d Dimensionen $[e] = (4-d)/2$ gelten. Um diese Problematik zu lösen, führt man daher die Hilfsmasse μ ein und ersetzt

$$e \to e\mu^{\frac{4-d}{2}} \qquad . \tag{5.3}$$

Problematisch bei der dimensionalen Regularisierung (DimReg) hat sich in der Supersymmetrie Folgendes erwiesen: Die in Abschnitt 3.4 beschriebenen Superfelder beinhalten beispielsweise sowohl die Eichbosonen wie deren Superpartner, die Gauginos, deren Freiheitsgrade sich in $d = 4-\epsilon$ Dimensionen jedoch unterscheiden. Daher verwendet man in der Supersymmetrie eine abgewan-

delte Variante, die dimensionale Reduktion DRED, welche sich rechnerisch nur wenig von DimReg unterscheidet. Man belässt dabei Tensoren und Spinoren in 4 Dimensionen (Index μ von 0 bis 3) und geht nur mit Impulsen und in der Raum-Zeit in d Dimensionen. Auf genaue Details wie beispielsweise die Einführung von skalaren Feldern parallel zu den Eichbosonen in DimReg kann hier verzichtet werden und näheres beispielsweise [46] entnommen werden. Bezüglich des Schemas der dimensionalen Reduktion DRED sei insbesondere auf das Originalveröffentlichung von Warren Siegel [49], sowie auf nachfolgende Veröffentlichungen [50] verwiesen.
Zuletzt sei noch angemerkt, dass die beschriebene Art und Weise der Behandlung von Divergenzen dem Leser vielleicht unnatürlich erscheint. Jedoch hat sich dies insbesondere in der Quantenelektrodynamik bei der Betrachtung von atomaren Energieniveaus oder anomalen magnetischen Momenten als nahezu perfekte theoretische Beschreibung erwiesen, so dass es sich um eine anerkannte Betrachtungsweise handelt.

5.2. Passarino-Veltman-Integrale

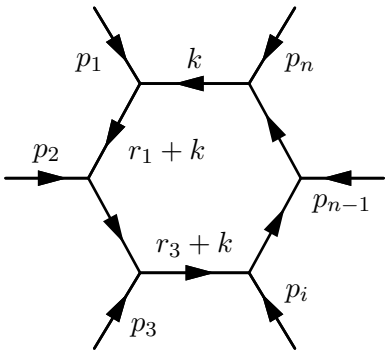
Da bei der Berechnung von Schleifengraphen stets gleiche Integrale auftauchen, wurde im Jahre 1978 von Passarino, Veltman und 't Hooft [51][52] ein Schema zur einfachen Darstellung dieser Integrale entwickelt, welches Eingang in Mathematica und viele andere Programme gefunden hat. Da das UV-Verhalten dieser Integrale bekannt ist, kann die Renormierung schemenhaft auf einfache Art und Weise erfolgen. Die nachfolgende Notation orientiert sich an einer modernen Zusammenfassung von Jorge Romão [45]. Ausgehend von dimensionaler Regularisierung bzw. dimensionaler Reduktion mit $d = 4 - \epsilon$ schreibt man das generische Einschleifen-Tensor-Integral in der Form

$$T_n^{\mu_1 \dots \mu_p} = \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{k^{\mu_1} \dots k^{\mu_p}}{D_0 D_1 \dots D_{n-1}} \tag{5.4}$$

mit den Nennern

$$D_i = (r_i + k)^2 - m_i^2 + i\epsilon \qquad , \tag{5.5}$$

wobei die Definition der internen Impulse r_i nachfolgender Abbildung zu entnehmen ist:



(5.6)

Da alle externen Impulse p_i einlaufend gewählt werden, gilt demnach für die Impulse r_i:

$$r_j = \sum_{i=1}^{j} p_i \qquad \text{für} \qquad j = 1, \dots, n-1$$
$$r_0 = \sum_{i=1}^{n} p_i = 0 \tag{5.7}$$

Führt man des Weiteren die Abkürzung

$$r_{ij}^2 = (r_i - r_j)^2 \qquad \text{für} \qquad i,j = \{0,\ldots,n-1\} \tag{5.8}$$

mit $r_{i0}^2 = r_i^2$ und $r_{10}^2 = r_1^2 = p_1^2$ ein, so sind die für die nachfolgenden Rechnungen relevanten Passarino-Veltman-Integrale, jetzt der Einfachheit halber ohne die notwendigen Beiträge $+i\epsilon$ im Nenner der Propagatoren, gegeben durch:

$$\begin{aligned}
A_0\left(m_0^2\right) &= \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2}\int d^dk\frac{1}{k^2-m_0^2}\\
B_0\left(r_{10}^2,m_0^2,m_1^2\right) &= \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2}\int d^dk\frac{1}{\left[k^2-m_0^2\right]\left[(r_1+k)^2-m_1^2\right]}\\
B^\mu\left(r_{10}^2,m_0^2,m_1^2\right) &= \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2}\int d^dk\frac{k^\mu}{\left[k^2-m_0^2\right]\left[(r_1+k)^2-m_1^2\right]}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Dabei lässt sich das Einschleifen-Tensor-Integral B^μ nach Ansgar Denner [53] auch darstellen in der Form

$$B^\mu\left(r_{10}^2,m_0^2,m_1^2\right) = r_1^\mu B_1\left(r_{10}^2,m_0^2,m_1^2\right) \tag{5.10}$$

$$\text{mit} \qquad B_1\left(r_{10}^2,m_0^2,m_1^2\right) = \frac{1}{2r_{10}^2}\left[A_0\left(m_0^2\right)-A_0\left(m_1^2\right)-\left(r_{10}^2-m_1^2+m_0^2\right)B_0\left(r_{10}^2,m_0^2,m_1^2\right)\right]$$

Mit der Definition $\Delta_\epsilon = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi$, welche die Eulerkonstante $\gamma_E \approx 0,5772\ldots$ enthält, sind die UV-divergenten Anteile der Passarino-Veltman-Integrale [45] gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\text{Div}\left[A_0\left(m_0^2\right)\right] &= m_0^2\Delta_\epsilon\\
\text{Div}\left[B_0\left(r_{10}^2,m_0^2,m_1^2\right)\right] &= \Delta_\epsilon\\
\text{Div}\left[B_1\left(r_{10}^2,m_0^2,m_1^2\right)\right] &= -\tfrac{1}{2}\Delta_\epsilon
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Insgesamt gilt nach [45] mit den abgespaltenen Divergenzen:

$$\begin{aligned}
A_0\left(m_0^2\right) &= m_0^2\left(\Delta_\epsilon + 1 - \ln\frac{m_0^2}{\mu^2}\right)\\
B_0\left(r_{10}^2,m_0^2,m_1^2\right) &= \Delta_\epsilon - \int_0^1 dx\ln\left[\frac{-x(1-x)r_{10}^2+xm_1^2+(1-x)m_0^2}{\mu^2}\right]\\
B_1\left(r_{10}^2,m_0^2,m_1^2\right) &= -\tfrac{1}{2}\Delta_\epsilon + \int_0^1 dxx\ln\left[\frac{-x(1-x)r_{10}^2+xm_1^2+(1-x)m_0^2}{\mu^2}\right]
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Setzt man demnach $\Delta_\epsilon = 0$, so erhält man die endlichen Anteile der Integrale, welche numerisch einfach ermittelt werden können und hier in der Technik der Feynman-Parameter angegeben sind. Außerdem sei noch angemerkt, dass wegen $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ zudem $A_0(0) = 0$ gilt. Man sieht weiterhin die Abhängigkeit von der beliebigen Skala μ, welche häufig in der Literatur unter der Bezeichung Renormierungspunkt Q zu finden ist, da sie die Energieskala der Renormierung festlegt. Diese Abhängigkeit ist wenig verwunderlich, da man stets einen endlichen Anteil des verbleibenden Integrals in die Unendlichkeit absorbieren kann. Oftmals vernachlässigt man daher die konstanten Beiträge $-\gamma_E + \ln 4\pi$ und spricht dann im Falle von dimensionaler Regularisierung DimReg vom Schema der "Minimal Subtraction" ($\overline{\text{MS}}$, sprich MS-bar) und analog im Falle

von dimensionaler Reduktion DRED vom $\overline{\text{DR}}$-Schema (sprich DR-bar), welches im Weiteren Anwendung finden wird. Die Renormierung erfolgt später also ganz konkret durch $\Delta_\epsilon = 0$ und liefert damit insbesondere eine Abhängigkeit der renormierten Größen vom Renormierungspunkt μ. Um eine davon unabhängige und somit physikalische Theorie zu erhalten, verwendet man die Theorie der Renomierungsgruppengleichungen, welche im nachfolgenden Abschnitt angeschnitten wird.

5.3. Renormierungsgruppengleichungen

Wie bereits angedeutet, hängen die renormierten Größen von der Energieskala μ, an der die Renormierung erfolgt, ab. Betrachtet man beispielsweise eine unrenormierte n-Punktfunktion $\Gamma^{(n)}$, so gilt für diese noch

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\Gamma^{(n)} = 0 \qquad , \tag{5.13}$$

während für die renormierte n-Punkt-Funktion $\tilde{\Gamma}^{(n)}(\mu)$ eine Abhängigkeit von μ vorliegt. Hat man aufgrund der Renormierung einen multiplikativen Zusammenhang mit einem Faktor Z zwischen den n-Punktfunktionen, so muss dieser ebenfalls eine Abhängigkeit von μ zeigen. In der Φ^4-Theorie als leicht verständliches Beispiel liefert eine einfache Rechnung die Renormierungsgruppengleichung [1]

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} - n\gamma(g) + m\gamma_m(g)\frac{\partial}{\partial m}\right)\tilde{\Gamma}^{(n)}(p, g, m, \mu) = 0 \tag{5.14}$$

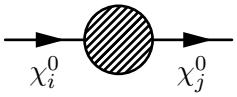
für die renomierte Greensfunktion mit Impuls p, Kopplung g und Masse m. Die weiteren Größen sind definiert durch

$$\beta(g) = \mu\frac{\partial g}{\partial \mu}, \qquad \gamma(g) = \mu\frac{\partial}{\partial \mu}\ln\sqrt{Z} \qquad \text{und} \qquad m\gamma_m(g) = \mu\frac{\partial m}{\partial \mu} \quad , \tag{5.15}$$

wobei $\beta(g)$ die Abhängigkeit der Kopplungskonstante g von der Renormierungsskala μ beschreibt. Analog liefert die anomale Dimension γ die Abhängigkeit des multiplikativen Renormierungsfaktors Z der Wellenfunktion und γ_m die Abhängigkeit der Masse. Der Name "anomale Dimension" bezieht sich auf das gegenüber der makroskopischen Energieabhängigkeit unterschiedliche quantenmechanische Verhalten. Die Grundlagen dieser Renormierungsgruppentheorie gehen zurück auf [54]. Tatsächlich benötigt ein massenabhängiges Renormierungsverfahren eine erweiterte Form von Gleichung, die Callan-Symanzik-Gleichung, welche auf [55] zurückgeht und beispielsweise [1] entnommen werden kann. Wichtig bleibt festzuhalten, dass mit Hilfe von Renormierungsgruppengleichungen die Abhängigkeiten der Massen von der Renormierungsskala μ im verwendeten $\overline{\text{DR}}$-Schema bestimmt werden können. Da das später verwendete Programm diese Abhängigkeiten bereits implementiert hat, wird hier auf Details in der Berechnung verzichtet. Damit sind die Grundkenntnisse gegeben, welche eine Renormierung der Zweipunktfunktion, wie sie für die Einschleifenkorrekturen der Massenmatrix der neutralen Fermionen nötig ist, ermöglichen.

5.4. Renormierung der Zweipunktfunktion

Die dargestellte Renormierung der Zweipunktfunktion orientiert sich an [44] sowie [46] und ist nach den erfolgten Vorarbeiten leicht erklärbar. Insgesamt sind die Einschleifenkorrekturen zur fermionischen Zweipunktfunktion von der Form



$$\equiv i\mathbf{\Sigma}^{ij}(p) \quad . \tag{5.16}$$

Die vom äußeren Impuls p abhängigen Einschleifenkorrekturen lassen sich ganz allgemein schreiben in der Form

$$i\mathbf{\Sigma}^{ij}(p) = i\left[\not{p}\left(P_L\Sigma_{ij}^L\left(p^2\right) + P_R\Sigma_{ij}^R\left(p^2\right)\right) - \left(P_L\Pi_{ij}^L\left(p^2\right) + P_R\Pi_{ij}^R\left(p^2\right)\right)\right] \quad , \tag{5.17}$$

wobei die Indizes i, j über alle 8 neutralen Fermionen laufen und die Funktionen Σ und Π die unrenormierten Selbstenergien nach einer Kovariantenzerlegung sind, welche quadratisch vom externen Impuls p abhängen. Die Funktionen Σ und Π sind dabei im $\overline{\text{DR}}$-Schema Funktionen der Passarino-Veltman-Integrale, wie sie zuvor behandelt wurden. Daher können die endlichen Anteile formal durch Subtraktion der unendlichen Anteile, praktisch durch $\Delta_\epsilon = 0$, leicht ermittelt werden, doch hängen diese renormierten Anteile $\tilde{\Sigma}$ und $\tilde{\Pi}$ dann von der beliebigen Skala μ ab. Es gilt also für die gesamten Einschleifenbeiträge:

$$\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{ij}(p,\mu) = \left[\mathbf{\Sigma}^{ij}(p)\right]_{\Delta_\epsilon=0} \tag{5.18}$$

Diese explizite Abhängigkeit verschwindet schließlich durch Anwendung der beschriebenen Renormierungsgruppengleichungen für die Massen auf Baumgraphenniveau, die zu laufenden Massen bezüglich der Renormierungsskala μ werden. Der inverse Propagator stellt sich zusammen mit dem inversen Propagator auf Baumgraphenniveau $\not{p} - m_{\chi_i^0}(\mu)$ in der Form

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = \not{p} - m_{\chi_i^0}(\mu) + \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{ii}(p,\mu) \tag{5.19}$$

dar. Die physikalische Polmasse ergibt sich aus der Nullstelle des inversen Propagators im Limes $p^2 \to m_{\chi_i^0}^2$, also nach

$$\tilde{Z}_{\chi_i^0}^{-1}\overline{u}(p)\left[\not{p} - m_{\chi_i^0}\right]u(p) = \overline{u}(p)\left[\not{p} - m_{\chi_i^0}(\mu) + \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{ii}(p,\mu)\right]u(p) \tag{5.20}$$

mit der physikalischen Polmasse $m_{\chi_i^0}$ und der multiplikativen Renormierung $\tilde{Z}_{\chi_i^0}^{-1}$ der Wellenfunktion im $\overline{\text{DR}}$-Schema, welche auftaucht, da das Residuum des $\overline{\text{DR}}$-Propagator nicht bei Eins liegt. Die beiden Diracspinoren $\overline{u}$ und u sind entsprechend der Nomenklatur "on-shell". Es gilt also insbesondere $\overline{u}(p)\gamma_5 u(p) = 0$, so dass die Terme proportional zu γ_5 in (5.17) keinen Beitrag zur Massenrenormierung liefern und die Korrektur der Masse nach (5.20) gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \delta m_{\chi_i^0} = m_{\chi_1^0} - m_{\chi_1^0}(\mu) &= \tilde{\Pi}_{ii}^V\left(m_{\chi_i^0}^2\right) - m_{\chi_i^0}\tilde{\Sigma}_{ii}^V\left(m_{\chi_i^0}^2\right) \\ \text{mit} \quad \tilde{\Sigma}^V\left(m_{\chi_i^0}^2\right) &= \tfrac{1}{2}\left(\tilde{\Sigma}^L\left(m_{\chi_i^0}^2\right) + \tilde{\Sigma}^R\left(m_{\chi_i^0}^2\right)\right) \\ \text{und} \quad \tilde{\Pi}^V\left(m_{\chi_i^0}^2\right) &= \tfrac{1}{2}\left(\tilde{\Pi}^L\left(m_{\chi_i^0}^2\right) + \tilde{\Pi}^R\left(m_{\chi_i^0}^2\right)\right) \quad . \end{aligned} \tag{5.21}$$

Die Einschleifen-korrigierten Massen der neutralen Fermionen sind durch $m_{\chi_i^0}$ gegeben und insbesondere alle ungleich Null sowie nicht mehr entartet. Um die Neutrinomischungswinkel auf Einschleifenniveau zu bestimmen, ist eine Einschleifen-korrigierte Massenmatrix der neutralen Fermionen, genannt $\mathcal{M}_{nL}$, notwendig, die schließlich numerisch, wie auch die Massenmatrix auf Baumgraphenniveau $\mathcal{M}_n$, diagonalisiert wird. Diese lässt sich definieren in der Form [44]

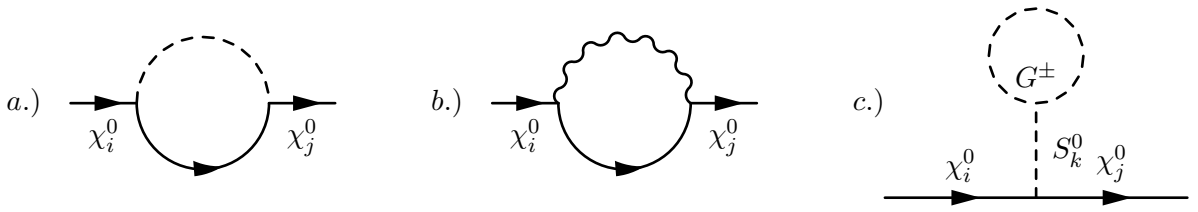
$$(\mathcal{M}_{nL})_{ij} = \left(\mathcal{M}_n^{\overline{\mathrm{DR}}}(\mu)\right)_{ij} + (\delta\mathcal{M}_n)_{ij} \tag{5.22}$$

$$\text{mit} \qquad (\delta\mathcal{M}_n)_{ij} = \frac{1}{2}\left[\Pi_{ij}^V\left(m_{\chi_i^0}^2\right) + \Pi_{ij}^V\left(m_{\chi_j^0}^2\right)\right] - \frac{1}{2}\left[m_{\chi_i^0}\Sigma_{ij}^V\left(m_{\chi_i^0}^2\right) + m_{\chi_j^0}\Sigma_{ij}^V\left(m_{\chi_j^0}^2\right)\right] \quad .$$

Die Symmetrisierung bezüglich χ_i^0 und χ_j^0 dient der Erhaltung der Eichinvarianz.

5.5. Berechnung relevanter Einschleifengraphen

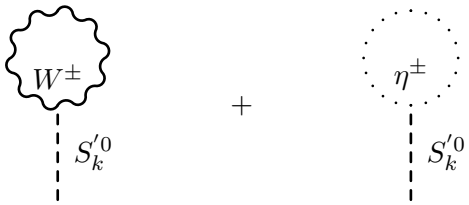
Nun gilt es alle möglichen Beiträge zur Einschleifen-korrigierten Massenmatrix der neutralen Fermionen zu berechnen. Prinzipiell sei dazu zuerst erläutert, welche Form von Einschleifengraphen auftreten können. Diese sind:



(5.23)

Bei den unter a.) dargestellten Graphen ist ein skalares Teilchen beteiligt, welches ein geladenes Skalar $S^\pm$, eine neutrales Skalar S^0, ein Pseudoskalar P^0 oder auch ein Squark $\tilde{u}$ bzw. $\tilde{d}$, stellvertretend für alle Generationen, sein kann. Entsprechend muss es sich dann natürlich um ein passend geladenes fermionisches Teilchen in der unteren Hälfte des Graphen handeln, also um ein geladenes Fermion $\chi_k^\mp$, ein neutrales Fermion χ_k^0 oder ein Quark handeln. Die Graphen unter b.) stehen für die Graphen unter Beteiligung eines Vektorbosons, also $W^\pm$ oder Z, da keine Kopplung der neutralen Fermionen an Gluonen oder das Photon möglich ist. Entsprechend läuft in der unteren Hälfte dann ein geladenes $\chi_k^\mp$ oder ein neutrales Fermion χ_k^0.
Zuletzt existieren sogenannte Tadpole-Graphen (zu deutsch: Kaulquappen-Graphen aufgrund ihres Erscheinungsbildes) wie sie unter c.) dargestellt sind. Im Allgemeinen liefern diese Art von Graphen keinen Beitrag zur Selbstenergie der Fermionen, da man eine Renormierungsbedingung so wählen kann, dass $\langle 0|\Phi|0\rangle$ verschwindet und sich die Summe aller Tadpolegraphen aufhebt. Sie haben ausschließlich Auswirkungen auf das Vakuum und die später auftretenden Tadpolegleichungen, welche als erste Ableitung des skalaren Potentials die Vakuumerwartungswerte festlegen. Tatsächlich zeigen die Tadpolegraphen mit umlaufendem W- oder Z-Boson unter

Hinzunahme ihrer Fadeev-Popov-Geister η wie



$$= i\left[T_k\left(\mu\right)\right]^{W^{\pm},\eta^{\pm}} \tag{5.24}$$

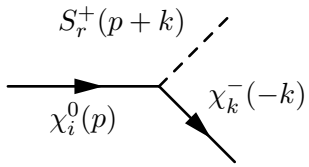
auch keine Abhängigkeit von der Eichfixierung ξ, da diese sich exakt aufhebt [44]. Anders verhält es sich mit dem oben dargestellten Graphen c.) mit umlaufendem geladenen Goldstoneboson. Dieser Graph zeigt eine explizite Abhängigkeit von der Eichfixierung ξ und wird daher den Tadpolegleichungen entnommen und der Selbstenergie der neutralen Fermionen zugeordnet, da sich die Eichabhängigkeit der Graphen a.), b.) und c.) schließlich aufheben wird. Dadurch werden die Vakuumerwartungswerte **und** die Zweipunktfunktion eichinvariant. Dennoch liefert durch die feste Wahl $\xi = 0$ letztlich auch dieser Graph keinen Beitrag zur Selbstenergie. Exemplarisch werden nachfolgend aus jeder Gruppe der dargestellten Graphen jene präsentiert, deren Eichabhängigkeit sich gerade aufhebt.
Dazu sind insbesondere die im Anhang B angegebenen Kopplungen relevant, die alle Kopplungen zu oben dargestellten Graphen umfassen. Die Beiträge der Einschleifengraphen sind schließlich unter Anhang C zusammengefasst. Allgemein ist das Auftreten des Faktors 2 anzumerken, welcher sich aufgrund der Majorana-Eigenschaft der neutralen Fermionen bei nachfolgender Rechnung ergibt. Die neutralen Fermionen werden hier zwar stets mit einem Pfeil von links nach rechts dargestellt, müssten jedoch, nimmt man es genau, mit einem Doppelpfeil dargestellt werden.

5.5.1. Einschleifengraph mit Beteiligung eines Skalars

Beispielhaft wird nachfolgend für die neutralen Fermionen der Einschleifengraph mit geladenen Skalaren $S^{\pm}$ berechnet. Ausgangspunkt ist die vierkomponentig dargestellte Lagrangedichte

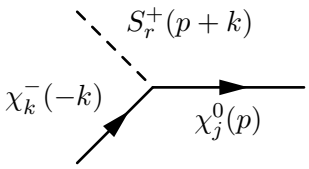
$$\mathcal{L} = \overline{\chi_i^-}\left(O^{cns}_{Lijk}P_L + O^{cns}_{Rijk}P_R\right)\chi_j^0 S_k^- + \overline{\chi_i^0}\left(O^{ncs}_{Lijk}P_L + O^{ncs}_{Rijk}P_R\right)\chi_j^- S_k^+ \tag{5.25}$$

mit den Projektionsoperatoren $P_L = \frac{1}{2}\left(1-\gamma_5\right)$ und $P_R = \frac{1}{2}\left(1+\gamma_5\right)$ und den im Anhang B dargestellten "Neutralino-Chargino-Geladenes Skalar"-Kopplungen. Mit



$$= i\left[O^{cns}_{Lkir}P_L + O^{cns}_{Rkir}P_R\right] =: iO_1 \tag{5.26}$$

und

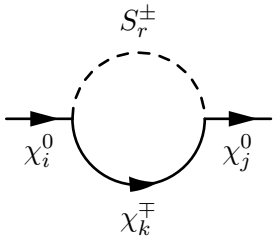


$$= i\left[O^{ncs}_{Ljkr}P_L + O^{ncs}_{Rjkr}P_R\right] =: iO_2 \tag{5.27}$$

ergibt sich im $\overline{\text{DR}}$-Schema mit $d = 4-\epsilon$ für den noch unrenormierten Einschleifenbeitrag zur Selbstenergie der neutralen Fermionen $(\mathbf{\Sigma}(p))^{S\pm}_{ijkr}$ in Abhängigkeit des Charakters aller beteiligten Teilchen

$$(\mathbf{\Sigma}(p))^{S+}_{ijkr} = 2\mu^{\epsilon}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{i}{(p+k)^2-m_r^2}iO_1\frac{i}{-\not{k}-m_k}iO_2 \tag{5.28}$$

für den Einschleifengraphen:



(5.29)

Tatsächlich sind es zwei Graphen mit positiv und negativ geladenen Skalaren bzw. geladenen Fermionen, welche jedoch aufgrund der Tatsache, dass die neutralen Fermionen Majorana-Teilchen sind, den gleichen Beitrag liefern und so einen Faktor 2 in obiger Formel bedingen. Der Einfachheit halber sind die zur Integration notwendigen komplexen Beiträge $+i\epsilon$ im Nenner der Propagatoren nicht dargestellt. Weitere Umformungen unter Abkürzung der Nenner und Verwendung der Passarino-Veltman-Integrale liefern:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{\Sigma}(p))_{ijkr}^{S+} &= i\frac{2}{16\pi^2}\frac{(2\pi\mu)^{\epsilon}}{i\pi^2}\int d^dk\frac{O_1\left((-\not{k})+m_k\right)O_2}{\left(k^2-m_k^2\right)\left((p+k)^2-m_r^2\right)} \\
&= i\frac{2}{16\pi^2}\left[-O_1\gamma_\mu O_2\frac{(2\pi\mu)^{\epsilon}}{i\pi^2}\int d^dk\frac{k^\mu}{D_0D_1}+O_1O_2m_k\frac{(2\pi\mu)^{\epsilon}}{i\pi^2}\int d^dk\frac{1}{D_0D_1}\right] \\
&= i\frac{2}{16\pi^2}\left[-O_1\gamma_\mu O_2B^\mu\left(p^2,m_k^2,m_r^2\right)+O_1O_2m_kB_0\left(p^2,m_k^2,m_r^2\right)\right]
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Beachtet man die Vertauschungrelationen für γ_5, insbesondere $[\gamma_5,\gamma_\mu]_+=0$, und $(\gamma_5)^2=1$, so folgt ganz allgemein:

$$\begin{aligned}
O_1\gamma_\mu O_2 &= \left(O_{1L}\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)+O_{1R}\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\right)\gamma_\mu\left(O_{2L}\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)+O_{2R}\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\right) \\
&= \left(O_{1L}\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)+O_{1R}\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\right)\left(O_{2L}\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)+O_{2R}\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)\right)\gamma_\mu \\
&= \left[O_{1L}O_{2R}\tfrac{1}{4}(1-\gamma_5)(1-\gamma_5)+O_{1R}O_{2L}\tfrac{1}{4}(1+\gamma_5)(1+\gamma_5)\right]\gamma_\mu \\
&= \left[O_{1L}O_{2R}\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)+O_{1R}O_{2L}\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\right]\gamma_\mu \\
&= \tfrac{1}{2}\left(O_{1L}O_{2R}+O_{1R}O_{2L}\right)\gamma_\mu+\ldots \\
O_1O_2 &= \left(O_{1L}\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)+O_{1R}\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\right)\left(O_{2L}\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)+O_{2R}\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(O_{1L}O_{2L}+O_{1R}O_{2R}\right)+\ldots
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Da unter Hinzunahme der äußeren Teilchen $\overline{u}(p)\gamma_5u(p)=0$ gilt, liefern die zu γ_5 proportionalen Terme keinen Beitrag und sind durch Punkte gekennzeichnet. Insgesamt lässt sich unter Beachtung von $B^\mu=p^\mu B_1$ die Funktion unter Ausführung der Summation über alle möglichen 5 geladenen Fermionen und die 8 möglichen geladenen Skalare schreiben in der Form:

$$(\mathbf{\Sigma}(p))_{ij}^{S+}=i\left(\not{p}\Sigma_{ij}^V\left(p^2\right)-\Pi_{ij}^V\left(p^2\right)\right)^{S+}+\ldots \tag{5.32}$$

mit

$$\left(\Sigma_{ij}^V\left(p^2\right)\right)^{S+}=-\frac{1}{16\pi^2}\sum_{r=1}^{8}\sum_{k=1}^{5}\left(O_{Rjkr}^{ncs}O_{Lkir}^{cns}+O_{Ljkr}^{ncs}O_{Rkir}^{cns}\right)B_1\left(p^2,m_k^2,m_r^2\right)$$

$$\left(\Pi_{ij}^{V}\left(p^{2}\right)\right)^{S+}=-\frac{1}{16\pi^{2}}\sum_{r=1}^{8}\sum_{k=1}^{5}\left(O_{Ljkr}^{ncs}O_{Lkir}^{cns}+O_{Rjkr}^{ncs}O_{Rkir}^{cns}\right)m_{k}B_{0}\left(p^{2},m_{k}^{2},m_{r}^{2}\right) \tag{5.33}$$

Die anderen Einschleifengraphen unter Beteiligung eines Skalar haben exakt die gleiche generische Struktur und unterscheiden sich lediglich in einzelnen Faktoren: So tritt bei den Skalaren ein zusätzlicher Faktor 1/2 auf und bei den Squarks aufgrund der drei möglichen Farbladungen der Faktor 3. Die Ergebnisse sind Anhang C zu entnehmen. Insbesondere sei darauf hingewiesen, dass diese Graphen keinerlei Abhängigkeit von der Eichfixierung zeigen. Dies verhält sich anders im nachfolgenden Abschnitt.

5.5.2. Einschleifengraph mit Beteiligung eines Eichbosons

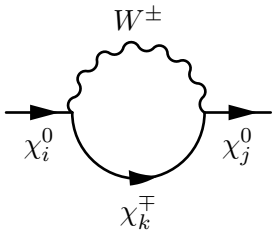
In analoger Weise kann die Amplitude für ein in der Schleife autretendes W-Boson ohne Festlegung der Eichfixierung ξ berechnet werden. Ausgangspunkt ist die vierkomponentige Lagrangedichte

$$\mathcal{L}=\overline{\chi_{i}^{-}}\gamma^{\mu}\left(O_{Lij}^{cnw}P_{L}+O_{Rij}^{cnw}P_{R}\right)\chi_{j}^{0}W_{\mu}^{-}+\overline{\chi_{i}^{0}}\gamma^{\mu}\left(O_{Lij}^{ncw}P_{L}+O_{Rij}^{ncw}P_{R}\right)\chi_{j}^{-}W_{\mu}^{+} \quad . \tag{5.34}$$

Hier ergibt sich für den unrenormierten Beitrag

$$\left(\mathbf{\Sigma}(p)\right)_{ijk}^{W}=2\mu^{\epsilon}\int\frac{d^{d}k}{(2\pi)^{d}}\left(\frac{-i\left(g^{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{(p+k)^{\mu}(p+k)^{\nu}}{(p+k)^{2}-\xi m_{W}^{2}}\right)}{(p+k)^{2}-m_{W}^{2}}\right)i\gamma_{\mu}O_{1}\frac{i}{-\not{k}-m_{k}}i\gamma_{\nu}O_{2} \tag{5.35}$$

für den Graphen:



(5.36)

Der Propagator des W-Bosons ohne Festlegung der Eichfixierung ξ motiviert bereits die Existenz von Passarino-Veltman-Integralen mit auftretenden Parametern ξm_W^2. Insgesamt liefert eine längliche Rechnung mit Summation über alle möglichen 5 geladenen Fermionen unter Vernachlässigung von Termen, welche zu γ_5 proportional sind entsprechend [44]:

$$\left(\mathbf{\Sigma}(p)\right)_{ij}^{W}=i\left(\not{p}\Sigma_{ij}^{V}\left(p^{2}\right)-\Pi_{ij}^{V}\left(p^{2}\right)\right)^{W}+\ldots \tag{5.37}$$

mit

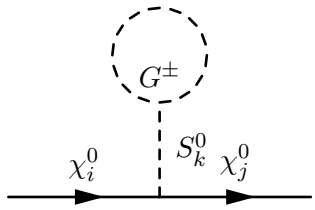
$$\begin{aligned}\left(\Sigma_{ij}^{V}\left(p^{2}\right)\right)^{W}=-\frac{1}{16\pi^{2}}\sum_{k=1}^{6}\left(O_{Ljk}^{ncw}O_{Lki}^{cnw}+O_{Rjk}^{ncw}O_{Rki}^{cnw}\right)\Big[&2B_{1}\left(p^{2},m_{k}^{2},m_{W}^{2}\right)+B_{0}\left(p^{2},m_{k}^{2},m_{W}^{2}\right)\\&-\xi B_{0}\left(p^{2},m_{k}^{2},\xi m_{W}^{2}\right)-\frac{m_{k}^{2}-p^{2}}{m_{W}^{2}}\left(B_{1}\left(p^{2},m_{W}^{2},m_{k}^{2}\right)-B_{1}\left(p^{2},\xi m_{W}^{2},m_{k}^{2}\right)\right)\Big]\end{aligned}$$

$$\left(\Pi_{ij}^{V}\left(p^{2}\right)\right)^{W}=\frac{1}{16\pi^{2}}\sum_{k=1}^{6}\left(O_{Ljk}^{ncw}O_{Rki}^{cnw}+O_{Rjk}^{ncw}O_{Lki}^{cnw}\right)m_{k}\left[3B_{0}\left(p^{2},m_{k}^{2},m_{W}^{2}\right)+\xi B_{0}\left(p^{2},m_{k}^{2},\xi m_{W}^{2}\right)\right] \tag{5.38}$$

Abermals sind die Ergebnisse für das Z-Boson generisch von der gleichen Struktur und können im Anhang C nachgeschlagen werden. Im Gegensatz zu den Einschleifengraphen zuvor jedoch sind diese Ergebnisse offensichtlich von der Eichfixierung ξ abhängig.

5.5.3. Tadpolegraphen

Dieser Abschnitt präsentiert den aus den Tadpolegleichungen herausgenommenen Tadpolegraphen, der unter Hinzunahme zur Selbstenergie die Eichabhängigkeit der zuvor diskutierten Graphen gerade aufhebt. Für den Graphen



(5.39)

ist der unrenormierte Beitrag zur Selbstenergie der geladenen Fermionen

$$\left(\mathbf{\Sigma}^{V}\right)_{ij}^{\text{Tad.}}=i\left(\not{p}\Sigma_{ij}^{V}-\Pi_{ij}^{V}\right)^{\text{Tad.}} \qquad , \tag{5.40}$$

welcher aufgrund von $\left(\Sigma_{ij}^{V}\right)^{\text{Tad.}}=0$ ausschließlich folgenden Term aufweist:

$$\left(\Pi_{ij}^{V}\right)^{\text{Tad.}}=-\frac{1}{32\pi^{2}}\sum_{k=1}^{6}\left(O_{Ljik}^{nns}+O_{Rjik}^{nns}\right)\frac{1}{m_{S_{k}^{0}}}g_{kG^{+}G^{-}}^{S^{0}S^{+}S^{-}}A_{0}\left(\xi m_{W}^{2}\right) \tag{5.41}$$

Die hier auftretenden Kopplungen g sind unter dem Punkt "Kopplungen neutraler Skalare" ebenfalls in Anhang B zu finden. Die Unabhängigkeit der Selbstenergie von der Eichfixierung ξ unter Hinzunahme dieser Tadpolegraphen ist damit gegeben und für das Modell mit bilinearer R-Paritätsverletzung für ξ bis zu Werten von 10^9 auch numerisch nachgewiesen [44]. Da dieser Graph eine einfache Abhängigkeit vom einfachsten Passarino-Veltman-Integral aufweist, welches der Eigenschaft $A_0(0)=0$ genügt, sei im Folgenden die Eichfixierung der Landau-Eichung $\xi=0$ gewählt, so dass diese Graphen keinen Beitrag zur Selbstenergie der neutralen Fermionen liefern. Im Anhang C sind daher die Resultate zu den Selbstenergien aus den Graphen vom Typ a.) und b.) für $\xi=0$ angegeben.

5.6. Einschleifen-korrigierte Neutrinomassenmatrix

Mit den bereits präsentierten Ergebnissen liegt die Massenmatrix der neutralen Fermionen nun also auf Einschleifenniveau $\mathcal{M}_{nL}$ vor. Es folgt noch eine Diskussion bezüglich der Auswirkungen auf die Neutrinomassenmatrix (4.26), welche auf Baumgraphenniveau unter der Bezeichnung $m_{\text{eff.}}$ dargestellt wurde. Während sich dort nur die Form $(m_{\text{eff.}})_{ij}=a\Lambda_i\Lambda_j$ ergibt, liefert die

Einschleifen-korrigierte Massenmatrix der neutralen Fermionen approximativ die Neutrinomassenmatrix

$$(m_{\text{eff.}L})_{ij} = a\Lambda_i\Lambda_j + b\left(\Lambda_i\epsilon_j + \epsilon_i\Lambda_j\right) + c\epsilon_i\epsilon_j \tag{5.42}$$

mit den bereits bekannten Größen $\Lambda_i = \epsilon_i v_d + \mu v_i$, $\epsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_\nu\right)_i v_c$ und $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda v_c$ und den Parametern a, b und c, welche die Dimension $(eV)^{-3}$, $(eV)^{-2}$ und $(eV)^{-1}$ tragen. Dies verlangt eine kurze Begründung:
Wie zuvor gesehen sind die Beiträge zur Selbstenergie der neutralen Fermionen im wesentlichen

$$\left(\Sigma^V_{ij}, \Pi^V_{ij}\right) \sim \sum \left(\mathcal{O}_{i,a}\mathcal{O}_{j,b} + \mathcal{O}_{i,c}\mathcal{O}_{j,d}\right)\left(B_1, mB_0\right) \tag{5.43}$$

mit unterschiedlichen Kopplungen $\mathcal{O}$. Nun ist die auf Baumgraphenniveau eingeführte Entwicklungsmatrix ξ (A.53) von der Form $\xi_{i\alpha} = f_\alpha\epsilon_i + g_\alpha\Lambda_i$. Da diese Matrix die Kopplung zwischen Neutrinos und Neutralinos enthält, lassen sich Produkte der angegebenen Kopplungen approximativ parametrisieren nach

$$\mathcal{O}_{i,a}\mathcal{O}_{j,b} \sim \left(f_a\epsilon_i + g_a\Lambda_i\right)\cdot\left(f_b\epsilon_j + g_b\Lambda_j\right)\cdot F\left(\ldots\right) \tag{5.44}$$

mit einer Funktion F, welche alle weiteren SUSY-Parameter enthält, aber wenn überhaupt nur eine schwache Indexstruktur aufweist. Damit ergibt sich letztlich die angesprochene Form (5.42) für die korrigierte Neutrinomassenmatrix $m_{\text{eff.}L}$. Dass diese Approximation ihre Berechtigung hat, zeigt die später verwendete Neutrinofitroutine, welche iterativ die Yukawakopplungen $\left(Y_\nu\right)_i$ und die Vakuumerwartungswerte der linkshändigen Sneutrinos v_i so variiert, dass die aktuellsten Neutrinodaten aus Tabelle 2.3 erfüllt sind.
Die erhaltene Form von $m_{\text{eff.}L}$ erlaubt einen Fit sowohl an atmosphärische als auch solare Neutrinodaten und deckt damit die heutigen Neutrinokenntnisse vollständig ab. Prinzipiell jedoch existieren zwei Optionen: Entweder man wählt $\vec{\Lambda} = \left(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\right)^T$ als Fitparameter für die atmosphärischen Daten und entsprechend $\vec{\epsilon} = \left(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\right)^T$ für die solaren Daten oder umgekehrt. In Analogie zu [56] sei die erste Variante gewählt. Unter der Annahme der Dominanz des ersten und letzten Terms gegenüber dem zweiten Term in (5.42), was einer Trennung des atmosphärischen Problems gegenüber dem solaren Problem bedeutet, ergibt sich dann für die neutrinorelevanten Winkel in guter Näherung

$$\tan^2\theta_{13} \approx \left(\frac{\Lambda_1}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}}\right)^2, \qquad \tan^2\theta_{\text{atm}} \approx \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3}\right)^2 \qquad \text{und} \qquad \tan^2\theta_{\text{sol}} \approx \left(\frac{\tilde{\epsilon}_1}{\tilde{\epsilon}_2}\right)^2 \quad , \tag{5.45}$$

wobei $\vec{\tilde{\epsilon}} = \mathcal{V}^T\vec{\epsilon}$ mit der Diagonalisierungsmatrix $\mathcal{V}^T$, welche die Neutrinomassenmatrix auf Baumgraphenniveau, also nur $(m_{\text{eff.}})_{ij} = a\Lambda_i\Lambda_j$ diagonalisiert. Diese kann approximativ geschrieben werden in der Form [56]

$$\mathcal{V}^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\Lambda_2^2+\Lambda_3^2}}{|\vec{\Lambda}|} & -\frac{\Lambda_1\Lambda_2}{\sqrt{\Lambda_2^2+\Lambda_3^2}} & -\frac{\Lambda_1\Lambda_3}{\sqrt{\Lambda_2^2+\Lambda_3^2}} \\ 0 & \frac{\Lambda_3}{\sqrt{\Lambda_2^2+\Lambda_3^2}} & -\frac{\Lambda_2}{\sqrt{\Lambda_2^2+\Lambda_3^2}} \\ \frac{\Lambda_1}{|\vec{\Lambda}|} & \frac{\Lambda_2}{|\vec{\Lambda}|} & \frac{\Lambda_3}{|\vec{\Lambda}|} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.46}$$

Auf Basis dieser Kenntnisse kommt im später verwendeten Programm eine Fitroutine zum Einsatz, die in einer endlichen Anzahl von Iterationen durch Variation von v_i und $\left(Y_\nu\right)_i$ die

bekannten Neutrinodaten zu erfüllen versucht. Dabei kommt es zum Ende einer jeden Iteration zur genauen, numerischen Berechnung der Eigenwerte und der Diagonalisierungsmatrix der Einschleifen-korrigierten Neutralinomassenmatrix und damit zu genauen numerischen Werten für die Neutrinodaten. Diese berechnen sich aus der gesamten Massenmatrix $\mathcal{M}_{nL}$ nach

$$m_{\text{atm}}^2 = \left(m_3^{\mathcal{M}_{nL}}\right)^2 - \left(m_2^{\mathcal{M}_{nL}}\right)^2, \qquad m_{\text{sol}}^2 = \left(m_2^{\mathcal{M}_{nL}}\right)^2 - \left(m_1^{\mathcal{M}_{nL}}\right)^2$$
$$\tan^2\theta_{\text{atm}} \approx \left|\frac{\mathcal{N}_{3,7}^L}{\mathcal{N}_{3,8}^L}\right|^2, \qquad \tan^2\theta_{\text{atm}} \approx \left|\frac{\mathcal{N}_{2,6}^L}{\mathcal{N}_{1,6}^L}\right|^2 \qquad \text{und} \qquad \tan^2\theta_{\text{R}} \approx \left|\mathcal{N}_{3,6}^L\right|^2 \tag{5.47}$$

wobei $m_i^{\mathcal{M}_{nL}}$ den i-ten Eigenwert von $\mathcal{M}_{nL}$ und $\mathcal{N}_{i,j}^L$ das (i,j)-te Element der unitären Diagonalisierungsmatrix von $\mathcal{M}_{nL}$ ist. Dies leuchtet bei der Betrachtung von $\mathcal{U}^T$ aus (2.10) unter Beachtung der Tatsache, dass die Neutrinos nach der Diagonalisierung auf den ersten drei Positionen der Diagonalmatrix landen, sofort ein. Hierbei ist noch zu bemerken, dass die Yukawa-Kopplungen der Leptonen als diagonal gewählt und die Beiträge von R-Paritätsverletzenden Termen als klein angenommen sind. Weiterhin ist zu erwähnen, dass für kleine Winkel $\tan\theta_{\text{R}} \approx \sin\theta_{\text{R}} = \sin\theta_{13}$ gilt. Die Neutrinofitroutine wird im Anhang D näher erläutert, liefert jedoch für (fast) alle Parameterkombinationen ein Ergebnis, so dass die Resultate aus (5.47) mit den Neutrinodaten konform sind.

Nachdem die Frage der Neutrinophysik im $\mu\nu$SSM mit einem rechtshändigen Neutrinosuperfeld geklärt ist, folgt als nächstes eine allgemeine Betrachtung von Teilchenzerfällen, da insbesondere die Zerfälle des leichtesten Neutralinos χ_1^0, welches die Masse $m_4^{\mathcal{M}_{nL}}$ aufweist, einer genaueren Untersuchung bedarf. Schließlich unterscheidet dies die Phänomenologie des Modells von Modellen mit erhaltener R-Parität und grenzt es möglicherweise gegenüber anderen Modellen mit gebrochener R-Parität ab.

6. Zerfälle

Dieses Kapitel dient der Berechnung von einfachen Zwei- und Dreikörperzerfällen, insbesondere des leichtesten Neutralinos χ_1^0, wobei das später verwendete Programm diese bereits beinhaltet, so dass hier nur grundsätzliche Überlegungen zu Zerfällen von Teilchen anstehen. Zudem werden bei der späteren Auswertung Zerfälle des leichtesten Skalars und des leichtesten Pseudoskalars relevant, da das leichteste Neutralino beispielsweise in der Form $\chi_1^0 \to S_1^0, \nu_i$ zerfallen kann. Zu Beginn folgt eine einfache Rechnung zu Zweikörperzerfällen.

6.1. Zweikörperzerfälle

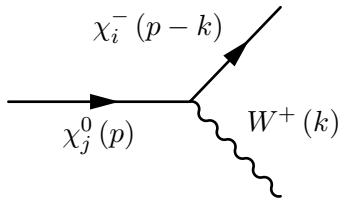
Hier sollen zwei Beispiele des Zerfalls des leichtesten Neutralinos χ_1^0 berechnet werden, wobei insbesondere der erste Fall in genau dieser Weise später in der Auswertung auftreten wird.

6.1.1. Zerfall in geladenes Fermion und W

Zuerst soll der Zerfall $\chi_i^0 \to W^+, \chi_i^-$ betrachtet werden. Ausgangspunkt ist die vierkomponentige Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \overline{\chi_i^-}\gamma^\mu \left(O_{Lij}^{cnw} P_L + O_{Rij}^{cnw} P_R\right) \chi_j^0 W_\mu^- \qquad , \tag{6.1}$$

mit den wiederum im Anhang B angegebenen Kopplungsstärken. Aus dem Feynmangraphen



(6.2)

ergibt sich die zugehörige Übergangsamplitude

$$M = i\epsilon_\mu^*(k)\overline{u}(p-k)\gamma^\mu \left[O_{Lij}^{cnw} P_L + O_{Rij}^{cnw} P_R\right] u(p) \qquad . \tag{6.3}$$

Mit $P_L^\dagger = P_L$ und $P_R^\dagger = P_R$ wegen $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$, sowie $\left\{\gamma^5, \gamma^0\right\} = 0$ liefert die Rechnung für die adjungierte Übergangsamplitude den Beitrag

$$\begin{aligned} M^\dagger &= -i\epsilon_\nu(k)u(p)^\dagger \left[O_{Lij}^{cnw} P_L + O_{Rij}^{cnw} P_R\right]^\dagger \gamma^{\nu\dagger}\overline{u}(p-k)^\dagger \\ &= -i\epsilon_\nu(k)u(p)^\dagger \left[O_{Lij}^{cnw*} P_L + O_{Rij}^{cnw*} P_R\right] \gamma^0\gamma^\nu\gamma^0\gamma^{0\dagger}u(p-k) \\ &= -i\epsilon_\nu(k)\overline{u}(p) \left[O_{Lij}^{cnw*} P_R + O_{Rij}^{cnw*} P_L\right] \gamma^\nu u(p-k) \qquad . \end{aligned} \tag{6.4}$$

Summation über die Polarisationen bzw. Spins unter Beachtung der Spinmittelung im Anfangs-

zustand ergibt weiter für das Betragsquadrat der Übergangsamplitude

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{\text{Spins}} MM^\dagger &= \frac{1}{2}\sum_{\text{Spins}} \epsilon^*_\mu(k)\epsilon_\nu(k)\overline{u}(p-k)\gamma^\mu\left[O^{cnw}_{Lij}P_L + O^{cnw}_{Rij}P_R\right]\cdot \\ &\qquad \cdot u(p)\overline{u}(p)\left[O^{cnw*}_{Lij}P_R + O^{cnw*}_{Rij}P_L\right]\gamma^\nu u(p-k) = \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[(\not{p}-\not{k}+m_j)\gamma^\mu\left(O^{cnw}_{Lij}P_L + O^{cnw}_{Rij}P_R\right)\cdot\right. \\ &\qquad \left.\cdot(\not{p}+m_i)\left(O^{cnw*}_{Lij}P_R + O^{cnw*}_{Rij}P_L\right)\gamma^\nu\left(-g_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}\right)\right] \quad . \end{aligned} \tag{6.5}$$

Unter Verwendung üblicher Rechenregeln für Spuren von Gammamatrizen (beispielsweise aus [1]) liefert eine Rechnung das Resultat

$$\begin{aligned}|M|^2 := \frac{1}{2}\sum_{\text{Spins}} MM^\dagger &= \left(\left|O^{cnw}_{Lij}\right|^2 + \left|O^{cnw}_{Rij}\right|^2\right)\left(\frac{2}{m_W^2}(pk)(pk) + m_j^2 - 3(pk)\right) \\ &\qquad - 3m_i m_j\left(O^{cnw}_{Lij}O^{cnw*}_{Rij} + O^{cnw*}_{Lij}O^{cnw}_{Rij}\right) \quad . \end{aligned} \tag{6.6}$$

Um die Zerfallsrate zu ermitteln, welche sich differentiell nach [9] zu

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2m_j}|M|^2\, d\Phi_2(p,k,p') \tag{6.7}$$

mit $p' = p - k$ und

$$d\Phi_2(p,k,p') = \delta^4(p-k-p')\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\,2E}\frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3\,2E'} \tag{6.8}$$

sowie $E = \sqrt{\vec{k}^2 + m_W^2}$ und $E' = \sqrt{\vec{p}' + m_i^2}$ ergibt, wird der Einfachheit halber das Ruhesystem des Neutralinos betrachtet, in welchem gilt:

$$\vec{p} = 0, \qquad \vec{k} = -\vec{p}' \qquad \text{und damit} \qquad E^2 = \vec{k}^2 + m_W^2 = \vec{p}'^2 + m_W^2 = E'^2 - m_i^2 + m_W^2 \tag{6.9}$$

Damit folgt weiter durch einfache Umformungen:

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{(2\pi)^4}{2m_j}|M|^2\frac{1}{4(2\pi)^6}\frac{d^3\vec{k}}{E\sqrt{E^2 - m_W^2 + m_i^2}}\delta(\underbrace{m_j - E - \sqrt{E^2 - m_W^2 + m_i^2}}_{=:f(E)}) \\ &= \frac{1}{32\pi^2 m_j}|M|^2\frac{|\vec{k}|^2 d|\vec{k}|d\Omega\delta\left(f(E)\right)}{E\sqrt{E^2 - m_W^2 + m_i^2}} \end{aligned} \tag{6.10}$$

Im nächsten Schritt kann die Integration mit Hilfe von

$$|\vec{k}| = \sqrt{E^2 - m_W^2} \qquad \text{und somit} \qquad \frac{d|\vec{k}|}{dE} = \frac{E}{\sqrt{E^2 - m_W^2}} \tag{6.11}$$

auf die Energie E umgeschrieben werden und es folgt:

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2 m_j} |M|^2 \, d\Omega \frac{\sqrt{E^2 - m_W^2}}{\sqrt{E^2 - m_W^2 + m_i^2}} dE \delta\left(f(E)\right)$$

Beachtet man die Beziehung

$$\int dx \delta(f(x)) g(x) = \left.\frac{g(x)}{|f'(x)|}\right|_{f(x)=0} \quad , \tag{6.12}$$

so ergibt sich im nächsten Schritt mit $f(E) = 0$

$$E = \frac{m_j^2 + m_W^2 - m_i^2}{2m_j} \qquad \text{und} \qquad \left|f'(E)\right| = 1 + \frac{E}{\sqrt{E^2 - m_W^2 + m_i^2}} \quad . \tag{6.13}$$

Dies erlaubt die Umformung auf

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2 m_j} |M|^2 \frac{\sqrt{E^2 - m_W^2}}{\sqrt{E^2 - m_W^2 + m_i^2} + E} = \frac{1}{32\pi^2 m_j} |M|^2 \frac{1}{2m_j^2} \lambda^{\frac{1}{2}} \left(m_j^2, m_W^2, m_i^2\right) \tag{6.14}$$

mit der sogenannten Källen-Funktion $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz$. Beachtet man nun noch $(pk) = m_j E = \frac{1}{2}\left(m_j^2 + m_W^2 - m_i^2\right)$ und führt die Winkelintegration aus, welche den Faktor 4π liefert, so bleibt:

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{1}{16\pi m_j^3} \lambda^{\frac{1}{2}} \left(m_j^2, m_W^2, m_i^2\right) |M|^2 \qquad \text{mit} \\
|M|^2 &= \left(\left|O_{Lij}^{cnw}\right|^2 + \left|O_{Rij}^{cnw}\right|^2\right) \left(\frac{1}{2m_W^2}\left(m_j^2 + m_W^2 - m_i^2\right)^2 + m_j^2 - \frac{3}{2}\left(m_j^2 + m_W^2 - m_i^2\right)\right) \\
&\quad - 3m_i m_j \left(O_{Lij}^{cnw} O_{Rij}^{cnw*} + O_{Lij}^{cnw*} O_{Rij}^{cnw}\right)
\end{aligned} \tag{6.15}$$

6.1.2. Zerfall in geladenes Fermion und geladenes Skalar

Ausgangspunkt für den Zerfall $\chi_j^0 \to \chi_i^-, S_k^+$ ist die vierkomponentige Lagrangedichte aus Anhang B

$$\mathcal{L} = \overline{\chi_i^-} \left(O_{Lijk}^{cns} P_L + O_{Rijk}^{cns} P_R\right) \chi_j^0 S_k^- \quad , \tag{6.16}$$

welche es gestattet die Übergangsamplitude einfach darzustellen in der Form

$$M = i\overline{u}(p-k) \left[O_{Lijk}^{cns} P_L + O_{Rijk}^{cns} P_R\right] u(p) \quad . \tag{6.17}$$

Analoge Berechnungen wie im Abschnitt zuvor liefern schließlich

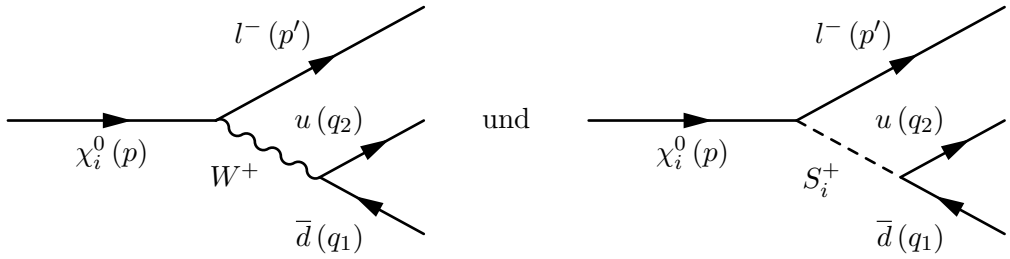
$$|M|^2 := \frac{1}{2} \sum_{\text{Spins}} M M^\dagger = \left(\left|O_{Lijk}^{cns}\right|^2 + \left|O_{Rijk}^{cns}\right|^2\right) \left(m_j^2 - (kp)\right) + m_i m_j \left(O_{Lijk}^{cns} O_{Rijk}^{cns*} + O_{Lijk}^{cns*} O_{Rijk}^{cns}\right) \quad . \tag{6.18}$$

Für die Zerfallsbreite ergibt sich somit das Ergebnis

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi m_j^3}\lambda^{\frac{1}{2}}\left(m_j^2, m_k^2, m_i^2\right)|M|^2 \qquad \text{mit}$$
$$|M|^2 = \left(\left|O^{cns}_{Lijk}\right|^2 + \left|O^{cns}_{Rijk}\right|^2\right)\frac{1}{2}\left(m_j^2 + m_i^2 - m_k^2\right) + m_i m_j\left(O^{cns}_{Lijk}O^{cns*}_{Rijk} + O^{cns*}_{Lijk}O^{cns}_{Rijk}\right) \quad . \tag{6.19}$$

6.2. Dreikörperzerfälle

Dieser Abschnitt dient der Betrachtung von Dreikörperzerfällen. Am Umfang der kinematischen Betrachtungen für den Zweikörperzerfall ist bereits einsichtig, dass die Kinematik beim Dreikörperzerfall bei Beachtung von Massen der äußeren Teilchen ein Ausmaß annimmt, welches den Umfang dieser Arbeit sprengen würde. Daher wird ein einfacher Prozess, nämlich der Zerfall $\chi_1^0 \to l^-, u, \overline{d}$, also der Zerfall in ein negativ geladenes Lepton, welche in diesem Modell Inhalt der geladenen Fermionmassenmatrix sind, und ein Quark-Antiquarkpaar betrachtet und dabei nur das einlaufende Teilchen eine Masse erhalten. Tatsächlich sind die Massen der auslaufenden Teilchen maximal 2GeV groß, wenn es sich beim auslaufenden Lepton um ein τ^- handelt. Theoretisch könnte ebenfalls der Zerfall in $l^-, u, \overline{b}$ betrachtet werden, dieser ist jedoch mit den flavourverletzenden Kopplungen genauso zu behandeln. Es sind also folgende Graphen relevant:



(6.20)

Der Einfachheit halber seien die Graphen mit Squarkaustausch vernachlässigt, da die später bei den Ergebnissen auftretenden Squarks stets Massen größer als 300GeV haben und damit deutlich gegenüber den dargestellten Möglichkeiten unterdrückt sind. Die Massen der geladenen Skalare liegen zumeist zwischen 100GeV und 200GeV und spielen damit eine gegenüber der W-Masse von $m_W = 80,4$GeV deutlich größere Rolle. Dies vereinfacht die Form des Matrixelements erheblich, die Kinematik kann aber genauso abgehandelt werden. Zuerst gilt es, wie auch bei den Zweikörperzerfällen, das Matrixelement M aufzustellen. Die relevanten "Chargino-Neutralino-W"- bzw. "Chargino-Neutralino-Geladenes Skalar"-Kopplungen können Anhang B entnommen werden. Die Kopplungen der Quarks an das W-Boson oder eines der geladenen Skalare S_i^+ unterscheidet sich nicht von der des MSSM, da sich unter der Beachtung $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda v_c$ sonst keine neuen Beiträge ergeben. Um die Notation zu verkürzen seien die Kopplungen

$$O^{lW} = O_L^{lW}P_L + O_R^{lW}P_R \qquad \text{und} \qquad O_i^{lS} = O_{Li}^{lS}P_L + O_{Ri}^{lS}P_R \quad ,$$
$$O^{qW} = O_L^{qW}P_L + O_R^{qW}P_R \qquad \text{und} \qquad O_i^{qS} = O_{Li}^{qS}P_L + O_{Ri}^{qS}P_R \quad , \tag{6.21}$$

eingeführt, wobei i den Index des ausgetauschten Skalars S_i^+ meint und l stellvertretend für Lepton, sowie q für Quark stehe. Damit ergibt sich für das Matrixelement in der Landau-Eichung

$\xi = 0$:

$$M = i\overline{u}\left(p'\right)\gamma^{\mu}O^{lW}u\left(p,m_{\chi}\right)\frac{i\left(-g_{\mu\nu}+\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2}\right)}{k^2-m_W^2+i\epsilon}i\overline{u}\left(q_1\right)\gamma^{\nu}O^{qW}u^c\left(q_2\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{8}i\overline{u}\left(p'\right)O_k^{lS}u\left(p,m_{\chi}\right)\frac{i}{k^2-m_k^2+i\epsilon}i\overline{u}\left(q_1\right)O_k^{qS}u^c\left(q_2\right) \tag{6.22}$$

Die Berechnung der adjungierten Übergangsamplitude und die Ausführung der Summation über die Spins unter Beachtung der Spinmittelung im Anfangszustand erfolgt hier mit dem Programm feyncalc. Hierbei ist darauf zu achten, dass explizit komplexe Kopplungen verwendet werden, da feyncalc nur von reellen Kopplungen ausgeht. Der Vorteil gegenüber einer Rechnung mit der Hand ist die deutlich leichter erkennbare Struktur der Interferenzterme, welche zwischen den Feynmangraphen auftreten. Auch die anschließende Auswertung der Spuren liefert feyncalc auf einfache Art und Weise, so dass als Betragsquadrat der Übergangsamplitude folgender Ausdruck bleibt:

$$|M|^2 := \frac{1}{2}\sum_{\text{Spins}}MM^{\dagger} = 4\left(pp'\right)\left(q_1q_2\right)\left[\frac{12}{\left(k^2-m_W^2\right)^2}\mathcal{O}^W\right.$$
$$\left.+\sum_{i,j=1}^{8}\frac{1}{\left(k^2-m_i^2\right)\left(k^2-m_j^2\right)}\mathcal{O}_{ij}^S\right]$$

Dabei sind der Einfachheit halber die Größen

$$\mathcal{O}^W = \left(\left|O_L^{lW}\right|^2+\left|O_R^{lW}\right|^2\right)\left(\left|O_L^{qW}\right|^2+\left|O_R^{qW}\right|^2\right)$$
$$\mathcal{O}_{ij}^S = \frac{1}{2}\left[\left(O_{Li}^{lS*}O_{Lj}^{lS}+O_{Ri}^{lS*}O_{Rj}^{lS}\right)\left(O_{Li}^{qS*}O_{Lj}^{qS}+O_{Ri}^{qS*}O_{Rj}^{qS}\right)\right.$$
$$\left.+\left(O_{Li}^{lS}O_{Lj}^{lS*}+O_{Ri}^{lS}O_{Rj}^{lS*}\right)\left(O_{Li}^{qS}O_{Lj}^{qS*}+O_{Ri}^{qS}O_{Rj}^{qS*}\right)\right] \tag{6.23}$$

definiert. Hierbei ist festzuhalten, dass zum einen die Masse des einlaufenden leichtesten Neutralinos χ_1^0 nicht mehr auftritt und zum anderen keine Interferenzterme zwischen dem Graph mit W^+-Austausch und den Graphen mit S_i^+ existieren. Beides hat seinen Grund in der angenommenen Masselosigkeit der auslaufenden Teilchen, da somit stets ungerade Anzahlen von Gammamatrizen bei den Spurauswertungen wegfallen. Mit dieser Kenntnis kann, analog zu den Zweikörperzerfällen, zur Zerfallsrate übergegangen werden, die sich nach [9] zu

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2m_{\chi}}|M|^2\,d\Phi_3(p,p',q_1,q_2) \tag{6.24}$$

mit

$$d\Phi_3(p,p',q_1,q_2) = \delta^4(p-p'-q_1-q_2)\frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3\,2E'}\frac{d^3\vec{q}_1}{(2\pi)^3\,2E_1}\frac{d^3\vec{q}_2}{(2\pi)^3\,2E_2} \tag{6.25}$$

ergibt. Bei Dreikörperzerfällen gibt es den einfachen Trick, zuerst die Phasenraumintegration über zwei Impulse der auslaufenden Teilchen auszuführen. Dies seien hier die beiden Quarks mit den Impulsen q_1 und q_2. Dazu bezeichne k den Impuls des ausgetauschten Teilchens, es ist also

$p - p' = k = q_1 + q_2$. Dann ist das Phasenraumintegral über die zwei Quarkimpulse

$$\mathcal{I}^{\mu\nu}(k) = (2\pi)^4 \int \frac{d^3\vec{q}_1}{(2\pi)^3\, 2E_1} \frac{d^3\vec{q}_2}{(2\pi)^3\, 2E_2} q_1^\mu q_2^\nu \delta^4(k - q_1 - q_2) \quad . \tag{6.26}$$

Da es sich um ein Lorentz-kovariantes Integral handelt, kann es nur von der Form [4]

$$\mathcal{I}^{\mu\nu}(k) = A\left(k^2\right) g^{\mu\nu} + B\left(k^2\right) k^\mu k^\nu \tag{6.27}$$

sein. Geht man in das Ruhesystem der beiden Squarks mit $\vec{q}_1 = -\vec{q}_2$, so lässt sich dieses Integral einfach lösen [4] und man erhält als allgemeines Resultat:

$$\mathcal{I}^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{96\pi}\left(k^2 g^{\mu\nu} + 2k^\mu k^\nu\right) \tag{6.28}$$

Setzt man dies in die differentielle Zerfallsrate ein und beachtet dabei $\mathcal{I}^\mu_\mu = \frac{1}{16\pi}k^2$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} d\Gamma =& \frac{1}{16\pi}\frac{1}{2m_\chi}\frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3\, 2E'} 4\left(pp'\right) k^2 \cdot \\ & \cdot \left[\mathcal{O}^W \frac{12}{\left(k^2 - m_W^2\right)^2} + \sum_{i,j=1}^{8} \frac{\mathcal{O}^S_{ij}}{\left(k^2 - m_i^2\right)\left(k^2 - m_j^2\right)}\right] \quad . \end{aligned} \tag{6.29}$$

Zur Berechnung der Zerfallsrate sei nun das Ruhesystems des leichtesten Neutralinos χ_1^0 gewählt. Dann gilt

$$p = (m_\chi, 0, 0, 0)^T, \qquad p' = \left(E', \vec{p}'\right), \qquad k = q_1 + q_2 = p - p' = \left(m_\chi - E', -\vec{p}'\right) \quad . \tag{6.30}$$

Insbesondere folgt daraus im Limes $m' \to 0$ und unter Beachtung von $\vec{p}'^2 = E'^2 - m'^2$ schließlich

$$\begin{aligned} & k^2 = m_\chi^2 - 2m_\chi E' + E'^2 - \vec{p}'^2 = m_\chi^2 + m'^2 - 2m_\chi E' \approx m_\chi^2 - 2m\chi E' \\ & \text{und} \qquad pp' = m_\chi E' \quad . \end{aligned} \tag{6.31}$$

Zuletzt kann die Integration über den Impuls des auslaufenden Leptons p' in Kugelkoordinaten umgeformt werden

$$\frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3\, 2E'} = \left.\frac{|\vec{p}'|^2\, d\,|\vec{p}'|\, d\Omega}{(2\pi)^3\, 2E'}\right|_{E'=|\vec{p}'|} = \frac{E'^2 dE' d\Omega}{(2\pi)^3\, 2E'} \quad . \tag{6.32}$$

Beachtet man weiter, dass die maximal auftretende Energie des auslaufenden Leptons im Falle zweier in die entgegengesetzte Richtung laufende Quarks $E'_{\max} = m_\chi/2$ sein kann, und die Winkelintegration einen Faktor 4π liefert, so folgt

$$\begin{aligned} \Gamma =& \frac{1}{32\pi^3}\int_0^{m_\chi/2} dE' E'^2 \left(m_\chi^2 - 2m_\chi E'\right) \cdot \\ & \cdot \left[\mathcal{O}^W \frac{12}{\left(m_\chi^2 - 2m_\chi E' - m_W^2\right)^2} + \sum_{i,j=1}^{8} \frac{\mathcal{O}^S_{ij}}{\left(m_\chi^2 - 2m_\chi E' - m_i^2\right)^2\left(m_\chi^2 - 2m_\chi E' - m_j^2\right)^2}\right] \quad . \end{aligned} \tag{6.33}$$

Die Ausführung dieses Integrals ist analytisch ohne größere Schwierigkeiten möglich und führt auf logarithmische Abhängigkeiten. Die gesamte Zerfallsrate von $\chi_1^0 \to l^-, u, \overline{d}$ unter Vernachlässigung der Feynmangraphen mit Squarkaustausch ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned}\Gamma =& \frac{1}{32\pi^3}\left\{\mathcal{O}^W\left[\frac{9m_W^2}{2m_\chi} - \frac{15}{4}m_\chi + \left(\frac{3}{2}m_\chi - 6\frac{m_W^2}{m_\chi} + \frac{9m_W^4}{2m_\chi^3}\right)\log\left(\frac{m_W^2 - m_\chi^2}{m_W^2}\right)\right]\right.\\ &+ \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{8} \frac{\mathcal{O}_{ij}^S}{16m_\chi^3\left(m_i^2 - m_j^2\right)}\left[\left(2m_i^6 - 4m_\chi^2 m_i^4 + 2m_\chi^4 m_i^2\right)\log\left(\frac{m_i^2 - m_\chi^2}{m_i^2}\right)\right.\\ &\qquad - \left(2m_j^6 - 4m_\chi^2 m_j^4 + 2m_\chi^4 m_j^2\right)\log\left(\frac{m_j^2 - m_\chi^2}{m_j^2}\right)\\ &\qquad \left. + 2m_\chi^2\left(m_i^4 - m_j^4\right) - 3m_\chi^4\left(m_i^2 - m_j^2\right)\right]\\ &\left. + \sum_{i=1}^{8}\frac{\mathcal{O}_{ii}^S}{16m_\chi^3}\left[\left(6m_i^4 - 8m_\chi^2 m_i^2 + 2m_\chi^4\right)\log\left(\frac{m_i^2 - m_\chi^2}{m_i^2}\right) + 6m_\chi^2 m_i^2 - 5m_\chi^4\right]\right\}\end{aligned}$$

Die Diagonalterme werden hier explizit aufgeführt, man könnte sie jedoch auch in die Summe über die Nichtdiagonalterme integrieren, da der Limes $m_j \to m_i$ des Ausdruckes der Nichtdiagonalterme den Ausdruck der Diagonalterme ergibt. Numerisch ist dies jedoch schwierig umzusetzen, daher stehen sie hier getrennt.

Somit sind Zerfallsprozesse zur Genüge behandelt. Das verwendete Programm SPheno stellt bei den Auswertungen der Neutralinozerfälle umfangreiche Programmteile zur Verfügung, welche ebenfalls die Berechnung von Dreikörperzerfällen unter Berücksichtigung von Massen der auslaufenden Teilchen erlaubt. In Abhängigkeit der Teilchen, deren Charakter und deren Massen werden im Programm dynamisch alle Zerfallsmöglichkeiten überprüft und schließlich als gesamte Zerfallsrate mit den Verzweigungsverhältnissen ("branching ratio"(BR)) der einzelnen Zerfallsprozesse ausgegeben. Insofern sind obige Rechnungen zu Zerfällen als exemplarisch zu verstehen.

Nach diesen Ausführungen über Zerfälle werden im nächsten Kapitel technische Fragen diskutiert, bevor anschließend zu Ergebnissen übergegangen werden kann.

7. Technische Fragen

Dieses Kapitel behandelt noch weitere im wesentlichen technische Fragestellungen, die für eine Auswertung der Massenmatrizen und der Zerfälle im $\mu\nu$SSM notwendig sind. Zuerst wird im Rahmen der elektroschwachen Symmetriebrechung auf die Tadpolegleichungen eingegangen, bevor im Anschluss ein Abschnitt über den "Large Electron-Positron"(LEP)-Beschleuniger folgt, da dieser Bedingungen an Skalar- und Pseudoskalarmassen stellt.

7.1. Tadpolegleichungen

Der Begriff der spontanen Symmetriebrechung ist bereits aus Abschnitt 2.2 bekannt. Dazu erhalten im $\mu\nu$SSM die Higgsbosonen und die Sneutrinos Vakuumerwartungswerte, jedoch muss dabei garantiert sein, dass dies im Minimum des skalaren Potentials

$$V_{\text{skalar}} = W_i W_i^* + \tfrac{1}{2} g_a^2 \left(\phi_i^* T_a \phi_i\right) \left(\phi_j^* T_a \phi_j\right) - \mathcal{L}_{\text{soft},\mu\nu} \tag{7.1}$$

der Fall ist. Da die explizite Form des Potential ein länglicher Ausdruck ist, sollen hier nur die ersten Ableitungen nach den Vakuumerwartungswerten angegeben werden, denn diese bestimmen die Position des Minimums. Mit der Abkürzung

$$u^2 = v_d^2 - v_u^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \tag{7.2}$$

liefert die Ableitung des Skalarpotentials nach den einzelnen Vakuumerwartungswerten die nachfolgenden Tadpolegleichungen auf Baumgraphenniveau:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial v_d} &= \tfrac{1}{8}\left(g^2 + g'^2\right) u^2 v_d + m_{H_d}^2 v_d + \tfrac{1}{2}\lambda\lambda^* \left(v_c^2 + v_u^2\right) v_d - \tfrac{1}{8} v_c^2 v_u \left(\kappa\lambda^* + \kappa^*\lambda\right) \\ &\quad - \tfrac{1}{4}\left(v_c^2 + v_u^2\right) v_m \left(\lambda \left(Y_\nu^*\right)_m + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_m\right) - \tfrac{1}{2\sqrt{2}} v_c v_u \left(T_\lambda + T_\lambda^*\right) = 0 \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial v_u} &= -\tfrac{1}{8}\left(g^2 + g'^2\right) u^2 v_u + m_{H_u}^2 v_u + \tfrac{1}{2}\lambda\lambda^* \left(v_d^2 + v_c^2\right) v_u - \tfrac{1}{2} v_u v_d v_m \left(\lambda \left(Y_\nu^*\right)_m + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_m\right) \\ &\quad + \tfrac{1}{2} v_u v_c^2 \left(Y_\nu^*\right)_m \left(Y_\nu\right)_m + \tfrac{1}{2} v_u v_m v_n \left(Y_\nu^*\right)_m \left(Y_\nu\right)_n - \tfrac{1}{8} v_c^2 v_d \left(\kappa\lambda^* + \lambda\kappa^*\right) \\ &\quad + \tfrac{1}{8} v_c^2 v_m \left(\kappa \left(Y_\nu^*\right)_m + \kappa^* \left(Y_\nu\right)_m\right) - \tfrac{1}{2\sqrt{2}} v_c v_d \left(T_\lambda + T_\lambda^*\right) + \tfrac{1}{2\sqrt{2}} v_c v_m \left(\left(T_\nu\right)_m + \left(T_\nu^*\right)_m\right) = 0 \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial v_i} &= \tfrac{1}{8}\left(g^2 + g'^2\right) u^2 v_i + \tfrac{1}{2}\left(\left(m_{\tilde{L}}^2\right)_{mi} + \left(m_{\tilde{L}}^2\right)_{im}\right) v_m + \tfrac{1}{8} v_c^2 v_u \left(\kappa \left(Y_\nu^*\right)_i + \kappa^* \left(Y_\nu\right)_i\right) \\ &\quad - \tfrac{1}{4} v_d \left(v_c^2 + v_u^2\right) \left(\lambda \left(Y_\nu^*\right)_i + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_i\right) + \tfrac{1}{2\sqrt{2}} v_c v_u \left(\left(T_\nu\right)_i + \left(T_\nu^*\right)_i\right) \\ &\quad + \tfrac{1}{4}(v_c^2 + v_u^2) v_m \left(\left(Y_\nu^*\right)_m \left(Y_\nu\right)_i + \left(Y_\nu\right)_m \left(Y_\nu^*\right)_i\right) = 0 \end{aligned} \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial v_c} &= \tfrac{1}{4}\kappa\kappa^* v_c^3 + m_{\tilde{\nu}^C}^2 v_c + \tfrac{1}{2}\lambda\lambda^* \left(v_d^2 + v_u^2\right) v_c - \tfrac{1}{4} v_d v_u v_c \left(\kappa\lambda^* + \kappa^*\lambda\right) + \tfrac{1}{2} v_c v_m v_n \left(Y_\nu^*\right)_m \left(Y_\nu\right)_n \\ &\quad + \tfrac{1}{4} v_u v_c v_m \left(\kappa \left(Y_\nu^*\right)_m + \kappa^* \left(Y_\nu\right)_m\right) - \tfrac{1}{2} v_d v_c v_m \left(\lambda \left(Y_\nu^*\right)_m + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_m\right) + \tfrac{1}{2} v_u^2 v_c \left(Y_\nu^*\right)_m \left(Y_\nu\right)_m \\ &\quad + \tfrac{1}{4\sqrt{2}} v_c^2 \left(T_\kappa + T_\kappa^*\right) - \tfrac{1}{2\sqrt{2}} v_d v_u \left(T_\lambda + T_\lambda^*\right) + \tfrac{1}{2\sqrt{2}} v_u v_m \left(\left(T_\nu\right)_m + \left(T_\nu^*\right)_m\right) = 0 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Der Name Tadpolegleichungen deutet bereits an, dass bei Hinzunahme der Tadpolegraphen eine Änderung der Gleichungen zu verzeichnen ist, da die Tadpolegraphen Einfluss auf das Vakuum haben. Obwohl die Tadpolegleichungen nur auf Baumgraphenniveau behandelt werden, sollen die Korrekturen kurz dargestellt werden:
Schreibt man das Skalarpotential in der Form

$$V_{\text{skalar}} = t_d^0 \sigma_d^0 + t_u^0 \sigma_u^0 + t_1^0 \tilde{\nu}_1^R + t_2^0 \tilde{\nu}_1^R + t_3^0 \tilde{\nu}_1^R + t_c^0 \tilde{\nu}^{cR} \qquad , \tag{7.7}$$

so entsprechen die Größen t_α^0 gerade den Ableitungen des Skalarpotentials nach dem entsprechenden Vakuumerwartungswert v_α. Diese erhalten auf Einschleifenniveau die Korrektur [44]

$$t_\alpha = t_\alpha^0 - \delta t_\alpha^{\overline{\text{DR}}} + T_\alpha (Q) = t_\alpha^0 + \tilde{T}_\alpha^{\overline{\text{DR}}} (Q) \tag{7.8}$$

mit den renormierten Beiträgen der Tadpolegraphen auf Einschleifenniveau $\tilde{T}_\alpha^{\overline{\text{DR}}} (Q)$. Wie jedoch bereits angedeutet erfolgt keine tiefergehende Betrachtung dieser Korrekturen, da die Tadpolegleichungen dadurch nur numerisch zu handhaben sind und sie keine großen Auswirkungen auf die Phänomenologie des Modells haben. Daher wird im nachfolgenden diskutiert, wie mit den Tadpolegleichungen auf Baumgraphenniveau analytisch umgegangen werden kann.

7.1.1. Umstellung Variante 1

Statt aus den Tadpolegleichungen die Vakuumerwartungswerte zu erhalten, bietet es sich an andere insbesondere unbekannte Größen aus der "soft-breaking"-Lagrangedichte zu fixieren und in der Auswertung eine Abhängigkeit gegenüber den Vakuumerwartungswerten aufzuzeigen. Zudem dienen in dieser Arbeit die Vakuumerwartungswerte der linkshändigen Sneutrinos der Erfüllung der Neutrinodaten durch die Neutrinofitroutine, so dass diese Eingangsparameter für die Tadpolegleichungen darstellen müssen. Dazu ist noch anzumerken, dass die Neutrinofitroutine aufgrund der Unabhängigkeit der Massenmatrix der neutralen Fermionen von der "soft breaking"-Lagrangedichte funktioniert, ohne zuvor aus den Tadpolegleichungen Größen fixieren zu müssen. Die Tadpolegleichungen finden dann letztlich Eingang in die Massenmatrizen der Skalare und Pseudoskalare.
In der ersten verwendeten Variante werden aus den 6 Gleichungen die 5 Größen T_λ, T_κ und $(T_\nu)_i$ fixiert. Damit bleibt eine weitere Bedingungsgleichung. In Modellen mit spontan gebrochener R-Parität kann häufig der μ-Parameter noch einfach aus den Gleichungen fixiert werden, dies entspricht hier dem Produkt λv_c, welches deutlich schwerer zugänglich ist. Daher sei als weiterer Parameter die Masse $m_{H_u}^2$ des Higgsbosons H_u aus den Tadpolegleichungen festgelegt. Dabei stellt sich jedoch eine grundsätzliche Frage: Die angesprochenen Modelle bezüglich der Brechung von Supersymmetrie nach (3.27) gehen von einer Vereinheitlichung $m_{H_d}^2 = m_{H_u}^2 = m_0^2$ bei sehr hohen Energien der GUT-Skala aus und legen damit durch Renormierungsgruppengleichungen eigentlich auch die Werte im Bereich der elektroschwachen Skala fest. Da jedoch in dieser Arbeit keine Renormierungsgruppengleichungen Anwendung finden, wird $m_{H_u}^2$ durch die Tadpolegleichungen einfach fixiert. Da $m_{H_u}^2$ dabei auch im Bereich der elektroschwachen Skala bei typischen Werten des MSSM von $-\left(10^2\text{GeV}\right)^2$ bleibt, bereitet dies keine Probleme.
Es sei erneut festgehalten, dass in Variante 1 aus den Tadpolegleichungen analytisch T_λ, T_κ, $(T_\nu)_i$ und $m_{H_u}^2$ fixiert werden, während die "soft-breaking"-Parameter $m_{H_d}^2$, $m_{\tilde{\nu}^C}^2$ und $m_{\tilde{L}}^2$ weiterhin als Eingabeparameter bleiben.

7.1.2. Umstellung Variante 2

Variante 1 weist in der Anwendung einen Nachteil auf: Für kleine Werte von κ haben die Massenmatrizen der Skalare und Pseudoskalare unphysikalische, negative Massenquadrate. Um diesem Problem zu begegnen, wird nachfolgend eine zweite Variante entwickelt, welche darauf achtet, dass in den angesprochenen Massenmatrizen keine negativen Massenquadrate als Eigenwerte auftreten.
Dazu sollen aus den Gleichungen $m^2_{H_d}$, $m^2_{H_u}$, $m^2_{\tilde{\nu}^C}$ und die Kopplungen $(T_\nu)_i$ bestimmt werden, während T_λ, T_κ und auch die $m^2_{\tilde{L}}$ vorerst weiterhin als freie Eingabeparameter bleiben. Diese Wahl wird später gerechtfertigt, da die Parameter T_λ und T_κ so bestimmt werden können, das die Massenmatrizen der Skalare und Pseudoskalare positive Massenquadrate aufweisen. Darüber hinaus können die $m^2_{\tilde{L}}$ als Eingabeparameter weiterhin nicht negativ gewählt werden, was zwar möglich, aber unüblich ist. Die Problematik bezüglich der Einbindung in Modelle wie mSUGRA oder GMSB wird dadurch nicht gelöst.
Nachfolgend sollen nun unter Anwendung der Tadpolegleichungen Möglichkeiten zur Berechnung von T_κ und T_λ gefunden werden, so dass die Massenmatrizen der Skalare und Pseudoskalare positive Massenquadrate aufweisen. Da einerseits die Vakuumerwartungswerte der linkshändigen Sneutrinos v_i, die Yukawa-Kopplungen $(Y_\nu)_i$ und zwangsläufig auch die $(T_\nu)_i$ klein im Vergleich zu v_d, v_u, v_c, λ, κ und T_λ, T_κ sind, werden diese nachfolgend vernachlässigt. Die (6×6)-Massenmatrix der Pseudoskalare (A.28) zefällt dann in zwei unabhängige (3×3)-Blöcke, welche getrennt diagonalisiert werden können. Mit der Notation aus Anhang A liefert dies unter Anwendung obiger Tadpolegleichungen für $\xi = 0$

$$M^2_{P^0} = \begin{pmatrix} M^2_{PP} & M^2_{P\tilde{\nu}^c} & 0 \\ \left(M^2_{P\tilde{\nu}^c}\right)^T & M^2_{\tilde{\nu}^c\tilde{\nu}^c} & 0 \\ 0 & 0 & M^2_{\tilde{\nu}^R\tilde{\nu}^R} \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

mit

$$\begin{aligned} M^2_{PP} &= \begin{pmatrix} (\Omega_1+\Omega_2)\frac{v_u}{v_d} & \Omega_1+\Omega_2 \\ \Omega_1+\Omega_2 & (\Omega_1+\Omega_2) \end{pmatrix} \\ M^2_{P\tilde{\nu}^c} &= \begin{pmatrix} (-2\Omega_1+\Omega_2)\frac{v_u}{v_c} \\ (-2\Omega_1+\Omega_2)\frac{v_d}{v_c} \end{pmatrix} \\ M^2_{\tilde{\nu}^c\tilde{\nu}^c} &= (4\Omega_1+\Omega_2)\frac{v_d v_u}{v_c^2} - 3\Omega_3 \\ \left(M^2_{\tilde{\nu}^R\tilde{\nu}^R}\right)_{ij} &= \tfrac{1}{2}\left(m^2_{\tilde{L}}\right)_{ij} + \tfrac{1}{2}\left(m^2_{\tilde{L}}\right)_{ji} + \delta_{ij}\left[\tfrac{1}{8}\left(g^2+g'^2\right)u^2\right] \qquad . \end{aligned} \tag{7.10}$$

Dabei sind die angegebenen Parameter Ω_i (Einheit GeV^2) gegeben durch:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{1}{8}\left(\lambda\kappa^* + \lambda^*\kappa\right)v_c^2 \\ \Omega_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(T_\lambda + T_\lambda^*\right)v_c \\ \Omega_3 &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(T_\kappa + T_\kappa^*\right)v_c \end{aligned} \tag{7.11}$$

Aufgrund der zumeist gegebenen Diagonalform von $M^2_{\tilde{\nu}^c\tilde{\nu}^c}$ mit positiven Diagonalelementen, gilt es den oberen (3×3)-Block zu diagonalisieren und Einschränkungen für die Parameter Ω_2 und

Ω_3, welche gerade T_λ und T_κ repräsentieren, zu finden, so dass nur positive Massenquadrate dort auftreten. Tatsächlich ist für die angegebene (3×3)-Matrix eine analytische Bestimmung der Eigenwerte möglich, welche gegeben sind durch:

$$\begin{aligned}
m^2_{P^0_1} &= 0 \\
m^2_{P^0_2} &= \frac{1}{2}\left(\Omega_1+\Omega_2\right)\left(\frac{v_d}{v_u}+\frac{v_u}{v_d}+\frac{v_d v_u}{v_c^2}\right)-\frac{3}{2}\Omega_3-\sqrt{\Gamma} \\
m^2_{P^0_3} &= \frac{1}{2}\left(\Omega_1+\Omega_2\right)\left(\frac{v_d}{v_u}+\frac{v_u}{v_d}+\frac{v_d v_u}{v_c^2}\right)-\frac{3}{2}\Omega_3+\sqrt{\Gamma} \\
\text{mit}\quad \Gamma &= \left(\frac{1}{2}\left(\Omega_1+\Omega_2\right)\left(\frac{v_d}{v_u}+\frac{v_u}{v_d}+\frac{v_d v_u}{v_c^2}\right)-\frac{3}{2}\Omega_3\right)^2 \\
&\quad + 3\left(\Omega_1+\Omega_2\right)\Omega_3\left(\frac{v_d}{v_u}+\frac{v_u}{v_d}\right)-9\Omega_1\Omega_2\left(\frac{v_c^2}{v_d^2}+\frac{v_c^2}{v_u^2}\right)
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Der erste Eigenwert der Massenmatrix kann mit dem auftretenden masselosen Goldstoneboson in der Eichung $\xi=0$ identifiziert werden, welches aufgrund der spontanen Symmetriebrechung der $SU(2)\times U(1)$ auftritt. Damit sich sonst nur positive Massenquadrate ergeben, muss

$$3\left(\Omega_1+\Omega_2\right)\Omega_3\left(\frac{v_d}{v_u}+\frac{v_u}{v_d}\right)-9\Omega_1\Omega_2\left(\frac{v_c^2}{v_d^2}+\frac{v_c^2}{v_u^2}\right)<0 \tag{7.13}$$

werden. Dies liefert beispielsweise die Bedingung

$$\Omega_3 < \frac{v_d v_u}{v_c^2}\frac{3\Omega_1\Omega_2}{\Omega_1+\Omega_2} =: f_1\left(\Omega_2\right) \tag{7.14}$$

Bedenklich mag einen noch der Term $-\frac{3}{2}\Omega_3$ stimmen, jedoch wird später T_κ und damit Ω_3 meist negativ oder nur schwach positiv gewählt.
Auch die (6×6)-Massenmatrix der Skalare (A.17) zerfällt unter obiger Näherung in zwei (3×3)-Blöcke, die schließlich getrennt diagonlisiert werden können. Es bleibt mit der Notation aus Anhang A:

$$M^2_{S^0} = \begin{pmatrix} M^2_{SS} & M^2_{S\tilde{\nu}^c} & 0 \\ \left(M^2_{S\tilde{\nu}^c}\right)^T & M^2_{\tilde{\nu}^c\tilde{\nu}^c} & 0 \\ 0 & 0 & M^2_{\tilde{\nu}^R\tilde{\nu}^R} \end{pmatrix} \tag{7.15}$$

mit

$$\begin{aligned}
M^2_{SS} &= \begin{pmatrix} \left(\Omega_1+\Omega_2\right)\frac{v_u}{v_d}+\Omega_6\frac{v_d}{v_u} & -\Omega_1-\Omega_2-\Omega_6+\Omega_4 \\ -\Omega_1-\Omega_2-\Omega_6+\Omega_4 & \left(\Omega_1+\Omega_2\right)\frac{v_d}{v_u}+\Omega_6\frac{v_u}{v_d} \end{pmatrix} \\
M^2_{S\tilde{\nu}^c} &= \begin{pmatrix} \left(-2\Omega_1-\Omega_2\right)\frac{v_u}{v_c}+\Omega_4\frac{v_c}{v_u} \\ \left(-2\Omega_1-\Omega_2\right)\frac{v_d}{v_c}+\Omega_4\frac{v_c}{v_d} \end{pmatrix} \\
M^2_{\tilde{\nu}^c\tilde{\nu}^c} &= \Omega_2\frac{v_d v_u}{v_c^2}+\Omega_3+\Omega_5 \\
\left(M^2_{\tilde{\nu}^R\tilde{\nu}^R}\right)_{ij} &= \tfrac{1}{4}\left(g^2+g'^2\right)v_i v_j+\tfrac{1}{2}\left(m^2_{\tilde{L}}\right)_{ij}+\tfrac{1}{2}\left(m^2_{\tilde{L}}\right)_{ji}+\delta_{ij}\left[\tfrac{1}{8}\left(g^2+g'^2\right)u^2\right] \qquad .
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Neben den bekannten Parametern Ω_1, Ω_2 und Ω_3 kommen noch hinzu (Einheit GeV^2):

$$\begin{aligned}
\Omega_4 &= \lambda\lambda^* v_d v_u > 0 \\
\Omega_5 &= \frac{1}{2}\kappa\kappa^* v_c^2 > 0 \\
\Omega_6 &= \frac{1}{4}\left(g^2 + g'^2\right) v_d v_u > 0
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Für den oberen (3×3)-Block sind die Eigenwerte analytisch im Gegensatz zum Fall der Pseudoskalare nicht mehr bestimmbar. Es kann jedoch das Hurwitzkriterium aus der Linearen Algebra angewandt werden, welches besagt: Eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn sie nur positive Eigenwerte hat und dies ist gleichbedeutend mit der Positivität aller Hauptabschnittsdeterminanten.
Die Bestimmung der Hauptabschnittsdeterminanten liefert folgende weitere Bedingungen

$$\begin{aligned}
(\Omega_1 + \Omega_2)\frac{v_u}{v_d} + \Omega_6 \frac{v_d}{v_u} &> 0 \\
(\Omega_1 + \Omega_2)\left(\Omega_6\left(\frac{v_d^2}{v_u^2} + \frac{v_u^2}{v_d^2}\right) + 2\left(\Omega_4 - \Omega_6\right)\right) + 2\Omega_4\Omega_6 - \Omega_4^2 &> 0 \\
\Omega_3 - f_2\left(\Omega_2\right) &> 0 \quad ,
\end{aligned}$$

wobei $f_2\left(\Omega_2\right)$ in (7.20) angegeben wird. Um insbesondere die ersten beiden Gleichungen stets zu erfüllen, seien die Größen λ, κ und T_λ als positiv und reell angenommen. Dann sind auch Ω_1 und Ω_2 positiv und die erste Ungleichung in jedem Fall erfüllt. Die zweite Ungleichung ist höchstens kritisch für den Fall kleiner $\tan\beta$. Zumeist ist diese Ungleichung bei den nachfolgenden Parameterstudien erfüllt, sie kann als einfacher Test in die Programmierung einfließen.
So bleiben letztendlich die folgenden Bedingungen für positive Massenquadrate bei den Massenmatrizen der Pseudoskalare und Skalare:

$$\Omega_3 < f_1\left(\Omega_2\right) \qquad \text{und} \qquad \Omega_3 > f_2\left(\Omega_2\right) \tag{7.18}$$

Dabei sind die Abhängigkeiten $f_1\left(\Omega_2\right)$ und $f_2\left(\Omega_2\right)$ natürlich keinesfalls nur Funktionen von Ω_2, jedoch soll bei festen Parametern nur Ω_2, also T_λ, so variiert werden, dass $f_1\left(\Omega_2\right) > f_2\left(\Omega_2\right)$ erfüllt ist, und schließlich

$$\Omega_3 = \frac{f_1\left(\Omega_2\right) + f_2\left(\Omega_2\right)}{2} \tag{7.19}$$

gesetzt werden kann. Die Form der Funktionen ist dabei:

$$\begin{aligned}
f_2\left(\Omega_2\right) = \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} \qquad & \text{mit} \\
\Sigma_1 = {} & \left(\Omega_1 + \Omega_2\right)\Omega_5\left(-2\Omega_4 + 2\Omega_6\right) + \left(\Omega_4^2 - 2\Omega_4\Omega_6\right)\Omega_5 \\
& + \left(\Omega_1 + \Omega_2\right)\Omega_4^2 v_c^2\left(\frac{v_d}{v_u^3} + \frac{v_u}{v_d^3}\right) + \left(4\Omega_1^2 + 3\Omega_1\Omega_2\right)\Omega_6 \frac{1}{v_c^2}\left(\frac{v_d^3}{v_u} + \frac{v_u^3}{v_d}\right) \\
& - \left(\Omega_1 + \Omega_2\right)\Omega_5\Omega_6\left(\frac{v_d^2}{v_u^2} + \frac{v_u^2}{v_d^2}\right) + 2\left(\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_4 + 2\Omega_6\right)\Omega_4^2 \frac{v_c^2}{v_d v_u} \\
& - 2\left(2\Omega_1 + \Omega_2\right)\left(2\Omega_1 + 2\Omega_2 - \Omega_4 + 2\Omega_6\right)\Omega_4\left(\frac{v_d}{v_u} + \frac{v_u}{v_d}\right)
\end{aligned}$$

$$+\left[16\Omega_1^3+8\left(4\Omega_2-\Omega_4+\Omega_6\right)\Omega_1^2+10\Omega_1\Omega_2\left(2\Omega_2-\Omega_4+\Omega_6\right)\right.$$
$$\left.+\Omega_2\left(2\Omega_2-\Omega_4\right)\left(2\Omega_2-\Omega_4+2\Omega_6\right)\right]\frac{v_d v_u}{v_c^2}$$
$$\Sigma_2=\left(\Omega_1+\Omega_2\right)\Omega_6\left(\frac{v_d^2}{v_u^2}+\frac{v_u^2}{v_d^2}\right)+2\left(\Omega_1+\Omega_2\right)\left(\Omega_4-\Omega_6\right)$$
$$+2\Omega_4\Omega_6-\Omega_4^2$$

Offenbar handelt es sich bei $f_2(\Omega_2)$ um eine gebrochenrationale Funktion, welche im Zähler das Polynom Σ_1 vom Grade 3 in Ω_2 und im Nenner das Polynom Σ_2 vom Grade 1 in Ω_2 ist. Die zugehörigen Höchstkoeffizienten sind im Zähler $4\frac{v_d v_u}{v_c^2}>0$ und im Nenner $\Omega_6\left(\frac{v_d^2}{v_u^2}+\frac{v_u^2}{v_d^2}\right)+2\left(\Omega_4-\Omega_6\right)\geq 0$. Mit zwei, für die meisten Parameterpunkte (außer $\tan\beta=1,\lambda=0$) positiven Höchstkoeffizienten ergibt sich schließlich approximativ für $f_2(\Omega_2)$ eine nach oben geöffnete Parabel, welche eine zusätzliche Polstelle aufweist, die jedoch nur auf einem kleinen Intervall von Ω_2 dominant wird. Für den Fall eines negativen Höchstkoeffizienten im Nenner ergibt sich eine nach unten geöffnete Parabel, auf welches das nachfolgende Verfahren nicht in dieser Form anwendbar ist. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass der Ausschluss dieser Werte keinen physikalischen Hintergrund hat.

Nun wird folgende Idee verfolgt: Da $f_1(\Omega_2)>0$ ist, werden die Nullstellen der nach oben geöffneten Parabel ermittelt und für Ω_2 der Mittelwert dieser beiden Nullstellen genommen, da dann $f_2(\Omega_2)<0$ gilt und die Bedingungen (7.18) gleichzeitig erfüllt werden können. Dies erlaubt schließlich Ω_3 gemäß (7.19) zu wählen.
Das Zählerpolynom Σ_1 von $f_2(\Omega_2)$ liefert offenbar drei Nullstellen, welche analytisch schwer zu fassen sind und auch die Festlegung, welche beiden Nullstellen zur dominanten Parabel gehören und nicht an der Polstelle auftreten, gestaltet sich numerisch schwierig.

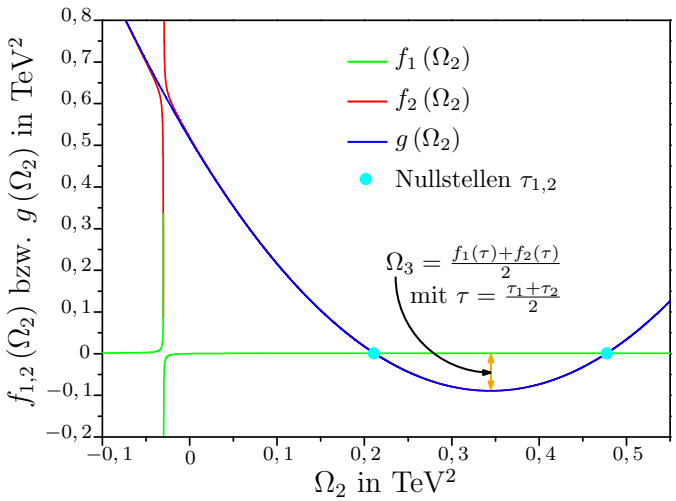


Abbildung 7.1.: Illustration des Vorgehens bei Variante 2; Verwendete Werte $\lambda=0,4$, $\kappa=0,6$, $\tan\beta=10$ und $v_c=\sqrt{2}\frac{200\text{GeV}}{\lambda}=707\text{GeV}$ ($\mu=200\text{GeV}$)

Nebenbei ist noch anzumerken, dass auch eine Minimumsbestimmung zu analytisch schwierigen Ausdrücken führt. Jedoch liefert eine Polynomdivision des Zählerpolynoms Σ_1 mit dem Nennerpolynom Σ_2 von $f_2(\Omega_2)$ unter Vernachlässigung von Termen proportional zu $\frac{1}{\Omega_2}$ einen händelbaren Ausdruck für die verbleibende Parabel $g(\Omega_2)$, welcher analytische Nullstellen $\tau_{1,2}$ liefert, auch wenn die Polstelle von $f_2(\Omega_2)$ mit einer Nullstelle zusammenfallen sollte. Ein numerisches Beispiel ist in Abbildung 7.1 gezeigt. Die Nullstellen der dominanten Parabel $g(\Omega_2)$

sind dabei gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
\tau_{1,2} &= \frac{\Sigma_1' \pm \sqrt{\Sigma_2'}}{\Sigma_3'} \qquad \text{mit} \\
\Sigma_1' &= \Bigg[\Omega_6 \left(-2\left(2\Omega_1 + \Omega_6\right)\left(\frac{v_d^2}{v_u^2} + \frac{v_u^2}{v_d^2}\right) + 16\Omega_1 + 5\Omega_6\right) + \Omega_4^2 \left(2\left(\frac{v_c^2}{v_d^2} + \frac{v_c^2}{v_u^2}\right) + 1\right) \\
&\quad + \Omega_4 \left(\Omega_6 \left(\frac{v_d^2}{v_u^2} + \frac{v_u^2}{v_d^2} - 2\right)\left(\frac{v_c^2}{v_d^2} + \frac{v_c^2}{v_u^2} + 1\right) - 8\Omega_1\right)\Bigg] \\
\Sigma_2' &= \Bigg[\Omega_5 \frac{v_c^2}{v_d v_u}\left(\Omega_6 \left(\frac{v_d^2}{v_u^2} + \frac{v_u^2}{v_d^2}\right) + 2\left(\Omega_4 - \Omega_6\right)\right)^3 + \Omega_4 \left(4\left(\frac{v_c^2}{v_u^2} + \frac{v_c^2}{v_d^2}\right) + 1\right) \\
&\quad + 2\Omega_4^3 \Omega_6 \left(\frac{v_d^2}{v_u^2} + \frac{v_u^2}{v_d^2} - 2\right)\left(\frac{v_c^2}{v_d^2} + \frac{v_c^2}{v_u^2} + 1\right) \\
&\quad + 2\Omega_4^2 \Omega_6^2 \left(\frac{v_d^2}{v_u^2} + \frac{v_u^2}{v_d^2} - 2\right)\left(2\left(\frac{v_c^2}{v_u^2} + \frac{v_c^2}{v_d^2}\right) - 3\right) \\
&\quad + 2\Omega_4 \Omega_6^3 \left(\frac{v_d^2}{v_u^2} + \frac{v_u^2}{v_d^2} - 2\right)\left(v_c^2 \left(\frac{v_d^2}{v_u^4} + \frac{v_u^2}{v_d^4}\right) - \frac{v_c^2}{v_d^2} - \frac{v_c^2}{v_u^2}\right) \\
&\quad + \Omega_6^4 \left(\frac{v_d^2}{v_u^2} + \frac{v_u^2}{v_d^2} - 2\right)^2 - \Omega_1 \Bigg(16\Omega_4^3 + 24\Omega_4^2 \Omega_6 \left(\frac{v_d^2}{v_u^2} + \frac{v_u^2}{v_d^2} - 2\right) \\
&\qquad + 2\Omega_4 \Omega_6^2 \left(\frac{v_d^2}{v_u^2} + \frac{v_u^2}{v_d^2} - 2\right) \frac{1}{v_d^2 v_u^2}\left(7v_d^4 - 10 v_d^2 v_u^2 + 7v_u^4\right) \\
&\qquad + \Omega_6^3 \left(\frac{v_d^2}{v_u^2} + \frac{v_u^2}{v_d^2} - 2\right)^2 \frac{1}{v_d^2 v_u^2}\left(3v_d^4 - 2v_d^2 v_u^2 + 3v_u^4\right)\Bigg)\Bigg] \\
\Sigma_3' &= 2\left[\Omega_6 \left(\frac{v_d^2}{v_u^2} + \frac{v_u^2}{v_d^2}\right) + 2\left(\Omega_4 - \Omega_6\right)\right]
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

Damit auch stets zwei reelle Nullstellen auftreten, muss $\Sigma_2' > 0$ sein. Tatsächlich ist dies für die getesteten Parameterkombinationen der Fall. Schwierigkeiten treten nur bei sehr großen ($v_c > 10^5$GeV) oder sehr kleinen Werten ($v_c < 100$GeV) von v_c auf. Die Zuverlässigkeit dieser Methode in der Bestimmung von Ω_2 und Ω_3, also einer Festlegung von T_λ und T_κ, muss sich aber letztlich in der praktischen Anwendung zeigen.
Festzuhalten ist also, dass Variante 2 die Massenquadrate $m_{H_d}^2$, $m_{H_u}^2$, $m_{\tilde{\nu}^C}^2$ und die Kopplungen $(T_\nu)_i$ aus den Tadpolegleichungen bestimmt und gleichzeitig versucht T_λ und T_κ so zu fixieren, dass keine negativen Massenquadrate als Eigenwerte der Massenmatrizen der Skalare und Pseudoskalare auftreten. Welche Werte später für die verbleibenden Eingabeparameter gewählt werden, wird bei den Ergebnissen präsentiert. Dort erweist sich Variante 2 gegenüber Variante 1 auch als Möglichkeit, ein $\tilde{\nu}^c$-artiges, also Singlet-artiges, leichtestes Neutralino zu erhalten.

7.2. LEP Grenzen

Insbesondere für den Fall eines Neutralinos, welches im wesentlichen $\tilde{\nu}^c$-artig erscheint, werden die Skalare wie auch die Pseudoskalare sehr leicht. Da ohne Schwierigkeiten auch Massen unter 100 GeV auftreten, muss zwangsläufig die Frage aufkommen, ob diese nicht in Bereiche fallen, welche bereits experimentell ausgeschlossen sind. Durch den "Large Electron-Positron"(LEP)-Beschleuniger, welcher von 1989 bis 2000 am CERN in Genf in Betrieb war, sind Grenzen für die leichtesten Skalare und Pseudoskalare, darunter auch das vermutete Higgs-Teilchen, vorhanden. Eine zusammenfassende Arbeit der ALEPH-Kollaboration bezüglich der Suche nach neutralen Skalaren in supersymmetrischen Modellen stellt beispielsweise [57] aus dem Jahr 2006 dar.
Nun können die Skalare und Pseudoskalare an einem Elektron-Positron Beschleuniger wie LEP einerseits durch ihre Kopplung an das Z-Boson über den sogennanten "Bjorken-Prozess" ($e^+e^- \to Z^0 S_i^0$) oder über den assoziierten Produktionsmechanismus ($e^+e^- \to S_i^0 P_j^0$) erzeugt werden. Andere Prozesse spielen eine deutlich untergeordnete Rolle. Die vorgegebenen Massengrenzen an $m_{S_i^0}$ und $m_{P_j^0}$ hängen daher entscheidend von den Produktionsraten obiger Prozesse ab. Fallen die Produktionsraten aufgrund kleiner relevanter Kopplungen in einem Modell gering aus, so sind prinzipiell auch kleinere Massen für die Skalare und Pseudoskalare möglich, da im Rahmen der Statistik von LEP zur Beobachtung eines Teilchens natürlich ausreichend viele Ereignisse auftreten müssen. Daher erfolgt nun eine genauere Betrachtung der beiden genannten Prozesse. Für das Modell mit spontan gebrochener R-Parität kann in diesem Zusammenhang die Veröffentlichung [58] zu Rate gezogen werden, deren Resultate leicht auf dieses Modell umgeschrieben werden können.
Im $\mu\nu$SSM gibt es 6 Skalare S_i^0 und 5 Pseudoskalare P_j^0, da ein Goldstoneboson auftritt. Die für die genannten Produktionsprozesse relevanten Kopplungen lassen sich nach der Diagonalisierung der (Pseudo-) Skalarmassenmatrix mit R^{P^0} bzw. R^{S^0} schreiben in der Form [58]

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{6} \left(\sqrt{2}G_F\right)^{1/2} m_Z^2 \eta_{B_i} S_i^0 Z_\mu^0 Z^{0\mu} + \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{5} \left(\sqrt{2}G_F\right)^{1/2} m_Z \eta_{A_{ij}} \left(Z^{0\mu} S_i^0 \overleftrightarrow{\partial}_\mu P_j^0\right) \tag{7.21}$$

mit der anfänglich definierten Fermikonstante $G_F = \frac{\sqrt{2}g^2}{8m_W^2}$. Dabei sind die Größen η gegeben durch:

$$\begin{aligned} \eta_{B_i} &= \frac{1}{v}\left(v_d R_{i1}^{S^0} + v_u R_{i2}^{S^0} + \sum_{j=1}^{3} v_j R_{i,j+2}^{S^0}\right) \\ \eta_{A_{ij}} &= R_{i1}^{S^0} R_{j1}^{P^0} - R_{i2}^{S^0} R_{j2}^{P^0} + \sum_{k=1}^{3} R_{i,k+2}^{S^0} R_{j,k+2}^{P^0} \end{aligned} \tag{7.22}$$

Die Indizes B und A beziehen sich auf "**B**jorken-Prozess" und **a**ssoziierter Produktionsmechanismus. Mit Hilfe der angegebenen Lagrangedichte können schließlich die Wirkungsquerschnitte der beiden Prozesse berechnet werden, welche einfache Erweiterungen der MSSM Resultate [59, 60] sind. So gilt für den "Bjorken-Prozess" [58]:

$$\sigma\left(e^+e^- \to Z^0 S_i^0\right) = \eta_{B_i}^2 \frac{G_F^2 m_Z^4}{96\pi s}(v_e^2 + a_e^2)\beta \frac{\beta^2 + 12m_Z^2/s}{\left(1 - m_Z^2/s\right)^2 + \left(\Gamma_Z m_Z/s\right)^2}$$

$$\text{mit} \qquad v_e = -1 + 4\sin\theta_W^2, \quad a_e = -1, \quad \beta = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_Z^2, m_{S_i^0}^2)}{s} \quad , \tag{7.23}$$

wobei λ die bereits bekannte Källen-Funktion $\lambda(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz$ und die $\sqrt{s}$ die Schwerpunktsenergie bezeichnet. Für den assoziierten Produktionsmechanismus ergibt sich:

$$\sigma\left(e^+e^- \to S_i^0 P_j^0\right) = \eta_{A_{ij}}^2 \frac{G_F^2 m_z^4}{96\pi s}\left(v_e^2 + a_e^2\right)\frac{\beta^3}{\left(1 - m_Z^2/s\right)^2 + \left(\Gamma_Z m_Z/s\right)^2}$$

$$\text{mit} \qquad \beta = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_{P_j^0}^2, m_{S_i^0}^2)}{s} \quad . \tag{7.24}$$

Die Ergebnisse der ALEPH-Kollaboration arbeiten [57] mit einem Skalenfaktor S_{95}, welcher definiert ist in der Form

$$S_{95} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ref}}} \quad , \tag{7.25}$$

wobei $\sigma_{\max}$ den größten mit den Messdaten verträglichen Wirkungsquerschnitt bei 95% Vertrauensbereich (C.L.) eines Modells und σ_{ref} einen Referenzwirkungsquerschnitt meint. Bei vorgegebener Masse der Skalare bzw. Pseudoskalare in einem Modell liefert S_{95} also den maximal möglichen Wirkungsquerschnitt für die beiden Produktionsprozesse, der eine noch nicht erfolgte Beobachtung rechtfertigt. Der Referenzwirkungsquerschnitt ist dabei für den Fall des "Bjorken-Prozesses" die einfache Higgsproduktion $\sigma_{HZ}^{SM} = \sigma\left(e^+e^- \to Z^0 H\right)$ des Standardmodells, für den Fall des assoziierten Produktionsmechanismus hingegen

$$\sigma_{\text{ref}} = \overline{\beta}\sigma_{HZ}^{SM} \quad \text{mit} \quad \overline{\beta} = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}(s, m_{P_j^0}^2, m_{S_i^0}^2)/s^3}{\left(\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_Z^2, m_{S_i^0}^2)/s\right)\left(\lambda(s, m_Z^2, m_{S_i^0}^2)/s^2 + 12m_z^2/s\right)} \tag{7.26}$$

Dies führt auf $S_{95} = \eta_{B_i}^2$ bzw. $S_{95} = \eta_{A_{ij}}^2$, so dass keine Abhängigkeit von kinematischen Größen vorhanden ist und ein einfacher Vergleich eines theoretischen Modells mit den Daten von LEP ermöglicht wird. Die Abbildungen 7.2 auf Seite 64 sind [57] entnommen und zeigen die Grenze zwischen dem Parameter S_{95} und den Skalar- bzw. der Summe aus Skalar- und Pseudoskalarmasse. Werte oberhalb der dargestellten Kurve sind dabei experimentell ausgeschlossen. Die Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls des Skalars S_i^0 und des Pseudoskalars P_i^0 sind als die Verzweigungsverhältnisse des Standardmodell-Higgs H angenommen, welches im wesentlichen die Zerfälle in $b, \overline{b}$ und τ^+, τ^- sind. Dies ist in guter Näherung tatsächlich gegeben, wie sich später herausstellen wird. Auch bei anderen Zerfallsszenarien ändert sich zudem die Form der Kurve nur geringfügig.
Diese Graphen sind anhand der zugehörigen Tabellen ([57](Table 14, Table 17)) durch einen Polygonzug angenähert und in das spätere Programm zur Auswertung eingebaut, so dass im Falle einer zu niedrigen Masse die Parameterkombination umgehend verworfen wird. In den Ergebnissen wird diese Abhängigkeit mit dem Polygonzug nochmal in gespiegelter Version, also $m_{S_i^0}$ als Funktion von S_{95} zu sehen sein. Der noch nicht experimentell ausgeschlossene Bereich liegt dann zwangsläufig oberhalb des Graphen. Auch zeigt sich später, dass nicht der assoziierte Produktionsmechanismus, sondern der "Bjorken-Prozess" den Parameterraum deutlich einschränkt, weil für den erstgenannten Fall S_{95} für kleine Pseudoskalarmassen ebenfalls sehr klein wird.

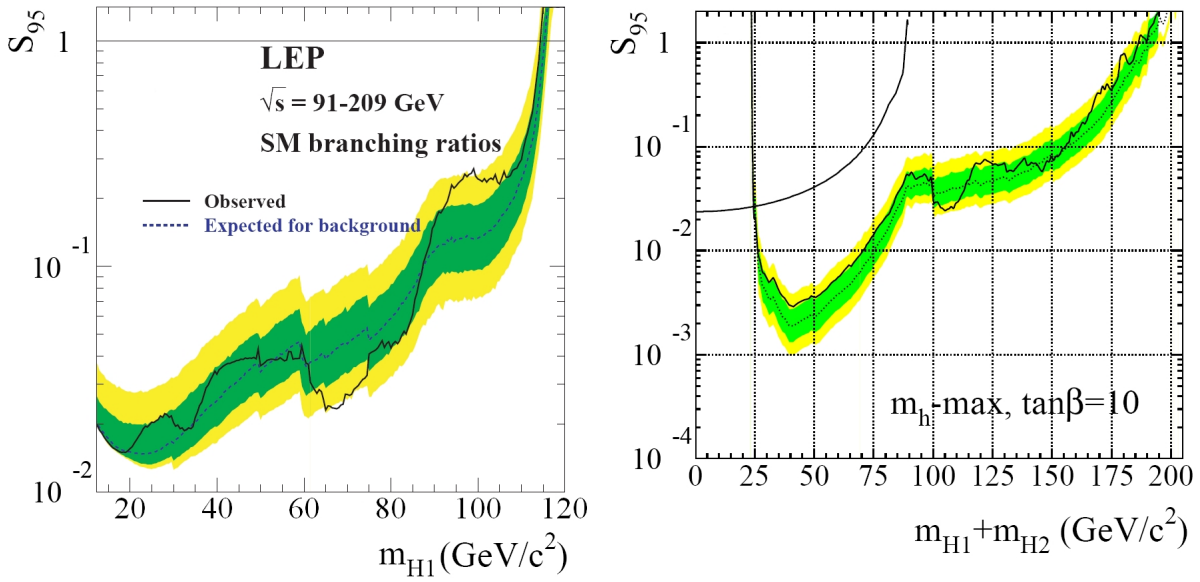


Abbildung 7.2.: Linke Hälfte: 95% Vertrauensbereich (C.L.) Obergrenze S_{95} für den "Bjorken-Prozess" $e^+e^- \rightarrow Z^0 S_i^0$ in Abhängigkeit von der Skalarmasse $m_{\mathrm{H1}} = m_{S_i^0}$, Annahme: Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls von S_i^0 entsprechen denen des Standardmodell-Higgs H, Rechte Hälte: 95% Vertrauensbereich (C.L.) Obergrenze S_{95} für den assoziierten Produktionsmechanismus $e^+e^- \rightarrow S_i^0 P_j^0$ in Abhängigkeit der Summe von Skalarmasse $m_{\mathrm{H1}} = m_{S_i^0}$ und Pseudoskalarmasse $m_{\mathrm{H2}} = m_{P_i^0}$, Annahme: Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls von S_i^0 und P_i^0 entsprechen denen des Standardmodell-Higgs H; Die durchgezogene Linie repräsentiert jeweils die beobachtete Grenze. Die grünen und gelben Bänder um den Median (gestrichelt) entsprechen den 68% und 95% Wahrscheinlichkeitsbändern (entnommen aus [57](Figure 2, Figure 4))

8. Ergebnisse

8.1. Auswertung mit SPheno

Sämtliche numerischen Arbeiten erfolgen mit dem Programmpaket SPheno [61], dessen Namen aus S(upersymmetric) Pheno(menology) resultiert und von Werner Porod aktuell in der Version 3.0 veröffentlicht wird. Es erlaubt nach Eingabe der Massenmatrizen und Kopplungen gemäß den Anhängen A und B durch Kenntnis der Passarino-Veltman-Integrale die einfache Berechnung der Einschleifen-korrigierten Massenmatrix der neutralen Fermionen. Weiterhin passt die im Vergleich zum Modell mit spontan gebrochener R-Parität leicht veränderte Neutrinofitroutine die Vakuumerwartungswerte der linkshändigen Sneutrinos und die Yukawakopplungen der Neutrinos so an, dass die aktuellen Neutrinodaten erfüllt sind. Zuletzt werden dynamisch mit Kenntnis des gesamten Teilchenspektrums alle möglichen Zerfälle betrachtet und ausgegeben, wie hoch die gesamte Zerfallsbreite bei einem Teilchenzerfall ist und in welche Verzweigungsverhältnisse sich dieser gliedert. Die so erhaltenen Ergebnisse werden nachfolgend präsentiert, wobei auch aufgrund unterschiedlicher Phänomenologie stets zwischen der Umstellung der Tadoplegleichungen nach Variante 1 und nach Variante 2 unterschieden werden muss.

8.2. Parameter

Die Auswertung benötigt, wie bereits im Abschnitt über die Brechung von Supersymmetrie 3.6 angedeutet, eine Vielzahl von Parametern, welche in die "soft breaking"-Lagrangedichte eingehen. Hier sollen daher als Anhaltspunkt die bereits angesprochenen "Snowmass Points and Slopes" [3], insbesondere das mSUGRA-Szenario SPS $1a'$ verwendet werden. Dieses zeichnet sich durch die Festlegung

Parameter	SPS $1a'$	Parameter	SPS $1a'$
$M_{1/2}$	250GeV	$\mathrm{sign}(\mu)$	$+1$
M_0	70GeV	$\tan\beta$	10
A_0	-300GeV		

Tabelle 8.1.: SPS $1a'$-Konvention bei $Q = m_{GUT}$ gemäß [62]

an der GUT-Skala aus. Da hier Physik im Bereich der elektroschwachen Symmetriebrechung, also im Bereich heutiger Beschleunigerphysik, betrachtet wird, werden nachfolgend die Werte an der $m_Z = 91,19$GeV-Energieskala benutzt. Diese sind nicht explizit durch Renormierungsgruppengleichungen für das $\mu\nu$SSM bestimmt, sondern es werden die für das MSSM erhaltenen Parameter aus SPheno benutzt, welche in Tabelle 8.2 zusammengefasst sind.
Einzig der Wert von $\mu = 396$GeV wird nachfolgend zunächst auf $\mu = 200$GeV gesetzt, da dies deutlich mehr mit dem LEP-Experiment verträgliche Daten liefert. Weiterhin sind nicht

Parameter	SPS $1a'$	Parameter	SPS $1a'$
g	$0,6651$	M_1	$98,39\text{GeV}$
g'	$0,3553$	M_2	$188,88\text{GeV}$
g_3	$1,2136$	M_3	$635,91\text{GeV}$
Y_τ	$0,1027$	A_τ	$-451,68\text{GeV}$
Y_t	$1,0149$	A_t	$-608,86\text{GeV}$
Y_b	$0,1723$	A_b	$-1057,15\text{GeV}$
μ	396GeV $\leftrightarrow 200\text{GeV}$	$\tan\beta$	10
$\left(m_{\tilde{L}}\right)_{11/22}$	$184,44\text{GeV}$	$\left(m_{\tilde{L}}\right)_{33}$	$182,61\text{GeV}$
$(m_{\tilde{e}})_{11/22}$	$116,30\text{GeV}$	$(m_{\tilde{e}})_{33}$	$110,28\text{GeV}$
$\left(m_{\tilde{Q}}\right)_{11/22}$	$592,21\text{GeV}$	$\left(m_{\tilde{Q}}\right)_{33}$	$531,18\text{GeV}$
$(m_{\tilde{u}})_{11/22}$	$575,38\text{GeV}$	$(m_{\tilde{u}})_{33}$	$442,97\text{GeV}$
$\left(m_{\tilde{d}}\right)_{11/22}$	$573,51\text{GeV}$	$\left(m_{\tilde{d}}\right)_{33}$	$568,49\text{GeV}$

Tabelle 8.2.: Verwendete Parameterkombination gemäß der SPS $1a'$-Konvention bei $Q = m_Z = 91,19\text{GeV}$

die Werte für $m^2_{H_d}$ und $m^2_{H_u}$ aufgeführt, da diese im Falle der Umstellung nach Variante 2 aus den Tadpolegleichungen bestimmt werden. Bei Einsatz von Variante 1 wird lediglich $m^2_{H_u}$ berechnet und $m^2_{H_d} = (155,35\text{GeV})^2$ gesetzt, was ebenfalls dem SPS $1a'$-Wert an der Skala $m_Z = 91,19\text{GeV}$ entspricht. Als weiterer Wert bleibt im Falle von Variante 1 die Masse $m^2_{\tilde{\nu}^c}$, welche auf $(224,47\text{GeV})^2$ gesetzt wird. Tatsächlich ist die Phänomenologie des Modells im Falle von Variante 1 wenig sensitiv auf $m^2_{\tilde{\nu}^c}$, wie sich später zeigt. Für die Energieskala bei 1TeV sind die Parameter beispielsweise [62](Table 3) zu entnehmen, ebenfalls berechnet mit dem hier verwendeten Programmpaket SPheno.
Nun bleibt die Frage, welche Parameter dadurch noch nicht festgelegt sind und demnach variiert werden können. Damit μ den konstanten Wert 200GeV annimmt, was die Vergleichbarkeit mit anderen Modellen erhöht, muss zwangsläufig das Produkt $\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda v_c$ fixiert werden: Wird demnach eine Abhängigkeit gegenüber v_c aufgezeigt, so ist dies im Folgenden auch stets eine Abhängigkeit gegenüber λ. Es bleiben also nur $v_c, (\lambda)$ und κ, sowie im Falle von Variante 1 $m^2_{\tilde{\nu}^c}$ variabel. Alle anderen Parameter, insbesondere die diagonal angenommenen Yukawakopplungen, sind durch experimentelle Daten festgelegt. Dies erlaubt nachfolgend einfache Betrachtungen der Phänomenologie.
Zuerst werden Ergebnisse mit einem Singlet-artigen, also ν^c-artigen, leichtesten Neutralino χ^0_1 präsentiert. Im Anschluss daran werden Ergebnisse mit einem Bino-artigen Neutralino vorgestellt.

8.3. Singlet-artiges Neutralino χ^0_1

Um ein Singlet-artiges Neutralino zu erhalten, gilt es das Produkt $\frac{1}{\sqrt{2}}\kappa v_c$ zu minimieren, da dies der Diagonaleintrag des rechtshändigen Neutrinos ν^c in der Massenmatrix der neutralen

Fermionen ist. Daher wird in der nachfolgenden Diskussion $\kappa = 0,015$ gesetzt und v_c, respektive λ, so variiert, dass der Übergang zwischen dem Bino-artigen und dem Singlet-artigen Neutralino sichtbar wird. Dies ist zwischen $v_c = 4,42 - 28,0\text{TeV}$ der Fall, λ liegt dementsprechend im Intervall $[0,010; 0,064]$. Weiterhin wird dabei ausschließlich die Umstellungsvariante 2 benutzt, da Variante 1 für so kleine Werte von κ stets negative Massenquadrate bei den Skalaren und Pseudoskalaren zeigt. Zudem ist darauf zu achten, dass auch das leichteste Skalar bzw. Pseudoskalar Singlet-artige Zustände werden, welche für abnehmende Werte von v_c immer leichter werden, bis letztlich bei $v_c = 4,42\text{TeV}$ die LEP-Grenzen verletzt sind.

8.3.1. Parameterbestimmung

Da mit Umstellungsvariante 2 gearbeitet wird, sind zuerst einmal die Massenquadrate $m^2_{H_d}$, $m^2_{H_u}$ und $m^2_{\tilde{\nu}^c}$ aus der Lagrangedichte der SUSY-Brechung durch die Tadpolegleichungen festgelegt. Die Abhängigkeit von v_c ist für $m^2_{\tilde{\nu}^c}$ in Abbildung 8.1 gezeigt. Die anderen beiden Massenquadrate sind nahezu konstant bei $m^2_{H_d} = (1,40\text{TeV})^2$ und $m^2_{H_u} = -(155\text{GeV})^2$.

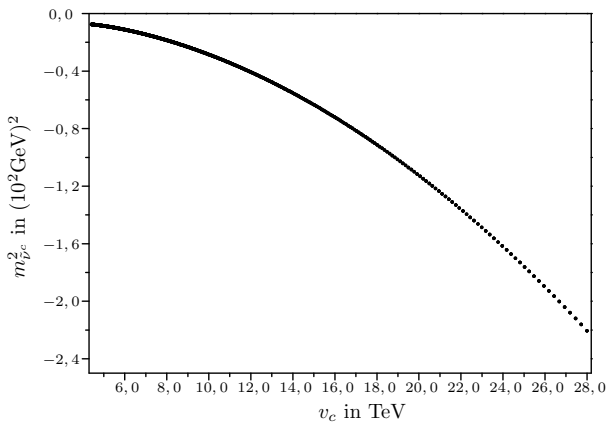


Abbildung 8.1.: $m^2_{\tilde{\nu}^c}$ in $\left(10^2\text{GeV}\right)^2$ gegen v_c in TeV

Tatsächlich ergeben sich für $m^2_{H_d}$ und $m^2_{H_u}$ damit typische Größenordnungen. Die Tatsache, dass $m^2_{\tilde{\nu}^c}$ ebenfalls negativ wird, bereitet keine Probleme, sondern stellt im Gegenteil einen interessanten Bereich dar.
Gleichzeitig werden durch Variante 2 wie beschrieben T_λ und T_κ so fixiert, dass keine negativen Massenquadrate bei den Skalaren und Pseudoskalaren auftreten. Abbildung 8.2 zeigt T_λ und T_κ, welche durchaus physikalisch sinnvolle Werte annehmen.

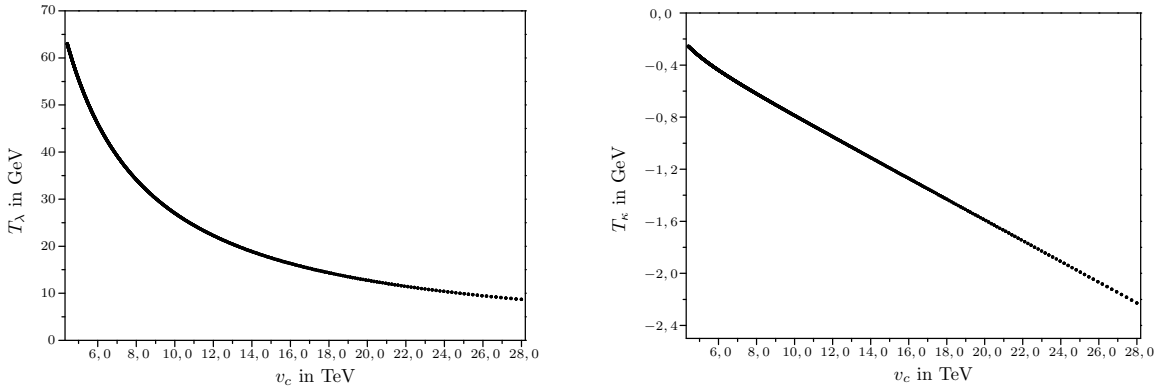


Abbildung 8.2.: Linke Hälfte: T_λ in GeV gegen v_c in TeV; Rechte Hälfte: T_κ in GeV gegen v_c in TeV

8.3.2. Neutrinodaten

Als Grenzen des erlaubten Bereiches der Neutrinodaten sind die 2σ-Intervalle aus Tabelle 2.3 in SPheno implementiert. Da die Neutrinofitroutine mit Zufallszahlen arbeitet, ergeben sich bei jedem Durchlauf unterschiedliche Ergebnisse bezüglich der Vakuumerwartungswerte der linkshändigen Sneutrinos v_i und der Yukawakopplungen der Neutrinos $(Y_\nu)_i$ und damit auch bezüglich der Neutrinodaten, deren 2σ-Grenzen vollständig ausgereizt werden. Um aussagekräftige Darstellungen von Abhängigkeiten zu erhalten, sind daher nachfolgend stets mehrere (>7) Durchläufe ausgeführt und die Ergebnisse eines jeden Laufes von SPheno mit einem Punkt in den Graphen verdeutlicht, so dass bei stark von den Neutrinodaten abhängigen Darstellungen Bänder entstehen. Es ist anzumerken, dass mehrere 100MB an Ausgabedaten von SPheno während dieser Durchläufe generiert werden.
Für den angegebenen Bereich bestimmt die Neutrinofitroutine hier die in der Abbildung 8.3 dargestellten Werte von v_i und $(Y_\nu)_i$.

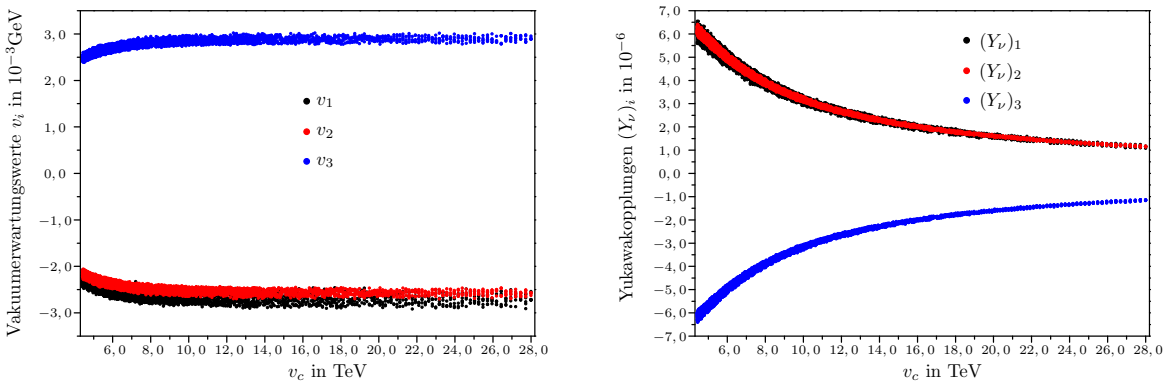


Abbildung 8.3.: Linke Hälfte: Vakuumerwartungswerte v_i in 10^{-3}GeV gegen v_c in TeV; Rechte Hälfte: Yukawakopplungen $(Y_\nu)_i/10^6$ gegen v_c in TeV

Da die Neutrinodaten aus der Einschleifen-korrigierten Massenmatrix der neutralen Fermionen gewonnen werden, ist hierzu eine allgemeine Anmerkung notwendig: Tatsächlich unterscheidet sich die Einschleifen-korrigierte Massenmatrix des $\mu\nu$SSM beispielsweise von derer des bilinearen Modells im wesentlichen darin, dass auch das rechtshändige Neutrinosuperfeld zusätzliche Korrekturen liefert. Jedoch zeigt die numerische Auswertung, dass beispielsweise der Einschleifengraph mit Beteiligung des rechtshändigen Sneutrinos als skalarer Beitrag einen nahezu vernachlässigbaren Beitrag liefert, so dass die Einschleifenkorrekturen keine neuen Besonderheiten zum Modell mit bilinear gebrochener R-Parität zeigen.

8.3.3. Massenspektrum

Damit kann zu den Abhängigkeiten der Massen der Skalare und Pseudoskalare von v_c übergegangen werden, welche in den Abbildungen 8.4 für die jeweils zwei leichtesten Teilchen dargestellt sind. Insbesondere die sehr leicht werdenden Skalare und Pseudoskalare und deren Verträglichkeit mit den LEP-Grenzen werden im nachfolgenden Abschnitt näher diskutiert. Die neutralen Fermionen zeigen ohne die Darstellung der drei Neutrinomasseneigenzustände die in Abbildung 8.5 präsentierte Abhängigkeit. Der Singlet-artige Zustand ν^c ist durchgehend in Orange eingefärbt, so dass unterhalb von Werten $v_c = 8,5\text{TeV}$ das leichteste Neutralino ein Singlet-artiger Zustand wird. Generell ist das leichteste Neutralino χ_1^0 auch für große Werte von v_c, bei denen es im wesentlichen Bino-Charakter aufweist, stets leichter als $90,5\text{GeV}$ und damit insbesondere leichter als das Z-Boson, was sich bei den Zerfällen bemerkbar macht.

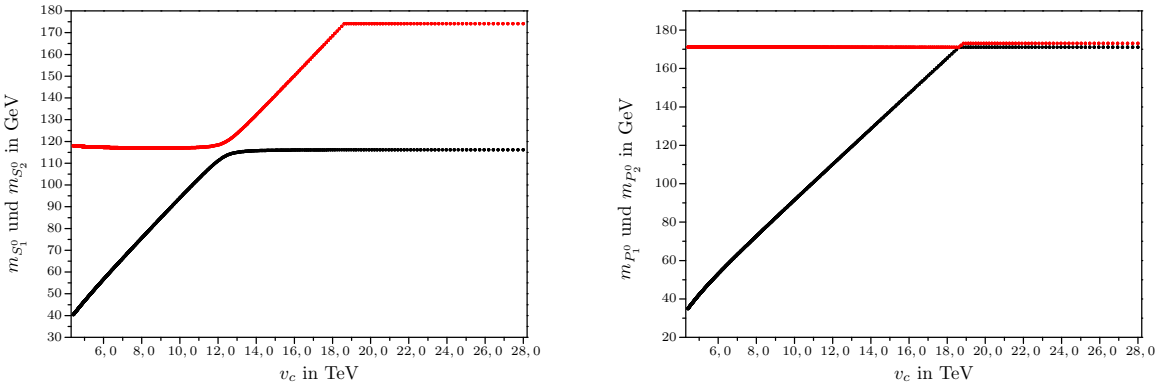


Abbildung 8.4.: Linke Hälfte: Massen der zwei leichtesten Skalare in GeV gegen v_c in TeV; Rechte Hälfte: Massen der zwei leichtesten Pseudoskalare in GeV gegen v_c in TeV

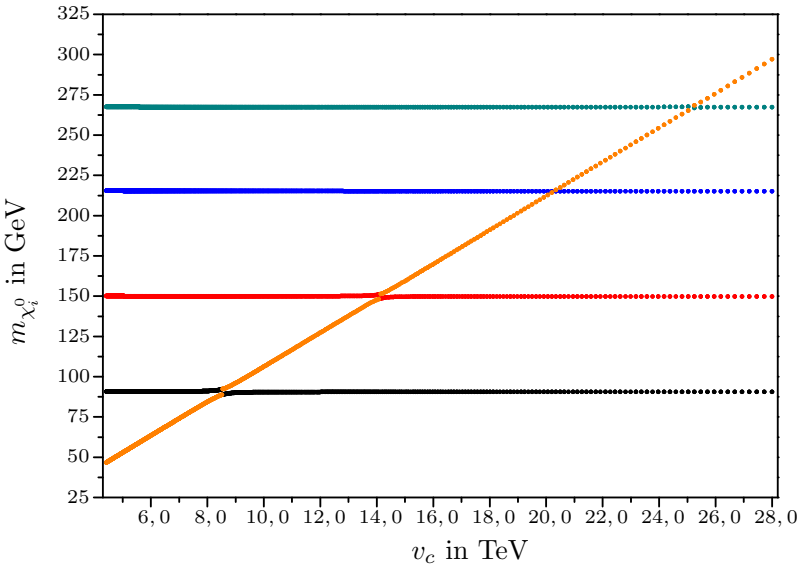


Abbildung 8.5.: Massen der neutralen Fermionen in GeV gegen v_c in TeV; Der Singlet-artige Zustand ν^c ist hier durchgehend in Orange eingefärbt, so dass mit kleiner werdendem v_c letztlich auch der Übergang zu einem Singlet-artigen leichtesten Neutralino χ_1^0 deutlich wird.

Es bleibt festzuhalten, dass sich bei allen drei Darstellungen ein Unterschied in den "Kreuzungs-

punkten" zeigt, deren Form entscheidend davon abhängt, ob der mit kleinerem v_c leichter werdende Singlet-artige Zustand mit dem Charakter des jeweils beteiligten Teilchens eine Mischung aufzeigt oder nicht. Dies wird auch durch den Singlet-Charakter der leichtesten Teilchen deutlich: Betrachtet man den entsprechenden Eintrag der Rotationsmatrizen, welche den Zustand $\nu^c, \tilde{\nu}^{cR}$ bzw. $\tilde{\nu}^{cI}$ auf das leichteste Neutralino χ_1^0, Skalar S_1^0 bzw. Pseudoskalar P_1^0 abbilden, so zeigt dessen Quadrat den Charakter des leichtesten Teilchens. Es ergibt sich das in Abbildung 8.6 dargestellte Verhalten.

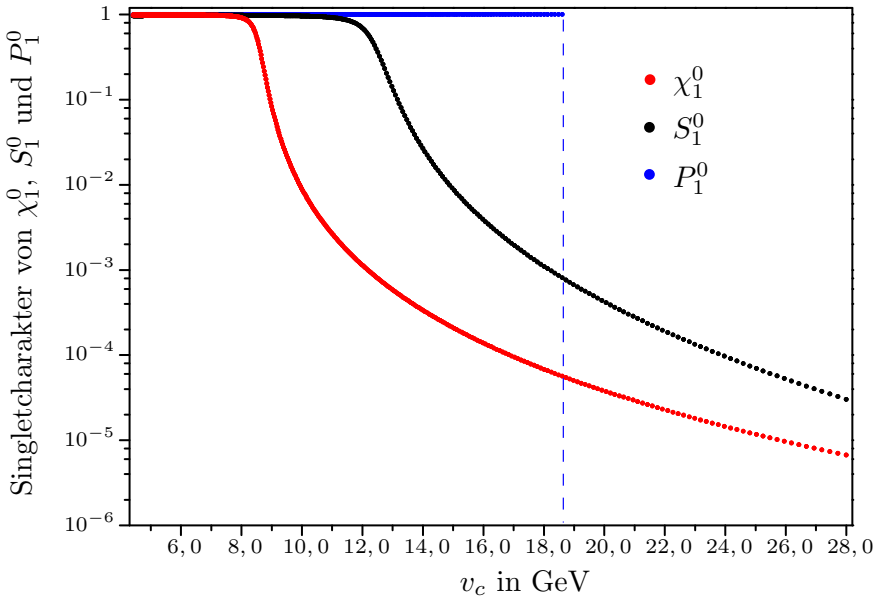


Abbildung 8.6.: Singlet-Charakter des leichtesten Skalars, Pseudoskalars und Neutralinos gegen v_c in TeV; Die blaue Linie deutet das nahezu plötzliche Auftreten des des Singlet-Charakters beim leichtesten Pseudoskalar an (vgl. hierzu auch Abbildung 8.13).

Hier wird erneut deutlich, wie sich die Phänomenologie des $\mu\nu$SSM in diesem Parameterbereich ändert, da sowohl im skalaren, pseudoskalaren als auch im fermionischen Bereich zugleich ein Singlet-artiger Zustand für kleine v_c das jeweils leichteste Teilchen stellt.

8.3.4. LEP-Grenzen

Wie bereits angedeutet werden die Skalare für Werte unterhalb von $v_c = 4,42$TeV so leicht, dass die LEP-Grenzen an die Skalarmassen nicht mehr erfüllt sind. Insbesondere der "Bjorken-Prozess" bereitet hier Probleme. Nachfolgend ist die leichteste Skalarmasse gegen die Größe η_B^2, welche nach Formel (7.22) berechnet wird, aufgetragen. Zusammen mit dem schon angesprochenen Polygonzug, welcher den Zusammenhang in Abbildung 7.2 approximiert, ergibt sich das in Abbildung 8.7 dargestellte Verhalten.
Man sieht, dass die Auswahl der Parameter mit der Wahl von κ so erfolgt ist, dass die Skalarmassen für $v_c \geq 4,42$TeV gerade oberhalb des Polygonzuges liegen, jedoch die präsentierten Skalar- und Pseudoskalarmassen des vorherigen Abschnittes experimentell durchaus noch zulässig sind. Es ist aber zu betonen, dass insbesondere durch die Variation von μ deutlich größere Abstände zu diesem experimentell ausgeschlossenen Bereich möglich sind, ohne die Phänomenologie stark zu beeinflussen. Die gesamte Kurve verschiebt sich so mit kleiner werdendem μ in Abbildung 8.7 nach "oben links", ohne wesentlich ihre Form zu verändern.

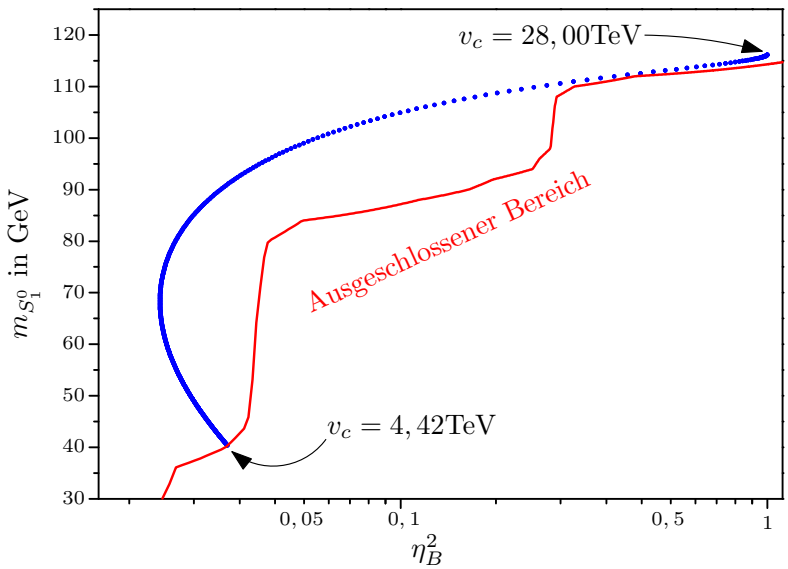


Abbildung 8.7.: Leichteste Skalarmasse in GeV gegen η_B^2

8.3.5. Zerfälle des leichtesten Skalars und Pseudoskalars

Zuerst werden die Zerfälle des leichtesten Skalars S_1^0 und des leichtesten Pseudoskalars P_1^0 betrachtet, da diese auch für den Zerfall des leichtesten Neutralinos χ_1^0 relevant sind. Die Zerfallsbreite des leichtesten Skalars ist in Abbildung 8.8 dargestellt, wohingegen die des leichtesten Pseudoskalars weitestgehend konstant bei 10^{-6}GeV liegt. Die Tatsache, dass für große v_c keine Abhängigkeit der Zerfallsbreite vom Vakuumerwartungswert vorliegt, ist darin begründet, dass das Produkt $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda v_c$ konstant bleibt und nur dieses in den relevanten Kopplungen auftaucht.

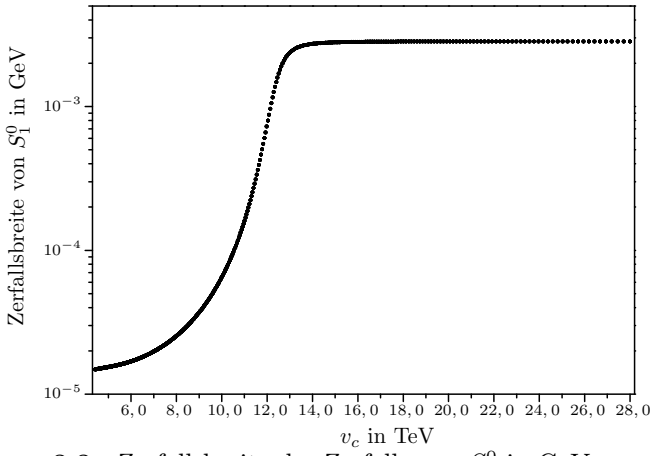


Abbildung 8.8.: Zerfallsbreite des Zerfalls von S_1^0 in GeV gegen v_c in TeV

Eine Zerfallsbreite von $\Gamma = 10^{-6}$GeV entspricht einer mittleren Lebensdauer von $T = 6,6 \cdot 10^{-19}$s, die mittlere Zerfallslänge ist dann $cT = 0,20$nm. Man muss daher davon ausgehen, dass dieses Teilchen im Detektor instantan zerfällt. Wirft man einen genaueren Blick auf die

Verzweigungsverhältnisse, so ergibt sich das in Abbildung 8.9 gezeigte Verhalten.

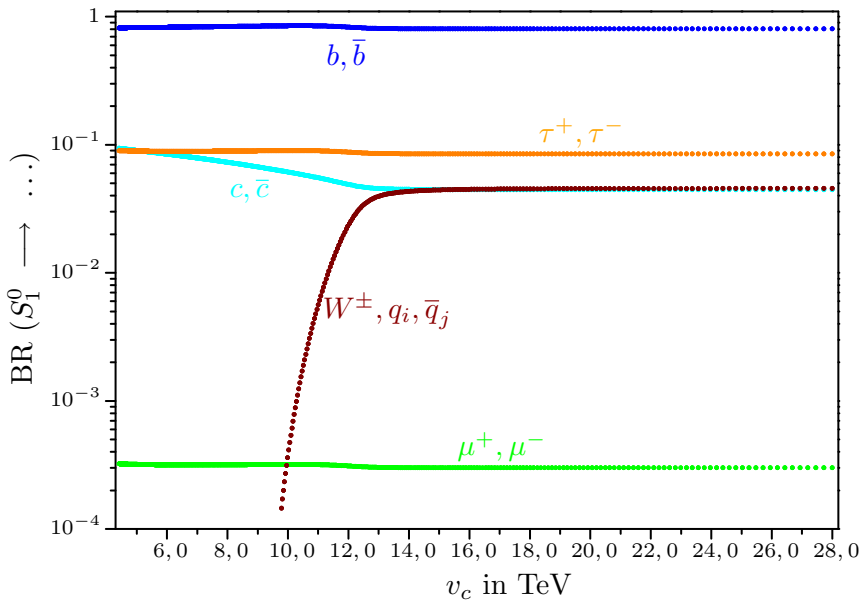


Abbildung 8.9.: Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls von S_1^0 gegen v_c in TeV

Abbildung 8.9 ist zu entnehmen, dass für große v_c und damit einer ausreichend hohen Masse des leichtesten Skalars S_1^0 der Zerfall in $W^\pm, q_i, \bar{q}_j$ mit allen möglichen Kombinationen an Quarks ohne Beteiligung des top-Quarks möglich ist. Dominant bleibt jedoch stets der Zerfall in $b, \bar{b}$ und τ^+, τ^-, unabhängig vom Singlet-Charakter von S_1^0. Auch das leichteste Pseudoskalar zerfällt zu annähernd 90% in $b, \bar{b}$ und ist daher nicht erneut aufgezeigt. Einzig tritt dort statt dem Zerfall in $c, \bar{c}$ der Zerfall in $s, \bar{s}$ mit deutlich geringerem Verzweigungsverhältnis von nur $0,05\%$ auf. Festzuhalten bleiben die Zerfälle in $b, \bar{b}$ und τ^+, τ^-, sowie im Falle von S_1^0 zusätzlich in $c, \bar{c}$.

8.3.6. Produktion und Zerfall des leichtesten Neutralinos

Da die behandelte Neutrinophysik zwangsläufig kleine R-Paritätsverletzende Terme bedingt, entsprechen die Produktionsraten von supersymmetrischen Teilchen weitestgehend denen des MSSM, welche beispielsweise [62] entnommen werden können. Demnach ergeben sich am "Large Hadron Collider"(LHC) hauptsächlich Gluinos und Squarks durch direkte Produktion, welche über Kaskadenzerfälle in die leichtesten supersymmetrischen Teilchen zerfallen. Charginos, Neutralinos und Sleptonen können unter der Voraussetzung, dass sie leicht sind, auch direkt durch Drell-Yann-Prozesse erzeugt werden. Jedoch ist diese direkte Produktion gerade bei einem Singlet-artigen Neutralino weitestgehend vernachlässigbar. Da sämtliche Gluinos und Squarks in diesem Parameterszenario Massen über 380GeV aufweisen und auch die Sleptonen über 115GeV liegen, ist somit die Existenz eines leichtesten Neutralinos mit einer Masse deutlich unter 100GeV wenig problematisch, da dessen Produktion eben über schwere, in bisherigen Experimenten nicht erreichbare Teilchen erfolgt.
Besonders relevant bei der Erzeugung dieses Singlet-artigen leichtesten Neutralinos sind folgende zwei Möglichkeiten: Einerseits gibt es die angesprochene Methode über den direkten Zerfall aus

Squarks, Gluinos und Sleptonen wie $\tilde{q} \to \chi_1^0 q$ oder $\tilde{l} \to \chi_1^0, l$, andererseits spielt der Zerfall aus schwereren Neutralinos, welche auf gleiche Art und Weise entstehen, die entscheidende Rolle.
In diesem Parameterszenario ist insbesondere der Zerfall $\chi_2^0 \to S_1^0, \chi_1^0$ beachtenswert, welcher ein Verzweigungsverhältnis von $99,8\%$ aufweist. Nicht zu vernachlässigen sind weiterhin die Zerfälle der geladenen Fermionen in das Singlet-artige Neutralino $\chi_{1/2}^{\pm} \to W^{\pm}, \chi_1^0$, die Verzweigungsverhältnisse von ca. $20 - 30\%$ zeigen. Zudem ist der Zerfall $\chi_4^0 \to Z, \chi_1^0$ zu erwähnen. Da beispielsweise auch χ_5^0 zu 40% in $W^{\pm}, \chi_{1/2}^{\mp}$ zerfällt, führen zahlreiche Zerfälle auf das leichteste Singlet-artige Neutralino χ_1^0.
Für den Fall größerer Werten von v_c, bei welchen noch ein Bino-Charakter des leichtesten Neutralinos vorliegt, spielen die direkten Zerfälle aus Squarks eine deutlich größere Rolle. So zeigt zum Beispiel der Zerfall $\tilde{u}_R \to \chi_1^0, u$ ein Verzweigungsverhältnis von $86,1\%$, ähnlich den Zerfällen von $\tilde{d}_R$, $\tilde{c}_R$, $\tilde{s}_R$-Squarks. Bei den Masseneigenzuständen der $\tilde{b}$ und $\tilde{t}$-Squarks sind diese Zerfälle eher von geringerer Relevanz. Weiterhin treten auch hier wieder ähnliche wie die bereits angesprochenen Zerfälle der schwerern Neutralinos auf.
Nachdem nun die Produktion des leichtesten Neutralinos χ_1^0 geklärt ist, kann im nächsten Schritt der Zerfall desselben betrachtet werden. Als gesamte Zerfallsrate des leichtesten Neutralinos χ_1^0 ergibt sich das in Abbildung 8.10 gezeigte Verhalten.

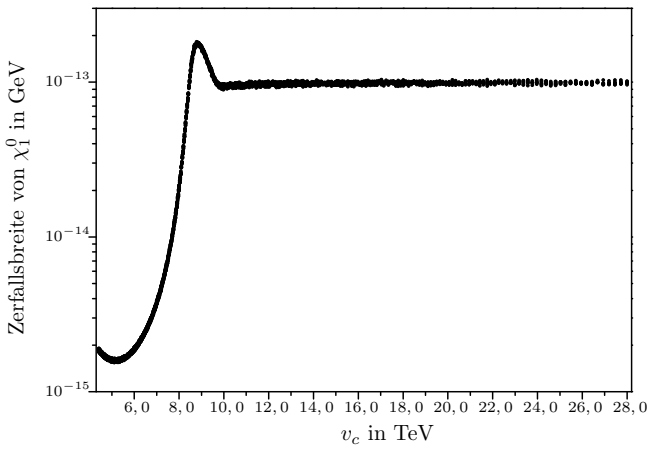


Abbildung 8.10.: Zerfallbreite des Zerfalls von χ_1^0 in GeV gegen v_c in TeV

Dabei ist zu bemerken, dass eine Zerfallsbreite von 10^{-15}GeV einer mittleren Lebensdauer von $T = 6,6$ns entspricht, was wiederum mit einer mittleren Zerfallslänge von $cT = 0,20$m identifizierbar ist. Nachfolgend werden die Zerfälle $\chi_1^0 \to S_1^0, \nu_i$ bzw. P_1^0, ν_i zuerst getrennt aufgeführt, um sie dann mit den schnellen Zerfällen der leichtesten Skalare und Pseudoskalare aus dem vorherigen Abschnitt zu kombinieren. Die Zerfallskanäle sind durch die Abhängigkeit in Abbildung 8.11 auf Seite 74 gegeben.
Auffällig für große v_c ist der Zerfall $\chi_1^0 \to \tau^+, \tau^-, \nu_i$, wobei ν_i auch in der weiteren Arbeit die Summe über alle möglichen Neutrinos oder Antineutrinos (!) meint, genauer also in der Form $\sum \nu_i$ zu verstehen ist. Gleichermaßen spielen jedoch auch die Zerfälle in andere Leptonen $l_j^{\pm}, l_k^{\mp}, \nu_i$ hier ein, wobei alle Kombination e^+, e^-; μ^+, μ^- sowie $e^{\pm}, \mu^{\mp}$; $e^{\pm}, \tau^{\mp}$ und $\mu^{\pm}, \tau^{\mp}$ auftreten, aus welchen die Letztgennanten mit je $15 - 20\%$ hervorzuheben sind. Die Zerfälle in $W^{\pm}, l_i^{\mp}$ sind ebenso relevant, wohingegen der Zerfall Z, ν_i aufgrund des relativ leichten Neutralinos χ_1^0 nicht auftritt. Letztlich verschwindet mit kleiner werdendem v_c auch der Zerfall in $W^{\pm}, l_i^{\mp}$, da das leichteste Neutralino χ_1^0 die W-Masse unterschreitet. Dies macht sich in Form von numerischen Ungenauigkeiten, welche blau umrandet sind, in den Graphen bemerkbar.

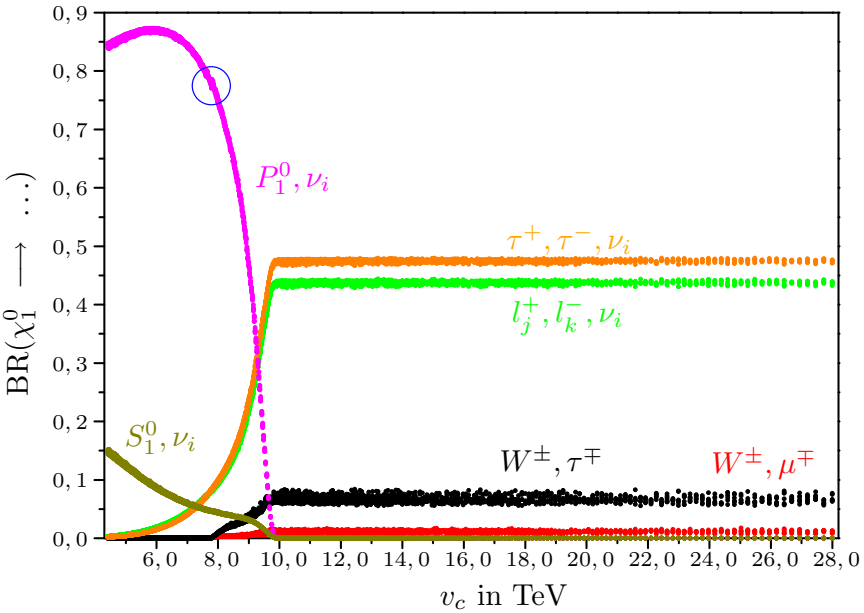


Abbildung 8.11.: Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls von χ_1^0 gegen v_c in TeV für $\kappa = 0,015$, Umstellung der Tadpolegleichungen nach Variante 2

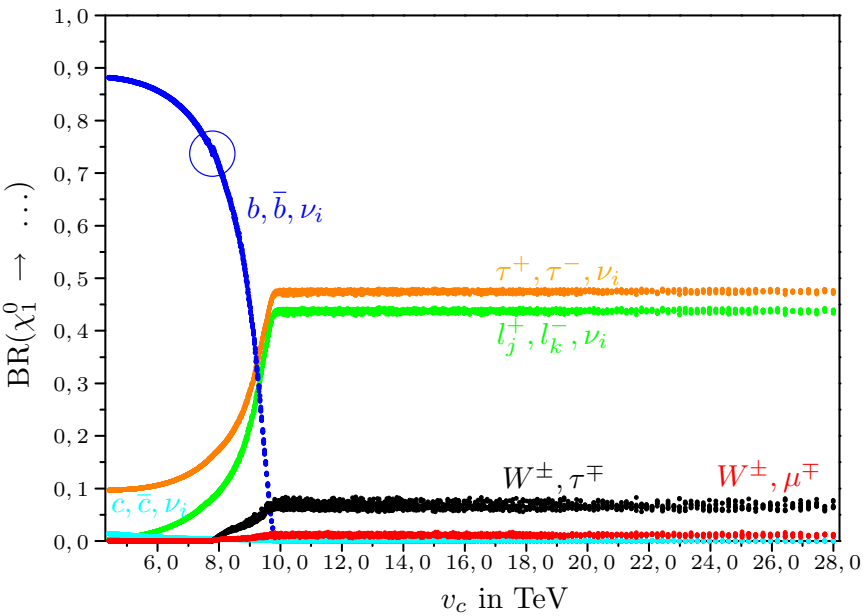


Abbildung 8.12.: Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls von χ_1^0 gegen v_c in TeV bei Berücksichtigung der Zerfälle von S_1^0 und P_1^0 für $\kappa = 0,015$, Umstellung der Tadpolegleichungen nach Variante 2

Für kleine v_c dominiert der Zerfall in S_1^0, ν_i bzw. P_1^0, ν_i, welche jedoch wie bereits dargestellt, im wesentlichen in $b, \overline{b}$; τ^+, τ^- und $c, \overline{c}$ im Falle von S_1^0 bzw. $s, \overline{s}$ im Falle von P_1^0 zerfallen. Kombiniert man die beiden Zerfälle unter Beachtung von $b, \overline{b}$ und τ^+, τ^-, so bleibt das in Abbildung 8.12 auf Seite 74 dargestellte Verhalten.
Nun bleibt die Frage, ob der Zerfall des leichtesten Neutralinos χ_1^0 sich maßgeblich von anderen supersymmetrischen Modellen mit gebrochener R-Parität unterscheidet. Tatsächlich ist dem nicht so. Zuerst einmal ist keiner der aufgeführten Zerfälle unsichtbar wie beispielsweise im Modell mit spontan gebrochener R-Parität. Der Zerfall in $b, \overline{b}, \nu_i$ ist auch in anderen Modellen, wie dem mit bilinear gebrochener R-Parität, sehr häufig. Genauso verhält es sich mit dem Zerfall in τ^+, τ^-, ν_i oder einem anderen Lepton-Antileptonpaar. Daher unterscheidet sich die Phänomenologie im Bereich kleiner Werte von κ ausschließlich in Fragen der exakten Verzweigungsverhältnisse oder Zerfallsbreiten, sowie in Bezug auf gewisse Winkelabhängigkeiten von anderen Modellen. Sollte sich demnach ein supersymmetrisches Modell als richtiger Ansatz zur Beschreibung unsereres Universums herausstellen, so wird es schwierig mit Hilfe des "Large Hadron Colliders"(LHC) das Modell des $\mu\nu$SSM mit einer Generation rechtshändiger Neutrinos herauszuheben.
Selbst andere Werte von $\tan\beta$ wie beispielsweise $\tan\beta = 50$ liefern bei den sonst im SPS $1a'$ verbliebenen Parametern keine neuen Phänomene. Die Struktur der dargestellten Massenspektren und Zerfälle bleibt diesselbe.

8.4. Abhängigkeit von κ im Falle des Singlet-artigen Neutralinos χ_1^0

Der Vollständigkeit halber sei auch die Variation von κ angeführt, auch wenn sich ein sehr ähnliches Bild zum soeben beschriebenen Verhalten ergibt. Dazu wird nun κ zwischen $0,004$ und $0,25$ gewählt und dabei nun $\lambda = 0,025$ bzw. $v_c = 11,31\text{GeV}$ ($\mu = 200\text{GeV}$) fixiert. Prinzipiell stellt sich die Frage, weshalb λ nicht deutlich größer gewählt wird, jedoch beschränken die LEP-Grenzen wiederum für den gewünschten Fall des Singlet-artigen leichtesten Neutralinos den Parameterraum. Die gezeigten Abhängigkeiten für die Massenquadrate der "soft-breaking"-Lagrangedichte, T_λ und T_κ, die Neutrinodaten, die Massen der Skalare, Pseudoskalare und Neutralinos zeigen dabei ein äquivalentes Verhalten, man ersetze nur in Gedanken bei den bisherigen Graphen die v_c-Achse durch eine logarithmische κ-Achse. Genauso zeigen die Zerfälle der Skalare und Pseudoskalare kein anderes Verhalten. Einzig aufgezeigt wird nachfolgend erneut der Singlet-Charakter der drei leichtesten Teilchen in Abbildung 8.13 sowie die Zerfälle des leichtesten Neutralinos ohne und mit Kombination der Skalar- und Pseudoskalarzerfälle in den Abbildungen 8.14 und 8.15.

Das prinzipielle Verhalten ist hier sehr ähnlich der Zerfälle bei festem κ und variiertem v_c, einzig der noch auftretende Zerfall in $q_j, \overline{q}_k, l_i^{(\pm)}$ ist erwähnenswert. Dazu zählen bei Abbildung 8.14 die Zerfälle mit $l_i^\pm$ und passend dazu $d, \overline{u}$ bzw. $\overline{d}, u$ oder $s, \overline{c}$ bzw. $\overline{s}, c$ sowie $l = \nu_i$ und passend dazu $u, \overline{u}$; $d, \overline{d}$; $s, \overline{s}$ und auch $c, \overline{c}$ und $b, \overline{b}$. Die letztgenannten beiden Zerfälle sind in Abbildung 8.15 entsprechend den dortigen Zerfällen zugeordnet. Da im Vergleich zum vorherigen Fall κ für das Singlet-artige Neutralino kleiner ausfällt, ändert sich insbesondere auch der skalare und pseudoskalare Sektor, so dass diese Zerfälle möglich werden. Ebenfalls sehr deutlich fällt das Wegfallen der Zerfälle in $W^\pm, l_i^\mp$ aus, der sich in allen anderen Verzweigungsverhältnissen äußert (siehe erneute blaue Markierungen).

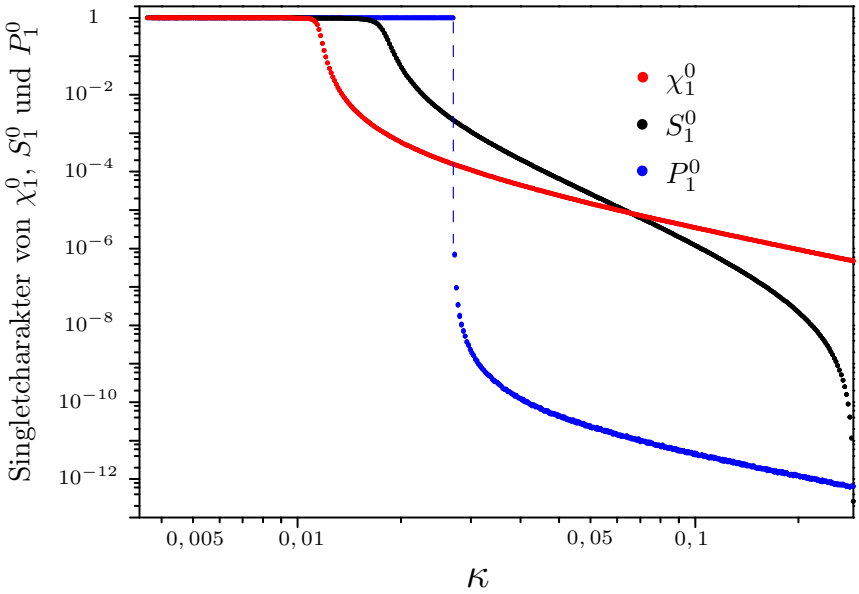


Abbildung 8.13.: Singlet-Charakter des leichtesten Skalars, Pseudoskalars und Neutralinos gegen κ; Die blaue Linie deutet das nahezu plötzliche Auftreten des des Singlet-Charakters beim leichtesten Pseudoskalar an.

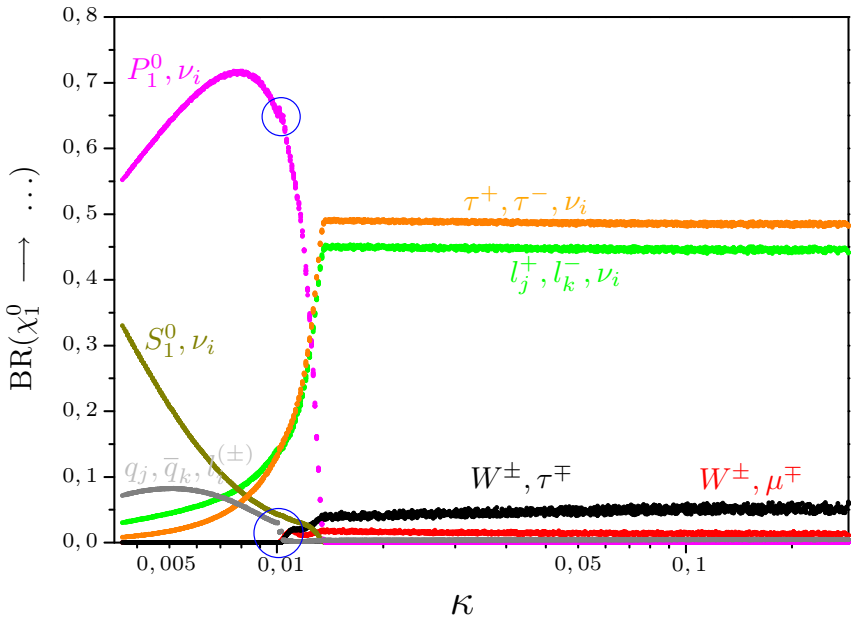


Abbildung 8.14.: Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls von χ_1^0 gegen κ für $\lambda = 0,025$ ($v_c = 11,31$TeV), Umstellung der Tadpolegleichungen nach Variante 2

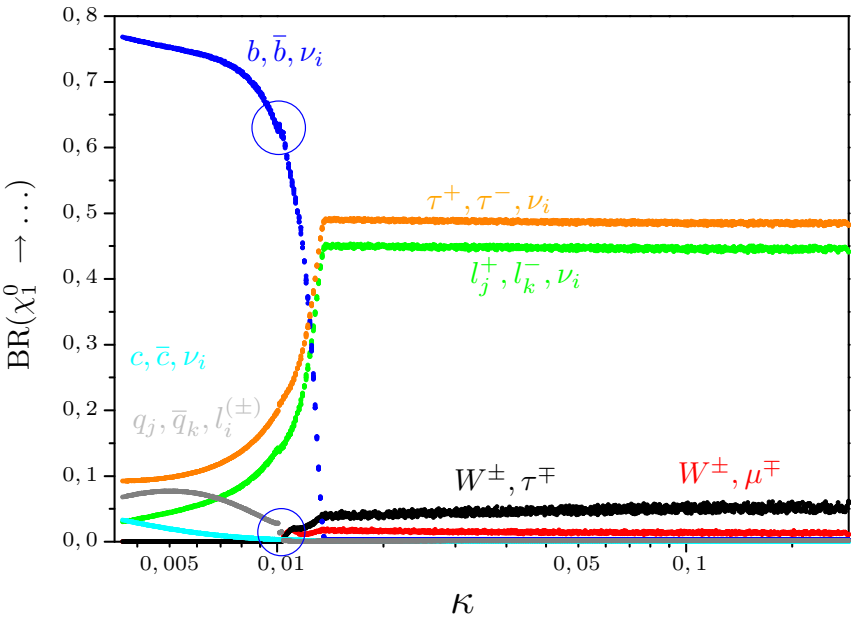


Abbildung 8.15.: Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls von χ_1^0 gegen κ unter Berücksichtigung der Zerfälle von S_1^0 und P_1^0 für $\lambda = 0,025$ ($v_c = 11,31$TeV), Umstellung der Tadpolegleichungen nach Variante 2

8.5. Bino-artiges Neutralino χ_1^0

In diesem Abschnitt werden Resultate für einen deutlich größeren Wert von κ, nämlich $\kappa = 0,5$ präsentiert. Gleichzeitig wird μ wieder auf 396GeV gesetzt und v_c zwischen 3,6TeV und 37TeV variiert, so dass für λ Werte zwischen 0,015 und 0,153 angenommen werden. Tatsächlich zeigt das gesamte Verhalten für größere Werte von λ keine Besonderheiten mehr, da das leichteste Neutralino stets Bino-artig bleibt. Im Gegensatz zur bisherigen Betrachtung kommt hier nun Umstellungsvariante 1 zum Einsatz, da kaum noch Probleme mit negativen Massenquadraten auftreten. Auch die LEP-Grenzen bereiten aufgrund weitestgehend konstanter Massen der Skalare und Pseudoskalare keine Schwierigkeiten mehr. Es ist darauf hinzuweisen, dass Umstellungsvariante 1 eine leicht andere Phänomenologie bedingt, denn während zuvor bei Umstellungsvariante 2 mit wachsendem v_c der Zerfall des leichtesten Neutralinos mit Bino-artigem Charakter in $b, \bar{b}, \nu_i$ auf wenige Promille absinkt, bleibt dieser bei Umstellungsvariante 1 nahezu konstant bei über 10%. Der Grund für das Absinken bei Variante 2 liegt an der Kopplung der skalaren und pseudoskalaren Sneutrinos an $b, \bar{b}$. Diese ist sensitiv auf den H_d-Anteil der Sneutrinos, welcher im Falle von Variante 2 stetig mit v_c abnimmt. Da jedoch gerade die Sneutrinos als intermediäre Teilchen beim Zerfall in $b, \bar{b}, \nu_i$ auftreten, fällt dieser Zerfallskanal auf wenige Promille ab. Dies ist anders bei Variante 1, welche nachfolgend zum Einsatz kommt.
Im Gegensatz zu Variante 2 bleibt hier auch $m^2_{\tilde{\nu}^c}$ als freier Parameter, welcher vorerst auf $(224,47\text{GeV})^2$ gesetzt wird. Zuerst seien wieder die Abhängigkeiten gegenüber v_c, respektive λ präsentiert.

8.5.1. Parameterbestimmung

Erneut werden T_λ und T_κ angegeben, obwohl diese bei Variante 1 direkt aus den Tadpolegleichungen ermittelt werden. Die Abhängigkeiten sind Abbildung 8.16 zu entnehmen.

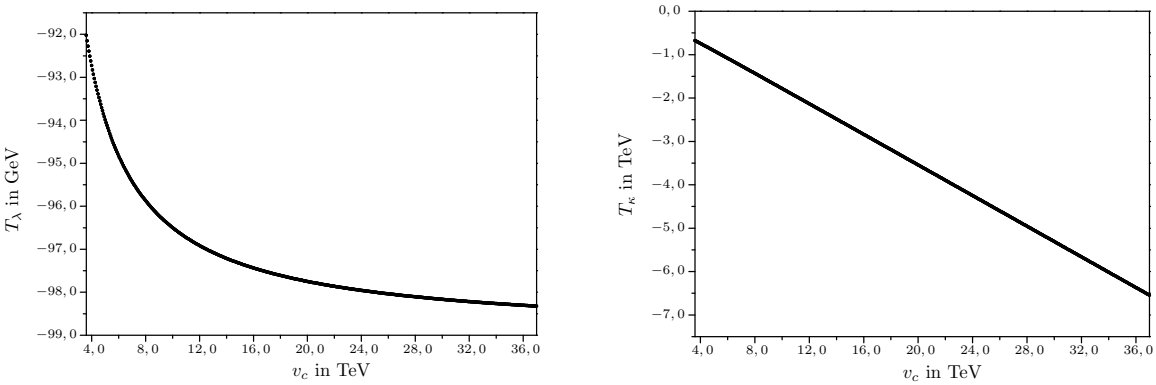


Abbildung 8.16.: Linke Hälfte: T_λ in GeV gegen v_c in TeV; Rechte Hälfte: T_κ in TeV gegen v_c in TeV

Die Massen $m^2_{H_d}$ und $m^2_{H_u}$ sind in diesem Fall konstante Eingangsparameter wie beschrieben. Die Masse $m^2_{H_u}$ wird zwar aus den Tadpolegleichungen bestimmt, ist jedoch ebenfalls nahezu konstant bei $-(398,90\text{GeV})^2$.

8.5.2. Neutrinodaten

Wie zuvor bestimmt die Neutrinofitroutine die Vakuumerwartungswerte v_i der linkshändigen Sneutrinos und die Yukawakopplungen der Neutrinos $(Y_\nu)_i$ wieder so, dass die 2σ-Grenzen der Neutrinodaten erfüllt werden. Die Variation ist in Abbildung 8.17 dargestellt. Wie bereits erläutert, führt dies erneut zu Bändern in den nachfolgenden Abbildungen, da einige Kopplungen sehr sensitiv auf die Vakuumerwartungswerte und Yukawakopplungen sind.

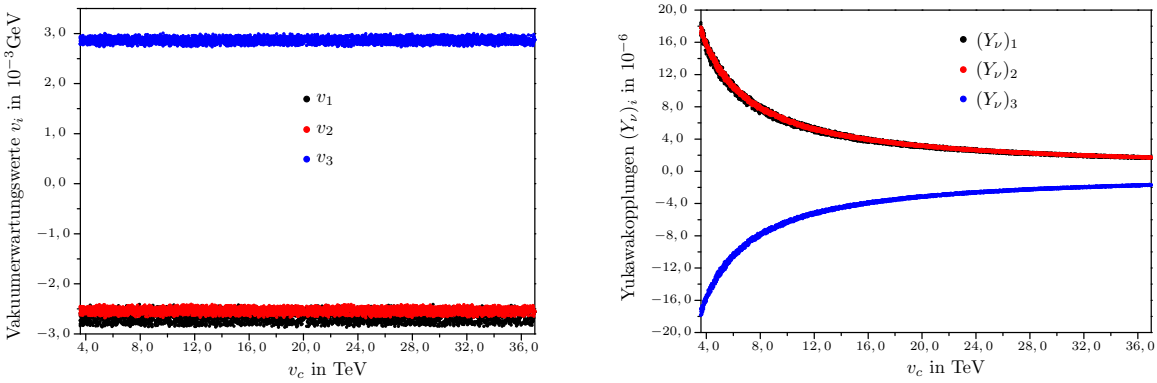


Abbildung 8.17.: Linke Hälfte: Vakuumerwartungswerte v_i in 10^{-3}GeV gegen v_c in TeV; Rechte Hälfte: Yukawakopplungen $(Y_\nu)_i/10^6$ gegen v_c in TeV

8.5.3. Massenspektrum

Damit kann zum Massenspektrum übergegangen werden. Da hier kein leichtester Singlet-artiger Zustand auftritt, bleiben die Massen der leichtesten Skalare und Pseudoskalare weitestgehend konstant und erfüllen die LEP-Grenzen, auch wenn die Größe η_B^2 der Produktionsrate des "Bjorken-Prozesses" stets bei über $0,99$ liegt. Einzig das Verhalten bei den neutralen Fermionen wird erneut gezeigt.

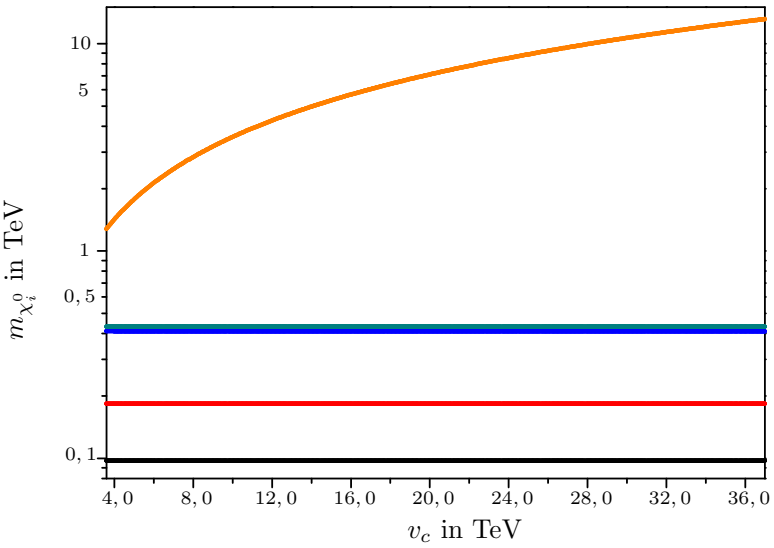


Abbildung 8.18.: Massen der neutrale Fermionen in TeV gegen v_c in TeV; Der Singlet-artige Zustand ν^c ist erneut durchgehend in Orange eingefärbt.

Man sieht den sehr schweren Singlet-artigen Zustand ν^c, dessen Masse wie erwartet linear mit abnehmenden v_c ebenfalls kleiner wird. Das leichteste Neutralino weist nun mit der Masse $97,6$GeV genau den für SPS1a' typischen Wert auf, welcher aus $\mu = 396$GeV resultiert. Damit spielen nachfolgend auch Zerfälle des leichtesten Neutralinos unter Beteiligung des Z-Bosons eine Rolle.

8.5.4. Zerfall des leichtesten Neutralinos

Da diesmal die Zerfälle der leichtesten Skalare und Pseudoskalare nicht von Interesse sind und zudem ein sehr ähnliches Verhalten wie unter Variante 2 zu beobachten ist, wird direkt der Zerfall des leichtesten Neutralinos χ_1^0 betrachtet.

Tatsächlich liegt keinerlei Abhängigkeit gegenüber λ bzw. v_c vor. Wie bereits erklärt, tritt der Zerfall $b, \bar{b}, \nu_i$ auf, dessen Verzweigungsverhältnis sehr gut vergleichbar mit dem Modell mit bilinear gebrochener R-Parität ist.
Auch eine Variation von κ oder $m_{\tilde{\nu}^c}^2$ bringt hier keinerlei neue Phänomenologie. Die Verzweigungsverhältnisse bleiben über die physikalisch sinnvollen Bereiche konstant bei den Werten aus Abbildung 8.19.

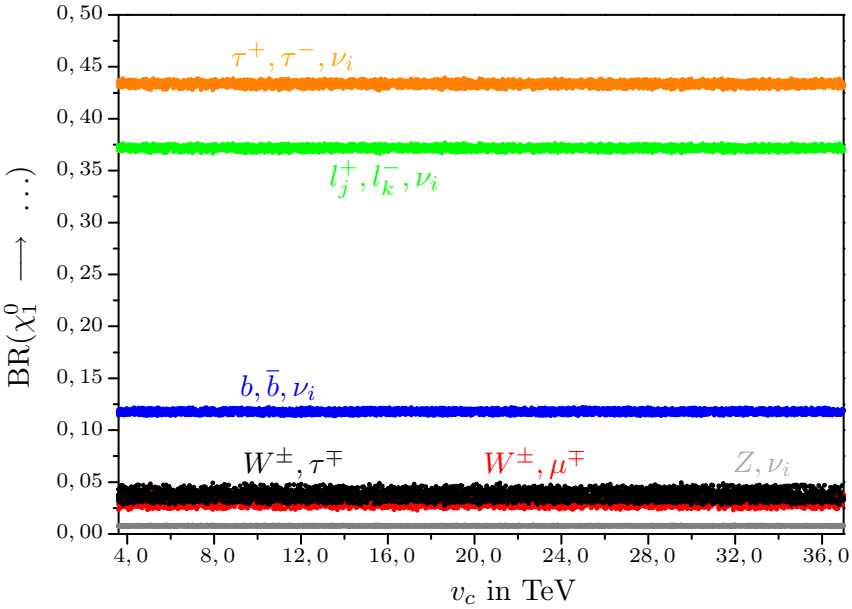


Abbildung 8.19.: Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls von χ_1^0 gegen v_c in TeV für $\kappa = 0,5$, Umstellung der Tadpolegleichungen nach Variante 1

8.6. Korrelation zwischen Zerfällen und den Neutrinomischungswinkeln

Zuletzt bleibt noch die Korrelation zwischen den Zerfällen des leichtesten Neutralinos χ_1^0 und den Neutrinodaten zu untersuchen, wobei, wie im vorherigen Kapitel, Variante 1 bei der Umstellung der Tadpolegleichungen zum Einsatz kommt. Zuerst wird dazu der Zusammenhang zwischen $|\Lambda_2/\Lambda_3|^2$ und $\tan^2\theta_{\text{atm}}$ sowie zwischen $|\epsilon_1/\epsilon_2|^2$ und $\tan^2\theta_{\text{sol}}$ aufgezeigt, der nach Formel (5.45) eine abgesehen von der Rotation im solaren Fall nahezu direkte Proportinalität darstellt. Es sei nochmal daran erinnert, dass $\Lambda_i = \mu v_i + v_d \epsilon_i$ und $\epsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_\nu)_i \, v_c$ gilt. Abbildung 8.20 zeigt die gut erfüllte Relation, die erneut die Funktionalität der Neutrinofitroutine unterstreicht.
Um eine Abhängigkeit zwischen den Neutrinodaten und den Zerfällen des leichtesten Neutralinos χ_1^0 aufzuzeigen, ist eine kurze Vorüberlegung zur Kopplung des leichtesten Neutralinos an ein Chargino und ein W-Boson notwendig. Die exakte Kopplung findet sich in Anhang B und ist in der Notation

$$\mathcal{L} = \overline{\chi_i^-} \gamma^\mu \left(O_{Lij}^{cnw} P_L + O_{Rij}^{cnw} P_R \right) \chi_1^0 W_\mu^- + \overline{\chi_1^0} \gamma^\mu \left(O_{Lij}^{ncw} P_L + O_{Rij}^{ncw} P_R \right) \chi_j^- W_\mu^+ \tag{8.1}$$

gegeben durch:

$$O_{Li1}^{cnw} = g \left[-U_{i1} \mathcal{N}_{12}^* - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(U_{i2} \mathcal{N}_{13}^* + \sum_{k=1}^{3} U_{i,2+k} \mathcal{N}_{1,5+k}^* \right) \right]$$

$$O_{Ri1}^{cnw} = g \left(-V_{i1}^* \mathcal{N}_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} V_{i2}^* \mathcal{N}_{14} \right) \tag{8.2}$$

$$O_{L1j}^{ncw} = \left(O_{Lj1}^{cnw} \right)^* \quad , \qquad O_{R1j}^{ncw} = \left(O_{Rj1}^{cnw} \right)^* \tag{8.3}$$

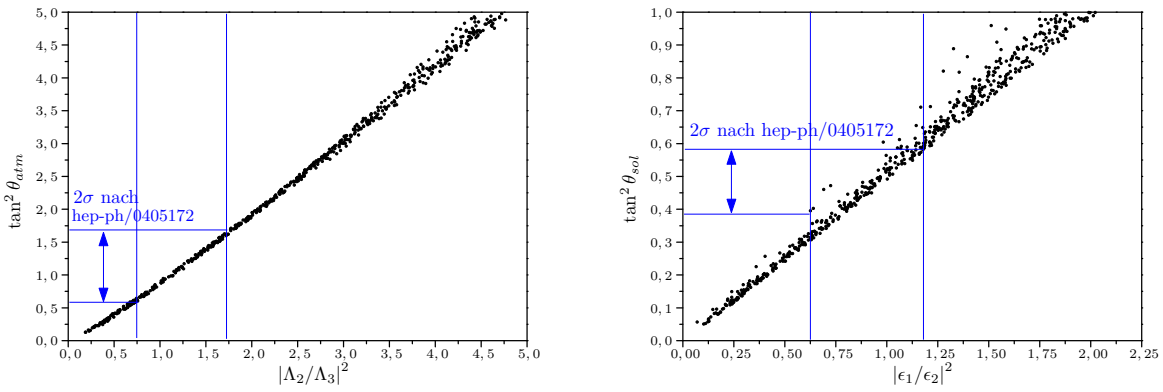


Abbildung 8.20.: Linke Hälfte: Zusammenhang zwischen $\tan^2\theta_{\text{atm}}$ und $|\Lambda_2/\Lambda_3|^2$; Rechte Hälfte: Zusammenhang zwischen $\tan^2\theta_{\text{sol}}$ und $|\epsilon_1/\epsilon_2|^2$

Nähert man die Rotationmatrizen gemäß den Abschnitten 4.3 und 4.5 an und geht zudem von rein reellen Größen aus, so ergibt sich in grober Näherung

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} N & N\xi^T \\ -\mathcal{V}^T\xi & \mathcal{V}^T \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} U_c & U_c\xi_L^T \\ -\xi_L & I_3 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} V_c & V_c\xi_R^T \\ -\xi_R & I_3 \end{pmatrix} \quad , \tag{8.4}$$

wobei die Leptonyukawakopplungen schon als diagonal angenommen sind und daher (3×3)-Einheitsmatrizen I_3 hier auftreten. Beachtet man nun weiter die nach Beziehung (4.43) echten Identitäten

$$\begin{aligned}
(\xi_L^*)_{i1} &= \frac{g\Lambda_i}{\sqrt{2}\det_+} \left(= (\xi_L)_{i1}\right) \\
(\xi_L^*)_{i2} &= -\frac{\epsilon_i}{\mu} - \frac{g^2 v_u \Lambda_i}{2\mu\det_+} \left(= (\xi_L)_{i2}\right) \\
(\xi_R^*)_{i1} &= \frac{g v_d (Y_e)_{ii}}{2\det_+}\left[\frac{v_u\epsilon_i}{\mu} + \frac{\left(2\mu^2 + g^2 v_u^2\right)\Lambda_i}{2\mu\det_+}\right] \left(= (\xi_R)_{i1}\right) \\
(\xi_R^*)_{i2} &= -\frac{\sqrt{2} v_d (Y_e)_{ii}}{2\det_+}\left[\frac{M_2\epsilon_i}{\mu} + \frac{g^2\left(v_d\mu + M_2 v_u\right)\Lambda_i}{2\mu\det_+}\right] \left(= (\xi_R)_{i2}\right)
\end{aligned} \tag{8.5}$$

und führt als Abkürzung die Determinante der MSSM-Charginomassenmatrix $\det_+ = -\frac{1}{2}g^2 v_d v_u + M_2\mu$ ein, so bleibt als Näherung für die obigen Kopplungen

$$O_{Li1}^{cnw} = \frac{g}{\sqrt{2}}\left[\frac{g N_{12}\Lambda_{i-2}}{\det_+} - \left(\frac{\epsilon_{i-2}}{\mu} + \frac{g^2 v_u \Lambda_{i-2}}{2\mu\det_+}\right) N_{13} - \sum_{k=1}^{5} N_{1k}\xi_{i-2,k}\right] \tag{8.6}$$

$$O_{Ri1}^{cnw} = \frac{g\,(Y_e)_{i-2,i-2}\,v_d}{2\det_+}\left[\frac{g v_u N_{12} - M_2 N_{14}}{\mu}\epsilon_{i-2} + \frac{g\left(2\mu^2 + g^2 v_u^2\right)N_{12} - g^2\left(\mu v_d + M_2 v_u\right)N_{14}}{2\mu\det_+}\Lambda_{i-2}\right] ,$$

sofern $i = \{3,4,5\}$ entsprechend eines der Leptonen e, μ, τ gewählt wird. Man erkennt sofort die Indexstruktur, welche weitestgehend von Λ_i und bedingt auch von ϵ_i dominiert wird. Da diese Kopplungen als Produkte in der Zerfallsbreite (6.15) auftauchen, kann man beispielsweise die

nachfolgende Proportionalität erwarten:

$$\frac{\mathrm{BR}\left(\chi_1^0 \to W^\pm, \mu^\mp\right)}{\mathrm{BR}\left(\chi_1^0 \to W^\pm, \tau^\mp\right)} \propto \left|\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3}\right|^2 \tag{8.7}$$

Tatsächlich zeigt das numerische Ergebnis exakt dieses Verhalten, wie Abbildung 8.21 zu entnehmen ist. Da genau dieser Quotient den atmosphärischen Winkel bestimmt, kann die Auftragung ebenso gegen $\tan^2\theta_{\mathrm{atm}}$ erfolgen, wobei der experimentell zulässige Bereich in Abbildung 8.22 gesondert gekennzeichnet ist.

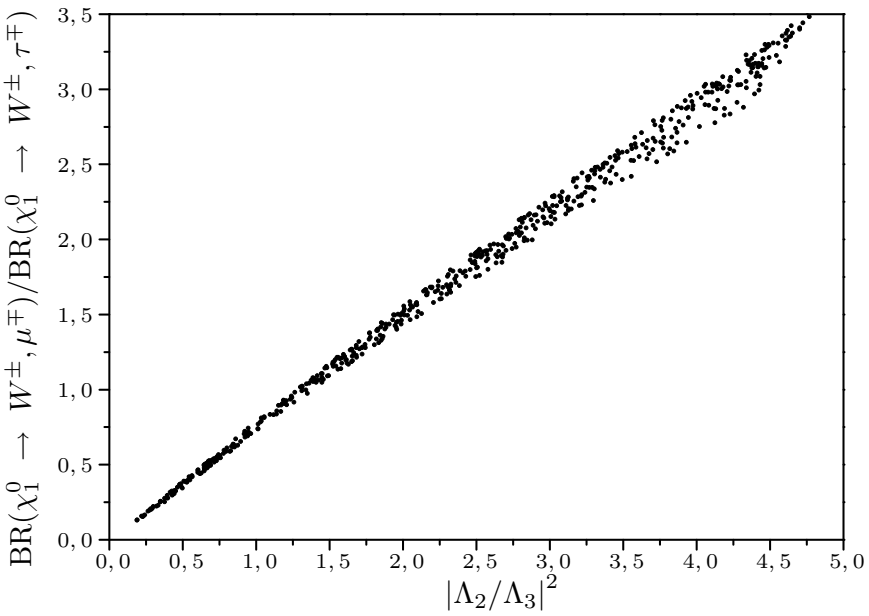


Abbildung 8.21.: $\mathrm{BR}(\chi_1^0 \to W^\pm, \mu^\mp)/\mathrm{BR}(\chi_1^0 \to W^\pm, \tau^\mp)$ gegen $|\Lambda_2/\Lambda_3|^2$

Es lässt sich demnach festhalten, dass die aus Experimenten resultierenden Kenntnisse der Neutrinodaten der Quotient der Verzweigungsverhältnisse auf bestimmte Bereiche festlegen. Äquivalente Betrachtungen sind ebenso möglich bei Beteiligung eines Elektrons e oder beispielsweise für die Größe

$$R_e = \frac{\mathrm{BR}(\chi_1^0 \to W^\pm, e^\mp)}{\sqrt{\mathrm{BR}(\chi_1^0 \to W^\pm, \mu^\mp)^2 + \mathrm{BR}(\chi_1^0 \to W^\pm, \tau^\mp)^2}} \quad , \tag{8.8}$$

welche direkt an den Reaktorwinkel gekoppelt und durch diesen für die betrachtete Parameterstudie auf $R_e \ll 0,016$ beschränkt ist.
Für den solaren Winkel soll nachfolgend exemplarisch eine Abhängigkeit gezeigt werden. Da wie dargestellt der solare Winkel durch $|\epsilon_1/\epsilon_2|^2$ festgelegt wird, weist hier das Verhältnis des Zerfalls unter Beteiligung von $e^\pm$ durch den Zerfall unter Beteiligung von $\mu^\pm$ nach Abbildung 8.23 einen nahezu linearen Zusammenhang zu $\tan^2\theta_{\mathrm{sol}}$ auf. Tatsächlich lassen sich weitere ähnliche Beziehungen finden, einen Überblick für das bilineare Modell liefert beispielsweise [63], jedoch resultieren daraus hier keine weiteren Erkenntnisse.

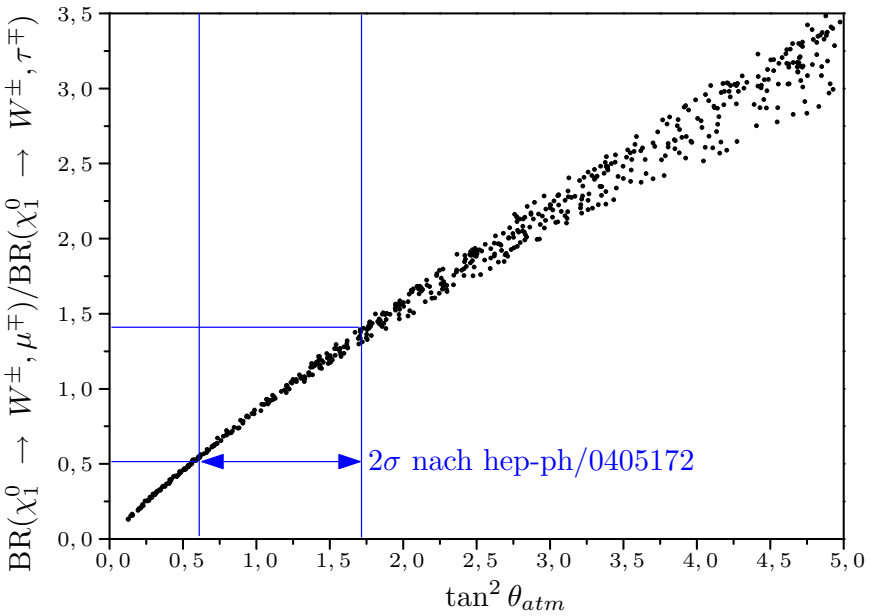


Abbildung 8.22.: $\mathrm{BR}(\chi_1^0 \to W^\pm, \mu^\mp)/\mathrm{BR}(\chi_1^0 \to W^\pm, \tau^\mp)$ gegen $\tan^2\theta_{\mathrm{atm}}$

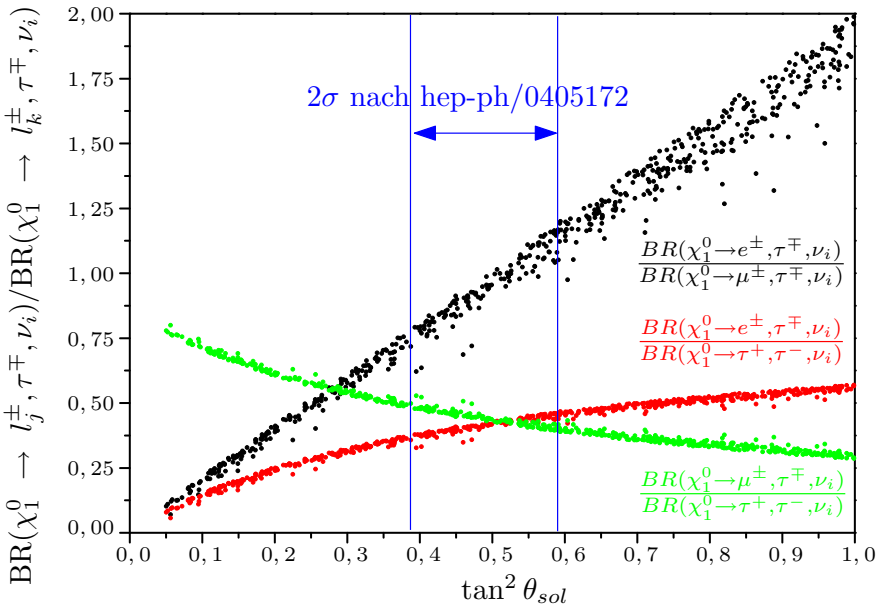


Abbildung 8.23.: Darstellung von Abhängigkeiten der Zerfälle $\chi_1^0 \to l_j^\pm, \tau^\mp, \nu_i$ vom solaren Winkel $\tan^2\theta_{\mathrm{sol}}$

9. Zusammenfassung

Abschließend sei, auch um die Einleitung aufzugreifen, darauf hingewiesen, dass das behandelte supersymmetrische Modell, welches unter dem Namen $\mu\nu$SSM eingeführt wurde, eine interessante Erweiterungsmöglichkeit des Standardmodells darstellt. Tatsächlich jedoch wird die Unterscheidung von anderen Modellen mit gebrochener R-Parität schwierig, es wären dazu sehr präzise Messungen und auch theoretisch exakte Betrachtungen notwendig, die im Rahmen dieser Arbeit nicht erfolgt sind. So wurden beispielsweise die Zerfälle der schwereren Neutralinos, der Sleptonen und Squarks nur angeschnitten. Gluinozerfälle hingegen wurden überhaupt nicht betrachtet, da sie sich phänomenologisch nur minimal vom MSSM unterscheiden. Dennoch bleibt die Supersymmetrie mit gebrochener R-Parität eine Erweiterung, die Neutrinophysik beschreiben kann, wenngleich die Verletzung der R-Parität im Sinne der angesprochenen flavourverletzenden Zerfälle klein sein muss und die Zahl an möglichen Kandidaten an dunkler Materie eingeschränkt ist. Mit Spannung erwartet man daher neue experimentelle Resultate, die der Theorie Anhaltspunkte liefert: Ist der Higgs-Mechanismus die richtige Beschreibung für Massen oder sind higgslose Modelle die richtige Beschreibung? Wie kann man die Existenz dunkler Materie und insbesondere auch der dunklen Energie erklären? Ist eine Einbindung der Gravitation in quantenmechanischer Formulierung in das bekannte Standardmodell möglich? Beobachtet man Supersymmetrie? ...
Festzuhalten bleibt die Vielzahl an ungelösten Fragen und Problemstellungen, die einerseits eine gewisse Unzufriedenheit hervorruft, andererseits jedoch gerade die Basis heutiger theoretischer Arbeiten sind, die auf verschiedenste Weisen versuchen, die beobachtbaren Phänomene zu erklären. So versuchte auch diese Arbeit einen möglichen Bereich der theoretischen Teilchenphysik näher zu beleuchten.
Zuletzt sei noch einigen Personen mein Dank ausgesprochen: Ich danke Prof. Werner Porod für die Idee zu dieser interessanten Fragestellung und die während der Diplomarbeit erbrachte Hilfe, insbesondere auch in Bezug auf die Verwendung von SPheno. Die Fachrichtung der Teilchenphysik ist mit Sicherheit in Würzburg eine beliebte Thematik dank der Vorlesung von Prof. Reinhold Rückl zur relativistischen Quantenfeldtheorie, die auch mich zur Diplomarbeit in der Theorie bewegte. Weiterhin seien meine Zimmerkollegen erwähnt, die für eine nette Atmosphäre während der Diplomarbeit sorgten und manchmal Hilfestellungen gaben. Zuletzt sei meinen Freunden und meiner Familie ganz besonders gedankt, welche stets an meiner Seite standen und stehen und mich unterstützen.

A. Massenmatrizen

A.1. Skalare Massenmatrizen

Für die Massenmatrizen der Skalare sind die quadratischen Terme des Skalarpotentials

$$V_{\text{skalar}} = W_i W_i^* + \tfrac{1}{2} g_a^2 \left(\phi_i^* T_a \phi_i\right) \left(\phi_j^* T_a \phi_j\right) - \mathcal{L}_{\text{soft},\mu\nu} \tag{A.1}$$

relevant, die im Folgenden mit $V_{\text{quad.}}$ bezeichnet werden. Zur Abkürzung der Schreibweise wird häufig

$$u^2 = v_d^2 - v_u^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \quad ; \quad v^2 = v_d^2 + v_u^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \qquad \text{und} \qquad v_m = (v_1, v_2, v_3) \tag{A.2}$$

verwendet. Typische Summationsindizes sind m und n.

A.1.1. Geladene Skalare

Mit der unrotierten Basis der geladenen Skalare

$$\begin{aligned} \left(S^{+'}\right)^T &= \left(\left(H_d^-\right)^*, H_u^+, \tilde{e}^*, \tilde{\mu}^*, \tilde{\tau}^*, \tilde{e}^c, \tilde{\mu}^c, \tilde{\tau}^c\right) \\ \left(S^{-'}\right)^T &= \left(H_d^-, \left(H_u^+\right)^*, \tilde{e}, \tilde{\mu}, \tilde{\tau}, (\tilde{e}^c)^*, (\tilde{\mu}^c)^*, (\tilde{\tau}^c)^*\right) \quad . \end{aligned} \tag{A.3}$$

können die für die geladenen Skalare relevanten quadratischen Terme des Skalarpotentials in der Form

$$V_{\text{quad.}} = \left(S^{-'}\right)^T M_{S^\pm}^2 S^{+'} \tag{A.4}$$

geschrieben werden. Die auftretende hermitesche (8×8)-Matrix wird in folgender Form unterteilt

$$M_{S^\pm}^2 = \begin{pmatrix} M_{HH}^2 & \left(M_{H\tilde{l}}^2\right)^\dagger \\ M_{H\tilde{l}}^2 & M_{\tilde{l}\tilde{l}}^2 \end{pmatrix} + \xi m_W^2 \begin{pmatrix} M_A^2 & \left(M_B^2\right)^T \\ M_B^2 & M_C^2 \end{pmatrix}, \tag{A.5}$$

wobei die (2×2)-Untermatrix der geladenen Higgs gegeben ist durch:

$$M_{HH}^2 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{8}\left(-g^2 + g'^2\right) u^2 + \frac{1}{4} g^2 v_d^2 + m_{H_d}^2 \\ + \frac{1}{2}\lambda\lambda^* v_c^2 + \frac{1}{2} v_m \left(Y_e Y_e^\dagger\right)_{mn} v_n \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{4} g^2 v_d v_u - \frac{1}{2}\lambda\lambda^* v_d v_u + \frac{1}{4}\lambda\kappa^* v_c^2 \\ + \frac{1}{2}\lambda v_u v_m \left(Y_\nu^*\right)_m + \frac{1}{\sqrt{2}} v_c \left(T_\lambda\right) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} g^2 v_d v_u - \frac{1}{2}\lambda\lambda^* v_d v_u + \frac{1}{4}\lambda^*\kappa v_c^2 \\ + \frac{1}{2}\lambda^* v_u v_m \left(Y_\nu\right)_m + \frac{1}{\sqrt{2}} v_c \left(T_\lambda^*\right) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{8}\left(g^2 - g'^2\right) u^2 + \frac{1}{4} g^2 v_u^2 + m_{H_u}^2 \\ + \frac{1}{2}\lambda\lambda^* v_c^2 + \frac{1}{2} v_c^2 \left(Y_\nu^*\right)_m \left(Y_\nu\right)_m \end{bmatrix} \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

Die Mischung zwischen dem geladenen Higgssektor und dem Sleptonsektor liefert:

$$M^2_{H\tilde{l}} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}g^2 v_d v_1 - \frac{1}{2}v_c^2 \lambda^* (Y_\nu)_1 \\ -\frac{1}{2}v_d \left(Y_e Y_e^\dagger\right)_{1m} v_m \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{4}g^2 v_u v_1 - \frac{1}{4}v_c^2 \kappa^* (Y_\nu)_1 + \frac{1}{2}v_d v_u \lambda^* (Y_\nu)_1 \\ -\frac{1}{2}v_u v_m (Y_\nu^*)_m (Y_\nu)_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}v_c (T_\nu)_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4}g^2 v_d v_2 - \frac{1}{2}v_c^2 \lambda^* (Y_\nu)_2 \\ -\frac{1}{2}v_d \left(Y_e Y_e^\dagger\right)_{2m} v_m \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{4}g^2 v_u v_2 - \frac{1}{4}v_c^2 \kappa^* (Y_\nu)_2 + \frac{1}{2}v_d v_u \lambda^* (Y_\nu)_2 \\ -\frac{1}{2}v_u v_m (Y_\nu^*)_m (Y_\nu)_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}v_c (T_\nu)_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4}g^2 v_d v_3 - \frac{1}{2}v_c^2 \lambda^* (Y_\nu)_3 \\ -\frac{1}{2}v_d \left(Y_e Y_e^\dagger\right)_{3m} v_m \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{4}g^2 v_u v_3 - \frac{1}{4}v_c^2 \kappa^* (Y_\nu)_3 + \frac{1}{2}v_d v_u \lambda^* (Y_\nu)_3 \\ -\frac{1}{2}v_u v_m (Y_\nu^*)_m (Y_\nu)_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}v_c (T_\nu)_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}v_c v_u (Y_e^*)_{m1} (Y_\nu)_m \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}v_m (T_e^*)_{m1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\lambda v_c v_m (Y_e^*)_{m1} \\ -\frac{1}{2}v_c v_d (Y_e^*)_{m1} (Y_\nu)_m \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}v_c v_u (Y_e^*)_{m2} (Y_\nu)_m \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}v_m (T_e^*)_{m2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\lambda v_c v_m (Y_e^*)_{m2} \\ -\frac{1}{2}v_c v_d (Y_e^*)_{m2} (Y_\nu)_m \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}v_c v_u (Y_e^*)_{m3} (Y_\nu)_m \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}v_m (T_e^*)_{m3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\lambda v_c v_m (Y_e^*)_{m3} \\ -\frac{1}{2}v_c v_d (Y_e^*)_{m3} (Y_\nu)_m \end{bmatrix} \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

Die (6×6)-Sleptonmatrix wird der Einfachheit halber wie folgt dargestellt:

$$M^2_{\tilde{l}\tilde{l}} = \begin{pmatrix} M^2_{LL} & M^2_{LR} \\ M^2_{RL} & M^2_{RR} \end{pmatrix} \tag{A.8}$$

mit

$$\begin{aligned} \left(M^2_{LL}\right)_{ij} &= \tfrac{1}{2}v_d^2 \left(Y_e Y_e^\dagger\right)_{ij} + \tfrac{1}{8}\left(-g^2 + g'^2\right) u^2 \delta_{ij} + \tfrac{1}{4}g^2 v_i v_j + \left(m^2_{\tilde{L}}\right)_{ji} + \tfrac{1}{2}v_c^2 (Y_\nu)_i (Y_\nu^*)_j \\ M^2_{LR} &= -\tfrac{1}{2}v_c v_u \lambda^* (Y_e) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}v_d (T_e) \\ M^2_{RL} &= \left(M^2_{LR}\right)^\dagger \\ \left(M^2_{RR}\right)_{ij} &= -\tfrac{1}{4}g'^2 u^2 \delta_{ij} + \left(m^2_{\tilde{e}^c}\right)_{ij} + \tfrac{1}{2}v_d^2 \left(Y_e^\dagger Y_e\right)_{ij} + \tfrac{1}{2}\left(\left(Y_e^\dagger\right)_{im} v_m\right)\left((Y_e)_{nj} v_n\right) \end{aligned} \tag{A.9}$$

Zuletzt gilt es die von der Eichfixierung abhängigen Massenterme anzugeben. Für die (2×2)-A-Untermatrix ergibt sich

$$M^2_A = \frac{1}{v^2}\begin{pmatrix} v_d^2 & -v_u v_d \\ -v_u v_d & v_u^2 \end{pmatrix} \quad . \tag{A.10}$$

Weiterhin ist die (6×2)-B-Untermatrix und die (6×6)-C-Untermatrix gegeben durch

$$M^2_B = \frac{1}{v^2}\begin{pmatrix} v_1 v_d & -v_1 v_u \\ v_2 v_d & -v_2 v_u \\ v_3 v_d & -v_3 v_u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad M^2_C = \begin{pmatrix} M^2_D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{A.11}$$

wobei die (3×3)-D-Untermatrix von folgender Gestalt ist:

$$\left(M^2_D\right)_{ij} = \frac{1}{v^2} v_i v_j \tag{A.12}$$

Die Masseneigenzustände der geladenen Skalare $S^{\pm'}$ ergeben sich dann nach

$$S_i^{\pm} = R_{ij}^{S^{\pm}} S_j^{\pm'} \quad , \tag{A.13}$$

wobei die angegebene unitäre Rotationsmatrix die hermitesche Massenmatrix der geladenen Skalare wie folgt diagonalisiert:

$$\mathrm{diag}\left(m^2_{S_1^{\pm}}, \ldots, m^2_{S_8^{\pm}}\right) = R^{S^{\pm}} M_{S^{\pm}} \left(R^{S^{\pm}}\right)^{\dagger} \tag{A.14}$$

A.1.2. CP-gerade neutrale Skalare

Das Skalarpotential beinhaltet in der Basis

$$\left(S^{0'}\right)^T = \left(\sigma_d^0, \sigma_u^0, \tilde{\nu}^{cR}, \tilde{\nu}_1^R, \tilde{\nu}_2^R, \tilde{\nu}_3^R\right) \tag{A.15}$$

die quadratischen Terme

$$V_{\text{quad.}} = \frac{1}{2}\left(S^{0'}\right)^T M^2_{S^0} S^{0'} + \ldots \quad . \tag{A.16}$$

Die hier auftretende reell symmetrische (6×6)-Massenmatrix $M^2_{S^0}$ kann in folgende Matrizen aufgespalten werden

$$M^2_{S^0} = \begin{pmatrix} M^2_{SS} & M^2_{S\tilde{\nu}^c} & M^2_{S\tilde{\nu}^R} \\ \left(M^2_{S\tilde{\nu}^c}\right)^T & M^2_{\tilde{\nu}^c\tilde{\nu}^c} & M^2_{\tilde{\nu}^c\tilde{\nu}^R} \\ \left(M^2_{S\tilde{\nu}^R}\right)^T & \left(M^2_{\tilde{\nu}^c\tilde{\nu}^R}\right)^T & M^2_{\tilde{\nu}^R\tilde{\nu}^R} \end{pmatrix} \quad . \tag{A.17}$$

Diese sind gegeben durch:

$$M^2_{SS} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{8}\left(g^2+g'^2\right)\left(u^2+2v_d^2\right) \\ +m^2_{H_d} + \frac{1}{2}\lambda\lambda^*\left(v_c^2+v_u^2\right) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\left(g^2+g'^2\right)v_d v_u + \lambda\lambda^* v_d v_u \\ -\frac{1}{8}\left(\lambda\kappa^* + \lambda^*\kappa\right)v_c^2 \\ -\frac{1}{2}v_u v_m\left(\lambda^*\left(Y_\nu\right)_m + \lambda\left(Y_\nu^*\right)_m\right) \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}v_c\left(\left(T_\lambda^*\right) + \left(T_\lambda\right)\right) \end{bmatrix} \\ \text{sym.} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}\left(g^2+g'^2\right)\left(u^2-2v_u^2\right) \\ +m^2_{H_u} + \frac{1}{2}\lambda\lambda^*\left(v_c^2+v_d^2\right) \\ -\frac{1}{2}v_d v_m\left(\lambda^*\left(Y_\nu\right)_m + \lambda\left(Y_\nu^*\right)_m\right) \\ +\frac{1}{2}v_c^2\left(Y_\nu^*\right)_m\left(Y_\nu\right)_m \\ +\frac{1}{2}v_m v_n\left(Y_\nu^*\right)_m\left(Y_\nu\right)_n \end{bmatrix} \end{pmatrix} \tag{A.18}$$

$$M^2_{S\tilde{\nu}^c} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\left(\lambda\kappa^* + \lambda^*\kappa\right)v_c v_u + \lambda\lambda^* v_c v_d \\ -\frac{1}{2}v_c v_m\left(\lambda^*\left(Y_\nu\right)_m + \lambda\left(Y_\nu^*\right)_m\right) \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}v_u\left(\left(T_\lambda^*\right) + \left(T_\lambda\right)\right) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \lambda\lambda^* v_c v_u - \frac{1}{4}\left(\lambda\kappa^* + \lambda^*\kappa\right)v_c v_d \\ +\left(Y_\nu^*\right)_m\left(Y_\nu\right)_m v_c v_u \\ +\frac{1}{4}v_c v_m\left(\kappa^*\left(Y_\nu\right)_m + \kappa\left(Y_\nu^*\right)_m\right) \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}v_d\left(\left(T_\lambda^*\right) + \left(T_\lambda\right)\right) \\ +\frac{1}{2\sqrt{2}}v_m\left(\left(T_\nu^*\right)_m + \left(T_\nu\right)_m\right) \end{bmatrix} \end{pmatrix} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned} M^2_{\tilde{\nu}^c\tilde{\nu}^c} = & \tfrac{1}{2}\lambda\lambda^* \left(v_d^2 + v_u^2\right) - \tfrac{1}{4}\left(\lambda\kappa^* + \lambda^*\kappa\right) v_d v_u + \tfrac{1}{2\sqrt{2}} v_c \left(\left(T^*_\kappa\right) + \left(T_\kappa\right)\right) + m^2_{\tilde{\nu}^c} \\ & + \tfrac{3}{4}\kappa\kappa^* v_c^2 + \tfrac{1}{2} v_u^2 \left(Y^*_\nu\right)_m \left(Y_\nu\right)_m + \tfrac{1}{2} v_m v_n \left(Y^*_\nu\right)_m \left(Y_\nu\right)_n \\ & + \tfrac{1}{4} v_u v_m \left(\kappa^* \left(Y_\nu\right)_m + \kappa \left(Y^*_\nu\right)_m\right) - v_d v_m \left(\lambda^* \left(Y_\nu\right)_m + \lambda \left(Y^*_\nu\right)_m\right) \end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\left(M^2_{\tilde{\nu}^c\tilde{\nu}^R}\right)^T = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \tfrac{1}{4} v_c v_u \left(\kappa^* \left(Y_\nu\right)_1 + \kappa \left(Y^*_\nu\right)_1\right) - \tfrac{1}{2} v_c v_d \left(\lambda^* \left(Y_\nu\right)_1 + \lambda \left(Y^*_\nu\right)_1\right) \\ + \tfrac{1}{2} v_c v_m \left(\left(Y^*_\nu\right)_m \left(Y_\nu\right)_1 + \left(Y_\nu\right)_m \left(Y^*_\nu\right)_1\right) \\ + \tfrac{1}{2\sqrt{2}} v_u \left(\left(T^*_\nu\right)_1 + \left(T_\nu\right)_1\right) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tfrac{1}{4} v_c v_u \left(\kappa^* \left(Y_\nu\right)_2 + \kappa \left(Y^*_\nu\right)_2\right) - \tfrac{1}{2} v_c v_d \left(\lambda^* \left(Y_\nu\right)_2 + \lambda \left(Y^*_\nu\right)_2\right) \\ + \tfrac{1}{2} v_c v_m \left(\left(Y^*_\nu\right)_m \left(Y_\nu\right)_2 + \left(Y_\nu\right)_m \left(Y^*_\nu\right)_2\right) \\ + \tfrac{1}{2\sqrt{2}} v_u \left(\left(T^*_\nu\right)_2 + \left(T_\nu\right)_2\right) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tfrac{1}{4} v_c v_u \left(\kappa^* \left(Y_\nu\right)_3 + \kappa \left(Y^*_\nu\right)_3\right) - \tfrac{1}{2} v_c v_d \left(\lambda^* \left(Y_\nu\right)_3 + \lambda \left(Y^*_\nu\right)_3\right) \\ + \tfrac{1}{2} v_c v_m \left(\left(Y^*_\nu\right)_m \left(Y_\nu\right)_3 + \left(Y_\nu\right)_m \left(Y^*_\nu\right)_3\right) \\ + \tfrac{1}{2\sqrt{2}} v_u \left(\left(T^*_\nu\right)_3 + \left(T_\nu\right)_3\right) \end{bmatrix} \end{pmatrix} \tag{A.21}$$

$$\left(M^2_{S\tilde{\nu}^R}\right)^T = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \tfrac{1}{4}\left(g^2 + g'^2\right) v_d v_1 \\ -\tfrac{1}{4}\left(v_c^2 + v_u^2\right)\left(\lambda \left(Y^*_\nu\right)_1 + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_1\right) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{4}\left(g^2 + g'^2\right) v_u v_1 \\ + \tfrac{1}{8} v_c^2 \left(\kappa^* \left(Y_\nu\right)_1 + \kappa \left(Y^*_\nu\right)_1\right) \\ - \tfrac{1}{2} v_d v_u \left(\lambda^* \left(Y_\nu\right)_1 + \lambda \left(Y^*_\nu\right)_1\right) \\ + \tfrac{1}{2} v_u v_m \left(\left(Y^*_\nu\right)_m \left(Y_\nu\right)_1 + \left(Y_\nu\right)_m \left(Y^*_\nu\right)_1\right) \\ + \tfrac{1}{2\sqrt{2}} v_c \left(\left(T^*_\nu\right)_1 + \left(T_\nu\right)_1\right) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tfrac{1}{4}\left(g^2 + g'^2\right) v_d v_2 \\ -\tfrac{1}{4}\left(v_c^2 + v_u^2\right)\left(\lambda \left(Y^*_\nu\right)_2 + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_2\right) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{4}\left(g^2 + g'^2\right) v_u v_2 \\ + \tfrac{1}{8} v_c^2 \left(\kappa^* \left(Y_\nu\right)_2 + \kappa \left(Y^*_\nu\right)_2\right) \\ - \tfrac{1}{2} v_d v_u \left(\lambda^* \left(Y_\nu\right)_2 + \lambda \left(Y^*_\nu\right)_2\right) \\ + \tfrac{1}{2} v_u v_m \left(\left(Y^*_\nu\right)_m \left(Y_\nu\right)_2 + \left(Y_\nu\right)_m \left(Y^*_\nu\right)_2\right) \\ + \tfrac{1}{2\sqrt{2}} v_c \left(\left(T^*_\nu\right)_2 + \left(T_\nu\right)_2\right) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tfrac{1}{4}\left(g^2 + g'^2\right) v_d v_3 \\ -\tfrac{1}{4}\left(v_c^2 + v_u^2\right)\left(\lambda \left(Y^*_\nu\right)_3 + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_3\right) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{4}\left(g^2 + g'^2\right) v_u v_3 \\ + \tfrac{1}{8} v_c^2 \left(\kappa^* \left(Y_\nu\right)_3 + \kappa \left(Y^*_\nu\right)_3\right) \\ - \tfrac{1}{2} v_d v_u \left(\lambda^* \left(Y_\nu\right)_3 + \lambda \left(Y^*_\nu\right)_3\right) \\ + \tfrac{1}{2} v_u v_m \left(\left(Y^*_\nu\right)_m \left(Y_\nu\right)_3 + \left(Y_\nu\right)_m \left(Y^*_\nu\right)_3\right) \\ + \tfrac{1}{2\sqrt{2}} v_c \left(\left(T^*_\nu\right)_3 + \left(T_\nu\right)_3\right) \end{bmatrix} \end{pmatrix} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned} \left(M^2_{\tilde{\nu}^R\tilde{\nu}^R}\right)_{ij} = & \tfrac{1}{4}\left(g^2 + g'^2\right) v_i v_j + \tfrac{1}{2}\left(m^2_{\tilde{L}}\right)_{ij} + \tfrac{1}{2}\left(m^2_{\tilde{L}}\right)_{ji} + \tfrac{1}{4}\left(v_c^2 + v_u^2\right)\left(\left(Y^*_\nu\right)_i \left(Y_\nu\right)_j + \left(Y_\nu\right)_i \left(Y^*_\nu\right)_j\right) \\ & + \delta_{ij}\left[\tfrac{1}{8}\left(g^2 + g'^2\right) u^2\right] \end{aligned} \tag{A.23}$$

Die Masseneigenzustände der CP-geraden neutralen Skalare ergeben sich nach

$$S^0_i = R^{S^0}_{ij} S^{0\prime}_j \quad , \tag{A.24}$$

wobei die angegebene orthogonale Rotationsmatrix die reell symmetrische Massenmatrix der CP-geraden neutralen Skalare wie folgt diagonalisiert:

$$\mathrm{diag}\left(m^2_{S^0_1}, \ldots, m^2_{S^0_8}\right) = R^{S^0} M^2_{S^0} \left(R^{S^0}\right)^T \tag{A.25}$$

A.1.3. CP-ungerade neutrale Skalare

Das Skalarpotential beinhaltet in der Basis

$$\left(P^{0\prime}\right)^T = \left(\phi_d^0, \phi_u^0, \tilde{\nu}^{cI}, \tilde{\nu}_1^I, \tilde{\nu}_2^I, \tilde{\nu}_3^I\right) \tag{A.26}$$

die quadratischen Terme

$$V_{\text{quad.}} = \frac{1}{2}\left(P^{0\prime}\right)^T M_{P^0}^2 P^{0\prime} + \dots \qquad . \tag{A.27}$$

Die hier auftretende reell symmetrische (6×6)-Massenmatrix $M_{P^0}^2$ kann in folgende Matrizen aufgespalten werden

$$M_{P^0}^2 = \begin{pmatrix} M_{PP}^2 & M_{P\tilde{\nu}^c}^2 & M_{P\tilde{\nu}^R}^2 \\ \left(M_{P\tilde{\nu}^c}^2\right)^T & M_{\tilde{\nu}^c\tilde{\nu}^c}^2 & M_{\tilde{\nu}^c\tilde{\nu}^R}^2 \\ \left(M_{P\tilde{\nu}^R}^2\right)^T & \left(M_{\tilde{\nu}^c\tilde{\nu}^R}^2\right)^T & M_{\tilde{\nu}^R\tilde{\nu}^R}^2 \end{pmatrix} + \xi m_Z^2 \begin{pmatrix} M_E^2 & \left(M_F^2\right)^T \\ M_F^2 & M_G^2 \end{pmatrix} \qquad . \tag{A.28}$$

Diese sind gegeben durch:

$$M_{PP}^2 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{8}\left(g^2+g'^2\right)u^2 \\ +m_{H_d}^2 + \frac{1}{2}\lambda\lambda^*\left(v_c^2+v_u^2\right) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} +\frac{1}{8}\left(\lambda\kappa^*+\lambda^*\kappa\right)v_c^2 \\ +\frac{1}{2\sqrt{2}}v_c\left(\left(T_\lambda^*\right)+\left(T_\lambda\right)\right) \end{bmatrix} \\ \text{sym.} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}\left(g^2+g'^2\right)u^2 \\ +m_{H_u}^2 + \frac{1}{2}\lambda\lambda^*\left(v_c^2+v_d^2\right) \\ -\frac{1}{2}v_d v_m\left(\lambda^*\left(Y_\nu\right)_m + \lambda\left(Y_\nu^*\right)_m\right) \\ +\frac{1}{2}v_c^2\left(Y_\nu^*\right)_m\left(Y_\nu\right)_m \\ +\frac{1}{2}v_m v_n\left(Y_\nu^*\right)_m\left(Y_\nu\right)_n \end{bmatrix} \end{pmatrix} \tag{A.29}$$

$$M_{P\tilde{\nu}^c}^2 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\left(\lambda\kappa^*+\lambda^*\kappa\right)v_c v_u \\ +\frac{1}{2\sqrt{2}}v_u\left(\left(T_\lambda^*\right)+\left(T_\lambda\right)\right) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\left(\lambda\kappa^*+\lambda^*\kappa\right)v_c v_d \\ +\frac{1}{4}v_c v_m\left(\kappa^*\left(Y_\nu\right)_m + \kappa\left(Y_\nu^*\right)_m\right) \\ +\frac{1}{2\sqrt{2}}v_d\left(\left(T_\lambda^*\right)+\left(T_\lambda\right)\right) \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}v_m\left(\left(T_\nu^*\right)_m+\left(T_\nu\right)_m\right) \end{bmatrix} \end{pmatrix} \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned} M_{\tilde{\nu}^c\tilde{\nu}^c}^2 = {} & \tfrac{1}{2}\lambda\lambda^*\left(v_d^2+v_u^2\right) + \tfrac{1}{4}\left(\lambda\kappa^*+\lambda^*\kappa\right)v_d v_u - \tfrac{1}{2\sqrt{2}}v_c\left(\left(T_\kappa^*\right)+\left(T_\kappa\right)\right) + m_{\tilde{\nu}^c}^2 \\ & + \tfrac{1}{4}\kappa\kappa^* v_c^2 + \tfrac{1}{2}v_u^2\left(Y_\nu^*\right)_m\left(Y_\nu\right)_m + \tfrac{1}{2}v_m v_n\left(Y_\nu^*\right)_m\left(Y_\nu\right)_n \\ & - \tfrac{1}{4}v_u v_m\left(\kappa^*\left(Y_\nu\right)_m + \kappa\left(Y_\nu^*\right)_m\right) - \tfrac{1}{2}v_d v_m\left(\lambda^*\left(Y_\nu\right)_m + \lambda\left(Y_\nu^*\right)_m\right) \end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\left(M_{\tilde{\nu}^c\tilde{\nu}^R}^2\right)^T = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}v_c v_u\left(\kappa^*\left(Y_\nu\right)_1 + \kappa\left(Y_\nu^*\right)_1\right) \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}v_u\left(\left(T_\nu^*\right)_1+\left(T_\nu\right)_1\right) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4}v_c v_u\left(\kappa^*\left(Y_\nu\right)_2 + \kappa\left(Y_\nu^*\right)_2\right) \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}v_u\left(\left(T_\nu^*\right)_2+\left(T_\nu\right)_2\right) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4}v_c v_u\left(\kappa^*\left(Y_\nu\right)_3 + \kappa\left(Y_\nu^*\right)_3\right) \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}v_u\left(\left(T_\nu^*\right)_3+\left(T_\nu\right)_3\right) \end{bmatrix} \end{pmatrix} \tag{A.32}$$

$$\left(M^2_{P\tilde{\nu}^R}\right)^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\left(v_c^2+v_u^2\right)\left(\lambda\left(Y_\nu^*\right)_1+\lambda^*\left(Y_\nu\right)_1\right) & \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}v_c^2\left(\kappa^*\left(Y_\nu\right)_1+\kappa\left(Y_\nu^*\right)_1\right) \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}v_c\left(\left(T_\nu^*\right)_1+\left(T_\nu\right)_1\right) \end{bmatrix} \\ -\frac{1}{4}\left(v_c^2+v_u^2\right)\left(\lambda\left(Y_\nu^*\right)_2+\lambda^*\left(Y_\nu\right)_2\right) & \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}v_c^2\left(\kappa^*\left(Y_\nu\right)_2+\kappa\left(Y_\nu^*\right)_2\right) \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}v_c\left(\left(T_\nu^*\right)_2+\left(T_\nu\right)_2\right) \end{bmatrix} \\ -\frac{1}{4}\left(v_c^2+v_u^2\right)\left(\lambda\left(Y_\nu^*\right)_3+\lambda^*\left(Y_\nu\right)_3\right) & \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}v_c^2\left(\kappa^*\left(Y_\nu\right)_3+\kappa\left(Y_\nu^*\right)_3\right) \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}v_c\left(\left(T_\nu^*\right)_3+\left(T_\nu\right)_3\right) \end{bmatrix} \end{pmatrix} \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned}\left(M^2_{\tilde{\nu}^R\tilde{\nu}^R}\right)_{ij} = {} & \tfrac{1}{2}\left(m^2_{\tilde{L}}\right)_{ij} + \tfrac{1}{2}\left(m^2_{\tilde{L}}\right)_{ji} + \tfrac{1}{4}\left(v_c^2+v_u^2\right)\left(\left(Y_\nu^*\right)_i\left(Y_\nu\right)_j+\left(Y_\nu\right)_i\left(Y_\nu^*\right)_j\right) \\ & + \delta_{ij}\left[\tfrac{1}{8}\left(g^2+g'^2\right)u^2\right]\end{aligned} \tag{A.34}$$

Zuletzt gilt es abermals die von der Eichfixierung resultierenden Massenterme anzugeben. Für die (3×3)-E-Untermatrix ergibt sich

$$M_E^2 = \frac{1}{v^2}\begin{pmatrix} v_d^2 & -v_u v_d & 0 \\ -v_u v_d & v_u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{A.35}$$

Weiterhin ist der (3×3)-F-Block gegeben durch

$$M_F^2 = \frac{1}{v^2}\begin{pmatrix} v_1 v_d & -v_1 v_u & 0 \\ v_2 v_d & -v_2 v_u & 0 \\ v_3 v_d & -v_3 v_u & 0 \end{pmatrix} \tag{A.36}$$

und die (3×3)-G-Untermatrix durch

$$\left(M_G^2\right)_{ij} = \frac{1}{v^2}v_i v_j \quad . \tag{A.37}$$

Die Masseneigenzustände der CP-ungeraden neutralen Skalare ergeben sich nach

$$P_i^0 = R_{ij}^{P^0} P_j^{0\prime} \quad , \tag{A.38}$$

wobei die angegebene orthogonale Rotationsmatrix die reell symmetrische Massenmatrix der CP-ungeraden neutralen Skalare wie folgt diagonalisiert:

$$\mathrm{diag}\left(m^2_{P^0_1},\ldots,m^2_{P^0_8}\right) = R^{P^0} M^2_{P^0}\left(R^{P^0}\right)^T \tag{A.39}$$

A.1.4. Squarks

In der unrotierten Basis $(\tilde{u}_i')^T = (\tilde{u}_{Li},\tilde{u}_{Ri}) = (\tilde{u}_i,\tilde{u}_i^{c*})$ und analog für $\tilde{d}_i'$ ergibt sich

$$V_{\text{quad.}} = \tilde{u}'^\dagger M^2_{\tilde{u}}\tilde{u}' + \tilde{d}'^\dagger M^2_{\tilde{d}}\tilde{d}' + \ldots \quad , \tag{A.40}$$

wobei die hermitesche (6×6)-Matrix $M^2_{\tilde{q}}$ mit $\tilde{q} = \left(\tilde{u},\tilde{d}\right)$ gegeben ist durch

$$M^2_{\tilde{q}} = \begin{pmatrix} M^2_{\tilde{q}LL} & M^2_{\tilde{q}LR} \\ M^2_{\tilde{q}RL} & M^2_{\tilde{q}RR} \end{pmatrix} \quad . \tag{A.41}$$

Da die Blöcke für $\tilde{u}$ und $\tilde{d}$ unterschiedlich sind, werden sie nachfolgend unter Verwendung der (3×3)-Einheitsmatrix I_3 getrennt aufgeführt:

$$\begin{aligned}
M^2_{\tilde{u}LL} &= \tfrac{1}{2} v_u^2 \left(Y_u^* Y_u^T\right) + m^2_{\tilde{Q}} + \left(\tfrac{1}{8} g^2 - \tfrac{1}{24} g'^2\right) u^2 I_3 \\
M^2_{\tilde{u}LR} &= -\tfrac{1}{2} v_c v_d \lambda \left(Y_u^*\right) + \tfrac{1}{2} v_c v_m \left(Y_\nu\right)_m \left(Y_u\right) + \tfrac{1}{\sqrt{2}} v_u \left(T_u^*\right) \\
M^2_{\tilde{u}RL} &= \left(M^2_{\tilde{u}LR}\right)^\dagger \\
M^2_{\tilde{u}RR} &= \tfrac{1}{2} v_u^2 \left(Y_u^T Y_u^*\right) + \left(m^2_{\tilde{u}^c}\right)^T + \tfrac{1}{6} g'^2 u^2 I_3
\end{aligned} \tag{A.42}$$

und

$$\begin{aligned}
M^2_{\tilde{d}LL} &= \tfrac{1}{2} v_d^2 \left(Y_d^* Y_d^T\right) + m^2_{\tilde{Q}} - \left(\tfrac{1}{8} g^2 + \tfrac{1}{24} g'^2\right) u^2 I_3 \\
M^2_{\tilde{d}LR} &= -\tfrac{1}{2} v_c v_d \lambda \left(Y_d^*\right) + \tfrac{1}{\sqrt{2}} v_d \left(T_d^*\right) \\
M^2_{\tilde{d}RL} &= \left(M^2_{\tilde{d}LR}\right)^\dagger \\
M^2_{\tilde{d}RR} &= \tfrac{1}{2} v_d^2 \left(Y_d^T Y_d^*\right) + \left(m^2_{\tilde{d}^c}\right)^T - \tfrac{1}{12} g'^2 u^2 I_3
\end{aligned} \tag{A.43}$$

Hier folgen die Masseneigenzustände der Squarks dann nach

$$\tilde{q} = R^{\tilde{q}} \tilde{q}' \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{q}_i = R^{\tilde{q}}_{ij} \tilde{q}'_j \quad , \tag{A.44}$$

wobei die im Allgemeinen unitären Rotationsmatrizen wie üblich die hermiteschen Massenmatrizen der Squarks diagonalisieren in der Form

$$M^2_{\tilde{q},\text{diag.}} = R^{\tilde{q}} M^2_{\tilde{q}} \left(R^{\tilde{q}}\right)^\dagger \tag{A.45}$$

A.2. Fermionische Massenmatrizen

A.2.1. Neutrale Fermionen

In der Basis

$$\left(\psi^0\right)^T = \left(\tilde{B}^0, \tilde{W}^0_3, \tilde{H}^0_d, \tilde{H}^0_u, \nu^c, \nu_1, \nu_2, \nu_3\right) \tag{A.46}$$

lassen sich, wie unter Abschnitt 4.2 gezeigt, die Massenterme der neutralen Fermionen schreiben in der Form

$$\mathcal{L}^{\text{mass}}_{\text{neutral}} = -\frac{1}{2} \left(\psi^0\right)^T \mathcal{M}_n \psi^0 + \text{H.c.} \quad , \tag{A.47}$$

mit der komplexen, aber symmetrischen (8×8)-Matrix

$$\mathcal{M}_n = \begin{pmatrix} M_n & m \\ m^T & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.48}$$

bestehend aus der (5×5)-Untermatrix M sowie der 5×3-Untermatrix m^T:

$$M_n = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -\frac{1}{2}g'v_d & \frac{1}{2}g'v_u & 0 \\ 0 & M_2 & \frac{1}{2}gv_d & -\frac{1}{2}gv_u & 0 \\ -\frac{1}{2}g'v_d & \frac{1}{2}gv_d & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda v_c & -\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda v_u \\ \frac{1}{2}g'v_u & -\frac{1}{2}gv_u & -\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda v_c & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(Y_\nu\right)_m v_m - \lambda v_d\right) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda v_u & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(Y_\nu\right)_m v_m - \lambda v_d\right) & \frac{1}{\sqrt{2}}\kappa v_c \end{pmatrix} \tag{A.49}$$

$$m^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}g'v_1 & \frac{1}{2}gv_1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_\nu\right)_1 v_c & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_\nu\right)_1 v_u \\ -\frac{1}{2}g'v_2 & \frac{1}{2}gv_2 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_\nu\right)_2 v_c & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_\nu\right)_2 v_u \\ -\frac{1}{2}g'v_3 & \frac{1}{2}gv_3 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_\nu\right)_3 v_c & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_\nu\right)_3 v_u \end{pmatrix} \tag{A.50}$$

Die Masseneigenzustände ergeben sich schließlich nach

$$F_i^0 = \mathcal{N}_{is}\psi_s^0 \tag{A.51}$$

mit der unitären Rotationsmatrix $\mathcal{N}$, welche die Massenmatrix der neutralen Fermionen diagonalisiert in der Form:

$$\mathcal{M}_{n,\text{dia.}} = \mathcal{N}^* \mathcal{M}_n \mathcal{N}^\dagger \tag{A.52}$$

Komplexe, aber symmetrische Matrizen A lassen sich generell in der Form $SAS^T = T_{\text{dia.}}$ mit einer unitären Matrix $SS^\dagger = 1$ diagonalisieren. Ein Beweis ist beispielsweise [41] zu entnehmen. Weiterhin wird die (3×5)-Entwicklungsmatrix $\xi = m^T M_n^{-1}$ angegeben. Mit der Notation aus (4.23) ist diese von der Form $\xi_{i\alpha} = f_\alpha \epsilon_i + g_\alpha \Lambda_i$ und beinhaltet konkret die folgenden Elemente:

$$\begin{aligned}
(\xi)_{i1} &= \frac{g' M_2 \eta^2 \Lambda_i}{2\det\left(M_n\right)}, \qquad (\xi)_{i2} = -\frac{g M_1 \eta^2 \Lambda_i}{2\det\left(M_n\right)} \\
(\xi)_{i3} &= \frac{1}{8\mu\det\left(M_n\right)}\Big[-\epsilon_i + \Lambda_i m_\gamma \Big[\left(\left(Y_\nu\right)_m v_m\right)^2 v_d - \lambda\left(Y_\nu\right)_m v_m \left(2v_d^2 + v_u^2\right) \\
&\qquad + \lambda\left(\kappa v_c^2 v_u + \lambda v_d\left(v_d^2 + v_u^2\right)\right)\Big]\Big] \\
(\xi)_{i4} &= \frac{m_\gamma \Lambda_i}{4\mu\det\left(M_n\right)}\left[\tfrac{1}{2}\lambda v_d v_u \left(Y_\nu\right)_m v_m - \mu m_R v_d - \tfrac{1}{2}\lambda^2 v_u\left(v_d^2 + v_u^2\right)\right] \\
(\xi)_{i5} &= \frac{m_\gamma \Lambda_i}{4\sqrt{2}\det\left(M_n\right)}\left(v_d\left(Y_\nu\right)_m v_m - \lambda v_d^2 + \lambda v_u^2\right)
\end{aligned} \tag{A.53}$$

A.2.2. Geladene Fermionen

Wie bereits unter Abschnitt 4.2 gezeigt, ist in der Basis

$$\begin{aligned}
\left(\psi^-\right)^T &= \left(\tilde{W}^-, \tilde{H}_d^-, e, \mu, \tau\right) \\
\left(\psi^+\right)^T &= \left(\tilde{W}^+, \tilde{H}_u^+, e^c, \mu^c, \tau^c\right),
\end{aligned} \tag{A.54}$$

die gesamte Lagrangedichte der geladenen Fermionen darstellbar in der Form

$$\mathcal{L}_{\text{charged}}^{\text{mass}} = -\frac{1}{2}\left(\left(\psi^-\right)^T \mathcal{M}_c \psi^+ + \left(\psi^+\right)^T \mathcal{M}_c^T \psi^-\right) + \text{H.c.} \tag{A.55}$$

mit der (5×5)-Matrix

$$\mathcal{M}_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}M_2 & gv_u & 0 & 0 & 0 \\ gv_d & \lambda v_c & -(Y_e)_{m1}\, v_m & -(Y_e)_{m2}\, v_m & -(Y_e)_{m3}\, v_m \\ gv_1 & -(Y_\nu)_1\, v_c & (Y_e)_{11}\, v_d & (Y_e)_{12}\, v_d & (Y_e)_{13}\, v_d \\ gv_2 & -(Y_\nu)_2\, v_c & (Y_e)_{21}\, v_d & (Y_e)_{22}\, v_d & (Y_e)_{23}\, v_d \\ gv_3 & -(Y_\nu)_3\, v_c & (Y_e)_{31}\, v_d & (Y_e)_{32}\, v_d & (Y_e)_{33}\, v_d \end{pmatrix} \quad . \tag{A.56}$$

Die Diagonalisierung zur Bestimmung der Masseneigenzustände erfolgt über die Rotationsmatrizen

$$F_i^+ = V_{it}\psi_t^+ \qquad \text{und} \qquad F_i^- = U_{it}\psi_t^- \quad , \tag{A.57}$$

wobei diese die angegebene Massenmatrixmatrix $\mathcal{M}_c$ diagonalisieren:

$$\mathcal{M}_{c,\text{dia.}} = U^* \mathcal{M}_c V^{-1} \tag{A.58}$$

Zur Bestimmung von V und U ist anzumerken, dass aus der Beziehung

$$\mathcal{M}_{c,\text{dia.}}^2 = V \mathcal{M}_c^\dagger \mathcal{M}_c V^{-1} = U^* \mathcal{M}_c \mathcal{M}_c^\dagger \, (U^*)^{-1} \tag{A.59}$$

sofort folgt, dass V die Matrix $\mathcal{M}_c^\dagger \mathcal{M}_c$ und U^* die Matrix $\mathcal{M}_c \mathcal{M}_c^\dagger$ diagonalisiert.

B. Kopplungen

B.1. Neutralino Kopplungen

Für die Lagrangedichte ergibt sich in üblicher vierkomponentiger Diracnotation

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\overline{\chi_i^-}\gamma^\mu \left(O_{Lij}^{cnw} P_L + O_{Rij}^{cnw} P_R\right) \chi_j^0 W_\mu^- + \overline{\chi_i^0}\gamma^\mu \left(O_{Lij}^{ncw} P_L + O_{Rij}^{ncw} P_R\right) \chi_j^- W_\mu^+ \\ &+ \overline{\chi_i^-} \left(O_{Lijk}^{cns} P_L + O_{Rijk}^{cns} P_R\right) \chi_j^0 S_k^- + \overline{\chi_i^0} \left(O_{Lijk}^{ncs} P_L + O_{Rijk}^{ncs} P_R\right) \chi_j^- S_k^+ \\ &+ \frac{1}{2}\overline{\chi_i^0}\gamma^\mu \left(O_{Lij}^{nnz} P_L + O_{Rij}^{nnz} P_R\right) \chi_j^0 Z_\mu + \frac{1}{2}\overline{\chi_i^0} \left(O_{Lijk}^{nnh} P_L + O_{Rijk}^{nnh} P_R\right) \chi_j^0 H_k^0 \\ &+ i\frac{1}{2}\overline{\chi_i^0} \left(O_{Lijk}^{nna} P_L + O_{Rijk}^{nna} P_R\right) \chi_j^0 T_k^0 \\ &+ \overline{q_i} \left(O_{Lijk}^{qns} P_L + O_{Rijk}^{qns} P_R\right) \chi_j^0 \tilde{q}_k + \overline{\chi_i^0} \left(O_{Lijk}^{nqs} P_L + O_{Rijk}^{nqs} P_R\right) q_j \tilde{q}_k^* \quad ,\end{aligned} \tag{B.1}$$

wobei q sowohl d- wie u-Quarks bezeichnet. Die Diracnotation kann durch

$$\begin{aligned}&\chi_i^0 = \begin{pmatrix} F_i^0 \\ (F_i^0)^\dagger \end{pmatrix}, \qquad \chi_i^+ = \begin{pmatrix} F_i^+ \\ (F_i^-)^\dagger \end{pmatrix}, \qquad \chi_i^- = \begin{pmatrix} F_i^- \\ (F_i^+)^\dagger \end{pmatrix} \\ &\overline{\chi_i^0} = \left(F_i^0, (F_i^0)^\dagger\right), \qquad \overline{\chi_i^+} = \left(F_i^-, (F_i^+)^\dagger\right), \qquad \overline{\chi_i^-} = \left(F_i^+, (F_i^-)^\dagger\right)\end{aligned} \tag{B.2}$$

in die Weylnotation umgeschrieben werden. Zusammenfassend wird die Herkunft der entsprechenden Eigenzustände wiedergegeben. Für die fermionischen Teilchen ergeben sich diese durch

$$F_i^0 = \mathcal{N}_{is}\psi_s^0, \qquad F_i^+ = V_{it}\psi_t^+ \qquad \text{und} \qquad F_i^- = U_{it}\psi_t^- \tag{B.3}$$

mit dem Teilcheninhalt

$$\begin{aligned}\left(\psi^0\right)^T &= \left(\tilde{B}^0, \tilde{W}_3^0, \tilde{H}_d^0, \tilde{H}_u^0, \nu^c, \nu_1, \nu_2, \nu_3\right) \\ \left(\psi^+\right)^T &= \left(\tilde{W}^+, \tilde{H}_u^+, e^c, \mu^c, \tau^c\right) \\ \left(\psi^-\right)^T &= \left(\tilde{W}^-, \tilde{H}_d^-, e, \mu, \tau\right) \quad .\end{aligned} \tag{B.4}$$

Demnach gilt:

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}_{is}^* F_i^0 = \psi_s^0, \qquad V_{it}^* F_i^+ = \psi_t^+, \qquad U_{it}^* F_i^- = \psi_t^- \quad \text{sowie} \\ &\mathcal{N}_{is} \left(F_i^0\right)^\dagger = \left(\psi_s^0\right)^\dagger, \qquad V_{it} \left(F_i^+\right)^\dagger = \left(\psi_t^+\right)^\dagger, \qquad U_{it} \left(F_i^-\right)^\dagger = \left(\psi_t^-\right)^\dagger\end{aligned} \tag{B.5}$$

Für die Eigenzustände der skalaren Teilchen sind die Mischungen gegeben durch

$$S_i^\pm = R_{ij}^{S^\pm} S_j^{\pm\prime}, \qquad S_i^0 = R_{ij}^{S^0} S_j^{0\prime} \qquad \text{und} \qquad P_i = R_{ij}^{P^0} P_j^\prime \tag{B.6}$$

mit dem Teilcheninhalt

$$\begin{aligned}
\left(S^{0'}\right)^T &= \left(\sigma_d^0, \sigma_u^0, \tilde{\nu}^{cR}, \tilde{\nu}_1^R, \tilde{\nu}_2^R, \tilde{\nu}_3^R\right) \\
\left(P^{0'}\right)^T &= \left(\phi_d^0, \phi_u^0, \tilde{\nu}^{cI}, \tilde{\nu}_1^I, \tilde{\nu}_2^I, \tilde{\nu}_3^I\right) \\
\left(S^{+'}\right)^T &= \left(\left(H_d^-\right)^*, H_u^+, \tilde{e}^*, \tilde{\mu}^*, \tilde{\tau}^*, \tilde{e}^c, \tilde{\mu}^c, \tilde{\tau}^c\right) \\
\left(S^{-'}\right)^T &= \left(H_d^-, \left(H_u^+\right)^*, \tilde{e}, \tilde{\mu}, \tilde{\tau}, (\tilde{e}^c)^*, (\tilde{\mu}^c)^*, (\tilde{\tau}^c)^*\right) \quad .
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Somit können die nachfolgenden Kopplungen direkt mit entsprechenden Eicheigenzuständen verknüpft werden. Insbesondere die auftretenden Eichkopplungen sind identisch mit den in [44] angegebenen Beziehungen.

B.1.1. Chargino-Neutralino-W

$$\begin{aligned}
O_{Lij}^{cnw} &= g\eta_i\eta_j \left[-U_{i1}\mathcal{N}_{j2}^* - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(U_{i2}\mathcal{N}_{j3}^* + \sum_{k=1}^{3} U_{i,2+k}\mathcal{N}_{j,5+k}^*\right)\right] \\
O_{Rij}^{cnw} &= g\left(-V_{i1}^*\mathcal{N}_{j2} + \frac{1}{\sqrt{2}}V_{i2}^*\mathcal{N}_{j4}\right) \\
O_{Lij}^{ncw} &= \left(O_{Lji}^{cnw}\right)^* \quad , \qquad O_{Rij}^{ncw} = \left(O_{Rji}^{cnw}\right)^*
\end{aligned} \tag{B.8}$$

B.1.2. Neutralino-Neutralino-Z

$$\begin{aligned}
O_{Lij}^{nnz} &= \frac{g}{\cos\theta_W}\eta_i\eta_j\frac{1}{2}\left(\mathcal{N}_{i4}\mathcal{N}_{j4}^* - \mathcal{N}_{i3}\mathcal{N}_{j3}^* - \sum_{k=1}^{3}\mathcal{N}_{i,5+k}\mathcal{N}_{j,5+k}^*\right) \\
O_{Rij}^{nnz} &= -\frac{g}{\cos\theta_W}\frac{1}{2}\left(\mathcal{N}_{i4}^*\mathcal{N}_{j4} - \mathcal{N}_{i3}^*\mathcal{N}_{j3} - \sum_{k=1}^{3}\mathcal{N}_{i,5+k}^*\mathcal{N}_{j,5+k}\right)
\end{aligned} \tag{B.9}$$

B.1.3. Chargino-Neutralino-Geladenes Skalar

$$\begin{aligned}
O_{Lijk}^{cns} = \eta_j \Big[& R_{k1}^{S^\pm}\left((Y_e)_{11}V_{i3}^*\mathcal{N}_{j6}^* + (Y_e)_{22}V_{i4}^*\mathcal{N}_{j7}^* + (Y_e)_{33}V_{i5}^*\mathcal{N}_{j8}^*\right) \\
& + R_{k2}^{S^\pm}\left(-\frac{g}{\sqrt{2}}V_{i2}^*\mathcal{N}_{j2}^* - \frac{g'}{\sqrt{2}}V_{i2}^*\mathcal{N}_{j1}^* - gV_{i1}^*\mathcal{N}_{j4}^*\right) \\
& - (Y_e)_{11}R_{k3}^{S^\pm}V_{i3}^*\mathcal{N}_{j3}^* - (Y_e)_{22}R_{k4}^{S^\pm}V_{i4}^*\mathcal{N}_{j3}^* - (Y_e)_{33}R_{k5}^{S^\pm}V_{i5}^*\mathcal{N}_{j3}^* \\
& - \sqrt{2}g'R_{k6}^{S^\pm}V_{i3}^*\mathcal{N}_{j1}^* - \sqrt{2}g'R_{k7}^{S^\pm}V_{i4}^*\mathcal{N}_{j1}^* - \sqrt{2}g'R_{k8}^{S^\pm}V_{i5}^*\mathcal{N}_{j1}^* \\
& + (Y_\nu)_1 R_{k3}^{S^\pm}V_{i2}^*\mathcal{N}_{j5}^* + (Y_\nu)_2 R_{k4}^{S^\pm}V_{i2}^*\mathcal{N}_{j5}^* + (Y_\nu)_3 R_{k5}^{S^\pm}V_{i2}^*\mathcal{N}_{j5}^* \\
& - \lambda R_{k1}^{S^\pm}V_{i2}^*\mathcal{N}_{j5}^* \Big]
\end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
O_{Rijk}^{cns} = \eta_i \Big[& R_{k1}^{S^\pm}\left(\frac{g}{\sqrt{2}}U_{i2}\mathcal{N}_{j2} + \frac{g'}{\sqrt{2}}U_{i2}\mathcal{N}_{j1} - gU_{i1}\mathcal{N}_{j3}\right) \\
& + R_{k3}^{S^\pm}\left(\frac{g}{\sqrt{2}}U_{i3}\mathcal{N}_{j2} + \frac{g'}{\sqrt{2}}U_{i3}\mathcal{N}_{j1} - gU_{i1}\mathcal{N}_{j6}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ R^{S^\pm}_{k4}\left(\frac{g}{\sqrt{2}}U_{i4}\mathcal{N}_{j2} + \frac{g'}{\sqrt{2}}U_{i4}\mathcal{N}_{j1} - gU_{i1}\mathcal{N}_{j7}\right)\\
&+ R^{S^\pm}_{k5}\left(\frac{g}{\sqrt{2}}U_{i5}\mathcal{N}_{j2} + \frac{g'}{\sqrt{2}}U_{i5}\mathcal{N}_{j1} - gU_{i1}\mathcal{N}_{j8}\right)\\
&+ (Y_e^*)_{11}\, R^{S^\pm}_{k6}\,(U_{i2}\mathcal{N}_{j6} - U_{i3}\mathcal{N}_{j3}) + (Y_e^*)_{22}\, R^{S^\pm}_{k7}\,(U_{i2}\mathcal{N}_{j7} - U_{i4}\mathcal{N}_{j3})\\
&+ (Y_e^*)_{33}\, R^{S^\pm}_{k8}\,(U_{i2}\mathcal{N}_{j8} - U_{i5}\mathcal{N}_{j3}) - \lambda^* R^{S^\pm}_{k2} U_{i2}\mathcal{N}_{j5}\\
&+ R^{S^\pm}_{k2}\,((Y_\nu^*)_1\, U_{i3}\mathcal{N}_{j5} + (Y_\nu^*)_2\, U_{i4}\mathcal{N}_{j5} + (Y_\nu^*)_3\, U_{i5}\mathcal{N}_{j5})\Big]
\end{aligned}
\tag{B.11}
$$

$$
O^{ncs}_{Lijk} = \left(O^{cns}_{Rjik}\right)^* \quad , \qquad O^{ncs}_{Rijk} = \left(O^{cns}_{Ljik}\right)^* \tag{B.12}
$$

B.1.4. Neutralino-Neutralino-Skalar

$$
\begin{aligned}
O^{nnh}_{Lijk} = \frac{\eta_j}{2}\Big[&R^{S^0}_{k1}\left(-g\mathcal{N}^*_{i2}\mathcal{N}^*_{j3} + g'\mathcal{N}^*_{i1}\mathcal{N}^*_{j3} - g\mathcal{N}^*_{j2}\mathcal{N}^*_{i3} + g'\mathcal{N}^*_{j1}\mathcal{N}^*_{i3}\right)\\
&+ R^{S^0}_{k2}\left(+g\mathcal{N}^*_{i2}\mathcal{N}^*_{j4} - g'\mathcal{N}^*_{i1}\mathcal{N}^*_{j4} + g\mathcal{N}^*_{j2}\mathcal{N}^*_{i4} - g'\mathcal{N}^*_{j1}\mathcal{N}^*_{i4}\right)\\
&+ R^{S^0}_{k4}\left(-g\mathcal{N}^*_{i2}\mathcal{N}^*_{j6} + g'\mathcal{N}^*_{i1}\mathcal{N}^*_{j6} - g\mathcal{N}^*_{j2}\mathcal{N}^*_{i6} + g'\mathcal{N}^*_{j1}\mathcal{N}^*_{i6}\right)\\
&+ R^{S^0}_{k5}\left(-g\mathcal{N}^*_{i2}\mathcal{N}^*_{j7} + g'\mathcal{N}^*_{i1}\mathcal{N}^*_{j7} - g\mathcal{N}^*_{j2}\mathcal{N}^*_{i7} + g'\mathcal{N}^*_{j1}\mathcal{N}^*_{i7}\right)\\
&+ R^{S^0}_{k6}\left(-g\mathcal{N}^*_{i2}\mathcal{N}^*_{j8} + g'\mathcal{N}^*_{i1}\mathcal{N}^*_{j8} - g\mathcal{N}^*_{j2}\mathcal{N}^*_{i8} + g'\mathcal{N}^*_{j1}\mathcal{N}^*_{i8}\right)\Big]\\
-\frac{\eta_j}{\sqrt{2}}\Big[&\kappa R^{S^0}_{k3}\mathcal{N}^*_{i5}\mathcal{N}^*_{j5} + R^{S^0}_{k3}\left((Y_\nu)_1\mathcal{N}^*_{i6}\mathcal{N}^*_{j4} + (Y_\nu)_1\mathcal{N}^*_{i4}\mathcal{N}^*_{j6} + (Y_\nu)_2\mathcal{N}^*_{i7}\mathcal{N}^*_{j4}\right.\\
&\left.+ (Y_\nu)_2\mathcal{N}^*_{i4}\mathcal{N}^*_{j7} + (Y_\nu)_3\mathcal{N}^*_{i8}\mathcal{N}^*_{j4} + (Y_\nu)_3\mathcal{N}^*_{i4}\mathcal{N}^*_{j8}\right)\\
&+ R^{S^0}_{k2}\left((Y_\nu)_1\mathcal{N}^*_{i5}\mathcal{N}^*_{j6} + (Y_\nu)_1\mathcal{N}^*_{i6}\mathcal{N}^*_{j5} + (Y_\nu)_2\mathcal{N}^*_{i5}\mathcal{N}^*_{j7}\right.\\
&\left.+ (Y_\nu)_2\mathcal{N}^*_{i7}\mathcal{N}^*_{j5} + (Y_\nu)_3\mathcal{N}^*_{i5}\mathcal{N}^*_{j8} + (Y_\nu)_3\mathcal{N}^*_{i8}\mathcal{N}^*_{j5}\right)\\
&+ \left(R^{S^0}_{k4}(Y_\nu)_1 + R^{S^0}_{k5}(Y_\nu)_2 + R^{S^0}_{k6}(Y_\nu)_3\right)\left(\mathcal{N}^*_{i5}\mathcal{N}^*_{j4} + \mathcal{N}^*_{i4}\mathcal{N}^*_{j5}\right)\\
&- \lambda R^{S^0}_{k2}\left(\mathcal{N}^*_{i3}\mathcal{N}^*_{j5} + \mathcal{N}^*_{i5}\mathcal{N}^*_{j3}\right) - \lambda R^{S^0}_{k1}\left(\mathcal{N}^*_{i4}\mathcal{N}^*_{j5} + \mathcal{N}^*_{i5}\mathcal{N}^*_{j4}\right)\\
&- \lambda R^{S^0}_{k3}\left(\mathcal{N}^*_{i3}\mathcal{N}^*_{j4} + \mathcal{N}^*_{i4}\mathcal{N}^*_{j3}\right)\Big]
\end{aligned}
\tag{B.13}
$$

$$
O^{nnh}_{Rijk} = \left(O^{nnh}_{Ljik}\right)^* \tag{B.14}
$$

B.1.5. Neutralino-Neutralino-Pseudo Skalar

$$
\begin{aligned}
O^{nna}_{Lijk} = -\frac{\eta_j}{2}\Big[&R^{P^0}_{k1}\left(-g\mathcal{N}^*_{i2}\mathcal{N}^*_{j3} + g'\mathcal{N}^*_{i1}\mathcal{N}^*_{j3} - g\mathcal{N}^*_{j2}\mathcal{N}^*_{i3} + g'\mathcal{N}^*_{j1}\mathcal{N}^*_{i3}\right)\\
&+ R^{P^0}_{k2}\left(+g\mathcal{N}^*_{i2}\mathcal{N}^*_{j4} - g'\mathcal{N}^*_{i1}\mathcal{N}^*_{j4} + g\mathcal{N}^*_{j2}\mathcal{N}^*_{i4} - g'\mathcal{N}^*_{j1}\mathcal{N}^*_{i4}\right)\\
&+ R^{P^0}_{k4}\left(-g\mathcal{N}^*_{i2}\mathcal{N}^*_{j6} + g'\mathcal{N}^*_{i1}\mathcal{N}^*_{j6} - g\mathcal{N}^*_{j2}\mathcal{N}^*_{i6} + g'\mathcal{N}^*_{j1}\mathcal{N}^*_{i6}\right)\\
&+ R^{P^0}_{k5}\left(-g\mathcal{N}^*_{i2}\mathcal{N}^*_{j7} + g'\mathcal{N}^*_{i1}\mathcal{N}^*_{j7} - g\mathcal{N}^*_{j2}\mathcal{N}^*_{i7} + g'\mathcal{N}^*_{j1}\mathcal{N}^*_{i7}\right)\\
&+ R^{P^0}_{k6}\left(-g\mathcal{N}^*_{i2}\mathcal{N}^*_{j8} + g'\mathcal{N}^*_{i1}\mathcal{N}^*_{j8} - g\mathcal{N}^*_{j2}\mathcal{N}^*_{i8} + g'\mathcal{N}^*_{j1}\mathcal{N}^*_{i8}\right)\Big]\\
-\frac{\eta_j}{\sqrt{2}}\Big[&\kappa R^{P^0}_{k3}\mathcal{N}^*_{i5}\mathcal{N}^*_{j5} + R^{P^0}_{k3}\left((Y_\nu)_1\mathcal{N}^*_{i6}\mathcal{N}^*_{j4} + (Y_\nu)_1\mathcal{N}^*_{i4}\mathcal{N}^*_{j6} + (Y_\nu)_2\mathcal{N}^*_{i7}\mathcal{N}^*_{j4}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (Y_\nu)_2 \mathcal{N}^*_{i4}\mathcal{N}^*_{j7} + (Y_\nu)_3 \mathcal{N}^*_{i8}\mathcal{N}^*_{j4} + (Y_\nu)_3 \mathcal{N}^*_{i4}\mathcal{N}^*_{j8}\big) \\
&+ R^{P^0}_{k2} \big((Y_\nu)_1 \mathcal{N}^*_{i5}\mathcal{N}^*_{j6} + (Y_\nu)_1 \mathcal{N}^*_{i6}\mathcal{N}^*_{j5} + (Y_\nu)_2 \mathcal{N}^*_{i5}\mathcal{N}^*_{j7} \\
&+ (Y_\nu)_2 \mathcal{N}^*_{i7}\mathcal{N}^*_{j5} + (Y_\nu)_3 \mathcal{N}^*_{i5}\mathcal{N}^*_{j8} + (Y_\nu)_3 \mathcal{N}^*_{i8}\mathcal{N}^*_{j5}\big) \\
&+ \left(R^{P^0}_{k4} (Y_\nu)_1 + R^{P^0}_{k5} (Y_\nu)_2 + R^{P^0}_{k6} (Y_\nu)_3\right) \left(\mathcal{N}^*_{i5}\mathcal{N}^*_{j4} + \mathcal{N}^*_{i4}\mathcal{N}^*_{j5}\right) \\
&- \lambda R^{P^0}_{k2} \left(\mathcal{N}^*_{i3}\mathcal{N}^*_{j5} + \mathcal{N}^*_{i5}\mathcal{N}^*_{j3}\right) - \lambda R^{P^0}_{k1} \left(\mathcal{N}^*_{i4}\mathcal{N}^*_{j5} + \mathcal{N}^*_{i5}\mathcal{N}^*_{j4}\right) \\
&- \lambda R^{P^0}_{k3} \left(\mathcal{N}^*_{i3}\mathcal{N}^*_{j4} + \mathcal{N}^*_{i4}\mathcal{N}^*_{j3}\right)\Big]
\end{aligned} \tag{B.15}
$$

$$
O^{nna}_{Rijk} = -\left(O^{nna}_{Ljik}\right)^* \tag{B.16}
$$

B.1.6. Neutralino-Up Quark-Up Squark

$$
O^{uns}_{Lijk} = \frac{4}{3}\frac{g}{\sqrt{2}} \tan\theta_W \mathcal{N}^*_{j1} R^{\tilde{u}^*}_{k,m+3} R^u_{R_{i,m}} - (Y_u)_{ml} R^{\tilde{u}^*}_{k,m} R^u_{R_{i,l}} \mathcal{N}^*_{j4} \tag{B.17}
$$

$$
O^{uns}_{Rijk} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \left(\mathcal{N}_{j2} + \frac{1}{3}\tan\theta_W \mathcal{N}_{j1}\right) R^{\tilde{u}^*}_{k,m} R^u_{L_{i,m}} - (Y^*_u)_{ml} R^{\tilde{u}^*}_{k+3,l} R^u_{L_{i,m}} \mathcal{N}_{j4} \tag{B.18}
$$

$$
O^{nus}_{Lijk} = \left(O^{uns}_{Rjik}\right)^* \quad , \qquad O^{nus}_{Rijk} = \left(O^{uns}_{Ljik}\right)^* \tag{B.19}
$$

B.1.7. Neutralino-Down Quark-Down Squark

$$
O^{dns}_{Lijk} = -\frac{2}{3}\frac{g}{\sqrt{2}} \tan\theta_W \mathcal{N}^*_{j1} R^{\tilde{d}^*}_{k,m+3} R^d_{R_{i,m}} - (Y_d)_{ml} R^{\tilde{d}^*}_{k,m} R^d_{R_{i,l}} \mathcal{N}^*_{j3} \tag{B.20}
$$

$$
O^{dns}_{Rijk} = \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\mathcal{N}_{j2} - \frac{1}{3}\tan\theta_W \mathcal{N}_{j1}\right) R^{\tilde{d}^*}_{k,m} R^d_{L_{i,m}} - (Y^*_d)_{ml} R^{\tilde{d}^*}_{k+3,l} R^d_{L_{i,m}} \mathcal{N}_{j3} \tag{B.21}
$$

$$
O^{nds}_{Lijk} = \left(O^{dns}_{Rjik}\right)^* \quad , \qquad O^{nds}_{Rijk} = \left(O^{dns}_{Ljik}\right)^* \tag{B.22}
$$

B.2. Chargino-Kopplungen

Hier ist die Lagrangedichte gegeben durch die Terme

$$
\mathcal{L} = \overline{\chi^-_i} \left(O^{cch}_{Lijk} P_L + O^{cch}_{Rijk} P_R\right) \chi^-_j H^0_k + \overline{\chi^-_i} \left(O^{cca}_{Lijk} P_L + O^{cca}_{Rijk} P_R\right) \chi^-_j A^0_k \quad , \tag{B.23}
$$

wobei für die Kopplungen folgende Beziehungen gelten:

B.2.1. Chargino-Chargino-Skalar

$$
\begin{aligned}
O^{cch}_{Lijk} = &- \frac{\eta_j}{\sqrt{2}} \left[g \left(R^{S^0}_{k1} V^*_{i1} U^*_{j2} + R^{S^0}_{k2} V^*_{i2} U^*_{j1} + R^{S^0}_{k4} V^*_{i1} U^*_{j3} + R^{S^0}_{k5} V^*_{i1} U^*_{j4} + R^{S^0}_{k6} V^*_{i1} U^*_{j5}\right)\right] \\
&- \frac{\eta_j}{\sqrt{2}} \Big[R^{S^0}_{k1} \left((Y_e)_{11} V^*_{i3} U^*_{j3} + (Y_e)_{22} V^*_{i4} U^*_{j4} + (Y_e)_{33} V^*_{i5} U^*_{j5}\right) \\
&\qquad - \left((Y_e)_{11} R^{S^0}_{k4} V^*_{i3} U^*_{j2} + (Y_e)_{22} R^{S^0}_{k5} V^*_{i4} U^*_{j2} + (Y_e)_{33} R^{S^0}_{k6} V^*_{i5} U^*_{j2}\right) \\
&\qquad - R^{S^0}_{k3} \left((Y_\nu)_1 V^*_{i2} U^*_{j3} + (Y_\nu)_2 V^*_{i2} U^*_{j4} + (Y_\nu)_3 V^*_{i2} U^*_{j5}\right) \\
&\qquad + \lambda R^{S^0}_{k3} V^*_{i2} U^*_{j2}\Big]
\end{aligned}
$$

$$O^{cch}_{Rijk} = \left(O^{cch}_{Ljik}\right)^* \tag{B.24}$$

B.2.2. Chargino-Chargino-Pseudoskalar

$$\begin{aligned}
O^{cca}_{Lijk} = &+ \frac{\eta_j}{\sqrt{2}} \left[g \left(R^{P^0}_{k1} V^*_{i1} U^*_{j2} + R^{P^0}_{k2} V^*_{i2} U^*_{j1} + R^{P^0}_{k4} V^*_{i1} U^*_{j3} + R^{P^0}_{k5} V^*_{i1} U^*_{j4} + R^{P^0}_{k6} V^*_{i1} U^*_{j5} \right) \right] \\
&- \frac{\eta_j}{\sqrt{2}} \Big[R^{P^0}_{k1} \left((Y_e)_{11} V^*_{i3} U^*_{j3} + (Y_e)_{22} V^*_{i4} U^*_{j4} + (Y_e)_{33} V^*_{i5} U^*_{j5} \right) \\
&\qquad - \left((Y_e)_{11} R^{P^0}_{k4} V^*_{i3} U^*_{j2} + (Y_e)_{22} R^{P^0}_{k5} V^*_{i4} U^*_{j2} + (Y_e)_{33} R^{P^0}_{k6} V^*_{i5} U^*_{j2} \right) \\
&\qquad - R^{P^0}_{k3} \left((Y_\nu)_1 V^*_{i2} U^*_{j3} + (Y_\nu)_2 V^*_{i2} U^*_{j4} + (Y_\nu)_3 V^*_{i2} U^*_{j5} \right) \\
&\qquad + \lambda R^{P^0}_{k3} V^*_{i2} U^*_{j2} \Big] \\
O^{cca}_{Rijk} = &- \left(O^{cch}_{Ljik}\right)^*
\end{aligned} \tag{B.25}$$

B.3. Kopplungen neutraler Skalare

Um die relevanten Tadpolegraphen auszuwerten, sind sämtliche Kopplungen der neutralen Skalare mit allen Feldern des Modells notwendig. Der Einfachheit halber werden diese in der unrotierten Basis angegeben. Die Kopplungen der rotierten Eigenzustände ergeben sich dann durch Anwendung der bekannten Rotationsmatrizen (B.6) nach

$$g^{S^0 S^0 S^0}_{ijk} = R^{S^0}_{ip} R^{S^0}_{jq} R^{S^0}_{kr} g^{S^{0'} S^{0'} S^{0'}}_{pqr}, \tag{B.26}$$

wobei auch teilrotierte Kopplungen auftreten werden. Die Kopplungen folgen aus der Lagrangedichte stets nach:

$$\begin{aligned}
g^{S^0 S^0 S^0}_{ijk} &= \frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial S^0_i \partial S^0_j \partial S^0_k} \\
g^{S^{0'} S^{0'} S^{0'}}_{ijk} &= \frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial S^{0'}_i \partial S^{0'}_j \partial S^{0'}_k}
\end{aligned} \tag{B.27}$$

Vor der Darstellung der gesamten Kopplungen ist es zweckmäßig einige Definitionen zur Abkürzung der Schreibweise einzuführen. Dazu werden die Vakuumerwartungswerte wie folgt zusammengefasst

$$(u_m)^T = (v_d, v_u, v_c, v_1, v_2, v_3) \quad , \qquad (v_m)^T = (v_1, v_2, v_3)\,. \tag{B.28}$$

Weiterhin sei neben dem üblichen Kronecker-Delta δ_{ij} auch

$$\hat{\delta}_{ij} = \mathrm{diag}\,(+, -, 0, +, +, +) \tag{B.29}$$

definiert, dessen Struktur sich bei Betrachtung von u_m näher erschließt. Nachfolgend bezeichnen weiterhin die Indizes m und n stets Summationsindizes, die entweder von 1 bis 3 (insbesondere im Zusammenhang mit v_m) oder von 1 bis 6 (insbesondere im Zusammenhang mit u_m) laufen, was dem Kontext zu entnehmen ist. Während der Index i stets die Werte 1 bis 6 annehmen kann, da er die neutralen Skalare $S^{0'}$ nummeriert, ist bei den Indizes j und k, gerade auch bei Definition von Untermatrizen, darauf zu achten, dass diese 2 Teilchen (z.B. $\left(g^{S^{0'} S^{+'} S^{-'}}_{iHH}\right)_{jk}$), 3 Teilchen

(z.B. $\left(g_{iLL}^{S^{0\prime}S^{+\prime}S^{-\prime}}\right)_{jk}$) oder auch 6 Teilchen (z.B. $g_{ijk}^{S^{0\prime}S^{0\prime}S^{0\prime}}$) durchnummerieren. Mehrfach treten Yukawakopplungen der Form $(Y_\nu)_{i-3}$ auf, für welche offensichtlich nur die Werte $i = 4, 5$ und 6 sinnvoll sind.

B.3.1. Neutrales Skalar-Neutrales Skalar-Neutrales Skalar

$$
\begin{aligned}
g_{ijk}^{S^{0\prime}S^{0\prime}S^{0\prime}} = & -\tfrac{1}{4}\left(g^2+g'^2\right)u_m\left(\hat{\delta}_{mi}\hat{\delta}_{jk}+\hat{\delta}_{mj}\hat{\delta}_{ik}+\hat{\delta}_{mk}\hat{\delta}_{ij}\right)\\
& - v_c\lambda\lambda^*\left[\left(\delta_{i1}\delta_{j1}\delta_{k3}+\delta_{i1}\delta_{j3}\delta_{k1}\right.\right.\\
& \qquad \left.\left.+\delta_{i3}\delta_{j1}\delta_{k1}\right)+\left(\delta_{i2}\delta_{j2}\delta_{k3}+\delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k2}+\delta_{i3}\delta_{j2}\delta_{k2}\right)\right]\\
& + \tfrac{1}{4}v_c\left(\lambda\kappa^*+\lambda^*\kappa\right)\left[\delta_{i1}\left(\delta_{j2}\delta_{k3}+\delta_{j3}\delta_{k2}\right)\right.\\
& \qquad \left.+\delta_{i2}\left(\delta_{j3}\delta_{k1}+\delta_{j1}\delta_{k3}\right)+\delta_{i3}\left(\delta_{j2}\delta_{k1}+\delta_{j1}\delta_{k2}\right)\right]\\
& + \tfrac{1}{2}v_c\left(\lambda\left(Y_\nu^*\right)_{k-3}+\lambda^*\left(Y_\nu\right)_{i-3}\right)\left(\delta_{i1}\delta_{j3}+\delta_{i3}\delta_{j1}\right)\\
& \quad + \tfrac{1}{2}v_c\left(\lambda\left(Y_\nu^*\right)_{j-3}+\lambda^*\left(Y_\nu\right)_{i-3}\right)\left(\delta_{i1}\delta_{k3}+\delta_{i3}\delta_{k1}\right)\\
& \quad + \tfrac{1}{2}v_c\left(\lambda\left(Y_\nu^*\right)_{i-3}+\lambda^*\left(Y_\nu\right)_{i-3}\right)\left(\delta_{j1}\delta_{k3}+\delta_{j3}\delta_{k1}\right)\\
& - \tfrac{1}{4}v_c\left(\kappa\left(Y_\nu^*\right)_{k-3}+\kappa^*\left(Y_\nu\right)_{k-3}\right)\left(\delta_{i3}\delta_{j2}+\delta_{i2}\delta_{j3}\right)\\
& \quad - \tfrac{1}{4}v_c\left(\kappa\left(Y_\nu^*\right)_{j-3}+\kappa^*\left(Y_\nu\right)_{j-3}\right)\left(\delta_{i3}\delta_{k2}+\delta_{i2}\delta_{k3}\right)\\
& \quad - \tfrac{1}{4}v_c\left(\kappa\left(Y_\nu^*\right)_{i-3}+\kappa^*\left(Y_\nu\right)_{i-3}\right)\left(\delta_{j2}\delta_{k3}+\delta_{j3}\delta_{k2}\right)\\
& - \frac{3}{2}v_c\kappa\kappa^*\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k3}\\
& - v_c\left(Y_\nu^*\right)_m\left(Y_\nu\right)_m\left(\delta_{i2}\delta_{j2}\delta_{k3}+\delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k2}+\delta_{i3}\delta_{j2}\delta_{k2}\right)\\
& - \tfrac{1}{2}v_c\left(\left(Y_\nu^*\right)_{i-3}\left(Y_\nu\right)_{j-3}+\left(Y_\nu\right)_{i-3}\left(Y_\nu^*\right)_{j-3}\right)\delta_{k3}\\
& \quad - \tfrac{1}{2}v_c\left(\left(Y_\nu^*\right)_{i-3}\left(Y_\nu\right)_{k-3}+\left(Y_\nu\right)_{i-3}\left(Y_\nu^*\right)_{k-3}\right)\delta_{j3}\\
& \quad - \tfrac{1}{2}v_c\left(\left(Y_\nu^*\right)_{j-3}\left(Y_\nu\right)_{k-3}+\left(Y_\nu\right)_{j-3}\left(Y_\nu^*\right)_{k-3}\right)\delta_{i3}\\
& - v_u\lambda\lambda^*\left[\left(\delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k1}+\delta_{i2}\delta_{j1}\delta_{k1}\right.\right.\\
& \qquad \left.\left.+\delta_{i1}\delta_{j1}\delta_{k2}\right)+\left(\delta_{i3}\delta_{j2}\delta_{k3}+\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k2}+\delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k3}\right)\right]\\
& + \tfrac{1}{4}v_u\left(\lambda\kappa^*+\lambda^*\kappa\right)\left(\delta_{i1}\delta_{j3}\delta_{k3}+\delta_{i3}\delta_{j1}\delta_{k3}+\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k1}\right)\\
& + \tfrac{1}{2}v_u\left(\lambda\left(Y_\nu^*\right)_{k-3}+\lambda^*\left(Y_\nu\right)_{k-3}\right)\left(\delta_{i1}\delta_{j2}+\delta_{i2}\delta_{j1}\right)\\
& \quad + \tfrac{1}{2}v_u\left(\lambda\left(Y_\nu^*\right)_{j-3}+\lambda^*\left(Y_\nu\right)_{j-3}\right)\left(\delta_{i1}\delta_{k2}+\delta_{i2}\delta_{k1}\right)\\
& \quad + \tfrac{1}{2}v_u\left(\lambda\left(Y_\nu^*\right)_{i-3}+\lambda^*\left(Y_\nu\right)_{i-3}\right)\left(\delta_{j1}\delta_{k2}+\delta_{j2}\delta_{k1}\right)\\
& - \tfrac{1}{4}v_u\left(\kappa\left(Y_\nu^*\right)_{k-3}+\kappa^*\left(Y_\nu\right)_{i-3}\right)\delta_{i3}\delta_{j3}\\
& \quad - \tfrac{1}{4}v_u\left(\kappa\left(Y_\nu^*\right)_{j-3}+\kappa^*\left(Y_\nu\right)_{i-3}\right)\delta_{i3}\delta_{k3}\\
& \quad - \tfrac{1}{4}v_u\left(\kappa\left(Y_\nu^*\right)_{i-3}+\kappa^*\left(Y_\nu\right)_{i-3}\right)\delta_{j3}\delta_{k3}\\
& - v_u\left(Y_\nu^*\right)_m\left(Y_\nu\right)_m\left(\delta_{i3}\delta_{j2}\delta_{k3}+\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k2}+\delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k3}\right)\\
& - \tfrac{1}{2}v_u\left(\left(Y_\nu^*\right)_{i-3}\left(Y_\nu\right)_{j-3}+\left(Y_\nu\right)_{i-3}\left(Y_\nu^*\right)_{j-3}\right)\delta_{k2}\\
& \quad - \tfrac{1}{2}v_u\left(\left(Y_\nu^*\right)_{i-3}\left(Y_\nu\right)_{k-3}+\left(Y_\nu\right)_{i-3}\left(Y_\nu^*\right)_{k-3}\right)\delta_{j2}\\
& \quad - \tfrac{1}{2}v_u\left(\left(Y_\nu^*\right)_{j-3}\left(Y_\nu\right)_{k-3}+\left(Y_\nu\right)_{j-3}\left(Y_\nu^*\right)_{k-3}\right)\delta_{i2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- v_d \lambda\lambda^* \left[\left(\delta_{i2}\delta_{j2}\delta_{k1} + \delta_{i2}\delta_{j1}\delta_{k2}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k2}\right) + \left(\delta_{i3}\delta_{j1}\delta_{k3} + \delta_{i1}\delta_{j3}\delta_{k3} + \delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k1}\right)\right] \\
&+ \tfrac{1}{4} v_d \left(\lambda\kappa^* + \lambda^*\kappa\right)\left(\delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k3} + \delta_{i3}\delta_{j2}\delta_{k3} + \delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k2}\right) \\
&+ \tfrac{1}{2} v_d \left(\lambda \left(Y_\nu^*\right)_{k-3} + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_{k-3}\right)\left(\delta_{i2}\delta_{j2} + \delta_{i3}\delta_{j3}\right) \\
&\quad + \tfrac{1}{2} v_d \left(\lambda \left(Y_\nu^*\right)_{j-3} + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_{j-3}\right)\left(\delta_{i2}\delta_{k2} + \delta_{i3}\delta_{k3}\right) \\
&\quad + \tfrac{1}{2} v_d \left(\lambda \left(Y_\nu^*\right)_{i-3} + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_{i-3}\right)\left(\delta_{j2}\delta_{k2} + \delta_{j3}\delta_{k3}\right) \\
&+ \tfrac{1}{2} v_m \left(\lambda \left(Y_\nu^*\right)_{m} + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_{m}\right)\left[\left(\delta_{i2}\delta_{j2}\delta_{k1} + \delta_{i2}\delta_{j1}\delta_{k2}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k2}\right) + \left(\delta_{i3}\delta_{j1}\delta_{k3} + \delta_{i1}\delta_{j3}\delta_{k3} + \delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k1}\right)\right] \\
&- \tfrac{1}{4} v_m \left(\kappa \left(Y_\nu^*\right)_{m} + \kappa^* \left(Y_\nu\right)_{m}\right)\left(\delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k3} + \delta_{i3}\delta_{j2}\delta_{k3} + \delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k2}\right) \\
&- \tfrac{1}{2} v_m \left(\left(Y_\nu^*\right)_{m}\left(Y_\nu\right)_{k-3} + \left(Y_\nu\right)_{m}\left(Y_\nu^*\right)_{k-3}\right)\left(\delta_{i2}\delta_{j2} + \delta_{i3}\delta_{j3}\right) \\
&\quad - \tfrac{1}{2} v_m \left(\left(Y_\nu^*\right)_{m}\left(Y_\nu\right)_{j-3} + \left(Y_\nu\right)_{m}\left(Y_\nu^*\right)_{j-3}\right)\left(\delta_{i2}\delta_{k2} + \delta_{i3}\delta_{k3}\right) \\
&\quad - \tfrac{1}{2} v_m \left(\left(Y_\nu^*\right)_{m}\left(Y_\nu\right)_{i-3} + \left(Y_\nu\right)_{m}\left(Y_\nu^*\right)_{i-3}\right)\left(\delta_{j2}\delta_{k2} + \delta_{j3}\delta_{k3}\right) \\
&- \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(T_\nu\right)_{k-3} + \left(T_\nu^*\right)_{k-3}\right)\left(\delta_{i2}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j2}\right) \\
&\quad - \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(T_\nu\right)_{j-3} + \left(T_\nu^*\right)_{j-3}\right)\left(\delta_{i2}\delta_{k3} + \delta_{i3}\delta_{k2}\right) \\
&\quad - \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(T_\nu\right)_{i-3} + \left(T_\nu^*\right)_{i-3}\right)\left(\delta_{j3}\delta_{k2} + \delta_{j2}\delta_{k3}\right) \\
&+ \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(T_\lambda\right) + \left(T_\lambda^*\right)\right)\left[\delta_{i1}\left(\delta_{j2}\delta_{k3} + \delta_{j3}\delta_{k2}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \delta_{i2}\left(\delta_{j1}\delta_{k3} + \delta_{j3}\delta_{k1}\right) + \delta_{i3}\left(\delta_{j1}\delta_{k2} + \delta_{j2}\delta_{k1}\right)\right] \\
&- \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(T_\kappa\right) + \left(T_\kappa^*\right)\right)\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k3}
\end{aligned}
\tag{B.30}
$$

B.3.2. Skalar-Pseudoskalar-Pseudoskalar

$$
\begin{aligned}
g_{ijk}^{S^{0\prime}P^{0\prime}P^{0\prime}} = &- \tfrac{1}{4}\left(g^2 + g'^2\right) u_m \hat{\delta}_{mi}\hat{\delta}_{jk} \\
&- v_c \lambda\lambda^* \delta_{i3}\left(\delta_{j1}\delta_{j1} + \delta_{j2}\delta_{k2}\right) \\
&+ \tfrac{1}{4} v_c \left(\lambda\kappa^* + \lambda^*\kappa\right)\left[\delta_{i1}\left(\delta_{j3}\delta_{k2} + \delta_{j2}\delta_{k3}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \delta_{i2}\left(\delta_{j3}\delta_{k1} + \delta_{j1}\delta_{k3}\right) - \delta_{i3}\left(\delta_{j2}\delta_{k1} + \delta_{j1}\delta_{k2}\right)\right] \\
&+ \tfrac{1}{2} v_c \left(\lambda \left(Y_\nu^*\right)_{k-3} + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_{k-3}\right)\delta_{i3}\delta_{j1} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} v_c \left(\lambda \left(Y_\nu^*\right)_{j-3} + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_{j-3}\right)\delta_{i3}\delta_{k1} \\
&+ \tfrac{1}{4} v_c \left(\kappa \left(Y_\nu^*\right)_{k-3} + \kappa^* \left(Y_\nu\right)_{k-3}\right)\left(\delta_{i3}\delta_{j2} - \delta_{i2}\delta_{j3}\right) \\
&\quad + \tfrac{1}{4} v_c \left(\kappa \left(Y_\nu^*\right)_{j-3} + \kappa^* \left(Y_\nu\right)_{j-3}\right)\left(\delta_{i3}\delta_{k2} - \delta_{i2}\delta_{k3}\right) \\
&\quad - \tfrac{1}{4} v_c \left(\kappa \left(Y_\nu^*\right)_{i-3} + \kappa^* \left(Y_\nu\right)_{i-3}\right)\left(\delta_{j2}\delta_{k3} + \delta_{j3}\delta_{k2}\right) \\
&- \frac{1}{2} v_c \kappa\kappa^* \delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k3} \\
&- v_c \left(Y_\nu^*\right)_{m}\left(Y_\nu\right)_{m}\delta_{i3}\delta_{j2}\delta_{k2} \\
&- \tfrac{1}{2} v_c \left(\left(Y_\nu^*\right)_{j-3}\left(Y_\nu\right)_{k-3} + \left(Y_\nu\right)_{j-3}\left(Y_\nu^*\right)_{k-3}\right)\delta_{i3} \\
&- v_u \lambda\lambda^* \delta_{i2}\left(\delta_{j1}\delta_{k1} + \delta_{j3}\delta_{k3}\right) \\
&+ \tfrac{1}{4} v_u \left(\lambda\kappa^* + \lambda^*\kappa\right)\left[\delta_{i3}\left(\delta_{j3}\delta_{k1} + \delta_{j1}\delta_{k3}\right) - \delta_{i1}\delta_{j3}\delta_{k3}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \tfrac{1}{2} v_u \left(\lambda \left(Y_\nu^*\right)_{k-3} + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_{k-3}\right) \delta_{i2}\delta_{j1} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} v_u \left(\lambda \left(Y_\nu^*\right)_{j-3} + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_{j-3}\right) \delta_{i2}\delta_{k1} \\
&- \tfrac{1}{4} v_u \left(\kappa \left(Y_\nu^*\right)_{k-3} + \kappa^* \left(Y_\nu\right)_{k-3}\right) \delta_{i3}\delta_{j3} \\
&\quad - \tfrac{1}{4} v_u \left(\kappa \left(Y_\nu^*\right)_{j-3} + \kappa^* \left(Y_\nu\right)_{j-3}\right) \delta_{i3}\delta_{k3} \\
&\quad + \tfrac{1}{4} v_u \left(\kappa \left(Y_\nu^*\right)_{i-3} + \kappa^* \left(Y_\nu\right)_{i-3}\right) \delta_{j3}\delta_{k3} \\
&- v_u \left(Y_\nu^*\right)_m \left(Y_\nu\right)_m \delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k3} \\
&- \tfrac{1}{2} v_u \left(\left(Y_\nu^*\right)_{j-3} \left(Y_\nu\right)_{k-3} + \left(Y_\nu\right)_{j-3} \left(Y_\nu^*\right)_{k-3}\right) \delta_{i2} \\
&- v_d \lambda\lambda^* \delta_{i1} \left(\delta_{j2}\delta_{k2} + \delta_{j3}\delta_{k3}\right) \\
&+ \tfrac{1}{4} v_d \left(\lambda\kappa^* + \lambda^*\kappa\right) \left[\delta_{i3} \left(\delta_{j2}\delta_{k3} + \delta_{j3}\delta_{k2}\right) - \delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k3}\right] \\
&+ \tfrac{1}{2} v_d \left(\lambda \left(Y_\nu^*\right)_{i-3} + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_{i-3}\right) \left(\delta_{j2}\delta_{k2} + \delta_{j3}\delta_{k3}\right) \\
&+ \tfrac{1}{2} v_m \left(\lambda \left(Y_\nu^*\right)_m + \lambda^* \left(Y_\nu\right)_m\right) \delta_{i1} \left(\delta_{j2}\delta_{k2} + \delta_{j3}\delta_{k3}\right) \\
&+ \tfrac{1}{4} v_m \left(\kappa \left(Y_\nu^*\right)_m + \kappa^* \left(Y_\nu\right)_m\right) \left[\delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k3} - \delta_{i3} \left(\delta_{j2}\delta_{k3} + \delta_{j3}\delta_{k2}\right)\right] \\
&- \tfrac{1}{2} v_m \left(\left(Y_\nu^*\right)_m \left(Y_\nu\right)_{i-3} + \left(Y_\nu\right)_m \left(Y_\nu^*\right)_{i-3}\right) \left(\delta_{j2}\delta_{k2} + \delta_{j3}\delta_{k3}\right) \\
&+ \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(T_\nu\right)_{k-3} + \left(T_\nu^*\right)_{k-3}\right) \left(\delta_{i2}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j2}\right) \\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(T_\nu\right)_{j-3} + \left(T_\nu^*\right)_{j-3}\right) \left(\delta_{i2}\delta_{k3} + \delta_{i3}\delta_{k2}\right) \\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(T_\nu\right)_{i-3} + \left(T_\nu^*\right)_{i-3}\right) \left(\delta_{j3}\delta_{k2} + \delta_{j2}\delta_{k3}\right) \\
&- \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(T_\lambda\right) + \left(T_\lambda^*\right)\right) \left[\delta_{i1} \left(\delta_{j2}\delta_{k3} + \delta_{j3}\delta_{k2}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \delta_{i2} \left(\delta_{j1}\delta_{k3} + \delta_{j3}\delta_{k1}\right) + \delta_{i3} \left(\delta_{j1}\delta_{k2} + \delta_{j2}\delta_{k1}\right)\right] \\
&+ \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(T_\kappa\right) + \left(T_\kappa^*\right)\right) \delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k3}
\end{aligned}
\tag{B.31}
$$

B.3.3. Skalar-Geladenes Skalar-Geladenes Skalar

Definiert man die (8×8)-Matrix

$$
g_{ijk}^{S^{0\prime} S^{+\prime} S^{-\prime}} = \begin{pmatrix} g_{iHH}^{S^{0\prime} S^{+\prime} S^{-\prime}} & g_{iHL}^{S^{0\prime} S^{+\prime} S^{-\prime}} & g_{iHR}^{S^{0\prime} S^{+\prime} S^{-\prime}} \\ \left(g_{iHL}^{S^{0\prime} S^{+\prime} S^{-\prime}}\right)^\dagger & g_{iLL}^{S^{0\prime} S^{+\prime} S^{-\prime}} & g_{iLR}^{S^{0\prime} S^{+\prime} S^{-\prime}} \\ \left(g_{iHR}^{S^{0\prime} S^{+\prime} S^{-\prime}}\right)^\dagger & \left(g_{iLR}^{S^{0\prime} S^{+\prime} S^{-\prime}}\right)^\dagger & g_{iRR}^{S^{0\prime} S^{+\prime} S^{-\prime}} \end{pmatrix}, \tag{B.32}
$$

so sind die einzelnen Einträge gegeben durch:

$$\begin{aligned}\left(g_{iHH}^{S^{0\prime}S^{+\prime}S^{-\prime}}\right)_{jk} =& \tfrac{1}{4}g^2\left[-v_u\left(\delta_{i1}\delta_{j1}\delta_{k2}+\delta_{i2}\delta_{j1}\delta_{k1}+\delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k1}+\delta_{i2}\delta_{j2}\delta_{k2}\right)\right.\\ &\quad -v_d\left(\delta_{i1}\delta_{j1}\delta_{k1}+\delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k2}+\delta_{i2}\delta_{j1}\delta_{k2}+\delta_{i2}\delta_{j2}\delta_{k1}\right)\\ &\quad \left.+v_m\delta_{i-3,m}\left(\delta_{j1}\delta_{k1}-\delta_{j2}\delta_{k2}\right)\right]\\ &-\tfrac{1}{4}g'^2u_m\hat{\delta}_{im}\hat{\delta}_{jk}\\ &-\tfrac{1}{2}v_m\left(Y_eY_e^\dagger+Y_e^*Y_e^T\right)_{m,i-3}\delta_{j1}\delta_{k1}\\ &-v_c\left(\lambda\lambda^*+\left(Y_\nu\right)_m\left(Y_\nu^*\right)_m\right)\delta_{i3}\delta_{j2}\delta_{k2}\\ &+\left[\left(\tfrac{1}{2}v_d\lambda\lambda^*-\tfrac{1}{2}\lambda v_m\left(Y_\nu^*\right)_m\right)\delta_{i1}+\tfrac{1}{2}v_u\lambda\lambda^*\delta_{i2}-\tfrac{1}{2}v_c\lambda\kappa^*\delta_{i3}\right.\\ &\quad \left.-\tfrac{1}{2}v_u\lambda\left(Y_\nu^*\right)_m\delta_{i-3,m}\right]\delta_{j2}\delta_{k1}\\ &+\left[\left(\tfrac{1}{2}v_d\lambda\lambda^*-\tfrac{1}{2}\lambda^*v_m\left(Y_\nu\right)_m\right)\delta_{i1}+\tfrac{1}{2}v_u\lambda\lambda^*\delta_{i2}-\tfrac{1}{2}v_c\lambda^*\kappa\delta_{i3}\right.\\ &\quad \left.-\tfrac{1}{2}v_u\lambda^*\left(Y_\nu\right)_{i-3}\right]\delta_{j1}\delta_{k2}\\ &-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(T_\lambda^*\delta_{j1}\delta_{k2}+T_\lambda\delta_{j2}\delta_{k1}\right)\delta_{i3}\end{aligned} \tag{B.33}$$

$$\begin{aligned}\left(g_{iHL}^{S^{0\prime}S^{+\prime}S^{-\prime}}\right)_{jk} =& -\tfrac{1}{4}g^2\left[\delta_{i-3,k}\left(v_d\delta_{j1}+v_u\delta_{j2}\right)+v_m\delta ij\delta_{mk}\right]\\ &+\tfrac{1}{2}v_m\left(Y_e^*Y_e^T\right)_{mk}\delta_{i1}\delta_{j1}+\tfrac{1}{2}v_d\delta_{j1}\left(Y_e^*Y_e^T\right)_{i-3,k}\\ &+\left[\left(\tfrac{1}{2}v_m\left(Y_\nu^*\right)_m-\tfrac{1}{2}v_d\lambda^*\right)\delta_{i1}-\tfrac{1}{2}v_u\lambda^*\delta_{i2}+\tfrac{1}{2}v_c\kappa^*\delta_{i3}\right.\\ &\quad \left.+\tfrac{1}{2}v_u\left(Y_\nu^*\right)_{i-3}\right]\left(Y_\nu\right)_k\delta_{j2}\\ &+v_c\lambda^*\left(Y_\nu\right)_k\delta_{i3}\delta_{j1}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(T_\nu\right)_k\delta_{j2}\delta_{i3}\end{aligned} \tag{B.34}$$

$$\begin{aligned}\left(g_{iHR}^{S^{0\prime}S^{+\prime}S^{-\prime}}\right)_{jk} =& \tfrac{1}{2}\left[\left(\lambda v_m\left(Y_e^*\right)_{mk}+v_d\left(Y_\nu\right)_m\left(Y_e^*\right)_{mk}\right)\delta_{i3}\right.\\ &\quad \left.+v_c\left(Y_\nu\right)_m\left(Y_e^*\right)_{mk}\delta_{i1}+v_c\lambda\left(Y_e^*\right)_{ik}\right]\delta_{j2}\\ &+\tfrac{1}{2}\left(v_c\delta_{i2}+v_u\delta_{i3}\right)\left(Y_\nu\right)_m\left(Y_e^*\right)_{mk}\delta_{j1}\\ &+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(T_e^*\right)_{i-3,k}\delta_{j1}\end{aligned} \tag{B.35}$$

$$\begin{aligned}\left(g_{iLL}^{S^{0\prime}S^{+\prime}S^{-\prime}}\right)_{jk} =& \tfrac{1}{4}\left(g^2-g'^2\right)u_m\hat{\delta}_{im}\delta_{jk}-\tfrac{1}{4}g^2v_m\left(\delta_{i-3,j}\delta_{mk}+\delta_{i-3,k}\delta_{mj}\right)\\ &-\left(Y_e^*Y_e^T\right)_{jk}v_d\delta_{i1}-v_c\left(Y_\nu^*\right)_j\left(Y_\nu\right)_k\delta_{i3}\end{aligned} \tag{B.36}$$

$$\left(g_{iLR}^{S^{0\prime}S^{+\prime}S^{-\prime}}\right)_{jk} = \tfrac{1}{2}\left(v_c\delta_{i2}+v_u\delta_{i3}\right)\lambda\left(Y_e^*\right)_{jk}-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(T_e^*\right)_{jk}\delta_{i1} \tag{B.37}$$

$$\begin{aligned}\left(g_{iRR}^{S^{0\prime}S^{+\prime}S^{-\prime}}\right)_{jk} =& \tfrac{1}{2}g'^2u_m\hat{\delta}_{im}\delta_{jk}-v_d\delta_{i1}\left(Y_e^TY_e^*\right)_{jk}\\ &-\tfrac{1}{2}v_m\left[\left(Y_e^*\right)_{i-3,k}\left(Y_e\right)_{mj}+\left(Y_e\right)_{i-3,j}\left(Y_e^*\right)_{mk}\right]\end{aligned} \tag{B.38}$$

B.3.4. Skalar-Up Squarks-Up Squarks

Mit

$$\mathcal{L} = g_{ijk}^{S^{0\prime}\tilde{u}'\tilde{u}'^*}S_i^{0\prime}\tilde{u}_j'\tilde{u}_k'^* + \dots \tag{B.39}$$

erhält man mit der Definition der (6×6)-Matrix

$$g_{ijk}^{S^{0\prime}\tilde{u}'\tilde{u}'^*} = \begin{pmatrix} g_{iLL}^{S^{0\prime}\tilde{u}'\tilde{u}'^*} & g_{iLR}^{S^{0\prime}\tilde{u}'\tilde{u}'^*} \\ g_{iRL}^{S^{0\prime}\tilde{u}'\tilde{u}'^*} & g_{iRR}^{S^{0\prime}\tilde{u}'\tilde{u}'^*} \end{pmatrix} \tag{B.40}$$

und der (3×3)-Einheitsmatrix I_3 für die einzelnen (3×3)-Einträge:

$$\begin{aligned}
g_{iLL}^{S^{0\prime}\tilde{u}'\tilde{u}'^*} &= u_m \hat{\delta}_{im} \left(-\tfrac{1}{4}g^2 + \tfrac{1}{12}g'^2\right) I_3 - v_u \left(Y_u Y_u^\dagger\right) \delta_{i2} \\
g_{iLR}^{S^{0\prime}\tilde{u}'\tilde{u}'^*} &= \tfrac{1}{2}v_c \lambda^* Y_u \delta_{i1} + \tfrac{1}{2}v_d \lambda^* Y_u \delta_{i3} - \tfrac{1}{2}v_c Y_u \left(Y_\nu^*\right)_{i-3} - \tfrac{1}{2}v_m \left(Y_\nu^*\right)_m Y_u \delta_{i3} - \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left(T_u\right) \delta_{i2} \\
g_{iRL}^{S^{0\prime}\tilde{u}'\tilde{u}'^*} &= \left(g_{iLR}^{S^{0\prime}\tilde{u}'\tilde{u}'^*}\right)^\dagger \\
g_{iRR}^{S^{0\prime}\tilde{u}'\tilde{u}'^*} &= -\tfrac{1}{3}u_m \hat{\delta}_{im} g'^2 I_3 - v_u \left(Y_u^\dagger Y_u\right) \delta_{i2}
\end{aligned} \tag{B.41}$$

B.3.5. Skalar-Down Squarks-Down Squarks

Mit

$$\mathcal{L} = g_{ijk}^{S^{0\prime}\tilde{d}'\tilde{d}'^*} S_i^{0\prime} \tilde{d}'_j \tilde{d}'^*_k + \ldots \tag{B.42}$$

erhält man mit der Definition der (6×6)-Matrix

$$g_{ijk}^{S^{0\prime}\tilde{d}'\tilde{d}'^*} = \begin{pmatrix} g_{iLL}^{S^{0\prime}\tilde{d}'\tilde{d}'^*} & g_{iLR}^{S^{0\prime}\tilde{d}'\tilde{d}'^*} \\ g_{iRL}^{S^{0\prime}\tilde{d}'\tilde{d}'^*} & g_{iRR}^{S^{0\prime}\tilde{d}'\tilde{d}'^*} \end{pmatrix} \tag{B.43}$$

und der (3×3)-Einheitsmatrix I_3 für die einzelnen (3×3)-Einträge

$$\begin{aligned}
g_{iLL}^{S^{0\prime}\tilde{d}'\tilde{d}'^*} &= u_m \hat{\delta}_{im} \left(\tfrac{1}{4}g^2 + \tfrac{1}{12}g'^2\right) I_3 - \tfrac{1}{2}v_d \left(Y_d Y_d^\dagger\right) \delta_{i1} \\
g_{iLR}^{S^{0\prime}\tilde{d}'\tilde{d}'^*} &= \tfrac{1}{2}v_c \lambda^* Y_d \delta_{i2} + \tfrac{1}{2}v_u \lambda^* Y_d \delta_{i3} - \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left(T_d\right) \delta_{i1} \\
g_{iRL}^{S^{0\prime}\tilde{d}'\tilde{d}'^*} &= \left(g_{iLR}^{S^{0\prime}\tilde{d}'\tilde{d}'^*}\right)^\dagger \\
g_{iRR}^{S^{0\prime}\tilde{d}'\tilde{d}'^*} &= \tfrac{1}{6}u_m \hat{\delta}_{im} g'^2 I_3 - v_d \left(Y_d^\dagger Y_d\right) \delta_{i1}
\end{aligned} \tag{B.44}$$

B.3.6. Skalar-W^+-W^-

Mit

$$\mathcal{L} = g_i^{S^{0\prime}W^+W^-} S_i^{0\prime} W^+ W^- + \ldots \tag{B.45}$$

erhält man

$$g_i^{S^{0\prime}W^+W^-} = g \frac{m_W}{v} \left(v_d \delta_{i1} + v_u \delta_{i2} + v_m \delta_{i-3,m}\right), \tag{B.46}$$

wobei

$$v = \sqrt{v_d^2 + v_u^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad . \tag{B.47}$$

B.3.7. Skalar-Z^0-Z^0

Mit

$$\mathcal{L} = g_i^{S^{0\prime}Z^0Z^0} S_i^{0\prime} Z^0 Z^0 + \ldots \tag{B.48}$$

erhält man

$$g_i^{S^{0\prime}Z^0Z^0} = \frac{g}{\cos\theta_W}\frac{m_Z}{v}\left(v_d\delta_{i1} + v_u\delta_{i2} + v_m\delta_{i-3,m}\right) \qquad . \tag{B.49}$$

B.3.8. Skalar-Quark-Quark

Mit

$$\mathcal{L} = g_{ijk}^{S^{0\prime}\overline{u}u} S_i^{0\prime}\overline{u}_j u_k + g_{ijk}^{S^{0\prime}\overline{d}d} S_i^{0\prime}\overline{d}_j d_k + \ldots \tag{B.50}$$

erhält man

$$\begin{aligned} g_{ijk}^{S^{0\prime}\overline{u}u} &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_u\right)_{jk}\delta_{i2} \\ g_{ijk}^{S^{0\prime}\overline{d}d} &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_d\right)_{jk}\delta_{i1} \qquad . \end{aligned} \tag{B.51}$$

B.3.9. Skalar-Chargino-Chargino und Skalar-Neutralino-Neutralino

Mit

$$\mathcal{L} = \overline{\chi_i^-}\left(O_{Lijk}^{cch'}P_L + O_{Rijk}^{cch'}P_R\right)\chi_j^- S_k^{0\prime} + \frac{1}{2}\overline{\chi_i^0}\left(O_{Lijk}^{nnh'}P_L + O_{Rijk}^{nnh'}P_R\right)\chi_j^0 S_k^{0\prime} \tag{B.52}$$

erhält man:

$$\begin{aligned} O_{Lijk}^{cch'} = -\frac{\eta_j}{\sqrt{2}}\Big[&g\left(V_{i1}^*U_{j2}^*\delta_{k1} + V_{i2}^*U_{j1}^*\delta_{k2} + V_{i1}^*U_{j3}^*\delta_{k4} + V_{i1}^*U_{j4}^*\delta_{k5} + V_{i1}^*U_{j5}^*\delta_{k6}\right) \\ &+\left((Y_e)_{11}V_{i3}^*U_{j3}^* + (Y_e)_{22}V_{i4}^*U_{j4}^* + (Y_e)_{33}V_{i5}^*U_{j5}^*\right)\delta_{k1} \\ &-\left((Y_e)_{11}V_{i3}^*U_{j2}^*\delta_{k4} + (Y_e)_{22}V_{i4}^*U_{j2}^*\delta_{k5} + (Y_e)_{33}V_{i5}^*U_{j2}^*\delta_{k6}\right) \\ &-\left((Y_\nu)_1V_{i2}^*U_{j3}^* + (Y_\nu)_2V_{i2}^*U_{j4}^* + (Y_\nu)_3V_{i2}^*U_{j5}^*\right)\delta_{k3} \\ &+\lambda V_{i2}^*U_{j2}^*\delta_{k3}\Big] \\ O_{Rijk}^{cch'} = &\left(O_{Ljik}^{cch'}\right)^* \end{aligned} \tag{B.53}$$

$$\begin{aligned} O_{Lijk}^{nnh'} = &\frac{\eta_j}{2}\Big[\left(-g\mathcal{N}_{i2}^* + g'\mathcal{N}_{i1}^*\right)\left(\mathcal{N}_{j3}^*\delta_{k1} - \mathcal{N}_{j4}^*\delta_{k2} + \mathcal{N}_{j6}^*\delta_{k4} + \mathcal{N}_{j7}^*\delta_{k5} + \mathcal{N}_{j8}^*\delta_{k6}\right) \\ &+\left(-g\mathcal{N}_{j2}^* + g'\mathcal{N}_{j1}^*\right)\left(\mathcal{N}_{i3}^*\delta_{k1} - \mathcal{N}_{i4}^*\delta_{k2} + \mathcal{N}_{i6}^*\delta_{k4} + \mathcal{N}_{i7}^*\delta_{k5} + \mathcal{N}_{i8}^*\delta_{k6}\right)\Big] \\ &-\frac{\eta_j}{\sqrt{2}}\Big[\kappa\mathcal{N}_{i5}^*\mathcal{N}_{j5}^* + \Big((Y_\nu)_1\mathcal{N}_{i4}^*\mathcal{N}_{j6}^* + (Y_\nu)_1\mathcal{N}_{i6}^*\mathcal{N}_{j4}^* + (Y_\nu)_2\mathcal{N}_{i4}^*\mathcal{N}_{j7}^* \\ &\qquad + (Y_\nu)_2\mathcal{N}_{i7}^*\mathcal{N}_{j4}^* + (Y_\nu)_3\mathcal{N}_{i4}^*\mathcal{N}_{j8}^* + (Y_\nu)_3\mathcal{N}_{i8}^*\mathcal{N}_{j4}^*\Big)\delta_{k3} \\ &+\Big((Y_\nu)_1\mathcal{N}_{i5}^*\mathcal{N}_{j6}^* + (Y_\nu)_1\mathcal{N}_{i6}^*\mathcal{N}_{j5}^* + (Y_\nu)_2\mathcal{N}_{i5}^*\mathcal{N}_{j7}^* \\ &\qquad + (Y_\nu)_2\mathcal{N}_{i7}^*\mathcal{N}_{j5}^* + (Y_\nu)_3\mathcal{N}_{i5}^*\mathcal{N}_{j8}^* + (Y_\nu)_3\mathcal{N}_{i8}^*\mathcal{N}_{j5}^*\Big)\delta_{k2} \\ &+\left(\mathcal{N}_{i4}^*\mathcal{N}_{j5}^* + \mathcal{N}_{i5}^*\mathcal{N}_{j4}^*\right)\left((Y_\nu)_1\delta_{k4} + (Y_\nu)_2\delta_{k5} + (Y_\nu)_3\delta_{k6}\right) \\ &-\lambda\left(\mathcal{N}_{i3}^*\mathcal{N}_{j5}^* + \mathcal{N}_{i5}^*\mathcal{N}_{j3}^*\right)\delta_{k2} - \lambda\left(\mathcal{N}_{i4}^*\mathcal{N}_{j5}^* + \mathcal{N}_{i5}^*\mathcal{N}_{j4}^*\right)\delta_{k1} \\ &-\lambda\left(\mathcal{N}_{i3}^*\mathcal{N}_{j5}^* + \mathcal{N}_{i5}^*\mathcal{N}_{j3}^*\right)\delta_{k3}\Big] \\ O_{Rijk}^{nnh'} = &\left(O_{Ljik}^{nnh'}\right)^* \end{aligned} \tag{B.54}$$

C. Einschleifen-Selbstenergien

Nachfolgend sind die Beiträge zu den einzelnen Selbstenergie-Graphen in der Eichung $\xi = 0$ dargestellt, da wie in Abschnitt 5.5.3 erläutert, die Tadpolegraphen mit geladenen Goldstonebosonen keinen Beitrag zur Selbstenergie der neutralen Fermionen liefern.

C.1. W und Z Einschleifengraphen

Die Beiträge der W und Z Einschleifen-Graphen zu Σ^V und Π^V kann man in folgender Form schreiben, wobei $X = W, Z$ bezeichnen:

$$\begin{aligned}
\Sigma^V_{ij} &= -\frac{1}{16\pi^2}\sum_k F^X_{ijk}\left[2B_1\left(p^2, m_k^2, m_X^2\right) + B_0\left(p^2, m_k^2, m_X^2\right)\right. \\
&\qquad \left. -\frac{m_k^2 - p^2}{m_X^2}\left(B_1\left(p^2, m_k^2, m_X^2\right) - B_1\left(p^2, 0, m_X^2\right)\right)\right] \\
\Pi^V_{ij} &= -\frac{1}{16\pi^2}\sum_k G^X_{ijk} m_k 3B_0\left(p^2, m_k^2, m_X^2\right)
\end{aligned} \tag{C.1}$$

mit

$$\begin{aligned}
F^W_{ijk} &= \left(O^{ncw}_{Ljk}O^{cnw}_{Lki} + O^{ncw}_{Rjk}O^{cnw}_{Rki}\right) \\
G^W_{ijk} &= -\left(O^{ncw}_{Ljk}O^{cnw}_{Rki} + O^{ncw}_{Rjk}O^{cnw}_{Lki}\right)
\end{aligned} \tag{C.2}$$

und

$$\begin{aligned}
F^Z_{ijk} &= \tfrac{1}{2}\left(O^{nnz}_{Ljk}O^{nnz}_{Lki} + O^{nnz}_{Rjk}O^{nnz}_{Rki}\right) \\
G^Z_{ijk} &= -\tfrac{1}{2}\left(O^{nnz}_{Ljk}O^{nnz}_{Rki} + O^{nnz}_{Rjk}O^{nnz}_{Lki}\right)
\end{aligned} \tag{C.3}$$

C.2. Einschleifengraphen mit Skalaren

Mit der Substitution $X = S^\pm, S^0, P^0, \tilde{u}, \tilde{d}$ lassen sich alle Beiträge in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned}
\Sigma^V_{ij} &= -\frac{1}{16\pi^2}\sum_r\sum_k F^X_{ijkr} B_1\left(p^2, m_k^2, m_r^2\right) \\
\Pi^V_{ij} &= -\frac{1}{16\pi^2}\sum_r\sum_k G^X_{ijkr} m_k B_0\left(p^2, m_k^2, m_r^2\right)
\end{aligned} \tag{C.4}$$

mit

$$\begin{aligned}
F^{S^\pm}_{ijkr} &= \left(O^{ncs}_{Rjkr}O^{cns}_{Lkir} + O^{ncs}_{Ljkr}O^{cns}_{Rkir}\right) \\
G^{S^\pm}_{ijkr} &= \left(O^{ncs}_{Ljkr}O^{cns}_{Lkir} + O^{ncs}_{Rjkr}O^{cns}_{Rkir}\right)
\end{aligned} \tag{C.5}$$

$$
\begin{aligned}
F^{S^0}_{ijkr} &= \tfrac{1}{2}\left(O^{nnh}_{Rjkr}O^{nnh}_{Lkir} + O^{nnh}_{Ljkr}O^{nnh}_{Rkir}\right) \\
G^{S^0}_{ijkr} &= \tfrac{1}{2}\left(O^{nnh}_{Ljkr}O^{nnh}_{Lkir} + O^{nnh}_{Rjkr}O^{nnh}_{Rkir}\right)
\end{aligned} \tag{C.6}
$$

$$
\begin{aligned}
F^{P^0}_{ijkr} &= -\tfrac{1}{2}\left(O^{nna}_{Rjkr}O^{nna}_{Lkir} + O^{nna}_{Ljkr}O^{nna}_{Rkir}\right) \\
G^{P^0}_{ijkr} &= -\tfrac{1}{2}\left(O^{nna}_{Ljkr}O^{nna}_{Lkir} + O^{nna}_{Rjkr}O^{nna}_{Rkir}\right)
\end{aligned} \tag{C.7}
$$

$$
\begin{aligned}
F^{\tilde{u}}_{ijkr} &= 3\left(O^{nus}_{Rjkr}O^{uns}_{Lkir} + O^{nus}_{Ljkr}O^{uns}_{Rkir}\right) \\
G^{\tilde{u}}_{ijkr} &= 3\left(O^{nus}_{Ljkr}O^{uns}_{Lkir} + O^{nus}_{Rjkr}O^{uns}_{Rkir}\right)
\end{aligned} \tag{C.8}
$$

$$
\begin{aligned}
F^{\tilde{u}}_{ijkr} &= 3\left(O^{nds}_{Rjkr}O^{dns}_{Lkir} + O^{nds}_{Ljkr}O^{dns}_{Rkir}\right) \\
G^{\tilde{u}}_{ijkr} &= 3\left(O^{nds}_{Ljkr}O^{dns}_{Lkir} + O^{nds}_{Rjkr}O^{dns}_{Rkir}\right)
\end{aligned} \tag{C.9}
$$

D. Neutrinofitroutine

Grundlage der Fitroutine ist das bereits in SPheno für das Modell mit spontan gebrochener R-Parität integrierte Verfahren. Zuerst sei an die auf Baumgraphenniveau erhaltene effektive Neutrinomassenmatrix

$$(m_{\text{eff.}})_{ij} = \underbrace{\frac{m_\gamma \eta^2}{4\mu \text{Det}\,(M_n)}}_{=a} \Lambda_i \Lambda_j \tag{D.1}$$

mit den in Abschnitt 4.3 definierten Größen erinnert. Die Einschleifen-korrigierte Variante schließlich ist von der Form

$$(m_{\text{eff.}L})_{ij} = a\Lambda_i\Lambda_j + b\,(\Lambda_i\epsilon_j + \epsilon_i\Lambda_j) + c\epsilon_i\epsilon_j \qquad . \tag{D.2}$$

Wie bereits erläutert erlaubt $m_{\text{eff.}L}$ einen Fit sowohl an atmosphärische wie solare Neutrinodaten und deckt damit die heutigen Neutrinokenntnisse vollständig ab. Hier werden mit Hilfe von $\vec{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)^T$ die atmosphärieschen Daten und mittels $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)^T$ die solaren Daten erfüllt werden. Erneut sei präsentiert, wie sich dann die neutrinorelevanten Winkel in guter Näherung ergeben

$$\tan^2\theta_{\text{R}} \approx \left(\frac{\Lambda_1}{\sqrt{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2}}\right)^2, \qquad \tan^2\theta_{\text{atm}} \approx \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3}\right)^2 \qquad \text{und} \qquad \tan^2\theta_{\text{sol}} \approx \left(\frac{\tilde{\epsilon}_1}{\tilde{\epsilon}_2}\right)^2 \quad , \tag{D.3}$$

wobei $\vec{\tilde{\epsilon}} = \mathcal{V}^T\vec{\epsilon}$ mit der Diagonalisierungsmatrix $\mathcal{V}^T$ gilt, welche die Neutrinomassenmatrix auf Baumgraphen-Niveau, also nur $(m_{\text{eff.}})_{ij} = a\Lambda_i\Lambda_j$ diagonalisiert und in Abschnitt 5.6 zu finden ist.
Für die nachfolgend angegebene Neutrinofitroutine bezeichne ω Zufallszahlen zwischen 0 und 1 und $(x, y) = x + \omega\,(y - x)$ damit eine zufällige Zahl aus dem Intervall $[x, y]$. Weiterhin seien gewisse Grenzen für die Neutrinodaten in der Form $\left(\tan^2\theta_{\text{atm,min}}, \tan^2\theta_{\text{atm,max}}\right)$ oder nur $\sin\theta_{\text{R,max}}$ vorgegeben. Der erste Fit der atmosphärischen Daten erfolgt durch:

$$\begin{aligned}
\Lambda_t &= \sqrt{\frac{1}{|a|}\sqrt{\left(m^2_{\text{atm,min}}, m^2_{\text{atm,max}}\right)}} \\
\Lambda_{f1} &= \sqrt{\omega\sin\theta_{\text{R,max}}}, \qquad \Lambda_{f2} = \sqrt{(\tan^2\theta_{\text{atm,min}}, \tan^2\theta_{\text{atm,max}})}, \qquad \Lambda_{f3} = 1 \\
\vec{\Lambda}_f &= \vec{\Lambda}_f\Lambda_t / \left|\vec{\Lambda}_f\right|
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Mit der Festlegung der Größen

$$\Lambda_{\mu\tau} = \sqrt{\Lambda_{f2}^2 + \Lambda_{f3}^2}$$

$$\tan^2\theta_{\text{sol}} = \left(\tan^2\theta_{\text{sol,min}}, \tan^2\theta_{\text{sol,max}}\right) \tag{D.5}$$

und der weiteren Berechnung von $\cos\theta_{\text{sol}}$, $\sin\theta_{\text{sol}}$ und $\sin(2\theta_{\text{sol}})$ sowie

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \cos\theta_{\text{sol}}\left(\Lambda_{f2} - \Lambda_{f3}\right)\Lambda_t + \Lambda_{f1}\left(\Lambda_{f2} - \Lambda_{f3}\right)\sin\theta_{\text{sol}} \\
Y_2 &= \Lambda_t^2 + \Lambda_{\mu\tau}^2\cos^2\theta_{\text{sol}} + \Lambda_{f1}\Lambda_t\sin(2\theta_{\text{sol}}) \\
Y_3 &= \Lambda_{\mu\tau}^2 - \Lambda_t^2\cos^2\theta_{\text{sol}} + \Lambda_{f1}^2\sin^2\theta_{\text{sol}} \\
Y_4 &= \Lambda_t^2 + \Lambda_{\mu\tau}^2\cos^2\theta_{\text{sol}} - \Lambda_{f1}\Lambda_t\sin(2\theta_{\text{sol}})
\end{aligned} \tag{D.6}$$

folgt unter Einführung der Zufallszahl $\epsilon^2 = 10^{-3-\omega}$ für den Fit an die solaren Daten:

$$\begin{aligned}
\tilde{\epsilon} &= \frac{\sqrt{\epsilon^2}Y_1}{\sqrt{\Lambda_{f2}^2 Y_2 + 2\Lambda_{f2}\Lambda_{f3}Y_3 + \Lambda_{f3}^2 Y_4}} \\
\tilde{\epsilon}_{f1} &= \frac{\tilde{\epsilon}\Lambda_{f1} + \sqrt{\epsilon^2 - \tilde{\epsilon}^2}\Lambda_{\mu\tau}\sin\theta_{\text{sol}}}{\Lambda_t} \\
\tilde{\epsilon}_{f2} &= \frac{\tilde{\epsilon}\Lambda_{f2}\Lambda_{\mu\tau} + \sqrt{\epsilon^2 - \tilde{\epsilon}^2}\left(\Lambda_{f3}\Lambda_t\cos\theta_{\text{sol}} - \Lambda_{f1}\Lambda_{f2}\sin\theta_{\text{sol}}\right)}{\Lambda_{\mu\tau}\Lambda_t} \\
\tilde{\epsilon}_{f3} &= -\tilde{\epsilon}_{f2}
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Der Aufwand mag etwas mächtig erscheinen, jedoch erfüllt dies die Vorzeichenbedingung

$$\frac{\tilde{\epsilon}_{f2}\Lambda_{f2}}{\tilde{\epsilon}_{f3}\Lambda_{f3}} < 0 \qquad , \tag{D.8}$$

welche die Konvergenzeigenschaften aufgrund der stärkeren Entkopplung des solaren und atmosphärischen Problems verbessert. Die weiteren Iterationen berücksichtigen schließlich die solare Massendifferenz. Dazu fließen $\vec{\Lambda}_f$ und $\vec{\tilde{\epsilon}}_f$ als bereits erhaltene Näherungen in der Form

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 &= \tilde{\epsilon}_{f1}^2 + \tilde{\epsilon}_{f2}^2 + \tilde{\epsilon}_{f3}^2, \qquad \Lambda_t^2 = \Lambda_{f1}^2 + \Lambda_{f2}^2 + \Lambda_{f3}^2 \\
m_{\text{sol}} &= \sqrt{\left(m_{\text{sol,min}}^2, m_{\text{sol,max}}^2\right)} \\
\epsilon^2 &= \epsilon^2\frac{m_{\text{sol}}}{m_2^{\mathcal{M}_{nL}}}, \qquad \Lambda_t^2 = \Lambda_t^2\left|\frac{m_3^{\mathcal{M}_n}}{m_3^{\mathcal{M}_{nL}}}\right|
\end{aligned} \tag{D.9}$$

ein. Der letzte Schritt dient der Erhaltung der richtigen Massenskala des atmosphärischen Problems und beinhaltet wiederum die Eigenwerte der Massenmatrix der neutralen Fermionen auf Baumgraphenniveau $m_i^{\mathcal{M}_n}$ sowie auf Einschleifenniveau $m_i^{\mathcal{M}_{nL}}$. Nun wird weiter verfahren wie unter (D.4), jedoch ohne Berechnung von Λ_t, und (D.5),(D.6) sowie (D.7) um anschließend wieder zu (D.9) überzugehen. In SPheno durchläuft diese Fitroutine gewöhnlich nur wenige Iterationen, bis sie Ergebnisse liefert, welche die Neutrinodaten erfüllen. Schließlich können aus Λ_{fi} und ϵ_{fi} die Vakuumerwartungswerte der linkshändigen Neutrinos v_i und die Yukawakopplungen $(Y_\nu)_i$ berechnet werden.

E. Verwendete Software

Nachfolgend wird die zur Anfertigung dieser Arbeit verwendete Software aufgeführt.
Frei verfügbare Software:

- Sämtliche numerischen Arbeiten sind mit dem in Fortran geschriebenen Programmpaket SPheno von Werner Porod [61] in einer auf dieses Modell zugeschnittenen Version erfolgt, welche auf der aktuellen Version 3.0.beta basiert. Diese ist unter
  http://theorie.physik.uni-wuerzburg.de/~porod/SPheno.html
  verfügbar. Die Auswertung erfolgte wechselseitig auf einem 32-Bit wie auf einem 64-Bit-Rechner unter dem Betriebssystm Linux, welche beide, bis auf numerische Unsauberkeiten, gleiche Ergebnisse lieferten.

- Die Textverarbeitung erfolgte mit LaTeX2ϵ unter Anwendung von Kile in der Version 1.9 oder 2.0. Weitere Informationen sind den nachfolgenden Websiten zu entnehmen:
  http://www.latex-project.org/
  http://kile.sourceforge.net/

- Sämtliche Feynmangraphen sind mit dem LaTeX-Packet feynmp basierend auf MetaPost von Thorsten Ohl angefertigt.

- Alle eigenen Darstellungen sind ohne Beschriftungen und Zusätze mit qtiplot erzeugt, welches frei unter
  http://soft.proindependent.com/qtiplot.html
  verfügbar ist.

- Eigene Abbildungen sind mit Hilfe von ipe nachbearbeitet. Ausgehend von Abbildungen im pdf-Format erlaubt ipe nach Ausführung von pdftoipe die Weiterverarbeitung und das Einfügen von LaTeX-Beschriftungen anhand einer graphischen Oberfläche. Weitere Informationen finden sich auf der Website:
  http://tclab.kaist.ac.kr/ipe/

- Abbildungen aus anderen Veröffentlichungen sind mit der frei verfügbaren Software PhotoFiltre nachbearbeitet, welche unter
  http://photofiltre.free.fr/
  erhältlich ist.

- Bei der Berechnung von Dreikörperzerfällen kam zu Überprüfungszwecken das Mathematica-Paket feyncalc zum Einsatz, welches in einfacher Notation die Berechnung von Übergangsamplituden gestattet. Dieses ist im Internet abrufbar unter:
  http://www.feyncalc.org/

Kommerzielle Software:

- Der ifort-Kompiler in der Version Intel® Fortran Compiler 10.1 diente der Kompilierung von SPheno und ist für nicht kommerzielle Nutzung nach Registrierung frei verfügbar.
- Mathematica wurde zumeist in der Version 6.0.1 im Rahmen der Lizenz des phyikalischen Instituts für zahlreiche einfachere und schwerere Rechnungen sowie zu einer primären Datenauswertung verwendet.

Abbildungsverzeichnis

2.1. Illustration des Potentials $V(\phi)$ zur spontanen Symmetriebrechung 4

2.2. Linke Hälfte: Erlaubter Bereich in der $\left(\sin^2\theta_{23}, m_{31}^2\right)$-Ebene vor (Linien) und nach (farbiger Bereich) Einfügen der neuesten MINOS Daten; Rechte Hälfte: Erlaubter Bereich in der $\left(\sin^2\theta_{12}, m_{21}^2\right)$-Ebene vor (Linien) und nach (farbiger Bereich) Einfügen der neuesten KamLAND Daten - (entnommen und nachbearbeitet aus [6](Figure D1)) 7

2.3. Linke Hälfte: $\Delta\chi^2$-Profil als Funktion von θ_{13} für verschiedene Datenauswertungen; Rechte Hälfte: 90% C.L. ("confidence level", Vertrauensbereich) für $\sin^2\theta_{13}$ (2 d.o.f.) aus der Kombination aller Neutrinodaten als Funktion von m_{31}^2 - (entnommen und nachbearbeitet aus [6](Figure D2)) 7

7.1. Illustration des Vorgehens bei Variante 2; Verwendete Werte $\lambda = 0,4$, $\kappa = 0,6$, $\tan\beta = 10$ und $v_c = \sqrt{2}\frac{200\text{GeV}}{\lambda} = 707\text{GeV}$ ($\mu = 200\text{GeV}$) 60

7.2. Linke Hälfte: 95% Vertrauensbereich (C.L.) Obergrenze S_{95} für den "Bjorken-Prozess" $e^+e^- \to Z^0 S_i^0$ in Abhängigkeit von der Skalarmasse $m_{\text{H1}} = m_{S_i^0}$, Annahme: Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls von S_i^0 entsprechen denen des Standardmodell-Higgs H, Rechte Hälte: 95% Vertrauensbereich (C.L.) Obergrenze S_{95} für den assoziierten Produktionsmechanismus $e^+e^- \to S_i^0 P_j^0$ in Abhängigkeit der Summe von Skalarmasse $m_{\text{H1}} = m_{S_i^0}$ und Pseudoskalarmasse $m_{\text{H2}} = m_{P_i^0}$, Annahme: Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls von S_i^0 und P_i^0 entsprechen denen des Standardmodell-Higgs H; Die durchgezogene Linie repräsentiert jeweils die beobachtete Grenze. Die grünen und gelben Bänder um den Median (gestrichelt) entsprechen den 68% und 95% Wahrscheinlichkeitsbändern (entnommen aus [57](Figure 2, Figure 4)) 64

8.1. $m_{\tilde{\nu}^c}^2$ in $\left(10^2\text{GeV}\right)^2$ gegen v_c in TeV 67

8.2. Linke Hälfte: T_λ in GeV gegen v_c in TeV; Rechte Hälfte: T_κ in GeV gegen v_c in TeV 67

8.3. Linke Hälfte: Vakuumerwartungswerte v_i in 10^{-3}GeV gegen v_c in TeV; Rechte Hälfte: Yukawakopplungen $(Y_\nu)_i / 10^6$ gegen v_c in TeV 68

8.4. Linke Hälfte: Massen der zwei leichtesten Skalare in GeV gegen v_c in TeV; Rechte Hälfte: Massen der zwei leichtesten Pseudoskalare in GeV gegen v_c in TeV 69

8.5. Massen der neutralen Fermionen in GeV gegen v_c in TeV; Der Singlet-artige Zustand ν^c ist hier durchgehend in Orange eingefärbt, so dass mit kleiner werdendem v_c letztlich auch der Übergang zu einem Singlet-artigen leichtesten Neutralino χ_1^0 deutlich wird. 69

8.6. Singlet-Charakter des leichtesten Skalars, Pseudoskalars und Neutralinos gegen v_c in TeV; Die blaue Linie deutet das nahezu plötzliche Auftreten des des Singlet-Charakters beim leichtesten Pseudoskalar an (vgl. hierzu auch Abbildung 8.13). . 70

8.7. Leichteste Skalarmasse in GeV gegen η_B^2 71

8.8. Zerfallsbreite des Zerfalls von S_1^0 in GeV gegen v_c in TeV 71
8.9. Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls von S_1^0 gegen v_c in TeV 72
8.10. Zerfallbreite des Zerfalls von χ_1^0 in GeV gegen v_c in TeV 73
8.11. Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls von χ_1^0 gegen v_c in TeV für $\kappa = 0,015$, Umstellung der Tadpolegleichungen nach Variante 2 74
8.12. Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls von χ_1^0 gegen v_c in TeV bei Berücksichtigung der Zerfälle von S_1^0 und P_1^0 für $\kappa = 0,015$, Umstellung der Tadpolegleichungen nach Variante 2 74
8.13. Singlet-Charakter des leichtesten Skalars, Pseudoskalars und Neutralinos gegen κ; Die blaue Linie deutet das nahezu plötzliche Auftreten des des Singlet-Charakters beim leichtesten Pseudoskalar an. 76
8.14. Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls von χ_1^0 gegen κ für $\lambda = 0,025$ ($v_c = 11,31$TeV), Umstellung der Tadpolegleichungen nach Variante 2 76
8.15. Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls von χ_1^0 gegen κ unter Berücksichtigung der Zerfälle von S_1^0 und P_1^0 für $\lambda = 0,025$ ($v_c = 11,31$TeV), Umstellung der Tadpolegleichungen nach Variante 2 77
8.16. Linke Hälfte: T_λ in GeV gegen v_c in TeV; Rechte Hälfte: T_κ in TeV gegen v_c in TeV 78
8.17. Linke Hälfte: Vakuumerwartungswerte v_i in 10^{-3}GeV gegen v_c in TeV; Rechte Hälfte: Yukawakopplungen $(Y_\nu)_i / 10^6$ gegen v_c in TeV 78
8.18. Massen der neutrale Fermionen in TeV gegen v_c in TeV; Der Singlet-artige Zustand ν^c ist erneut durchgehend in Orange eingefärbt. 79
8.19. Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls von χ_1^0 gegen v_c in TeV für $\kappa = 0,5$, Umstellung der Tadpolegleichungen nach Variante 1 80
8.20. Linke Hälfte: Zusammenhang zwischen $\tan^2\theta_{\rm atm}$ und $|\Lambda_2/\Lambda_3|^2$; Rechte Hälfte: Zusammenhang zwischen $\tan^2\theta_{\rm sol}$ und $|\epsilon_1/\epsilon_2|^2$ 81
8.21. $\mathrm{BR}(\chi_1^0 \to W^\pm, \mu^\mp)/\mathrm{BR}(\chi_1^0 \to W^\pm, \tau^\mp)$ gegen $|\Lambda_2/\Lambda_3|^2$ 82
8.22. $\mathrm{BR}(\chi_1^0 \to W^\pm, \mu^\mp)/\mathrm{BR}(\chi_1^0 \to W^\pm, \tau^\mp)$ gegen $\tan^2\theta_{\rm atm}$ 83
8.23. Darstellung von Abhängigkeiten der Zerfälle $\chi_1^0 \to l_j^\pm, \tau^\mp, \nu_i$ vom solaren Winkel $\tan^2\theta_{\rm sol}$ 83

Literaturverzeichnis

[1] M. E. Peskin, *An Introduction to Quantum Field Theory*, HarperCollins Publishers, 1995.

[2] S. P. Martin, *A supersymmetry primer*, (1997, 2006), hep-ph/9709356.

[3] B. C. Allanach et al., *The Snowmass points and slopes: Benchmarks for SUSY searches*, (2002), hep-ph/0202233.

[4] F. Mandl and G. Shaw, *Quantenfeldtheorie*, Aula Verlag, 1993.

[5] O. Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Verlag Vieweg, 1986.

[6] M. Maltoni, T. Schwetz, M. A. Tortola and J. W. F. Valle, *Status of global fits to neutrino oscillations*, New J. Phys. **6**, 122 (2004, Update 2007), hep-ph/0405172.

[7] R. Davis, *A review of the Homestake solar neutrino experiment*, Prog. Part. Nucl. Phys. **32**, 13–32 (1994).

B. T. Cleveland et al., *Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector*, Astrophys. J. **496**, 505–526 (1998).

J. N. Abdurashitov et al. (SAGE Collaboration), *Measurement of the solar neutrino capture rate with gallium metal*, Phys. Rev. **C60**, 055801 (1999), astro-ph/9907113.

C. M. Cattadori (GNO Collaboration), *Update of solar neutrino interaction rate measurements from GNO at LNGS*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **110**, 311–314 (2002).

W. Hampel et al. (GALLEX Collaboration), *GALLEX solar neutrino observations: Results for GALLEX IV*, Phys. Lett. **B447**, 127–133 (1999).

M. Altmann et al. (GNO Collaboration), *GNO solar neutrino observations: Results for GNO I*, Phys. Lett. **B490**, 16–26 (2000), hep-ex/0006034.

S. Fukuda et al. (Super-Kamiokande Collaboration), *Determination of solar neutrino oscillation parameters using 1496 days of Super-Kamiokande-I data*, Phys. Lett. **B539**, 179–187 (2002), hep-ex/0205075.

Q. R. Ahmad et al. (SNO Collaboration), *Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*, Phys. Rev. Lett. **89**, 011301 (2002), nucl-ex/0204008.

Q. R. Ahmad et al. (SNO Collaboration), *Measurement of day and night neutrino energy spectra at SNO and constraints on neutrino mixing parameters*, Phys. Rev. Lett. **89**, 011302 (2002), nucl-ex/0204009.

S. N. Ahmed et al. (SNO Collaboration), *Measurement of the total active B-8 solar neutrino flux at the Sudbury Neutrino Observatory with enhanced neutral current sensitivity*, Phys. Rev. Lett. **92**, 181301 (2004), nucl-ex/0309004.

[8] Y. Fukuda et al. (Super-Kamiokande Collaboration), *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1562–1567 (1998), hep-ex/9807003.

G. Giacomelli and A. Margiotta (MACRO Collaboration), *New MACRO results on atmospheric neutrino oscillations*, Phys. Atom. Nucl. **67**, 1139–1146 (2004), hep-ex/0407023.

M. C. Sanchez et al. (Soudan 2 Collaboration), *Observation of atmospheric neutrino oscillations in Soudan 2*, Phys. Rev. **D68**, 113004 (2003), hep-ex/0307069.

[9] W.-M. Y. et al., *Review of Particle Physics*, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics **33**(1), 1–1232 (2006).

[10] K. Eguchi et al. (KamLAND Collaboration), *First results from KamLAND: Evidence for reactor anti- neutrino disappearance*, Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (2003), hep-ex/0212021.

T. Araki et al. (KamLAND Collaboration), *Measurement of neutrino oscillation with KamLAND: Evidence of spectral distortion*, Phys. Rev. Lett. **94**, 081801 (2005), hep-ex/0406035.

[11] J. Schechter and J. W. F. Valle, *Neutrino Oscillation Thought Experiment*, Phys. Rev. **D23**, 1666 (1981).

J. F. Nieves and P. B. Pal, *Rephasing-invariant CP violating parameters with Majorana neutrinos*, Phys. Rev. **D64**, 076005 (2001), hep-ph/0105305.

A. de Gouvea, B. Kayser and R. N. Mohapatra, *Manifest CP violation from Majorana phases*, Phys. Rev. **D67**, 053004 (2003), hep-ph/0211394.

[12] *Preliminary Results from MINOS on Muon Neutrino Disappearance Based on an Exposure of 2.5 x* 10^{20} *120- GeV Protons on the NuMI Target*, (2007), arXiv:0708.1495.

[13] P. Minkowski, *mu* $\rightarrow$ *e gamma at a Rate of One Out of 1-Billion Muon Decays?*, Phys. Lett. **B67**, 421 (1977).

T. Yanagida, Prog. Theor. Phys. B **135**, 66 (1978).

M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, *in Supergravity: Proceedings of the Supergravity Workshop at Stony Brook, New York*, (1979, September 27-29).

[14] G. Brooijmans, *A New Limit On Neutrino-Oscillations*, PhD thesis, Université catholique de Louvain, Louvain, Belgium, 1998.

[15] I. J. R. Aitchison, *Supersymmetry and the MSSM: An elementary introduction*, (2005), hep-ph/0505105.

[16] R. Haag, J. T. Lopuszanski and M. Sohnius, *All Possible Generators of Supersymmetries of the s Matrix*, Nucl. Phys. **B88**, 257 (1975).

[17] S. Coleman and J. Mandula, *All Possible Symmetries of the S Matrix*, Phys. Rev. **159**(5), 1251–1256 (Jul 1967).

[18] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Rocek and W. Siegel, *Superspace, or one thousand and one lessons in supersymmetry*, Front. Phys. **58**, 1–548 (1983), hep-th/0108200.

[19] J. Wess and B. Zumino, *Supergauge Transformations in Four-Dimensions*, Nucl. Phys. **B70**, 39–50 (1974).

[20] M. Kuroda, *Complete Lagrangian of MSSM*, (1999), hep-ph/9902340.

[21] J. Rosiek, *Complete set of Feynman rules for the MSSM – ERRATUM*, (1995), hep-ph/9511250.

[22] S. Dimopoulos and D. W. Sutter, *The Supersymmetric flavor problem*, Nucl. Phys. **B452**, 496–512 (1995), hep-ph/9504415.

[23] H. P. Nilles, *Dynamically Broken Supergravity and the Hierarchy Problem*, Phys. Lett. **B115**, 193 (1982).

H. P. Nilles, *Supergravity Generates Hierarchies*, Nucl. Phys. **B217**, 366 (1983).

A. H. Chamseddine, R. Arnowitt and P. Nath, *Locally Supersymmetric Grand Unification*, Phys. Rev. Lett. **49**, 970 (1982).

R. Barbieri, S. Ferrara and C. A. Savoy, *Gauge Models with Spontaneously Broken Local Supersymmetry*, Phys. Lett. **B119**, 343 (1982).

[24] G. F. Giudice and R. Rattazzi, *Theories with gauge-mediated supersymmetry breaking*, Phys. Rept. **322**, 419–499 (1999), hep-ph/9801271.

[25] L. Randall and R. Sundrum, *Out of this world supersymmetry breaking*, Nucl. Phys. **B557**, 79–118 (1999), hep-th/9810155.

G. F. Giudice, M. A. Luty, H. Murayama and R. Rattazzi, *Gaugino mass without singlets*, JHEP **12**, 027 (1998), hep-ph/9810442.

[26] C. Munoz, *SUSY: New perspectives and variants*, (2007), arXiv:0705.2007.

[27] G. R. Farrar and P. Fayet, *Phenomenology of the Production, Decay, and Detection of New Hadronic States Associated with Supersymmetry*, Phys. Lett. **B76**, 575–579 (1978).

S. Weinberg, *Supersymmetry at Ordinary Energies. 1. Masses and Conservation Laws*, Phys. Rev. **D26**, 287 (1982).

N. Sakai and T. Yanagida, *Proton Decay in a Class of Supersymmetric Grand Unified Models*, Nucl. Phys. **B197**, 533 (1982).

[28] L. E. Ibanez and G. G. Ross, *Discrete gauge symmetries and the origin of baryon and lepton number conservation in supersymmetric versions of the standard model*, Nucl. Phys. **B368**, 3–37 (1992).

H. K. Dreiner, C. Luhn and M. Thormeier, *What is the discrete gauge symmetry of the MSSM?*, Phys. Rev. **D73**, 075007 (2006), hep-ph/0512163.

[29] J. Hisano, T. Moroi, K. Tobe, M. Yamaguchi and T. Yanagida, *Lepton flavor violation in the supersymmetric standard model with seesaw induced neutrino masses*, Phys. Lett. **B357**, 579–587 (1995), hep-ph/9501407.

J. Hisano, T. Moroi, K. Tobe and M. Yamaguchi, *Lepton-Flavor Violation via Right-Handed Neutrino Yukawa Couplings in Supersymmetric Standard Model*, Phys. Rev. **D53**, 2442–2459 (1996), hep-ph/9510309.

Y. Grossman and H. E. Haber, *Sneutrino mixing phenomena*, Phys. Rev. Lett. **78**, 3438–3441 (1997), hep-ph/9702421.

[30] R. D. Peccei and H. R. Quinn, *CP Conservation in the Presence of Instantons*, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440–1443 (1977).

[31] J. A. Casas and C. Munoz, *A Natural solution to the mu problem*, Phys. Lett. **B306**, 288–294 (1993), hep-ph/9302227.

[32] J. R. Ellis et al., *PROBLEMS FOR (2,0) COMPACTIFICATIONS*, Phys. Lett. **B176**, 403 (1986).

B. Rai and G. Senjanovic, *Gravity and domain wall problem*, Phys. Rev. **D49**, 2729–2733 (1994), hep-ph/9301240.

[33] S. A. Abel, *Destabilising divergences in the NMSSM*, Nucl. Phys. **B480**, 55–72 (1996), hep-ph/9609323.

C. Panagiotakopoulos and K. Tamvakis, *Stabilized NMSSM without domain walls*, Phys. Lett. **B446**, 224–227 (1999), hep-ph/9809475.

[34] S. A. Abel, S. Sarkar and P. L. White, *On the cosmological domain wall problem for the minimally extended supersymmetric standard model*, Nucl. Phys. **B454**, 663–684 (1995), hep-ph/9506359.

[35] V. Barger, P. Langacker and H.-S. Lee, *Properties of the lightest neutralino in MSSM extensions*, AIP Conf. Proc. **805**, 306–309 (2006), hep-ph/0509112.

[36] M. Hirsch and W. Porod, *R-parity violation: Hide and seek*, Phys. Rev. **D74**, 055003 (2006), hep-ph/0606061.

[37] D. E. Lopez-Fogliani and C. Munoz, *Proposal for a new minimal supersymmetric standard model*, Phys. Rev. Lett. **97**, 041801 (2006), hep-ph/0508297.

[38] S. Borgani, A. Masiero and M. Yamaguchi, *Light gravitinos as mixed dark matter*, Phys. Lett. **B386**, 189–197 (1996), hep-ph/9605222.

F. Takayama and M. Yamaguchi, *Gravitino dark matter without R-parity*, Phys. Lett. **B485**, 388–392 (2000), hep-ph/0005214.

M. Hirsch, W. Porod and D. Restrepo, *Collider signals of gravitino dark matter in bilinearly broken R-parity*, JHEP **03**, 062 (2005), hep-ph/0503059.

[39] J. E. Kim, Phys. Rept. **150**, 1 (1987).

G. G. Raffelt, *Stars as Laboratories for Fundamental Physics*, page 664 (1996).

[40] E. J. Chun and H. B. Kim, *Nonthermal axino as cool dark matter in supersymmetric standard model without R-parity*, Phys. Rev. **D60**, 095006 (1999), hep-ph/9906392.

[41] U. Wegner and J. Wellstein, *Bemerkungen zur Transformation von komplexen symmetrischen Matrizen*, Monatshefte für Mathematik **40**(1), 319–322 (1932).

[42] M. Hirsch and J. W. F. Valle, *Neutrinoless double beta decay in supersymmetry with bilinear R-parity breaking*, Nucl. Phys. **B557**, 60–78 (1999), hep-ph/9812463.

[43] A. Santamaria and J. W. F. Valle, *Spontaneous R-Parity Violation in Supersymmetry: A Model for Solar Neutrino Oscillations*, Phys. Lett. **B195**, 423 (1987).

[44] M. Hirsch, M. A. Diaz, W. Porod, J. C. Romao and J. W. F. Valle, *Neutrino masses and mixings from supersymmetry with bilinear R-parity violation: A theory for solar and atmospheric neutrino oscillations*, Phys. Rev. **D62**, 113008 (2000), hep-ph/0004115.

[45] J. C. Romao, *Modern Technique for One-Loop Calculations*, (2004).

T. Binoth, *Übungen zu Strahlungskorrekturen in Eichtheorien, Herbstschule Maria Laach*, (2004), maria-laach.physik.uni-siegen.de/2004/Folien/Binoth/binoth.ps.

[46] H. Eberl, *Strahlungskorrekturen im minimalen supersymmetrischen Standardmodell*, PhD thesis, Technische Universität Wien, Wien, Austria, 1998.

[47] K. G. Wilson, *CONFINEMENT OF QUARKS*, Phys. Rev. **D10**, 2445–2459 (1974).

J. B. Kogut, *The lattice gauge theory approach to quantum chromodynamics*, Rev. Mod. Phys. **55**(3), 775–836 (Jul 1983).

[48] W. Pauli and F. Villars, *On the Invariant regularization in relativistic quantum theory*, Rev. Mod. Phys. **21**, 434–444 (1949).

[49] W. Siegel, *Supersymmetric Dimensional Regularization via Dimensional Reduction*, Phys. Lett. **B84**, 193 (1979).

[50] D. M. Capper, D. R. T. Jones and P. van Nieuwenhuizen, *Regularization by Dimensional Reduction of Supersymmetric and Nonsupersymmetric Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B167**, 479 (1980).

I. Antoniadis, C. Kounnas and K. Tamvakis, *SIMPLE TREATMENT OF THRESHOLD EFFECTS*, Phys. Lett. **B119**, 377–380 (1982).

I. Jack, D. R. T. Jones, S. P. Martin, M. T. Vaughn and Y. Yamada, *Decoupling of the epsilon scalar mass in softly broken supersymmetry*, Phys. Rev. **D50**, 5481–5483 (1994), hep-ph/9407291.

[51] G. Passarino and M. J. G. Veltman, *One Loop Corrections for e+ e- Annihilation Into mu+ mu- in the Weinberg Model*, Nucl. Phys. **B160**, 151 (1979).

[52] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Scalar One Loop Integrals*, Nucl. Phys. **B153**, 365–401 (1979).

[53] A. Denner, *Techniques for calculation of electroweak radiative corrections at the one loop level and results for W physics at LEP-200*, Fortschr. Phys. **41**, 307–420 (1993), arXiv:0709.1075.

[54] K. G. Wilson, *Nonlagrangian models of current algebra*, Phys. Rev. **179**, 1499–1512 (1969).

J. Callan, Curtis G. and D. J. Gross, *High-energy electroproduction and the constitution of the electric current*, Phys. Rev. Lett. **22**, 156–159 (1969).

D. J. Gross and F. Wilczek, *ULTRAVIOLET BEHAVIOR OF NON-ABELIAN GAUGE THEORIES*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343–1346 (1973).

K. G. Wilson and J. Kogut, *The renormalization group and the ϵ expansion*, Phys. Rep. **12**, 75–199 (August 1974).

[55] J. Callan, Curtis G., *Broken scale invariance in scalar field theory*, Phys. Rev. **D2**, 1541–1547 (1970).

K. Symanzik, *Small distance behavior in field theory and power counting*, Commun. Math. Phys. **18**, 227–246 (1970).

[56] M. Hirsch, A. Vicente and W. Porod, *Spontaneous R-parity violation: Lightest neutralino decays and neutrino mixing angles at future colliders*, Phys. Rev. **D77**, 075005 (2008), arXiv:0802.2896.

[57] S. Schael et al. (ALEPH Collaboration), *Search for neutral MSSM Higgs bosons at LEP*, Eur. Phys. J. **C47**, 547–587 (2006), hep-ex/0602042.

[58] M. Hirsch, J. C. Romao, J. W. F. Valle and A. Villanova del Moral, *Production and decays of supersymmetric Higgs bosons in spontaneously broken R-parity*, Phys. Rev. **D73**, 055007 (2006), hep-ph/0512257.

[59] E. Accomando et al. (ECFA/DESY LC Physics Working Group Collaboration), *Physics with e+ e- linear colliders*, Phys. Rept. **299**, 1–78 (1998), hep-ph/9705442.

[60] G. Pocsik and G. Zsigmond, *ON THE PRODUCTION OF NEUTRAL HIGGS BOSONS IN THE WEINBERG- SALAM MODEL WITH TWO HIGGS DOUBLETS*, Zeit. Phys. **C10**, 367 (1981).

[61] W. Porod, *SPheno, a program for calculating supersymmetric spectra, SUSY particle decays and SUSY particle production at e+ e- colliders*, Comput. Phys. Commun. **153**, 275–315 (2003), hep-ph/0301101.

[62] J. A. Aguilar-Saavedra et al., *Supersymmetry parameter analysis: SPA convention and project*, Eur. Phys. J. **C46**, 43–60 (2006), hep-ph/0511344.

[63] W. Porod, M. Hirsch, J. Romao and J. W. F. Valle, *Testing neutrino mixing at future collider experiments*, Phys. Rev. **D63**, 115004 (2001), hep-ph/0011248.

Erklärung zur Anfertigung der Diplomarbeit

Ich erkläre hiermit, dass ich die Diplomarbeit selbstständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Ort, Datum	Name