Berechnung von Strahlungskorrekturen zum Prozeß $Z + Z \to Z + Z$ im elektroschwachen Standardmodell

Diplomarbeit von Thomas Hahn

Themenstellung von Prof. Dr. M. Böhm

Institut für Theoretische Physik
Julius-Maximilians-Universität Würzburg

August 1995

Inhalt

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Diplomarbeit wird der Wirkungsquerschnitt für Streuung von Z-Bosonen im elektroschwachen Standardmodell auf Einschleifen-Niveau berechnet.

Experimentelle Informationen werden in der Hochenergiephysik praktisch ausschließlich aus Streuexperimenten gewonnen. Die Berechnung des Wirkungsquerschnittes aus der Theorie schlägt also die Brücke zum Experiment. Nun ist das Standardmodell, auf dem die Rechnungen in dieser Arbeit basieren, eine Theorie, die einerseits mit den bisherigen Meßergebnissen bestens übereinstimmt, andererseits aber auch Vorhersagen macht, die es experimentell zu überprüfen gilt. Mit LEP1, dem Elektron–Positron-Speicherring am CERN in Genf, ist die Tür zur Physik der Z-Bosonen aufgestossen worden. Man hat Masse und Lebensdauer des Z mit hoher Genauigkeit bestimmt ($M_Z = 91.1887 \pm 0.0022$ GeV, $\Gamma_Z = 2.4971 \pm 0.0032$ GeV) [1] und kennt alle wichtigen Zerfallskanäle. Die heutige Beschleunigergeneration ist aber noch nicht in der Lage, die schweren Eichbosonen des Standardmodells, Z und $W^{\pm}$, aneinander zu streuen, um daraus Aufschlüsse über diese Teilchen und ihre Kopplungen an andere Teilchen zu bekommen.

Ein zukünftiges Experiment, mit dem man Eichbosonstreuung durchführen könnte, wäre denkbar an einem Proton–Proton-Speicherring (z.B. der am CERN geplante LHC = Large Hadron Collider). Nach dem Parton-Modell sind im Proton neben den Quarks noch andere Elementarteilchen, darunter auch Z's, enthalten. Z-Streuung würde deshalb in einem solchen Speicherring stattfinden, wie im Abbildung 1.1 dargestellt.

Die Arbeit gliedert sich in drei Teile. In Kapitel 2 wird das Standardmodell erklärt, das die theoretische Grundlage für die Berechnung der Strahlungskor-

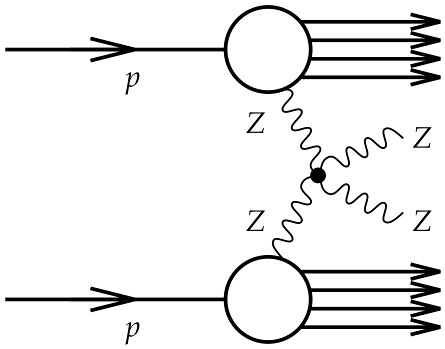


Abbildung 1.1: Schematische Vorstellung von Z-Streuung in einem Proton–Proton-Speicherring.

rekturen ist. Kapitel 3 stellt das Handwerkszeug für die Rechnung bereit, und Kapitel 4 präsentiert schließlich die Ergebnisse.

Kapitel 2

Das Standardmodell

Das Glashow–Salam–Weinberg-Modell [5] ist die derzeit erfolgreichste Quantenfeldtheorie der elektroschwachen Wechselwirkung. Alle bisher durchgeführten Experimente stehen in Einklang mit diesem Modell, deswegen wird es auch Standardmodell (SM) genannt. Das SM ist gründlich in der Literatur beschrieben (z.B. [3, 2]), deshalb soll in der folgenden Darstellung mehr Wert auf das Bauprinzip als auf Details gelegt werden.

2.1 Konstruktionsprinzip einer Eichtheorie

Das Standardmodell ist eine Eichtheorie. Das Prinzip des Eichens einer Symmetrie wurde zuerst von E. Noether erkannt und in seiner heutigen Form um 1920 von H. Weyl mathematisch formuliert. 1954 waren C.N. Yang und R.L. Mills [4] die ersten, die dieses Prinzip auf nichtabelsche Symmetrien anwandten.

Die Idee dabei ist, eine Lagrangedichte so zu erweitern, daß Symmetrien, die ein System global besitzt, auch lokal gelten. Ist eine Lagrangedichte unter der Transformation des Feldes ψ,

$$\psi_i(x) \to \psi_i^\Omega(x) = \Omega_{ij}\psi_j(x) \quad \text{mit} \quad \Omega = e^{-i\theta^a\tau^a}\,, \tag{2.1}$$

invariant (die τ^a sind die Generatoren der Symmetriegruppe), so soll dies auch dann noch gelten, wenn der Parameter θ^a vom Ort abhängt. Die Transformation (2.1) nennt man Eichtransformation – im einfachsten Fall einer abelschen Eichgruppe wie in der QED ist es eine reine Phasentransformation.

Wenn die Eichtransformation vom Ort abhängt, erzeugen die Ableitungen, die in der Lagrangedichte vorkommen, Zusatzterme und sind somit nicht eichinvariant:

$$\partial_\mu \Omega \psi = \Omega \partial_\mu \psi + \boxed{(\partial_\mu \Omega)\, \psi} . \tag{2.2}$$

Die Eichtheorie postuliert aber, daß physikalische Größen immer eichinvariant sein müssen, also nicht von der Wahl der Eichung abhängen dürfen.

Um die Eichinvarianz der Lagrangedichte wiederherzustellen, konstruiert man einen neuen Ableitungs-Operator D_μ, der als kovariante Ableitung bezeichnet wird. Er ist definiert durch

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \quad \text{mit} \quad A_\mu \equiv A_\mu^a(x)\tau^a \, . \tag{2.3}$$

Der Parameter g wird später als Kopplungskonstante identifiziert. Das neue Feld A_μ heißt Eichfeld und seine Aufgabe ist es, den Zusatzterm zu kompensieren. Um dies zu erreichen, muß A_μ wie

$$A_\mu^\Omega = -\frac{i}{g}\,(\partial_\mu \Omega)\,\Omega^{-1} + \Omega A_\mu \Omega^{-1} \tag{2.4}$$

transformieren. Mit dem Eichfeld hat man die lokale Symmetrie wiedergewonnen, denn es gilt

$$D_\mu \Omega_{ij}\psi_j = \Omega_{ij}\partial_\mu \psi_j + (\partial_\mu \Omega_{ij})\,\psi_j - igA_\mu^\Omega \Omega_{ij}\psi_j = \Omega_{ij} D_\mu \psi_j \, . \tag{2.5}$$

Die Eichtheorie geht noch einen Schritt weiter und postuliert, daß A_μ selbst ein dynamisches Feld ist. Dazu wird zur Lagrangedichte ein Term addiert, der die Dynamik des Eichfelds beschreibt und dabei selbst eichinvariant ist. Zunächst wird der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ benötigt:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\equiv \tfrac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \\ &= \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c\right)\tau^a \;\equiv\; F_{\mu\nu}^a \tau^a \, . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Die f^{abc} bezeichnen die Strukturkonstanten der Symmetriegruppe und sind durch $[\tau^a, \tau^b] = i f^{abc}\tau^c$ definiert. Aus dem Feldstärketensor konstruiert man

$$\mathcal{L}_{\mathrm{YM}} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \, . \tag{2.7}$$

Dieser Term ist eichinvariant, weil wegen der Zyklizität der Spur gilt

$$\mathrm{Tr}\left(\Omega F_{\mu\nu}\Omega^{-1}\Omega F^{\mu\nu}\Omega^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \, . \tag{2.8}$$

2.2 Das elektroschwache Standardmodell

Im Standardmodell gibt es folgende Elementarteilchen:

	Fermionen				Bosonen			
	Leptonen		Quarks		Eichbosonen			Higgs-Boson
	e	ν_e	u	d	γ	Z	$W^\pm$	H
	μ	ν_μ	c	s				
	τ	ν_τ	t	b				
Ladung	-1	0	$2/3$	$-1/3$	0	0	± 1	0
Spin	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	1	1	0

Mit Ausnahme des Higgs-Bosons sind alle Teilchen – inzwischen auch das Top-Quark – experimentell gesichert.

Die Eichgruppe des SM ist $SU(2)_\mathrm{W} \times U(1)_\mathrm{Y}$, das ist die minimale Eichgruppe für eine Theorie mit vier Eichbosonen. Die klassische (nichtquantisierte) Lagrangedichte des SM besteht aus drei Teilen:

$$\mathcal{L}_\mathrm{C} = \mathcal{L}_\mathrm{YM} + \mathcal{L}_\mathrm{H} + \mathcal{L}_\mathrm{F}\,. \tag{2.9}$$

Der Eichanteil der Lagrangedichte lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mathrm{YM} &= -\tfrac{1}{4}\left(\partial^\mu W_a^\nu - \partial^\nu W_a^\mu + g_2\,\epsilon_{abc}\,W_b^\mu W_c^\nu\right)^2 \\ &\quad -\tfrac{1}{4}\left(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu\right)^2\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

wobei in der ersten Zeile der $SU(2)$-Anteil mit der Kopplungskonstante g_2 und in der zweiten Zeile der $U(1)$-Anteil mit der Kopplungskonstante g_1 steht (die hier nicht direkt sichtbar ist, weil es sich bei der $U(1)$ um eine abelsche Eichgruppe handelt). Entsprechend hat auch die kovariante Ableitung einen $SU(2)$- und einen $U(1)$-Term,

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2 I_\mathrm{W}^a W_\mu^a + ig_1 \frac{Y_\mathrm{W}}{2} B_\mu\,. \tag{2.11}$$

Dabei ist Y_W der Generator der schwachen Hyperladung, und die drei I_W^a sind die Generatoren des schwachen Isospins.

Der Index "H" am zweiten Term in $\mathcal{L}_{\rm C}$ steht für "Higgs-Anteil." Dieser hat die Gestalt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\rm H} &= \tfrac{1}{2}(D_\mu \Phi^\dagger)(D^\mu \Phi) - V[\Phi] \\
V[\Phi] &= \tfrac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger \Phi)^2 - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi, \qquad \mu^2, \lambda > 0,
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Das Higgs-Feld Φ wird durch ein skalares $SU(2)$-Dublett beschrieben. Der Higgs-Term hat eine wichtige Funktion: wie im nächsten Abschnitt erläutert wird, erzeugt er Massenterme für die Felder in $\mathcal{L}_{\rm C}$.

Fermionen besitzen einen links- und einen rechtshändigen Anteil. Die Chiralitätsprojektoren ω_- und ω_+ projizieren diese aus den Dirac-Spinoren heraus:

$$
f^L = \omega_- f \quad \text{und} \quad f^R = \omega_+ f \quad \text{mit} \quad \omega_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}\,. \tag{2.13}
$$

Aus dem Fermi-Modell weiß man, daß die links- und rechtshändigen Fermionen unterschiedlich wechselwirken. Die linkshändigen Anteile transformieren wie $SU(2)$-Dubletts und die rechtshändigen wie $SU(2)$-Singuletts,

$$
L_i^L = \begin{pmatrix} \nu_i^L \\ l_i^L \end{pmatrix}, \quad Q_i^L = \begin{pmatrix} u_i^L \\ d_i^L \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad l_i^R, \;\; u_i^R, \;\; d_i^R. \tag{2.14}
$$

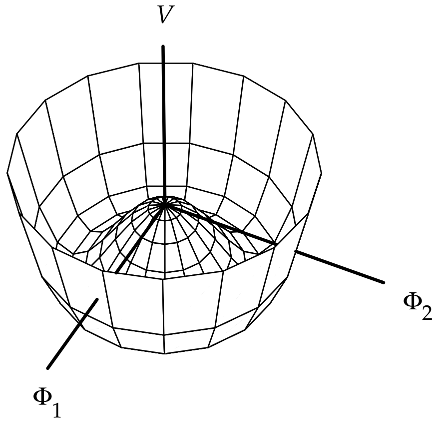
Der fermionische Teil der Lagrangedichte besteht aus dem Dirac-Anteil und Yukawa-Kopplungen an das Higgs-Feld Φ (wie üblich ist $\not{D} \equiv \gamma_\mu D^\mu$):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\rm F} &= \sum_i \left(\bar{L}_i^L i\not{D} L_i^L + \bar{Q}_i^L i\not{D} Q_i^L + \bar{l}_i^R i\not{D} l_i^R + \bar{u}_i^R i\not{D} u_i^R + \bar{d}_i^R i\not{D} d_i^R \right) \\
&\quad - \sum_{ij} \left(\bar{L}_i^L G_{ij}^l l_j^R \Phi + \bar{Q}_i^L G_{ij}^u u_j^R \Phi + \bar{Q}_i^L G_{ij}^d d_j^R \Phi + \text{H.c.} \right)
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

2.2.1 Massen durch Symmetriebrechung

Bislang sind alle Felder in $\mathcal{L}_{\rm C}$ masselos und dies entspricht nicht der Wirklichkeit. Addiert man Massenterme zu $\mathcal{L}_{\rm C}$, so ist dadurch die Eichinvarianz und die Renormierbarkeit verletzt. Dies ist aber gar nicht nötig, denn ein Feld kann vermöge des Higgs–Kibble-Mechanismus [6] durch eine spontan gebrochene Symmetrie Masse erhalten. Im Fall des SM wird die $SU(2)_{\rm W} \times U(1)_{\rm Y}$-Symmetrie auf $U(1)_{\rm em}$ heruntergebrochen.

Im folgenden Bild ist das skalare Potential $V[\Phi]$ skizziert, das für ein Isospin-Dublett sichtlich nicht nur ein Minimum, sondern kontinuierlich viele Minima besitzt, die alle auf einem Kreis im Isospin-Raum liegen:



Die Symmetriebrechung besteht darin, eine Richtung im Isospin-Raum auszuzeichnen, d.h. aus den vielen gleichberechtigten Grundzuständen einen auszuwählen,

$$\langle 0|\,\Phi\,|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{v}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}}\,. \tag{2.16}$$

Dieses Vakuum ist noch unter einer elektromagnetischen Eichtransformation invariant, da der Ladungsoperator

$$Q = I_{\rm W}^3 + \frac{Y_{\rm W}}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

nicht auf die untere Komponente in Φ wirkt.

Für Φ macht man den Ansatz

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left[v + H(x) + i\chi(x)\right] \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

und erhält durch Einsetzen in $V[\Phi]$

$$\mu^2 H^2 + \text{höhere Terme}, \tag{2.19}$$

also eine Masse $M_H = \sqrt{2}\,\mu$ für das Higgs-Feld. Die linearen Terme fallen zwangsläufig heraus, weil um das Minimum herum entwickelt wurde. Die höheren (tri-, quadrilinearen) Terme beschreiben Wechselwirkungen zwischen ϕ, H und χ.

Setzt man Φ in den kinetischen Teil des Higgs-Lagrangians, $\frac{1}{2}(D_\mu\Phi^\dagger)(D^\mu\Phi)$, ein, so erhält man neben Mischungstermen zwischen skalaren Feldern und Eichfeldern Massenterme für die Eichfelder, nämlich

$$\frac{1}{2}\frac{g_2^2 v^2}{4} W_1^\mu W_{1,\mu} + \frac{1}{2}\frac{g_2^2 v^2}{4} W_2^\mu W_{2,\mu} \tag{2.20}$$

und

$$\frac{1}{2}\frac{v^2}{4}\left(W_{3,\mu}, B_\mu\right) \begin{pmatrix} g_1^2 & g_1 g_2 \\ g_1 g_2 & g_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3^\mu \\ B^\mu \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Da die Felder W_3 und B nicht diagonal in der Masse sind, physikalische Felder aber eine definierte Masse haben sollen, wählt man die physikalischen Felder zu

$$\begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3 \\ B \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

wobei θ_W der Weinberg-Winkel ist mit

$$\cos\theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \qquad e = g_2 \sin\theta_W\,. \tag{2.23}$$

Die Felder W_1 und W_2 werden zu Ladungseigenzuständen kombiniert,

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W_1 \pm i W_2\right)\,. \tag{2.24}$$

Für die Massen der Eichfelder erhält man

$$M_W = \frac{v}{2} g_2, \quad M_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g_1^2 + g_2^2} = \frac{M_W}{\cos\theta_W} \quad \text{und} \quad M_A = 0\,. \tag{2.25}$$

Über die Kopplungen an das Higgs-Feld erhalten auch die Fermionen Masse. Wenn man Φ in $\mathcal{L}_\mathrm{F}$ einsetzt, so findet man

$$m_{f,i} = G^f_{km}\frac{v}{\sqrt{2}}\,. \tag{2.26}$$

Anmerkung: Für die Leptonen kann man die Matrix G^f_{km} diagonal wählen, weil die Leptonenzahl für die Neutrinos und die geladenen Leptonen getrennt erhalten ist. Bei den Quarks ist das nicht der Fall: $G^{u,d}_{km}$ muß noch mit einer Matrix $U^{u,d}_{ik}$ diagonalisiert werden und dies führt zum Auftreten der Quark-Mischungsmatrix

$$V_{ij} = U^u_{ik} U^{d\dagger}_{kj}\,. \tag{2.27}$$

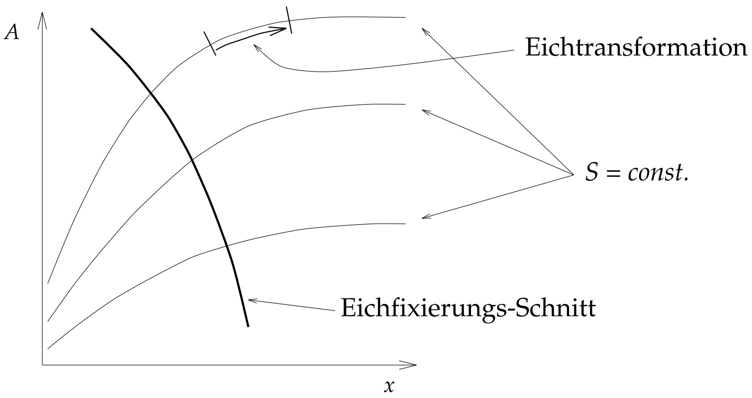
2.2.2 Quantisierung und Eichfixierung

Quantisiert man $\mathcal{L}_C$ mittels des Pfadintegrals, so stellt man fest, daß der Ausdruck

$$\int \mathcal{D}A_\mu \, e^{iS} \quad \text{mit} \quad S = \int d^4x \, (\mathcal{L}_C + JA_\mu)\,, \tag{2.28}$$

wobei J die Quellen der Felder A_μ sind, nicht wohldefiniert ist, weil über alle A_μ integriert wird, auch solche, die durch eine Eichtransformation Ω auseinander hervorgehen und physikalisch äquivalent sind.

Das läßt sich vermeiden, wenn man die Eichung fixiert. Durch eine Eichtransformation bewegt man sich auf einer Linie mit konstanter Wirkung S. Man legt jetzt einen Schnitt hinein, so daß jede dieser Linien nur einmal geschnitten wird:



Mathematisch geht das wie folgt: Man formuliert eine Eichbedingung $F(A_\mu) = 0$. Dies ist eine Nebenbedingung an die Wirkung und man möchte sie im Prinzip als $\delta[F(A_\mu)]$ unter das Integral schreiben. Dazu betrachtet man den Operator

$$\Delta^{-1}[A_\mu] = \int \mathcal{D}\Omega \; \delta[F(A_\mu^\Omega)]\,, \tag{2.29}$$

wobei A_μ^Ω das transformierte Eichfeld (2.4) ist. Dieser Operator ist invariant unter einer Eichtransformation, da über alle Gruppenelemente integriert wird,

$$\Delta^{-1}[A_\mu^{\Omega'}] = \int \mathcal{D}\Omega \; \delta[F(A_\mu^{\Omega'\Omega})] = \int \mathcal{D}\Omega'' \, \delta[F(A_\mu^{\Omega''})] = \Delta^{-1}[A_\mu]\,. \tag{2.30}$$

Im zweiten Integral wurden die Variablen umbenannt: $\Omega'' = \Omega'\Omega$ und $\mathcal{D}\Omega'' = \mathcal{D}\Omega$.

Nun fügt man ins Pfadintegral eine $1 = \Delta\Delta^{-1}$ ein und erhält

$$\int \mathcal{D}A_\mu \, e^{iS} = \int \mathcal{D}A_\mu \, \Delta[A_\mu] \int \mathcal{D}\Omega \; \delta[F(A_\mu^\Omega)] \, e^{iS}\,. \tag{2.31}$$

Nach einer Eichtransformation $A_\mu^\Omega \to A_\mu$ hängt der Integrand nicht mehr von Ω ab,

$$\int \mathcal{D}A_\mu \, \Delta[A_\mu] \int \mathcal{D}\Omega \; \delta[F(A_\mu)] e^{iS} \,, \tag{2.32}$$

und die Integration über Ω, also die unerwünschte Integration über die physikalisch äquivalenten Konfigurationen, kann jetzt herausgezogen werden und wird durch die Normierung gekürzt.

Schließlich muß noch $\Delta[A_\mu]$ ausgerechnet werden. Hierfür betrachtet man $F(A^\Omega)$ als Funktion von Ω und substituiert Ω durch F. Man erhält

$$\Delta^{-1}[A_\mu] = \int \mathcal{D}\Omega \; \delta[F] = \int \mathcal{D}F \; \det \left| \frac{\delta \Omega}{\delta F} \right| \delta[F] \,, \tag{2.33}$$

und daraus das gesuchte

$$\Delta[A_\mu] = \det \left| \frac{\delta F}{\delta \Omega} \right|_{F=0} \,. \tag{2.34}$$

Δ heißt Faddeev–Popov-Determinante [7]. Sie läßt sich mit Hilfe von Grassmann-Feldern, also antivertauschenden Feldern, in die Form einer e-Funktion umschreiben, was hat den Vorteil hat, daß man das δ-Funktional als Zusatzterm in die Lagrangedichte schreiben kann.

$$\Delta = \int \mathcal{D}u \, \mathcal{D}\bar{u} \, \exp \left\{ i \int d^4x \, \mathcal{L}_{\mathrm{FP}} \right\} \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_{\mathrm{FP}} = \bar{u}^a(x) \, \frac{\delta F^a}{\delta \theta^b} \, u^b(x) \,, \tag{2.35}$$

wobei θ^b der Parameter einer infinitesimalen Eichtransformation, $\Omega = 1 - i\theta^a \tau^a$, ist und a und b die Eichfelder A, Z, und $W^\pm$ indizieren.

Die Felder u_a und $\bar{u}_a$ sind antivertauschende Lorentzskalare. Sie sind unphysikalisch und werden Faddeev–Popov-Geister genannt. Solche Geistfelder treten niemals in Anfangs- oder Endzuständen auf.

2.2.3 't Hooft–Feynman-Eichung

Eine mögliche Wahl für die Eichung ist die 't Hooft-Eichung, die linear ist. Weil sie daher besonders einfach ist, wurde sie auch für alle Berechnungen in dieser Arbeit benutzt. Diese Eichung wird wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} F^\pm &= \partial^\mu W_\mu^\pm \mp i M_W \xi^W \phi^\pm \,, \\ F^Z &= \partial^\mu Z_\mu - M_Z \xi^Z \chi \,, \\ F^A &= \partial^\mu A_\mu \,, \end{aligned} \tag{2.36}$$

und wird fixiert durch

$$\mathcal{L}_{\text{fix}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\xi^A}(F^A)^2 + \frac{1}{\xi^Z}(F^Z)^2 + 2\frac{1}{\xi^W}F^+F^-\right]. \tag{2.37}$$

ξ^W, ξ^Z und ξ^A sind Eichparameter. Faßt man die Eichfixierung als Nebenbedingung an die Wirkung auf, so entsprechen die Eichparameter den Lagrange-Multiplikatoren. In Feynman-Eichung ist $\xi^W = \xi^Z = \xi^A = 1$.

2.2.4 Diagrammatische Auswertung

In den letzten Abschnitten wurden alle Beiträge zur Gesamt-Lagrangedichte des SM gesammelt:

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{C}} + \mathcal{L}_{\text{fix}} + \mathcal{L}_{\text{FP}}\,. \tag{2.38}$$

Nun möchte man mit dieser Theorie auch etwas ausrechnen. Für einen Streuprozeß stellt man folgende Überlegung an: Zwei freie Teilchen fliegen aufeinander zu, wechselwirken miteinander und laufen wieder als freie Teilchen auseinander. Der Operator, der zwischen dem ein- und dem auslaufenden Zustand vermittelt, ist die S-Matrix,

$$|\text{out}\rangle = S\,|\text{in}\rangle\;. \tag{2.39}$$

Die Berechnung der S-Matrix erfolgt in zwei Schritten: Im ersten Schritt drückt man mit Hilfe des LSZ-Reduktionsformalismus die S-Matrix durch Greensche Funktionen aus. Im zweiten Schritt berechnet man dann die Greenschen Funktionen über das erzeugende Funktional aus der Lagrangedichte. Das LSZ-Schema soll hier nicht vorgeführt werden, siehe z.B. Ryder [2]. Das erzeugende Funktional ist definiert als

$$W[J] \equiv e^{iZ[J]} = N\int \mathcal{D}\phi\, \exp\left\{\int d^4x\, \left(\mathcal{L}_{\text{SM}} + J\phi\right)\right\} \tag{2.40}$$

mit der Normierung $N = 1/W[0]$. ϕ steht hier stellvertretend für alle Felder des SM und J für deren Quellen. Die zusammenhängenden Greenschen Funktionen erhält man durch die Funktionalableitung

$$i^n G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J=0}\,. \tag{2.41}$$

Jetzt betreibt man Störungstheorie und entwickelt die wechselwirkenden um die freien Felder. Dazu spaltet man $\mathcal{L}_{\rm SM}$ auf in einen freien und einen wechselwirkenden Anteil, $\mathcal{L}_{\rm SM} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\rm int}$, und schreibt das erzeugende Funktional als

$$W[J] = N \exp\left\{ i \int d^4x \, \mathcal{L}_{\rm int} \left(-i \tfrac{\delta}{\delta J} \right) \right\} W_0[J] \,, \tag{2.42}$$

$$W_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{ \int d^4x \, (\mathcal{L}_0 + J\phi) \right\} . \tag{2.43}$$

Das Funktionalintegral in W_0 ist vom Gaußschen Typ und läßt sich ausführen. Das Ergebnis ist

$$Z_0[J] = -i \ln W_0[J] = \frac{1}{2} \int d^4x \, d^4y \, J(x) \Delta(x,y) J(y) \,, \tag{2.44}$$

wobei $\Delta(x,y)$ der (freie) Propagator des jeweiligen Feldes ist. Nun wird Z um Z_0 entwickelt:

$$\begin{aligned} Z[J] &= -i \ln N + Z_0[J] - i \ln(1+\delta) \\ &= -i \ln N + Z_0[J] - i\delta[J] + \tfrac{i}{2}\delta^2[J] - \tfrac{i}{3}\delta^3[J] + \ldots \end{aligned} \tag{2.45}$$

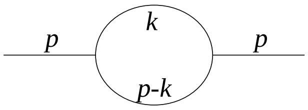
mit

$$\delta \equiv e^{-iZ_0} \left(\exp\left\{ i \int d^4x \, \mathcal{L}_{\rm int} \left(-i \tfrac{\delta}{\delta J} \right) \right\} - 1 \right) e^{iZ_0} \,. \tag{2.46}$$

Setzt man noch $\delta = g\delta_1 + g^2\delta_2 + \ldots$ an und sortiert die Terme um, steht die Störungsreihe in Ordnungen der Kopplungskonstante da. Ein genialer Weg, über alle Terme Buch zu führen, sind die Feynman-Diagramme. Man schreibt einen Satz von sog. Feynman-Regeln auf, nach denen diese Terme zusammengesetzt werden und kann dann jeden von ihnen mit einem Feynman-Diagramm identifizieren. Mit Hilfe der Feynman-Regeln kann man die gesuchten Amplituden direkt aus den Diagrammen berechnen. Komplett ausgearbeitete Feynman-Regeln für das SM stehen in [3].

2.3 Renormierung

Versucht man mit den eben gewonnenen Feynman-Regeln Diagramme auszurechnen, die eine Schleife enthalten, so stellt man fest, daß manche von ihnen, etwa das folgende, in vier Dimensionen Divergenzen aufweisen.



$$\propto \int \frac{d^4k}{[k^2 - m^2][(p-k)^2 - m^2]}$$

Für große k divergiert das Integral logarithmisch, weil $\int d^4k/k^4 = \int d\Omega \int dk/k$. Eine divergente Theorie ist natürlich unbrauchbar. Durch eine Prozedur, die man Renormierung nennt, lassen sich die Divergenzen jedoch beseitigen. Die grundlegende Idee dabei ist folgende:

Die Parameter, die in der Lagrangefunktion stehen – Masse, Ladung, Kopplungskonstanten usw. – sind nicht direkt meßbar. Der gemessene Parameter enthält untrennbar immer auch alle Korrekturen durch höhere Terme der Störungsreihe. Dies macht man sich bei der Renormierung zunutze und absorbiert die Divergenzen in die Relation zwischen den "nackten" und den physikalischen Parametern.

Um die Divergenzen zu beseitigen, geht man in zwei Schritten vor:

1. Regularisieren = Divergenz isolieren

   Um die divergenten Integrale überhaupt lösen zu können, führt man einen Regularisierungsparameter (z.B. einen Abschneideimpuls) ein, berechnet das Integral als Funktion dessen und hat damit die Divergenz in Termen des Regularisierungsparameters isoliert.

2. Renormieren = Divergenz subtrahieren

   Die eigentliche Renormierungstransformation eliminiert die jetzt isolierten divergenten Terme durch Hinzufügen von Termen der gleichen Struktur mit umgekehrtem Vorzeichen, den sog. Countertermen. Die Renormierungsvorschrift ist nicht eindeutig, denn es gibt beliebig viele Wege, ∞ von ∞ abzuziehen und dabei zu einem endlichen Resultat zu kommen. Die Beziehungen zwischen physikalischen Größen sind aber nicht vom verwendeten Schema abhängig.

Für 1-Schleifen-Rechnungen wird in den meisten Fällen und auch in dieser Arbeit das dimensionale Regularisierungsverfahren [8] benutzt, das hier nur kurz skizziert werden soll: Statt in 4 wird das Integral in $4-2\delta$ Dimensionen und mit Hilfe der Feynman-Parametrisierung berechnet. Das Ergebnis enthält neben endlichen Termen manifest divergente Terme wie $1/\delta$. Diese werden im Zuge der Renormierung eliminiert, danach läßt man $\delta \to 0$ gehen. Mathematische Details zu dieser Methode stehen z.B. in dem Buch von P. Ramond [2].

Für die Renormierungstransformation macht man z.B. den Ansatz

(2.47)

$$\left.\begin{aligned} M_{b,0}^2 &= M_b^2 + \delta M_b^2 \qquad {\scriptstyle b=W,Z,H} \\ m_{f,i,0} &= m_{f,i} + \delta m_{f,i} \end{aligned}\right\} \text{Massen-}$$

$$\left.\begin{aligned} e_0 &= (1+\delta e)e \end{aligned}\right\} \text{Ladungs-}$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} Z_0 \\ A_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}\delta Z_{ZZ} & \frac{1}{2}\delta Z_{ZA} \\ \frac{1}{2}\delta Z_{AZ} & 1+\frac{1}{2}\delta Z_{AA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} \\ W_0^{\pm} &= (1+\tfrac{1}{2}\delta Z_{WW})W^{\pm} \\ H_0 &= (1+\tfrac{1}{2}\delta Z_H)H \\ f_{i,0}^L &= (\delta_{ij}+\tfrac{1}{2}\delta Z_{ij}^{f,L})f_j^L \\ f_{i,0}^R &= (\delta_{ij}+\tfrac{1}{2}\delta Z_{ij}^{f,R})f_j^R \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{Feld-}\\ \text{renormierung}\end{array}$$

Setzt man diese Transformation in $\mathcal{L}_{\mathrm{SM}}$ ein, so ergibt sich

(2.48) $$\mathcal{L}_{\mathrm{SM}} = \mathcal{L}_{\mathrm{SM},0} + \delta\mathcal{L}_{\mathrm{ct}}\,,$$

wobei $\delta\mathcal{L}_{\mathrm{ct}}$ die gleiche Struktur wie $\mathcal{L}_{\mathrm{SM},0}$ hat. Aus $\delta\mathcal{L}_{\mathrm{ct}}$ leitet man wie gewöhnlich Feynman-Regeln ab und erhält daraus die Counterterm-Diagramme. In der jeweils betrachteten Ordnung Störungstheorie subtrahieren diese Diagramme gerade die Divergenzen in dieser Ordnung.

Anmerkung: Es ist nicht selbstverständlich, daß die Renormierungsprozedur in allen Ordnungen der Störungstheorie einfach so funktioniert; erst G. 't Hooft hat dies 1972 bewiesen [9].

Als ein besonders brauchbares Renormierungsschema hat sich das On-Shell-Schema [3, 10] erwiesen, weil in diesem die renormierten Parameter[1] direkte physikalische Bedeutung haben. Die Renormierungskonstanten δM_x, δZ_x und δe werden aus den folgenden drei Bedingungen bestimmt:

1. Massenrenormierung: Der Pol des Propagators $(p^2 - M_x^2 - \Sigma_{xx})^{-1}$ soll auf der on-shell Masse sitzen:

   (2.49) $$\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}_{xx}(p^2 = M_x^2) = 0\,.$$

[1] Die renormierten Größen tragen im folgenden stets einen Hut: $\hat{x}$.

2. Feldrenormierung: Das Residuum des Propagators soll 1 sein, damit die Normierung der Felder garantiert ist:

$$\mathrm{Re}\,\frac{\partial\hat{\Sigma}_{xx}(p^2)}{\partial p^2}\bigg|_{p^2=M_x^2} = 0\,. \tag{2.50}$$

3. Ladungsrenormierung: Für ein on-shell Fermion und ein on-shell Photon soll der $f\bar{f}\gamma$-Vertex im Thomson-Limes ($\Delta p \to 0$) keine Strahlungskorrekturen enthalten:

$$\bar{u}(p)\Gamma_\mu^{f\bar{f}\gamma}(p,p)u(p)\Big|_{p^2=m_f^2} = ie\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p)\,. \tag{2.51}$$

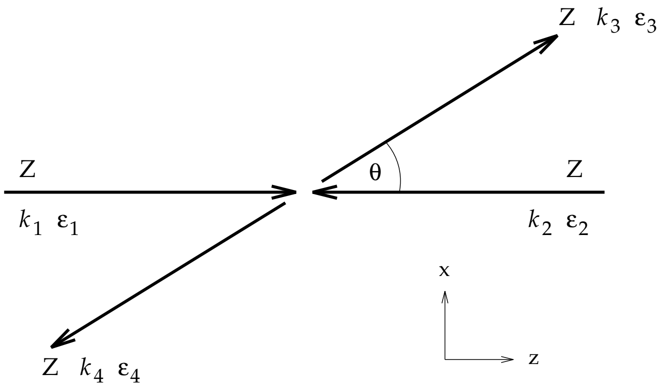
Ein weiterer Vorteil des On-Shell-Schemas ist, daß die äußeren Linien nicht renormiert werden müssen, weil sie bereits on-shell sind.

Kapitel 3

Strahlungskorrekturen zum Prozeß $Z + Z \to Z + Z$

3.1 Kinematik

Die Streuung wird im Schwerpunktsystem der Z's berechnet. Das Koordinatensystem ist so gelegt, daß die Z's entlang der z-Achse einlaufen und in die x-z-Ebene gestreut werden,



Das Ziel ist die Berechnung des Wirkungsquerschnitts. Dazu benötigt man die S-Matrix. Spaltet man aus ihr den trivialen Anteil (den Strahl) ab, so bekommt man die T-Matrix,

$$S = 1 + iT\,, \tag{3.1}$$

und deren Matrixelemente schreibt man in der Form

$$\langle \mathrm{out}|\, T\, |\mathrm{in}\rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)\, \mathcal{M}\,, \tag{3.2}$$

wobei die δ-Funktion für Impulserhaltung sorgt. Das invariante Matrixelement $\mathcal{M}$ ist die Summe aller Feynman-Diagramme bis zur gewünschten Ordnung. Der Kern der Rechnung ist also die Bestimmung von $\mathcal{M}$.

Ausgedrückt durch das invariante Matrixelement lautet der differentielle Wirkungsquerschnitt (WQ)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathrm{cm}}} = \frac{1}{64\pi^2 E_{\mathrm{cm}}^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{256\pi^2 E^2} |\mathcal{M}|^2 . \tag{3.3}$$

Dabei ist E die Strahlenergie und $E_{\mathrm{cm}} = 2E$ die Schwerpunktsenergie. Durch Integration über die Winkel erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2} \int d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad \text{mit} \quad d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi . \tag{3.4}$$

Der Faktor 1/2 kommt daher, daß im Endzustand zwei identische Teilchen sind.

Es ist bequem, anstelle der etwas unhandlichen Viererimpulse die drei Mandelstam-Variablen s, t und u einzuführen,

$$\begin{aligned} s &\equiv (k_1 + k_2)^2 &&= 4E^2 , \\ t &\equiv (k_1 - k_3)^2 &&= -4(E^2 - M_Z^2) \sin^2 \tfrac{\theta}{2} , \\ u &\equiv (k_1 - k_4)^2 &&= -4(E^2 - M_Z^2) \cos^2 \tfrac{\theta}{2} . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Diese sind skalar, Lorentz-invariant und erfüllen

$$s + t + u = 4M_Z^2 . \tag{3.6}$$

Als Spin-1 Teilchen haben die Z's eine longitudinale, $\varepsilon(0)$, und zwei transversale Polarisationen, $\varepsilon(1)$ und $\varepsilon(2)$. Zur Berechnung ist es etwas günstiger, zirkulare Polarisationen zu benutzen,

$$\begin{aligned} \varepsilon(+) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left[\varepsilon(1) + i\varepsilon(2) \right] , \\ \varepsilon(-) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left[\varepsilon(1) - i\varepsilon(2) \right] . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dabei ist zu beachten, daß in den auslaufenden Zuständen die Polarisationsvektoren komplex konjugiert auftreten.

Zur Berechnung des unpolarisierten Wirkungsquerschnitts wird über die Polarisationen der einlaufenden Teilchen gemittelt und über die der auslaufenden summiert,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\mathrm{unpol}} = \frac{1}{9} \sum_{\lambda_1,\lambda_2} \sum_{\lambda_3,\lambda_4} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4} . \tag{3.8}$$

Konkret sehen die Impuls- und Polarisationsvektoren so aus:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= (E,\, 0,\, 0,\, -p) \\
\varepsilon_1(0) &= \tfrac{1}{M_Z}\,(-p,\, 0,\, 0,\, E) \\
\varepsilon_1(\pm) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(0,\, -1,\, \pm i,\, 0) \\
k_2 &= (E,\, 0,\, 0,\, p) \\
\varepsilon_2(0) &= \tfrac{1}{M_Z}\,(p,\, 0,\, 0,\, E) \\
\varepsilon_2(\pm) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(0,\, 1,\, \pm i,\, 0) \\
k_3 &= (E,\, -p\sin\theta,\, 0,\, -p\cos\theta) \\
\varepsilon_3^*(0) &= \tfrac{1}{M_Z}\,(p,\, -E\sin\theta,\, 0,\, -E\cos\theta) \\
\varepsilon_3^*(\pm) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(0,\, -\cos\theta,\, \mp i,\, \sin\theta) \\
k_4 &= (E,\, p\sin\theta,\, 0,\, p\cos\theta) \\
\varepsilon_4^*(0) &= \tfrac{1}{M_Z}\,(p,\, E\sin\theta,\, 0,\, E\cos\theta) \\
\varepsilon_4^*(\pm) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(0,\, \cos\theta,\, \mp i,\, -\sin\theta)
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

3.2 Tensorintegrale

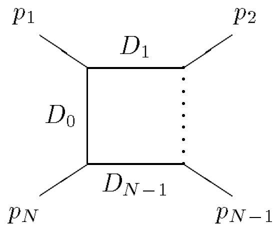
Sobald ein Feynman-Diagramm eine Schleife aufweist, legt die Impulserhaltung nicht mehr alle Impulse fest und es treten Integrale über die Impulse auf. Bei der Berechnung der 1-Schleifen-Diagramme in dimensionaler Regularisierung stößt man ganz allgemein auf Integrale der Form

$$T^N_{\mu_1\ldots\mu_P} = \frac{(2\pi\mu)^{2\delta}}{i\pi^2}\int d^{4-2\delta}q\,\frac{q_{\mu_1}\cdots q_{\mu_P}}{D_0 D_1\cdots D_{N-1}} \tag{3.10}$$

mit

$$D_0 = q^2 - m_0^2 + i\epsilon, \quad D_i = (q+p_i)^2 - m_i^2 + i\epsilon\,. \tag{3.11}$$

Die D_i entsprechen den Propagatoren, die in der Schleife laufen und die q_k im Zähler stammen von Vertizes und Fermion-Propagatoren.



Die T sind offensichtlich völlig symmetrisch in den Indizes $\mu_1, \ldots, \mu_P$. Die übliche Bezeichnungweise ist $T^1_{\mu_1\ldots\mu_P} \equiv A_P$, $T^2_{\mu_1\ldots\mu_P} \equiv B_P$ usw. Für die Berechnung werden letztlich nur die vier skalaren Integrale A_0, B_0, C_0 und D_0 gebraucht, wie man auf folgende Art sehen kann: Zunächst treten auf 1-Schleifen-Niveau in den Feynman-Diagrammen für einen $2 \to 2$ Streuprozeß keine Schleifen mit mehr als vier inneren Linien auf (also keine E_P, F_P usw.), und mit Hilfe der Tensorreduktion kann man dann auch noch alle Tensorintegrale auf skalare Integrale reduzieren.

Die Tensorreduktion erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt zerlegt man die Tensorintegrale nach ihrer Lorentzstruktur. Im zweiten Schritt wird dann die Zahl der Lorentzindizes durch sukzessive Kontraktion mit p_k^μ oder $g^{\mu\nu}$ reduziert, bis nur noch skalare Terme übrig bleiben.

Schritt 1: Die T's sind Lorentz-kovariant, d.h. sie haben ein definiertes Transformationsverhalten unter der Lorentz-Gruppe, und deshalb kann man sie als Linearkombination aus allen möglichen Größen schreiben, die dasselbe Transformationsverhalten besitzen. Im einzelnen sieht dies so aus:

$$\begin{aligned}
B_\mu &= p_{1\mu} B_1 \\
B_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} B_{00} + p_{1\mu} p_{1\nu} B_{11} \\
C_\mu &= p_{1\mu} C_1 + p_{2\mu} C_2 \;=\; \sum_{i=1}^{2} p_{i\mu} C_i \\
C_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} C_{00} + \sum_{i,j=1}^{2} p_{i\mu} p_{j\nu} C_{ij} \\
C_{\mu\nu\rho} &= \sum_{i=1}^{2} \Big(g_{\mu\nu} p_{i\rho} + g_{\nu\rho} p_{i\mu} + g_{\mu\rho} p_{i\nu} \Big) C_{00i} + \sum_{i,j,k=1}^{2} p_{i\mu} p_{j\nu} p_{k\rho} C_{ijk} \\
D_\mu &= g_{\mu\nu} D_{00} + \sum_{i,j=1}^{3} p_{i\mu} p_{j\nu} D_{ij} \\
D_{\mu\nu} &= \sum_{i=1}^{2} \Big(g_{\mu\nu} p_{i\rho} + g_{\nu\rho} p_{i\mu} + g_{\mu\rho} p_{i\nu} \Big) D_{00i} + \sum_{i,j,k=1}^{2} p_{i\mu} p_{j\nu} p_{k\rho} D_{ijk} \\
D_{\mu\nu\rho\sigma} &= (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) D_{0000} \\
&\quad + \sum_{i,j,k=1}^{3} \Big(g_{\mu\nu} p_{i\rho} p_{j\sigma} + g_{\nu\rho} p_{i\mu} p_{j\sigma} + g_{\mu\rho} p_{i\nu} p_{j\sigma} \\
&\qquad\qquad + g_{\mu\sigma} p_{i\nu} p_{j\rho} + g_{\nu\sigma} p_{i\mu} p_{j\rho} + g_{\rho\sigma} p_{i\mu} p_{j\nu} \Big) D_{00ij} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,\ell=1}^{3} p_{i\mu} p_{j\nu} p_{k\rho} p_{\ell\sigma} D_{ijk\ell}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Schritt 2: Um die Anzahl der Lorentzindizes zu reduzieren wird mit p_k^μ und $g^{\mu\nu}$ kontrahiert. Die Kontraktion mit p_k^μ eliminiert einen Lorentz-Index. Mit

$$q_\mu p_k^\mu = \frac{1}{2}(D_k - D_0 - f_k), \qquad f_k \equiv p_k^2 - m_k^2 - m_0^2\,, \tag{3.13}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} T^N_{\mu_1\dots\mu_P} p_k^{\mu_P} &\equiv R^{N,k}_{\mu_1\dots\mu_{P-1}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(2\pi\mu)^{2\delta}}{i\pi^2}\int d^{4-2\delta}q\left[\frac{q_{\mu_1}\cdots q_{\mu_{P-1}}(D_k - D_0 - f_k)}{D_0\cdots D_{N-1}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(T^{N-1,\hat{k}}_{\mu_1\dots\mu_{P-1}} - T^{N-1,\hat{0}}_{\mu_1\dots\mu_{P-1}} - f_k T^N_{\mu_1\dots\mu_{P-1}}\right)\,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Das Dach im oberen Index, $\hat{k}$, bedeutet "D_k gekürzt." Die Kontraktion mit $g^{\mu\nu}$ eliminiert zwei Lorentz-Indizes. Es gilt

$$g^{\mu\nu} q_\mu q_\nu = D_0 + m_0^2 \tag{3.15}$$

und damit

$$\begin{aligned} T^N_{\mu_1\dots\mu_P} g^{\mu_{P-1}\mu_P} &\equiv R^{N,00}_{\mu_1\dots\mu_{P-2}} \\ &= \frac{(2\pi\mu)^{2\delta}}{i\pi^2}\int d^{4-2\delta}q\left[\frac{q_{\mu_1}\cdots q_{\mu_{P-2}}(D_0 + m_0^2)}{D_0\cdots D_{N-1}}\right] \\ &= T^{N-1,\hat{0}}_{\mu_1\dots\mu_{P-2}} + m_0^2 T^N_{\mu_1\dots\mu_{P-2}}\,. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Nun setzt man das Ergebnis aus Schritt 1 ein und bekommt $N-1$ lineare Gleichungen, die die T's mit den R's verknüpfen. Das Gleichungssystem ist invertierbar, wenn

$$\det G_M \neq 0 \quad \text{mit} \quad M = N - 1\,, \tag{3.17}$$

wobei G_M die Gram-Matrix ist mit

$$G_M \equiv (p_i p_j) = \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 & \dots & p_1 p_M \\ p_2 p_1 & p_2^2 & \dots & p_2 p_M \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_M p_1 & p_M p_2 & \dots & p_M^2 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Diese Bedingung ist nur dann nicht erfüllt, wenn die Schleifenimpulse linear abhängig sind. Da nur Integrale mit maximal $M = 3$ vorkommen und die Impulserhaltung nur einen der vier äußeren Impulse festlegt, ist die Gram-Determinante also fast überall ungleich Null. Die invertierten Gleichungen lauten

$$
\begin{aligned}
T^N_{00i_1\ldots i_{P-2}} &= \frac{1}{D+P-2-M}\left(R^{N,00}_{i_1\ldots i_{P-2}} - \sum_{k=1}^{M} R^{N,k}_{ki_1\ldots i_{P-2}}\right) ,\\
T^N_{ki_1\ldots i_{P-1}} &= \left(G_M^{-1}\right)_{kk'}\left(R^{N,k'}_{i_1\ldots i_{P-2}} - T^N_{00i_1\ldots i_{k'-1}i_{k'+1}\ldots i_{P-1}}\right) .
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

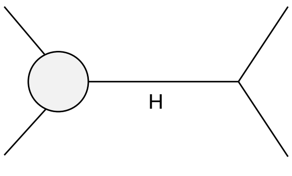
Dieser Algorithmus zur Tensorreduktion erfordert also lediglich das Lösen linearer Gleichungssysteme (d.h. Ausrechnen von Determinanten) und ist deswegen für den Computer wie geschaffen und auch implementiert. Die Zerlegung macht aus einem Tensorintegral eine Linearkombination von skalaren Integralen. Allerdings bleibt anzumerken, daß am Rand des Phasenraums ($\theta \approx 0, \pi$) die Koeffizienten der skalaren Integrale von der Form $0/0$ sind (da dort $\det G_M \to 0$) und numerisch instabil werden. Man umgeht dieses Problem, indem man den totalen Wirkungsquerschnitt nicht von 0 bis π, sondern mit einem kleinen θ_{cut} ($10°$ in dieser Arbeit) von θ_{cut} bis $\pi - \theta_{\text{cut}}$ integriert. Dies entspricht auch in etwa dem experimentell zugänglichen Winkelbereich.

Die Integrale der skalaren Funktionen A_0, B_0, C_0 und D_0 kann man lösen [11] – die wesentlichen Bestandteile sind Logarithmen und Dilogarithmen – und sie sind auch programmiert [12]. Abschließend sei erwähnt, daß A_0 und B_0 für $\delta \to 0$ divergieren, während C_0 und D_0 endlich sind.

3.3 Higgs-Resonanz und Pol-Schema

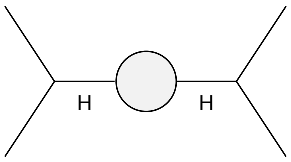
Diagramme der folgenden Struktur bereiten bei $s = M_H^2$ Schwierigkeiten, weil dort eine Resonanz auftritt:

Typ I:



$\propto \dfrac{1}{s - M_H^2}$,

Typ II:



$\propto \dfrac{1}{(s - M_H^2)^2}$.

Bemerkung: Beim vorliegenden Prozeß treten solche Divergenzen nur mit dem Higgs-Propagator auf, da es im SM keinen ZZx-Vertex mit $x \neq H$ gibt. Die Diagramme der niedrigsten Ordnung, der Bornschen Näherung, haben keine Schleife (siehe Abschnitt 3.4); sie haben nur eine Potenz von $s - M_H^2$ im Nenner und fallen damit in die Kategorie I. Liegt M_H unterhalb der Schwelle von $2M_Z$, so tritt die Resonanz aus kinematischen Gründen gar nicht auf.

Solch eine Divergenz ist nicht physikalisch, sondern ein Artefakt der Störungsreihe. Es ist klar, daß es sicher keine gute Approximation mehr ist, in der Nähe eines Peaks nur wenige Terme der Potenzreihe mitzunehmen. Physikalisch kann man folgendermaßen argumentieren (P.W. Anderson nennt dies "perturbation theory plus good sense"): Der Propagator wird durch die höheren Ordnungen modifiziert:

$$\frac{1}{s - M_H^2} \longrightarrow \frac{1}{s - M_H^2 + \hat{\Sigma}_H(s)} . \tag{3.20}$$

$\hat{\Sigma}_H$ ist die renormierte Higgs-Selbstenergie und hat auch einen Imaginärteil, der Ausdruck der endlichen Zerfallsbreite des (instabilen) Higgs-Teilchens ist. Der modifizierte Propagator ist deswegen nicht divergent.

Wenn man die Selbstenergie einfach in den Nenner schreibt, bekommt man aber Probleme: Es werden Ordnungen der Störungsreihe vermischt, denn

$$\frac{1}{1 - \alpha^2 x} = 1 + \alpha^2 x + \alpha^4 x^2 + \dots \tag{3.21}$$

Durch das Mischen verschiedener Ordnungen wird die Eichinvarianz und die Unitarität verletzt. Nur jeweils alle Terme einer Ordnung zusammen ergeben ein eichinvariantes Matrixelement, und die Unitarität ist verletzt, weil $\hat{\Sigma}_H$ als Funktion von s für $s \to \infty$ den Wirkungsquerschnitt divergieren läßt.

Mit folgendem Regularisierungsschema gelingt es, die Unitarität zu erhalten. Der Propagator wird in zwei Teile aufgespalten, von denen der eine an der Resonanz dominiert und der andere das Verhalten abseits der Resonanz bestimmt. Der erste Teil wird durch Hinzufügen der Konstanten $\hat{\Sigma}_H(M_H^2)$ statt $\hat{\Sigma}_H(s)$ im Nenner endlich gemacht und bereitet also keine Sorgen für große s. Der zweite Teil wird so konstruiert, daß er ohne Modifikation des Nenners endlich ist.

Für Typ I-Diagramme bedeutet dies die folgende Ersetzung:

$$\frac{V(s)}{s - M_H^2} \longrightarrow \frac{V(M_H^2)}{s - M_H^2 + iM_H\Gamma_H} + \frac{V(s) - V(M_H^2)}{s - M_H^2} , \tag{3.22}$$

wobei $\Gamma_H = \mathrm{Im}\,\Sigma_H^{(1)}(M_H^2)/M_H$. Der erste Term ist der konstante Term aus der Entwickung von $V(s)$ um $s = M_H^2$, und der zweite Term ist das Restglied. Per Konstruktion geht der Zähler des zweiten Terms gegen Null für $s \to M_H^2$ und ist unproblematisch.

Damit ist die Vorgehensweise für Typ II-Diagramme klar: Um zwei Potenzen von $s - M_H^2$ im Nenner zu regularisieren, muß man den Zähler einfach eine Ordnung weiter entwickeln. Die Vorschrift lautet:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\Sigma}(s)}{(s-M_H^2)^2} \quad \longrightarrow \quad & \frac{\hat{\Sigma}(M_H^2) - \boxed{iM_H\Gamma_H}}{(s-M_H^2)(s-M_H^2+iM_H\Gamma_H)} \\ & + \frac{\hat{\Sigma}'(M_H^2)(s-M_H^2)}{(s-M_H^2)(s-M_H^2+iM_H\Gamma_H)} \\ & + \frac{\hat{\Sigma}(s) - \hat{\Sigma}(M_H^2) - \hat{\Sigma}'(M_H^2)(s-M_H^2)}{(s-M_H^2)^2}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Der dritte Term auf der rechten Seite ist wiederum das Restglied und $\hat{\Sigma}'$ steht für $\partial\hat{\Sigma}/\partial s$.

Der eingerahmte Term stammt nicht aus der Entwicklung von $\hat{\Sigma}$ und ist durch folgende Überlegung zu motivieren: Die Bornschen Diagramme sind wie erwähnt vom Typ I und werden demzufolge auch mit einem $iM_H\Gamma_H$ im Nenner versehen. Schreibt man dafür noch einmal die geometrische Reihe auf,

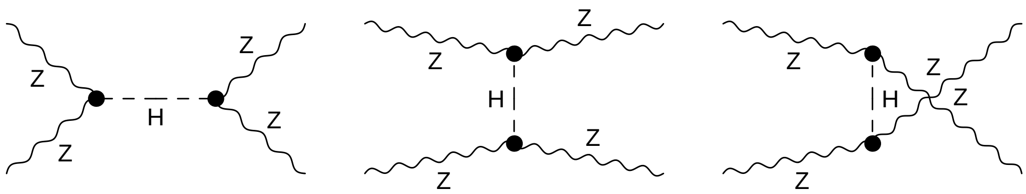
$$-\frac{1}{(s-M_H^2)\left[1+\dfrac{iM_H\Gamma_H}{s-M_H^2}\right]} = -\frac{1}{s-M_H^2} + \frac{iM_H\Gamma_H}{(s-M_H^2)^2} - \ldots, \tag{3.24}$$

so sieht man, daß der Term $iM_H\Gamma_H$, der auf 1-Schleifen-Niveau schon einmal steht, damit ein zweites Mal gezählt wird, also ist es legitim, ihn einmal abzuziehen. Der erste Summand im Pol-Schema ist somit identisch Null, denn die On-Shell-Bedingung erzwingt gerade, daß $\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}_H(M_H^2) = 0$.

Das Problem instabiler Teilchen war in letzter Zeit mehrfach Gegenstand der Forschung [13]. Diese Arbeiten verwenden bei der Regularisierung höhere Ordnungen der Selbstenergie (2- und 3-Schleifen-Ergebnisse) und halten damit die Genauigkeit der Rechnung auch an der Resonanz konstant. Beim Prozeß $Z+Z \to Z+Z$ kann man die Auswirkungen auf die Genauigkeit mit Vorgriff auf die Diskussion der numerischen Ergebnisse (Abschnitt 4.2) ignorieren und sich so auf das oben erläuterte einfachere Pol-Schema zurückziehen: Da der Wirkungsquerschnitt in Bornscher Näherung mit wachsender Energie stark unterdrückt ist, sind die 1-Schleifen-Beiträge zum Wirkungsquerschnitt eigentlich keine Korrekturen, sondern führende Terme. An der Resonanz rutscht man in der Genauigkeit eine Ordnung herunter, rechnet aber auch die führenden Terme aus, weil der Bornsche WQ in der Nähe der Resonanz groß und sicher nicht unterdrückt ist.

3.4 Bornscher Wirkungsquerschnitt

In Bornscher Näherung (= keine Schleife) gibt es nur drei Diagramme (ein $ZZZZ$-Vertex existiert im SM nicht).



Die algebraische Struktur ist wegen der geringen Zahl von Diagrammen noch einfach und leicht zu überblicken. Das invariante Matrixelement $\mathcal{M}$ ergibt sich (bis auf Vorfaktoren) zu

$$\mathcal{M}_{\text{Born}} \propto \frac{M_{12,34}}{s - M_H^2} + \frac{M_{13,24}}{t - M_H^2} + \frac{M_{14,23}}{u - M_H^2}\,. \tag{3.25}$$

Dabei stehen die Terme in derselben Reihenfolge wie die obigen Diagramme, von denen sie stammen, und die entsprechend auch als s-, t- und u-Kanal-Diagramme bezeichnet werden. Die $M_{ij,k\ell}$ im Zähler werden Standardmatrixelemente genannt. In ihnen steckt die ganze Kinematik und sie sind gegeben durch

$$\begin{aligned} M_{12,34} &= (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)(\varepsilon_3^* \cdot \varepsilon_4^*)\,, \\ M_{13,24} &= (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3^*)(\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_4^*)\,, \\ M_{14,23} &= (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_4^*)(\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3^*)\,. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Explizite Formeln für die einzelnen Polarisationen erhält man durch Einsetzen der jeweiligen Polarisationsvektoren, sie stehen im Anhang A.

3.5 1-Schleifen-Korrekturen

In 1-Schleifen-Näherung ist der differentielle Wirkungsquerschnitt durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{256\pi^2 E^2} \left|\mathcal{M}_{\mathrm{Born}} + \delta\mathcal{M}^{(1)}\right|^2 \tag{3.27}$$

gegeben, wobei $\delta\mathcal{M}^{(1)}$ die Summe der Feynman-Diagramme mit einer Schleife darstellt. Diese lassen sich nach ihrer Topologie eindeutig in drei Klassen einteilen: Selbstenergie-, Vertex- und Box-Diagramme. Das Kriterium ist, ob zwei, drei oder vier Propagatoren an der Schleife ansetzen. Daneben gibt es noch Tadpole-Diagramme (mit einem Propagator an der Schleife), aber da diese nur einen konstanten Beitrag liefern, der am Ende wegrenormiert wird, brauchen sie in der Rechnung nicht berücksichtigt werden. Bremsstrahlungskorrekturen treten in diesem Fall nicht auf, weil die ein- und auslaufenden Teilchen nicht geladen sind.

Mit Hilfe des Computers werden die Diagramme generiert. Die Topologien der Diagramme für einen $2 \to 2$ Streuprozeß sind auf den folgenden Seiten gezeigt.

Um die eigentlichen Diagramme für $Z + Z \to Z + Z$ zu bekommen, setzt der Computer die äußeren Linien auf Z's und belegt die inneren Linien und Punkte mit allen im SM möglichen Kombinationen von Propagatoren und Vertizes. Mit nur einer Schleife ist es nicht möglich, Diagramme mit Fermionen aus mehr als einer Generation zu zeichnen. Fermionische Diagramme werden deshalb nur für eine Generation erzeugt und später in der numerischen Auswertung über alle drei Generationen summiert. Insgesamt kommen 550 Diagramme zustande; diese sind hier aus Platzgründen nicht abgebildet.

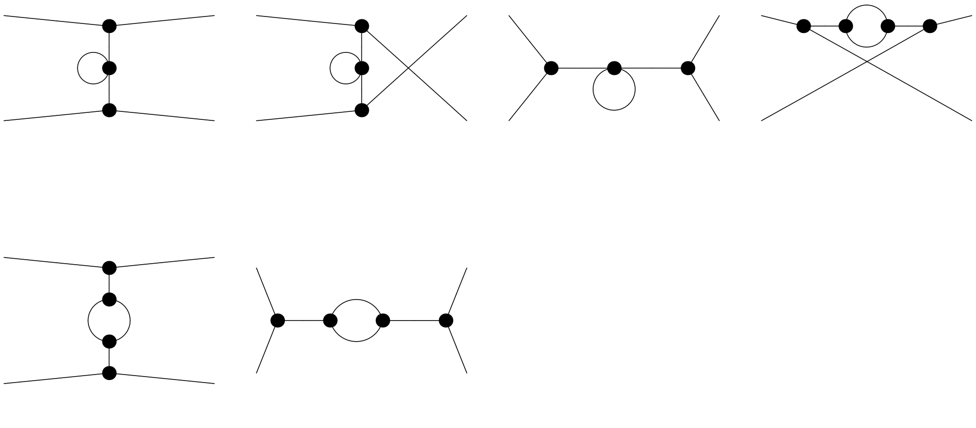


Abbildung 3.1: Die Topologien der Selbstenergie-Diagramme.

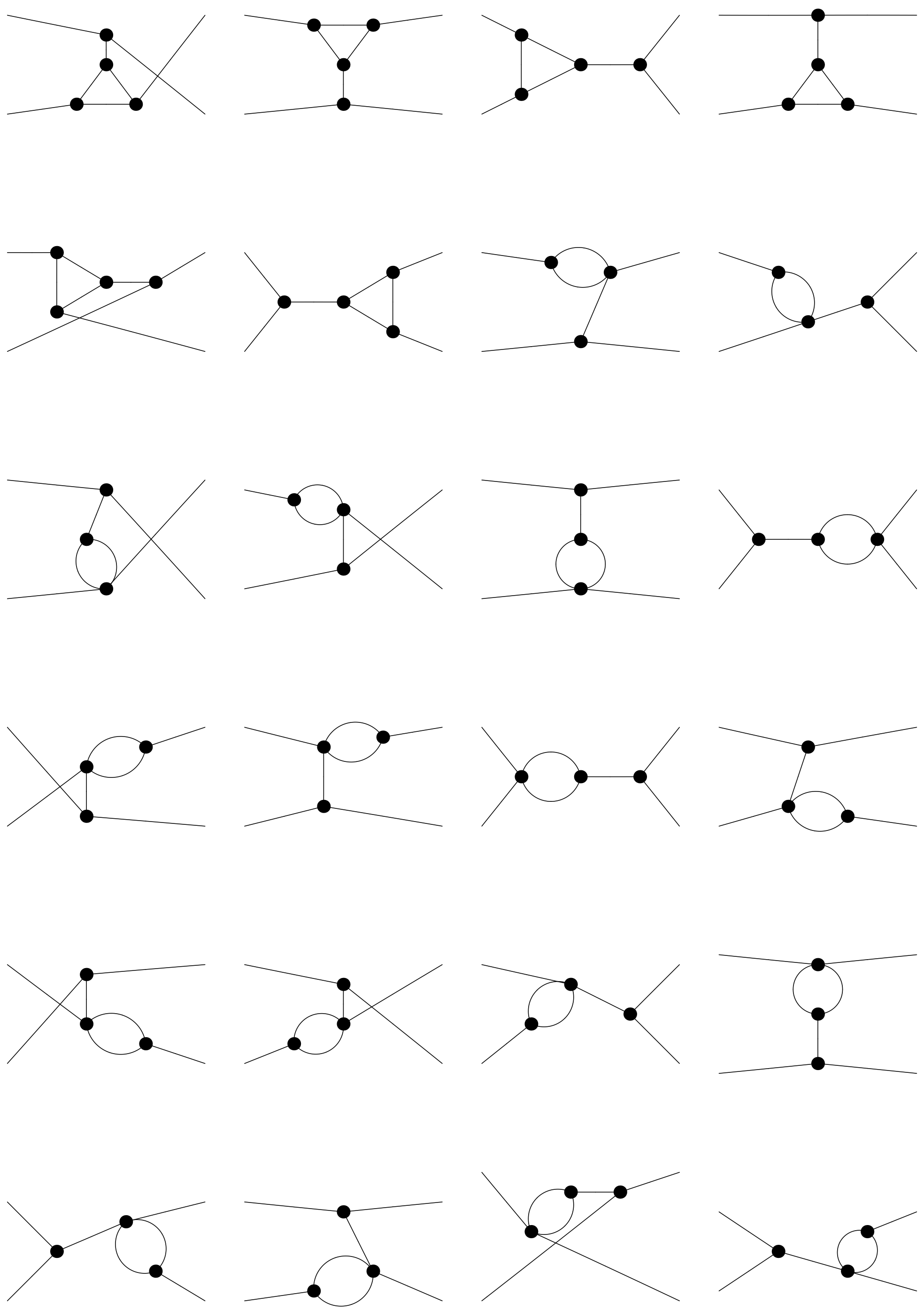


Abbildung 3.2: Die Topologien der Vertex-Diagramme.

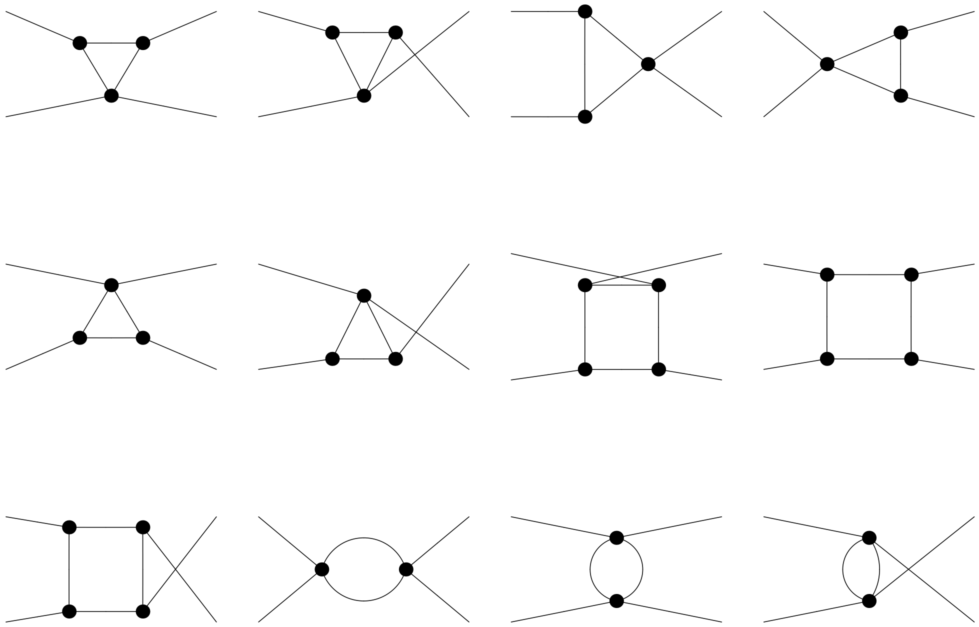
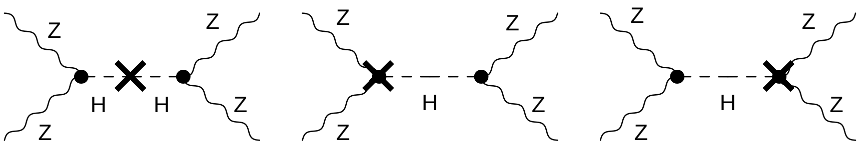


Abbildung 3.3: Die Topologien der Box-Diagramme.

3.6 Counterterme

Die Counterterm-Diagramme stammen aus $\delta\mathcal{L}_{\mathrm{ct}}$, dem Zusatzterm zur Lagrangedichte, der durch Einsetzen der Renormierungstransformation in $\mathcal{L}_{\mathrm{SM}}$ entsteht. Diese Counterterm-Diagramme sind so konstruiert, daß sie die Divergenzen der 1-Schleifen-Diagramme kompensieren. Für den Prozeß $Z + Z \to Z + Z$ gibt es neun Counterterm-Diagramme:



Die Diagramme mit dem Kreuz auf dem Propagator kompensieren die Divergenzen der Selbstenergie-Diagramme und die Diagramme mit dem Kreuz auf dem Vertex die der Vertex-Diagramme. Wie man sieht, werden auch nur diese renormiert; die Box-Diagramme sind von alleine endlich.

Für die Rechnung werden folgende Renormierungskonstanten benötigt (Ableitung siehe [3]):

$$
\begin{aligned}
\delta M_b^2 &= \mathrm{Re}\,\Sigma_{bb}^T(k^2 = M_b^2) \qquad (b = W, Z)\\
\delta M_H^2 &= \mathrm{Re}\,\Sigma_H^T(k^2 = M_H^2)\\
\delta Z_{AZ} &= -2\,\mathrm{Re}\,\frac{\Sigma_{AZ}^T(k^2 = M_Z^2)}{M_Z^2}\\
\delta Z_{ZA} &= 2\,\frac{\Sigma_{AZ}^T(k^2 = 0)}{M_Z^2}\\
\delta Z_{bb} &= -\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial \Sigma_{bb}^T(k^2)}{\partial k^2}\bigg|_{k^2 = M_b^2} \qquad (b = A, Z, W)\\
\delta Z_H &= -\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial \Sigma_H(k^2)}{\partial k^2}\bigg|_{k^2 = M_H^2}\\
\delta e &= -\frac{1}{2}\,\delta Z_{AA} - \frac{\sin\theta_W}{\cos\theta_W}\,\frac{1}{2}\,\delta Z_{ZA}
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Mit einem hochgestellten “T” ist jeweils der Transversalanteil bezeichnet:

$$\Sigma(k^2) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \Sigma^T(k^2) + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \Sigma^L(k^2)\,. \tag{3.29}$$

3.7 Computerauswertung

3.7.1 Erstellen der Feynman-Diagramme

Die Feynman-Diagramme lassen sich automatisch mit dem Programm *FeynArts* von H. Eck und J. Küblbeck [14] unter Mathematica [15] erstellen. Das Programm arbeitet in drei Schritten:

Zuerst werden die Topologien mit der gewünschten Anzahl Schleifen und äußeren Linien generiert, dies geschieht mit

```
tops = CreateTopologies[ℓ, i -> o] ,
```

mit ℓ = Zahl der Schleifen, i = Zahl der einlaufenden und o = Zahl der auslaufenden Teilchen. Für Counterterme benutzt man `CreateCTTopologies` statt `CreateTopologies`. Im zweiten Schritt werden diese Topologien mit Teilchen “eingekleidet” mit dem Befehl

```
ins = InsertFields[tops, {V[2],V[2]} -> {V[2],V[2]},
          Model -> {"SM"}, InsertionLevel -> Particles] .
```

`V[2]`, “Vektorboson Nr. 2,” ist die *FeynArts*-Bezeichnung für ein Z. Auf Wunsch werden die erzeugten Diagramme mit

```
Paint[ins]
```

gezeichnet. Und schließlich erzeugt *FeynArts* mit

```
amps = CreateFeynAmp[ins]
```

die zu den Diagrammen gehörenden analytischen Ausdrücke.

3.7.2 Vereinfachen der Algebra

Genauso automatisch wie das Erzeugen der Diagramme erfolgt auch das analytische Vereinfachen, so z.B. Abarbeiten der Algebra der Dirac-Matrizen, Anwendung der Dirac-Gleichung, Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen, Einsetzen der Massenschalenbedingung, Faktorisierung der Ausdrücke, Reduktion der Tensorintegrale, usw. Dazu gibt es das Programm *FeynCalc* von R. Mertig [16]. Die von *FeynArts* generierten Amplituden werden mit

```
OneLoopSum[amps, Mandelstam -> {S,T,U,4 MZ^2},
           InitialSubstitutions -> {k4 -> k1+k2-k3}]
```

vereinfacht. Wie man sieht, wird die Impulserhaltung und die Mandelstam-Relation explizit angegeben.

Die Tensorreduktion wird aus Gründen der Laufzeit in einem eigenen Schritt ausgeführt. Das Kommando dazu lautet

```
PaVeReduce[expr] .
```

3.7.3 Numerik

Die numerische Auswertung der Ausdrücke, die *FeynCalc* liefert, wird mit zwei Programmen durchgeführt. Das erste Programm konvertiert den Mathematica-Code in C++-Funktionen und das zweite Programm wertet diese Funktionen in C++ aus.

Das erste Programm berechnet zuerst die Renormierungskonstanten aus den diversen Selbstenergien und setzt diese zusammen mit anderen Konstanten wie M_Z, $\sin\theta_W$, e usw. in die Amplituden ein. Die Fermionmassen bleiben als einzige Konstanten noch symbolisch stehen und werden erst später im C++-Programm in einer Schleife über alle Fermionengenerationen abgearbeitet.

Die Formeln direkt dem Compiler zu übergeben erzeugt einen recht trägen Code, und eine Optimierung durch den Compiler scheidet wegen hoher Optimierzeit und enormem Speicherbedarf aus. Die Optimierung wird deshalb noch in Mathematica durchgeführt und besteht darin, mehrfach vorkommende Terme zusammenzufassen, so daß diese nur einmal berechnet werden müssen. Die Zeitersparnis im endgültigen Programm dürfte bei 40–60% liegen.

Selbst nach Einsetzen der Konstanten sind die Ausdrücke noch sehr lang, und es ist kein geringes Problem, sie dem C++-Compiler "mundgerecht" zu servieren. Die Lösung besteht darin, die Ausdrücke in kürzere Blöcke zu zerhacken, die dann einzeln kompiliert und am Ende zusammengelinkt werden. Um die Verwaltung der separaten Programmblöcke zu erleichtern, gibt das Programm zusammen mit dem erzeugten C++-Code ein Steuerfile aus (ein sog. Makefile), mit dem der gesamte Compile-Vorgang automatisch abläuft. Der verwendete Compiler ist GNU g++ unter HP-UX.

Die Sprache C++ wurde gewählt, weil sie mit komplexen Zahlen umgehen kann und es zudem erlaubt, Objekte mit eigenen Rechenregeln, sog. Klassen, zu definieren (die komplexen Zahlen sind selbst eine spezielle Klasse). Die Klasse `four` wurde programmiert, um das Rechnen mit Vierervektoren (Impulse, Polarisationsvektoren) zu vereinfachen, z.B. kann damit der Impuls k_1 im Programm einfach als

```
k1 = four(E,0,0,-p)
```

deklariert werden. Es entfällt dadurch die Notwendigkeit, für die Standardmatrixelemente (vgl. Abschnitt 3.4) eigene Funktionen schreiben zu müssen.

Das zweite Programm fungiert als Treiber-Routine für den zuvor erzeugten Code der Amplituden und kann durch Einstellen eines Schalters entweder differentielle oder totale Wirkungsquerschnitte berechnen. Der Kern besteht aus einer Schleife über θ für den differentiellen bzw. über E für den totalen Wirkungsquerschnitt.

Für die Integration über den Winkel (beim totalen Wirkungsquerschnitt) wird das Gaußsche Verfahren benutzt. Im Parameterbereich können bei D_0-Funktionen Singularitäten auftreten (siehe Abschnitt 4.4) und wenn dies der Fall ist, wird der singuläre Anteil abgespalten und analytisch integriert.

Die Berechnung der skalaren Integrale A_0, B_0, C_0 und D_0 geschieht mit dem Paket FF von G.J. van Oldenborgh [12]. Dieses ist ursprünglich in Fortran geschrieben, läßt sich aber in C++ konvertieren, und mit einem Hüll-Programm werden die Argumente der Funktionen richtig in die FF-Konvention übersetzt. Die Funktion D_0 für vier Massen gleich Null ist nicht in FF enthalten und wurde auf der Basis von [11] selbst programmiert und mit den Ergebnissen von FF für kleine Massen verglichen.

Die typische Größe des fertigen C++-Programms ist 15 MB und die Rechendauer auf einer HP 9000/735 beträgt etwa eine Stunde für einen polarisierten und etwa 40 Stunden (durch Ausnutzung der Symmetrie) für einen unpolarisierten totalen Wirkungsquerschnitt.

Kapitel 4

Ergebnisse

4.1 Parameter

Für die Rechnungen wurden folgende Eingabeparameter benutzt [17, 1]:

$$\alpha^{-1} = 137.0359895, \quad M_Z = 91.1887 \text{ GeV}, \quad M_W = 80.32 \text{ GeV}, \tag{4.1}$$

sowie für die Massen der Fermionen

$$\begin{aligned} m_e &= 0.51099906 \text{ MeV}, & m_u &= 100 \text{ MeV}, & m_d &= 100 \text{ MeV}, \\ m_\mu &= 105.658389 \text{ MeV}, & m_c &= 1.5 \text{ GeV}, & m_s &= 200 \text{ MeV}, \\ m_\tau &= 1771.1 \text{ MeV}, & m_t &= 180 \text{ GeV}, & m_b &= 4.5 \text{ GeV}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die Neutrinos und das Photon gehen als masselose Teilchen in die Rechnung ein.

Die Massen der up- und down-Quarks werden üblicherweise mit $m_u \approx 8$ MeV bzw. $m_d \approx 15$ MeV angegeben. In die Rechnung geht aber stets das Verhältnis $m_{u,d}^2/M_Z^2$ ein, und so bezahlt man den deutlichen Zuwachs an numerischer Stabilität bei Rechnung mit $m_u = m_d = 100$ MeV nur mit einem kleinen Fehler.

Die Higgs-Masse liegt nach derzeitigen Schätzungen zwischen 60 (das ist die experimentelle Grenze) und ca. 600 GeV. Aus diesem Grund wurden die Rechnungen für drei Werte, 100, 300 und 500 GeV, durchgeführt.

4.2 Führende Ordnung

Auf Bornschem Niveau gibt es nur Diagramme mit ZZH-Vertizes. Der dem ZZH-Vertex entsprechende Term der Lagrangedichte trägt keine Ableitung und der Vertex ist folglich proportional zu $g_{\mu\nu}$ und nicht zu $k_\mu k_\nu$. Das führt zu folgender Abhängigkeit,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Born}} \propto \frac{1}{s}\left|\frac{g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}}{s-M_H^2}\right|^2 \propto \frac{1}{s^3}\,, \tag{4.3}$$

und bedeutet, daß der Bornsche Wirkungsquerschnitt stark mit s unterdrückt ist. Umgekehrt sind 1-Schleifen-Diagramme, die Potenzen von k im Zähler haben, nicht unterdrückt. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß die 1-Schleifen-“Korrekturen” eigentlich keine Korrekturen, sondern führende Terme sind. Für hohe Energien bestimmen praktisch sie alleine den Wirkungsquerschnitt. Beim Prozeß $\gamma+\gamma\to\gamma+\gamma$ ist dies noch deutlicher, dort gibt es gar keine Bornschen Diagramme.

Notwendig stellt sich die Frage, ob die 2-Schleifen-Diagramme dann nicht noch größere Terme liefern. Die Antwort ist nein: Die 2-Schleifen-Diagramme sind genausowenig unterdrückt, aber um einen Faktor α kleiner als die Diagramme der ersten Ordnung.

Aus diesem Grund ist es wichtig, für hohe Energien auch den quadratischen Term in $\delta\mathcal{M}^{(1)}$ mitzunehmen, obwohl er eigentlich von der Ordnung α^4 ist, also zwei Ordnungen weiter als der Bornsche Term $|\mathcal{M}_{\text{Born}}|^2 \propto \alpha^2$. Die Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt ist also

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{256\pi^2E^2}\left(|\mathcal{M}_{\text{Born}}|^2 + 2\,\text{Re}(\delta\mathcal{M}^{(1)}\,\mathcal{M}^*_{\text{Born}}) + \boxed{|\delta\mathcal{M}^{(1)}|^2}\right)\,, \tag{4.4}$$

einschließlich des eingerahmten Terms.

4.3 Plots der Wirkungsquerschnitte

Es folgen graphische Darstellungen der Ergebnisse der numerischen Rechnung. Die gestrichtelte Kurve ist der Wirkungsquerschnitt in Bornscher Näherung und die durchgezogene der volle 1-Schleifen-Wirkungsquerschnitt. Energie und Higgs-Masse sind jeweils in GeV angegeben. Die Einheiten auf der Ordinate sind pb = Picobarn = $10^{-12}10^{-28}m^2$. Für die differentiellen Wirkungsquerschnitte sind beide Achsen linear. Die totalen Wirkungsquerschnitte sind über der Strahlenergie $E = E_{\text{cm}}/2$ aufgetragen und die Ordinatenskala ist logarithmisch, da – insbesondere in der Nähe der Higgs-Resonanz – die Werte über mehrere Größenordnungen variieren können.

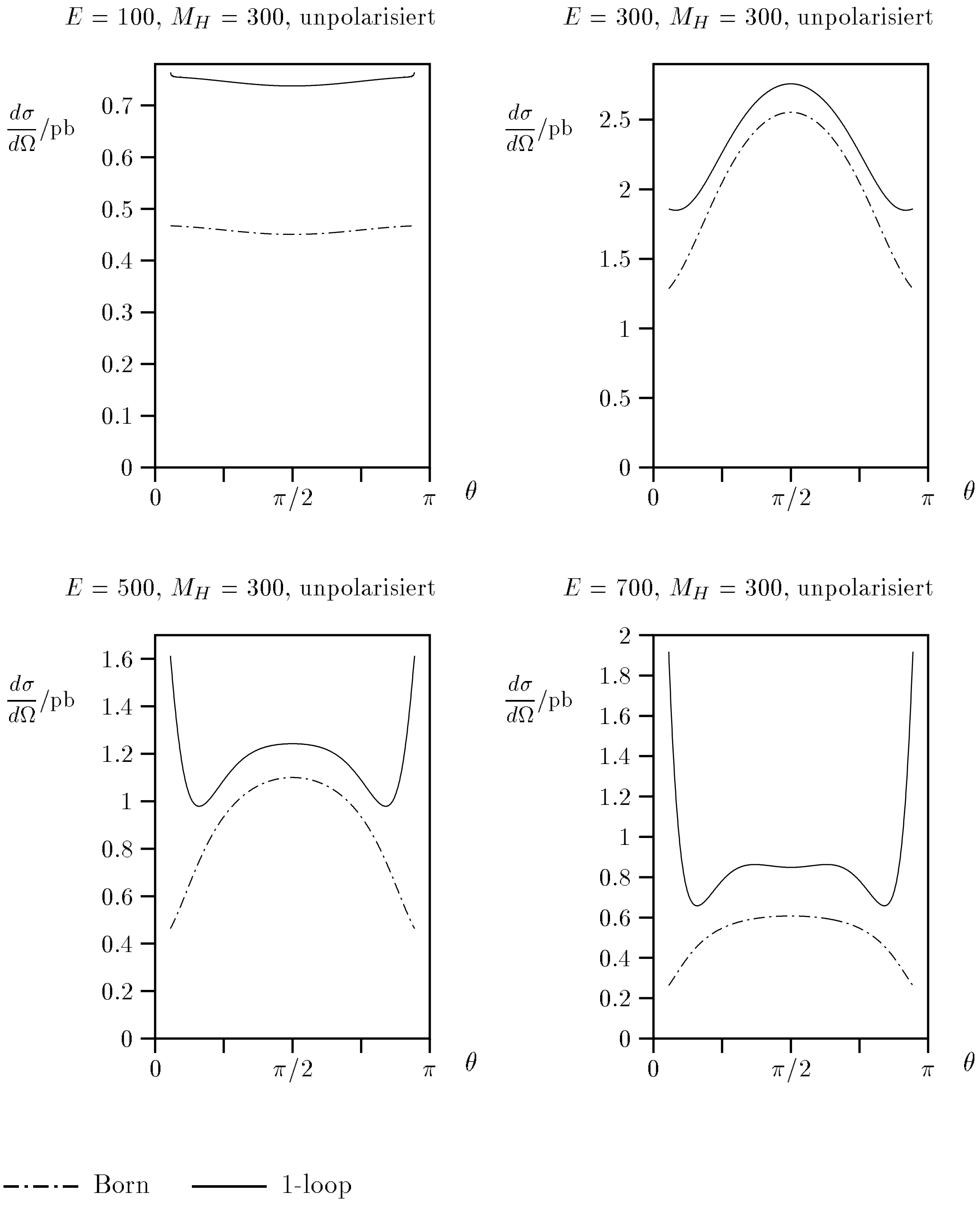


Abbildung 4.1: Der unpolarisierte differentielle WQ für verschiedene Energien bei einer Higgs-Masse von 300 GeV. Die 1-Schleifen-Beiträge sind besonders in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung groß.

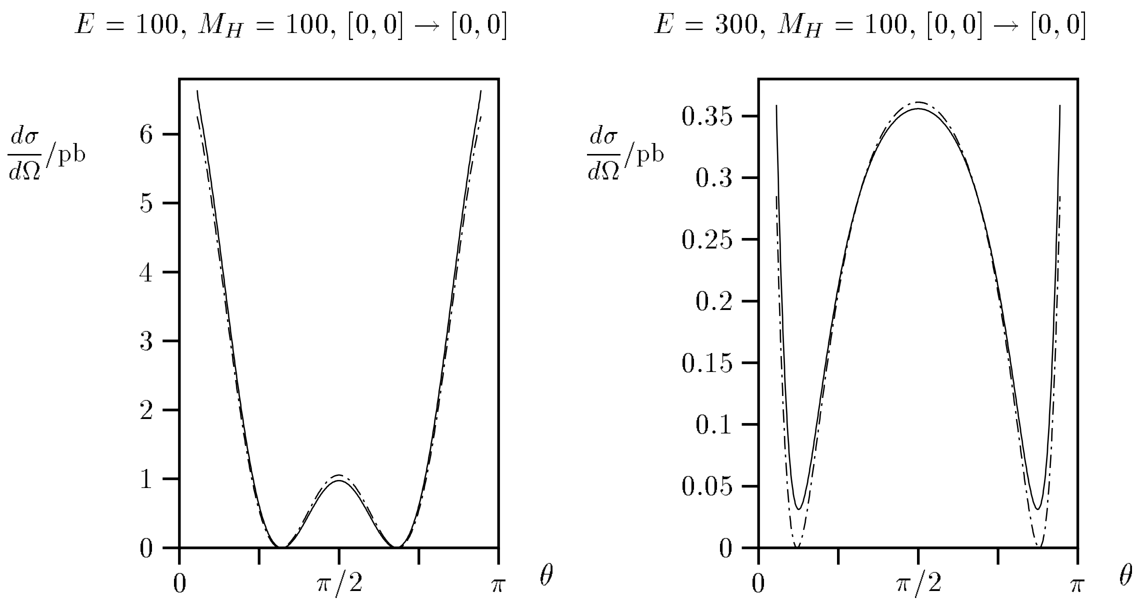


Abbildung 4.2: Die Polarisation $[0,0] \to [0,0]$ ist für niedrige Energien der überwiegende Anteil im unpolarisierten WQ, stirbt aber mit wachsendem s aus.

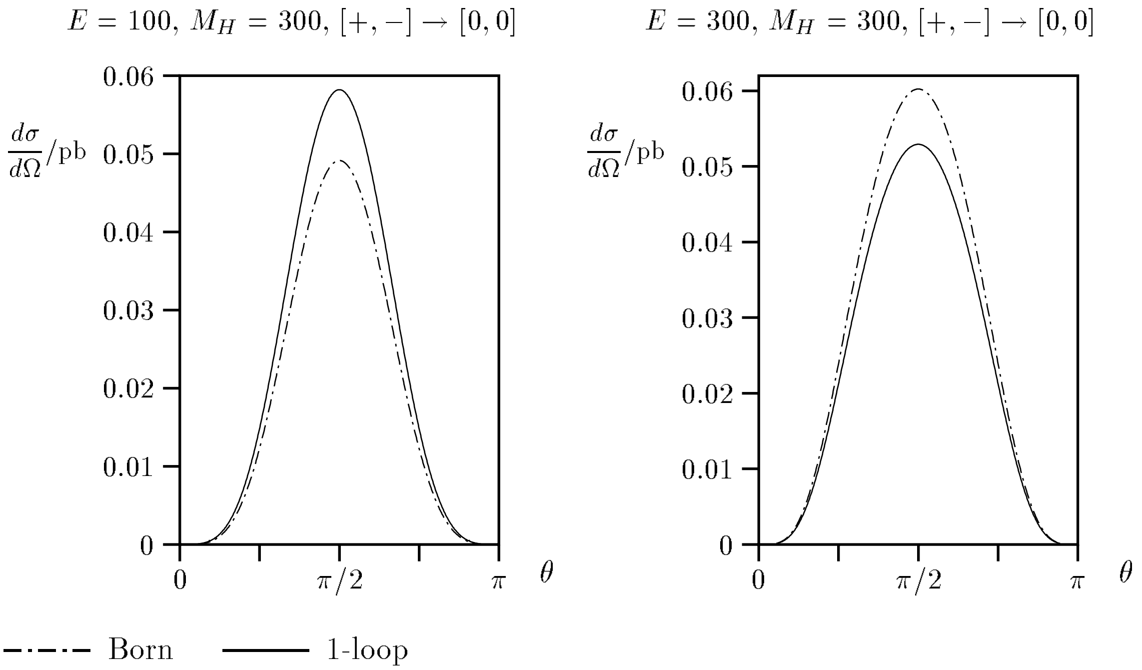


Abbildung 4.3: Die Polarisation $[+,-] \to [0,0]$ ist interessant, weil sie keine Higgs-Resonanz zeigt, denn die Skalarprodukte der Polarisationsvektoren zu den resonanten Diagrammen sind hier Null (vgl. auch Abb. 4.10.)

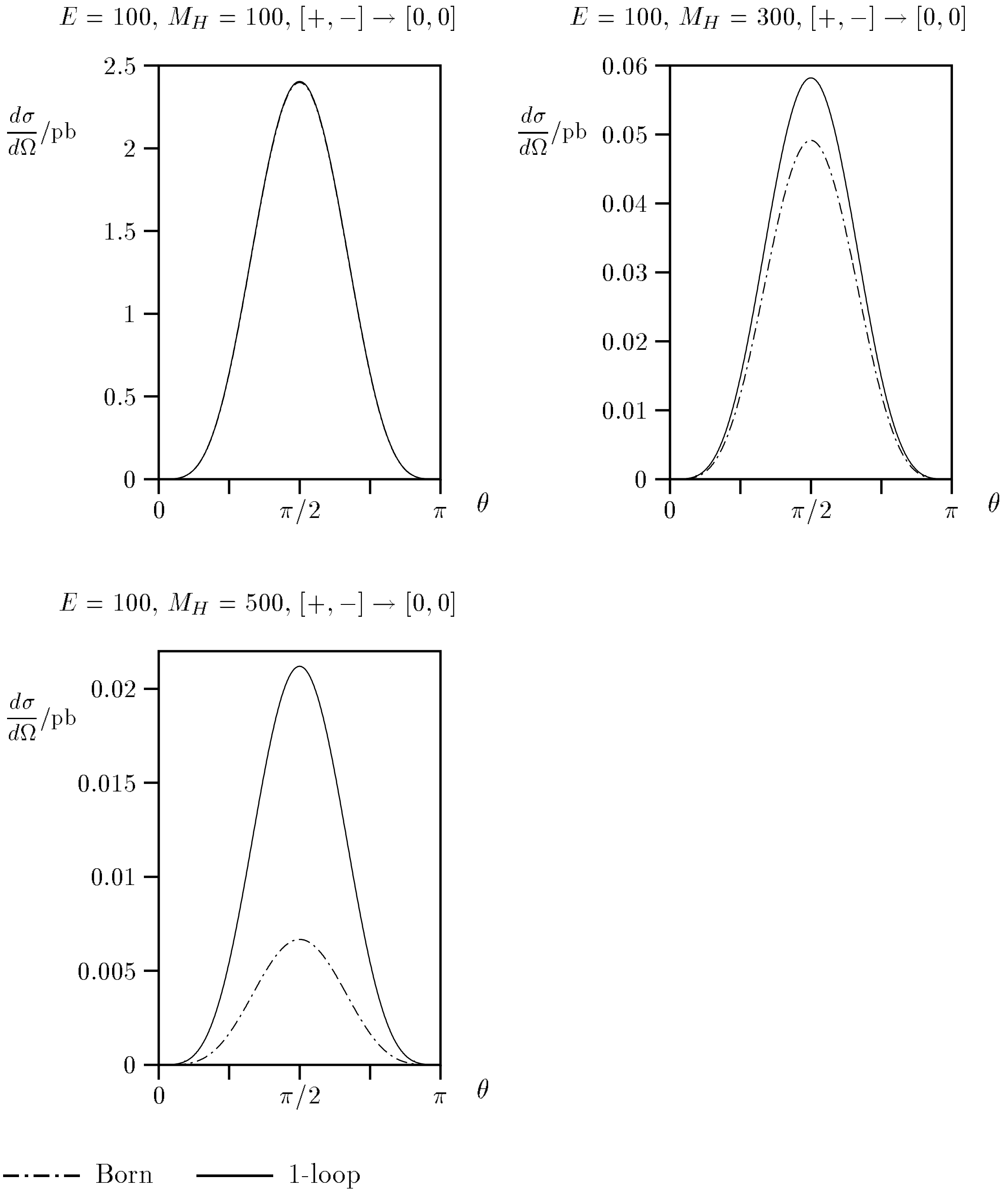


Abbildung 4.4: Statt der Energie ist in dieser Abbildung die Higgs-Masse variiert – zu beachten ist die unterschiedliche Skala.

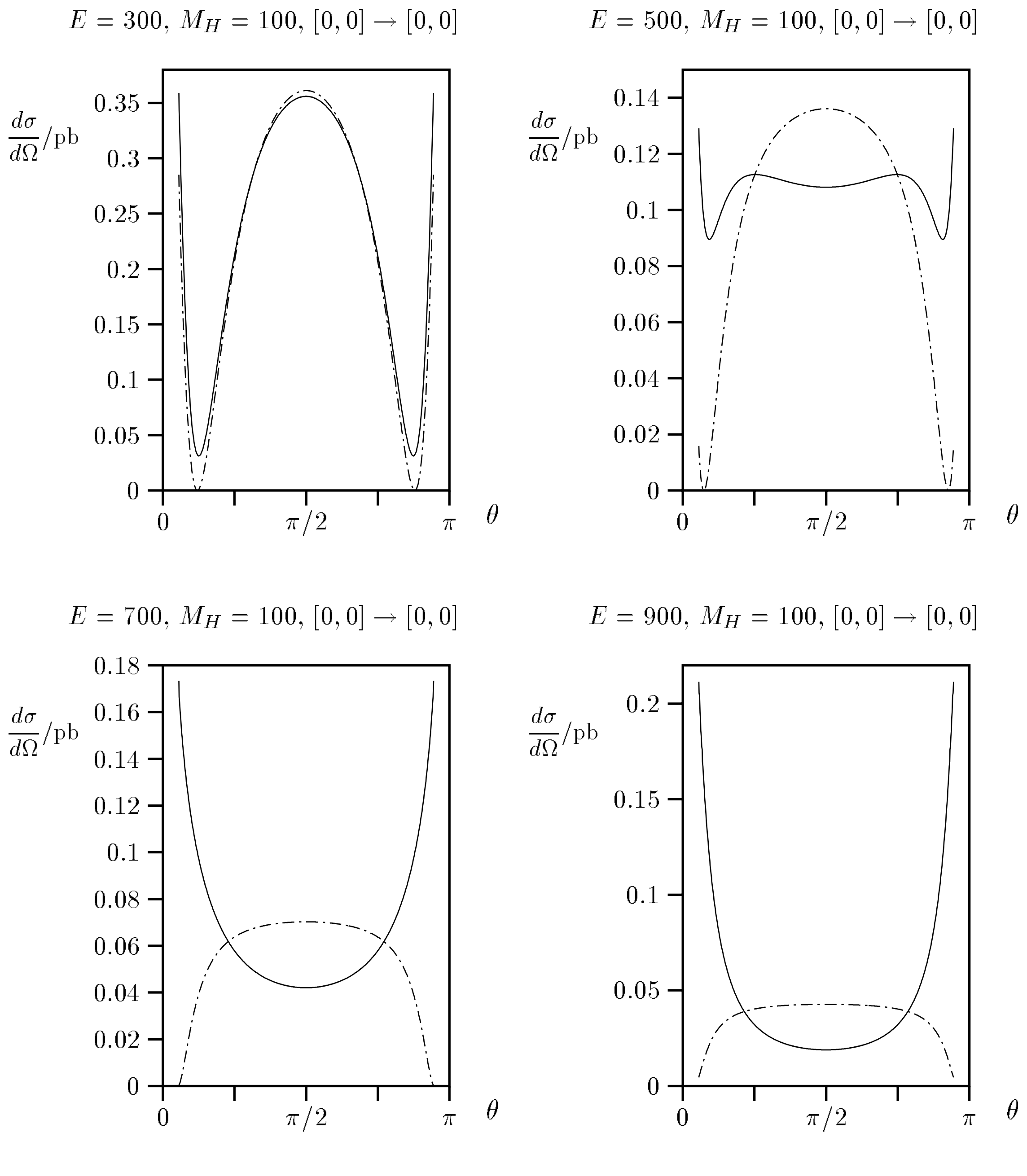


Abbildung 4.5: Diese vier Plots demonstrieren, daß der Bornsche WQ für zunehmende Energien immer mehr unterdrückt wird und daher die 1-Schleifen-Terme immer mehr dominieren.

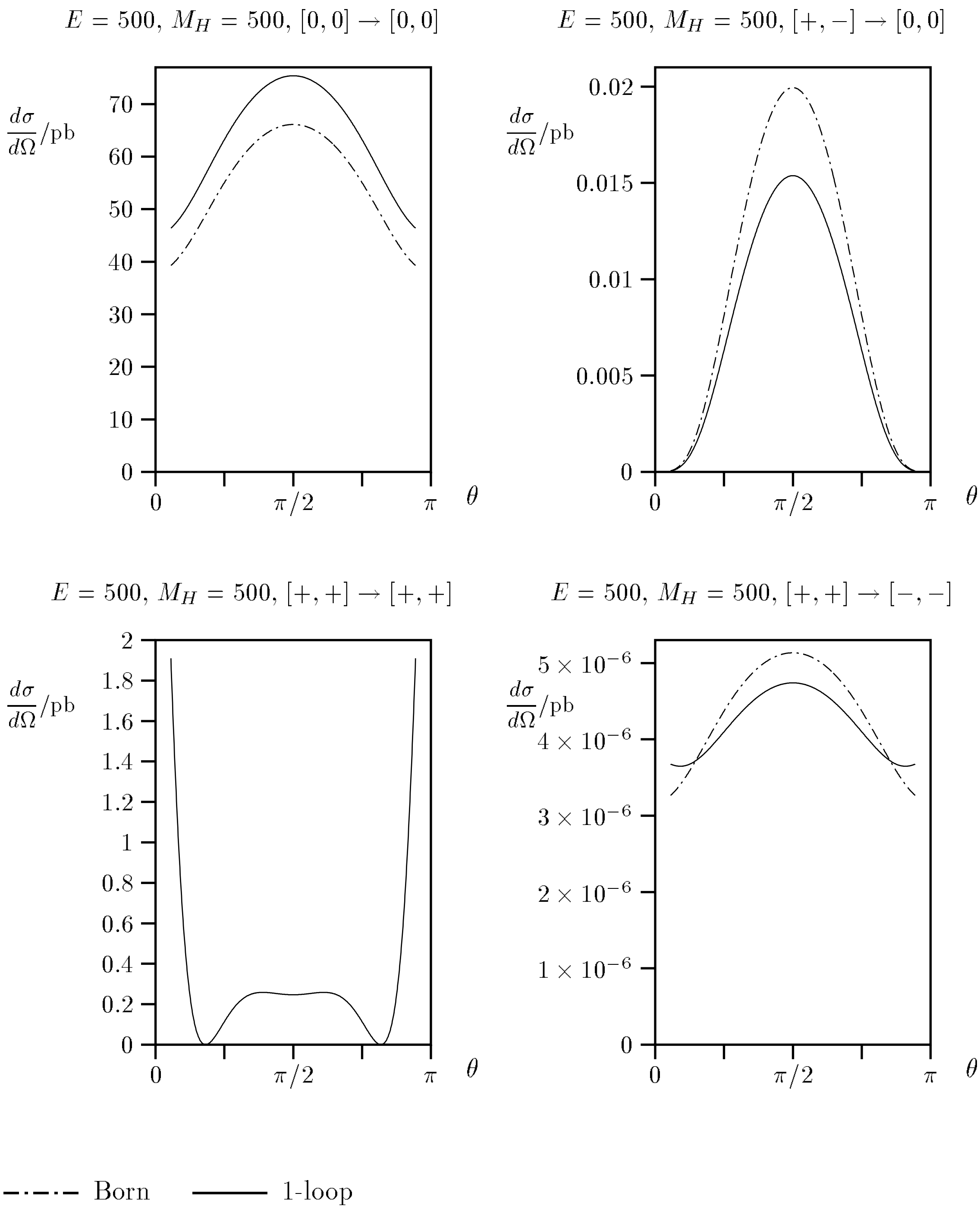


Abbildung 4.6: Diese Abbildung zeigt vier verschiedene Polarisationen bei gleicher Energie und Higgs-Masse.

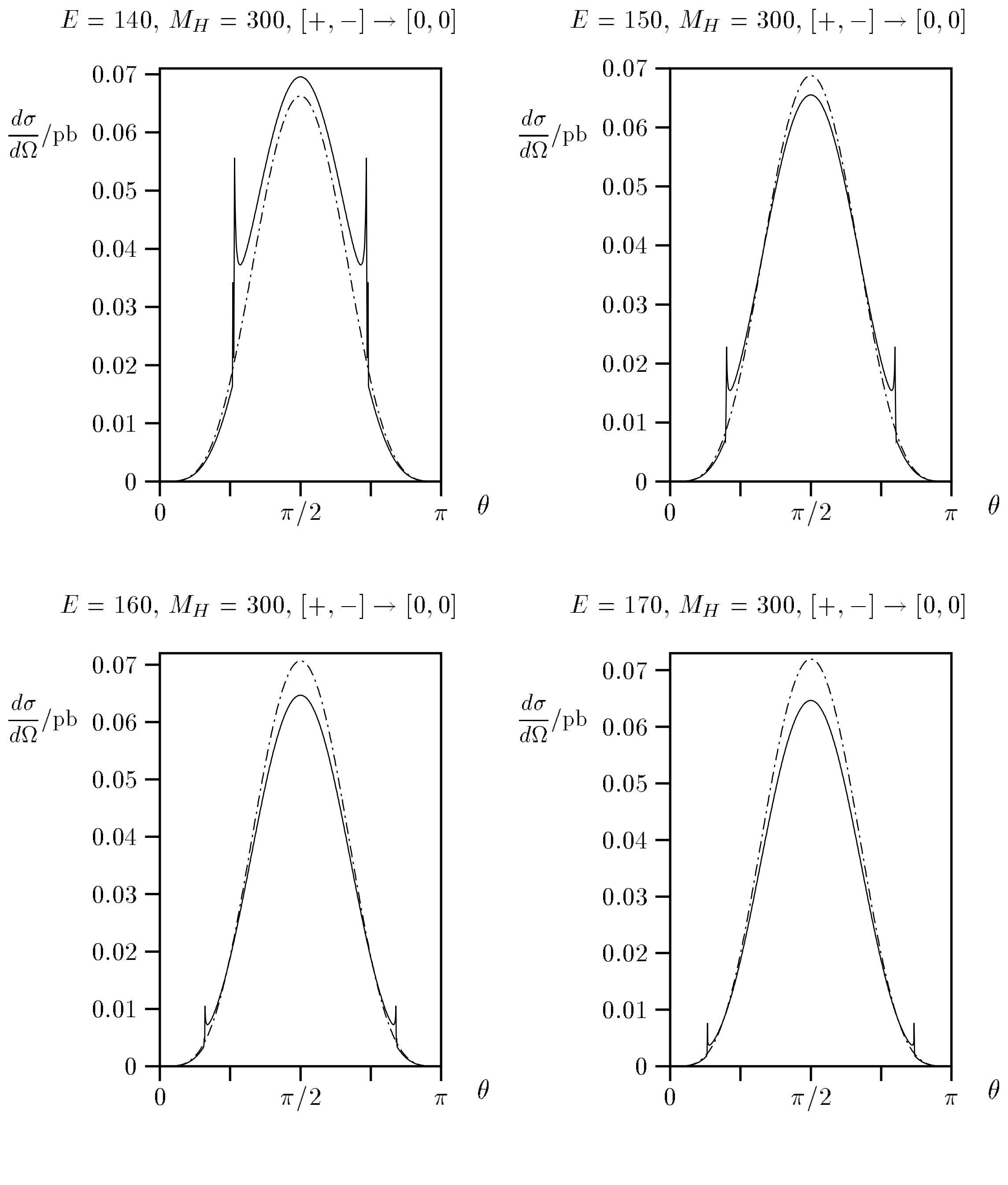


Abbildung 4.7: Die Peaks stammen von den Landau-Singularitäten in der D_0-Funktion (siehe Abschnitt 4.4). Man sieht, daß sie mit zunehmender Energie nach außen wandern.

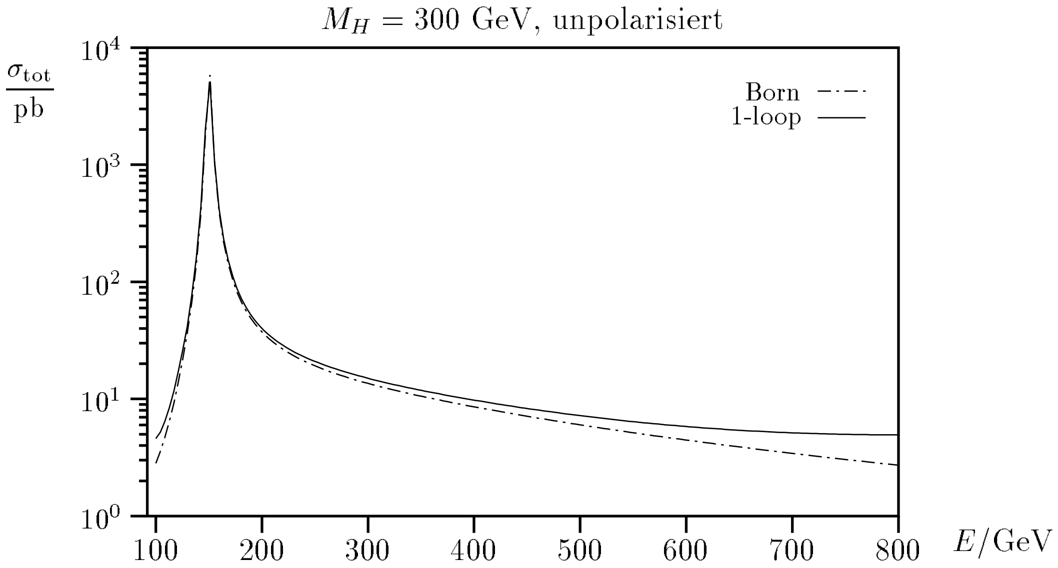


Abbildung 4.8: Der unpolarisierte differentielle WQ bei $M_H = 300$ GeV. Man kann sehr deutlich die Higgs-Resonanz erkennen. (Beachte: $E = E_{\rm cm}/2$.)

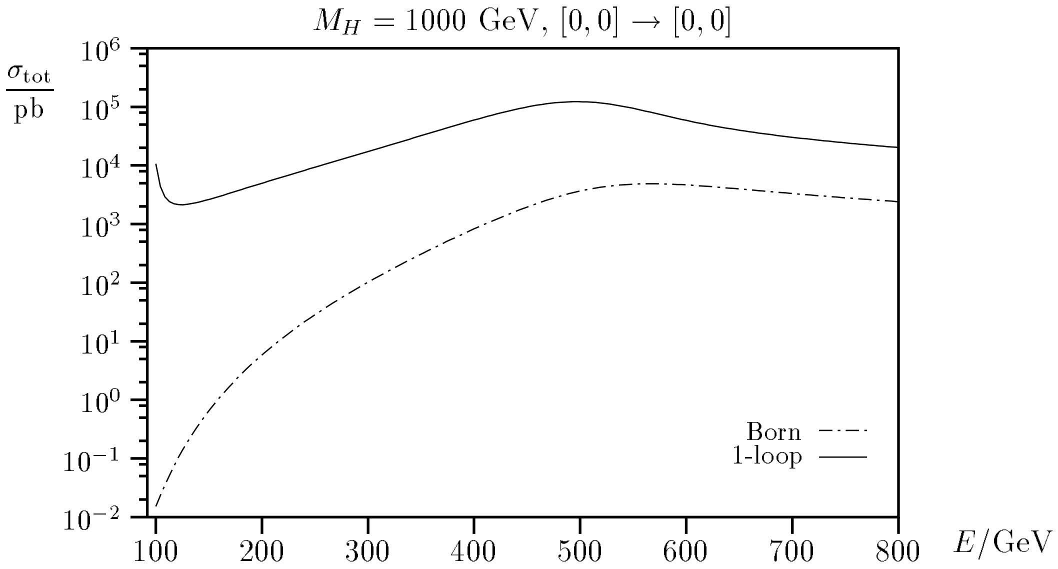


Abbildung 4.9: Mit zunehmender Higgs-Masse wird die Higgs-Resonanz breiter. In diesem Plot wurde zur Demonstration mit einem sehr schweren Higgs-Teilchen gerechnet, $M_H = 1000$ GeV.

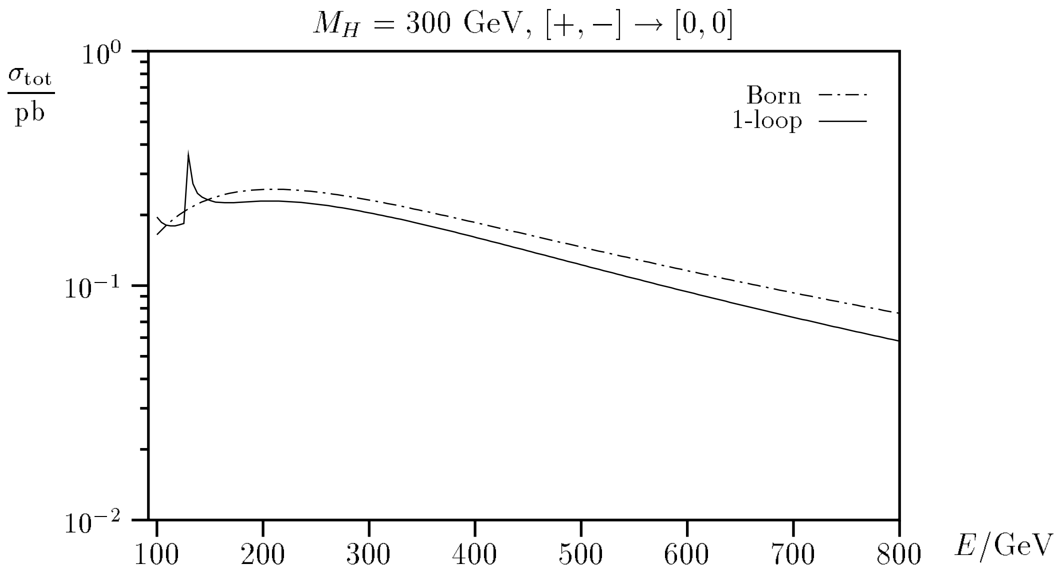


Abbildung 4.10: Die Polarisation $[+,-] \to [0,0]$ zeigt keine Resonanz (vgl. Abb. 4.3). Der Zacken bei etwa 130 GeV kommt von den Landau-Singularitäten der D_0-Funktion (vgl. Abb. 4.7).

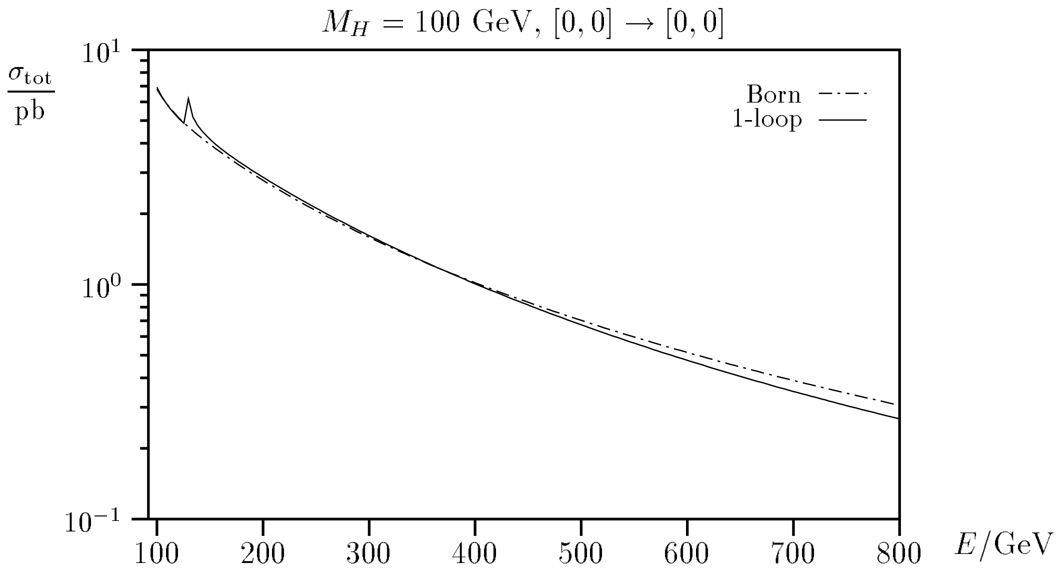


Abbildung 4.11: Bei $M_H = 100$ GeV wird die Resonanz nie erreicht, da die Schwelle für den Prozeß bei $2M_Z \approx 180$ GeV liegt. Der totale WQ fällt deshalb bis auf den Peak durch die Landau-Singularitäten monoton ab.

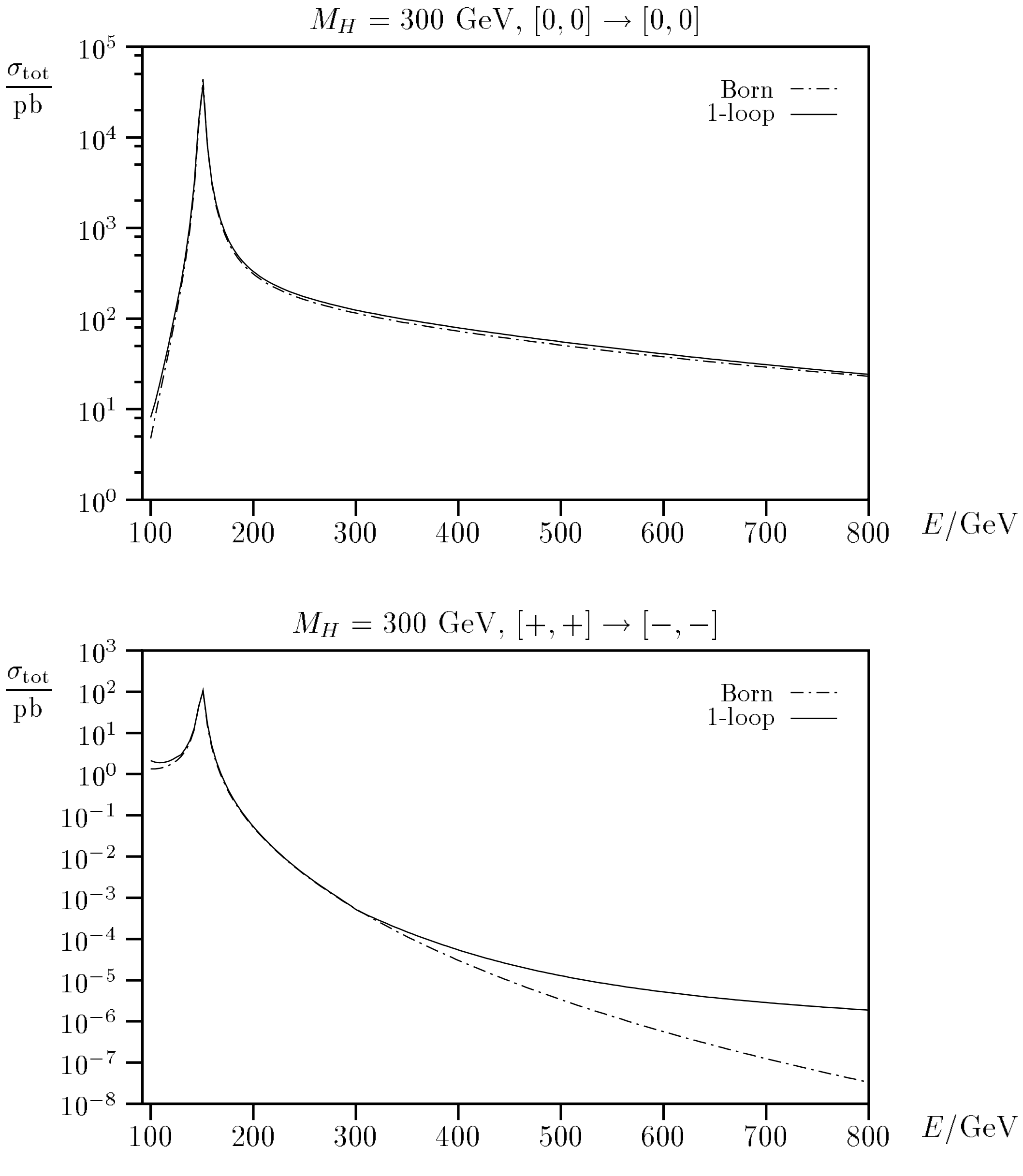


Abbildung 4.12: Diese zwei Plots machen deutlich, wieviel die $[0,0] \to [0,0]$ Polarisation im Vergleich zu anderen beiträgt.

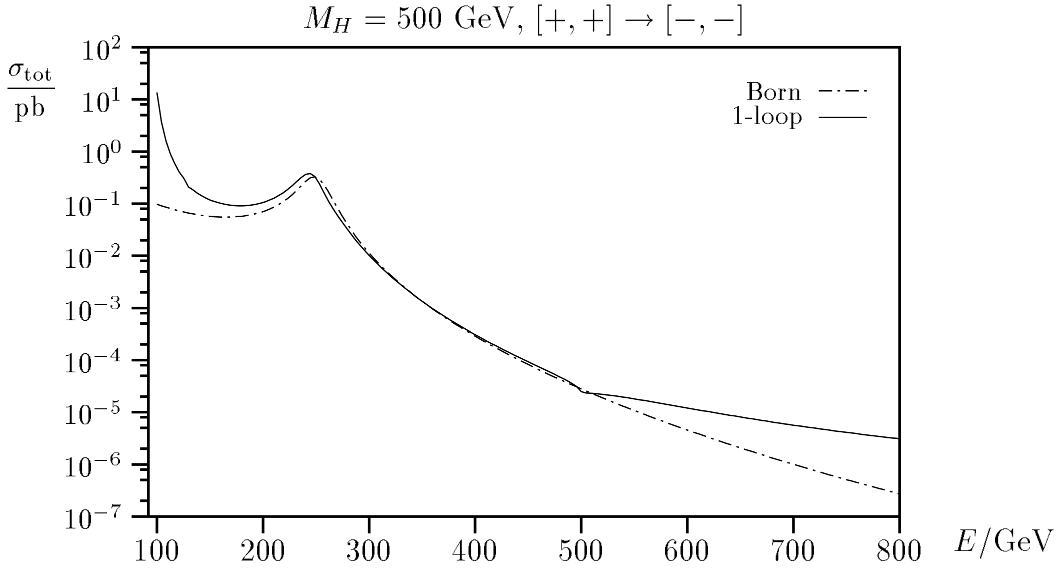


Abbildung 4.13: Es fällt ein Knick bei 500 GeV auf. Dieses Verhalten kommt von den Selbstenergie-Diagrammen. Für ein intermediäres Higgs-Boson geht an dieser Stelle der Zerfallskanal $H \to H + H$ auf.

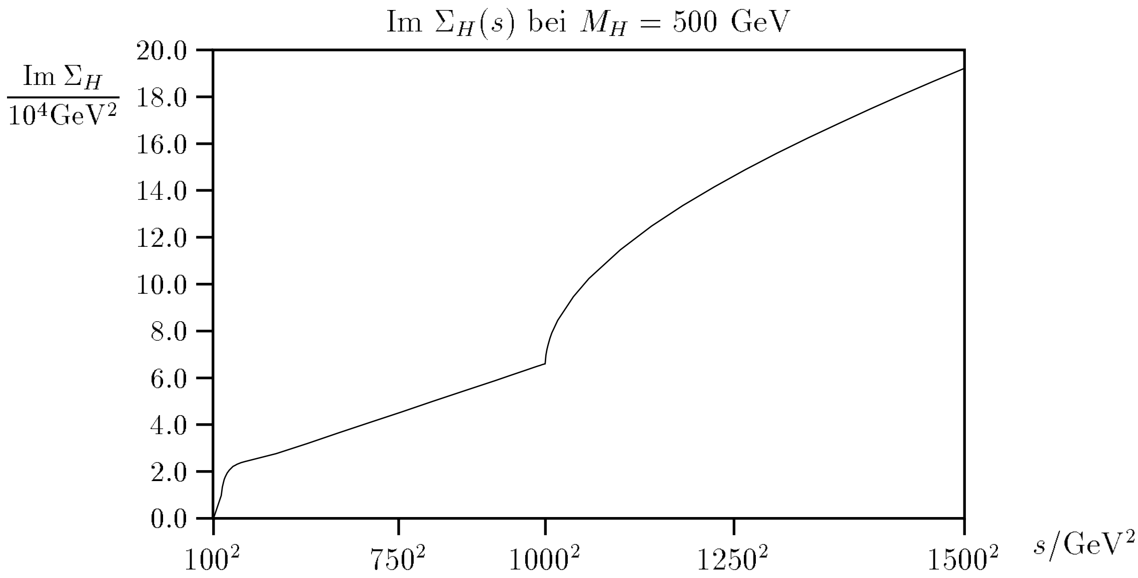


Abbildung 4.14: Hier ist der Imaginärteil von $\Sigma_H(s)$ aufgetragen. Der Knick bei $(2M_H)^2$ ist deutlich zu sehen. (Anmerkung: Das Higgs-Boson ist hier natürlich off-shell.)

4.4 Singularitäten der D_0-Funktion

Die D_0-Funktion stammt aus Box-Diagrammen und hat 10 Argumente: die 4 Quadrate der einlaufenden Impulse, 2 Impuls-Skalarprodukte und die 4 inneren Massen. Für den Fall $Z+Z\to Z+Z$ treten nur D_0's mit vier gleichen inneren und vier gleichen äußeren Massen auf,

$$D_0(M_Z^2, M_Z^2, M_Z^2, M_Z^2, t, u, m^2, m^2, m^2, m^2)\,. \tag{4.5}$$

Diese Funktion besitzt für $t<0$, $u<0$ und $M_Z^2>2m^2$ Wurzelsingularitäten der Form

$$D_0 = \text{endl.} + \frac{\pi^2}{\sqrt{|\Delta|}} \times \left\{ \begin{array}{cl} i & \text{für } \Delta < 0 \\ -1 & \text{für } \Delta > 0 \end{array} \right\} = \text{endl.} - \frac{\pi^2}{\sqrt{\Delta + i\epsilon}}\,. \tag{4.6}$$

Dabei ist

$$\Delta = \frac{tu}{4}\left[\left(\frac{t}{2}-2m^2\right)\left(\frac{u}{2}-2m^2\right) - \left(M_Z^2-2m^2\right)^2\right] = p^8\sin^2\theta\,(\sin^2\theta - a) \tag{4.7}$$

mit

$$a = \frac{M_Z^4 - m^2 s}{p^4} \equiv \sin^2\theta_0 \quad \text{und} \quad p^2 = E^2 - M_Z^2\,. \tag{4.8}$$

D_0 hat zwei (uninteressante) Singularitäten bei $\theta = 0$ und π und für $a \leqslant 1$ zwei interessante bei θ_0 und $\pi - \theta_0$. Diese letzteren sind die führenden Landau-Singularitäten (siehe [18]), und sie sind physikalisch. In Abbildung 4.15 ist die Lage der Landau-Singularitäten aufgetragen (vgl. auch Abb. 4.7).

Das eigentliche Problem entsteht, wenn man $\delta\mathcal{M}^{(1)}$ quadriert und dann aus der Wurzelsingularität ein Pol wird, der nicht mehr integrabel ist. Daß der totale Wirkungsquerschnitt oberhalb einer bestimmten Energie divergiert, ist sicher nicht physikalisch, deshalb ist zu erwarten, daß der Pol durch höhere Ordnungen kompensiert wird. Um ohne die höheren Ordnungen auszukommen, wurde in den Rechnungen folgendermaßen verfahren:

Dort, wo der quadratische Term in $\delta\mathcal{M}^{(1)}$ unverzichtbar wird, nämlich bei hohen Energien, liegen die Singularitäten weit außen am Rand des Phasenraums, wo sie ohnehin unberücksichtigt bleiben, weil die Integrationsgrenzen θ_{cut} und $\pi - \theta_{\text{cut}}$ sind (die zwei gestrichelten Linien in Abb. 4.15). Bei niedrigen Energien dagegen ist es vertretbar, den Wirkungsquerschnitt in $O(\alpha^3)$ auszurechnen. Man

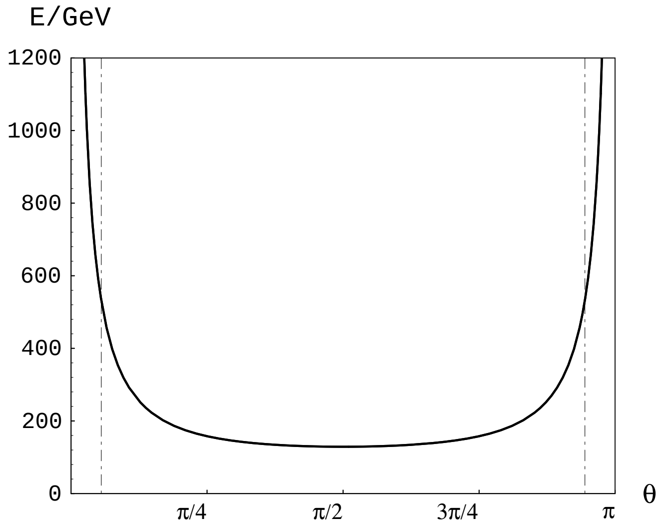


Abbildung 4.15: Die Lage der Landau-Singularitäten in der D_0-Funktion. Die gestrichelten Linien liegen bei $\theta_{\rm cut}$ und $\pi - \theta_{\rm cut}$.

macht also keinen großen Fehler, wenn man im quadratischen Term den Pol komplett abzieht, denn bei niedrigen Energien ist der $O(\alpha^4)$-Beitrag dann klein und bei hohen Energien liegen die Pole außerhalb des Integrationsbereichs. Im Interferenzterm bleiben die Wurzelsingularitäten natürlich stehen und werden mit integriert.

Beim Integrieren wird der singuläre Anteil der D_0-Funktion wie folgt behandelt. Ausgangspunkt ist folgendes Integral:

$$\int_{\theta_{\rm cut}}^{\pi-\theta_{\rm cut}} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{p^4}\int_{\theta_{\rm cut}}^{\pi-\theta_{\rm cut}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - a}}\,, \tag{4.9}$$

wobei der Radikand stets $+i\epsilon$ zu nehmen ist.

- Für $a > 1$ tritt keine Singularität auf; das Integral ist rein imaginär.

- Für $a \leqslant 1$ tritt die Wurzelsingularität bei $\theta_0 = \arcsin\sqrt{a}$ auf; das Integral ist für $\theta > \theta_0$ reell, darunter imaginär. Um das Integral genügend glatt für eine Gauß-Integration zu bekommen, wird der Integrand um $\theta = \theta_0$ in eine Reihe entwickelt. Die ersten zwei Terme sind

$$\frac{1}{\sqrt{2}\,[a(1-a)]^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{\theta-\theta_0}} - \frac{1-2a}{4\sqrt{2}\,[a(1-a)]^{3/4}}\sqrt{\theta-\theta_0}\,. \tag{4.10}$$

Diese werden vom Integranden abgezogen und analytisch behandelt. Der komplette Rest der D_0-Funktion (der Rest dieses Integrals und die endlichen Terme) wird numerisch integriert.

Algorithmisch wird dies umgesetzt als

$$\int_{\theta_{\mathrm{cut}}}^{\pi-\theta_{\mathrm{cut}}} d\theta\, D_0 \sin\theta = \int_{\theta_{\mathrm{cut}}}^{\pi-\theta_{\mathrm{cut}}} d\theta \left(D_0 \sin\theta - f_{\mathrm{sing}} + \langle f_{\mathrm{sing}} \rangle \right) , \tag{4.11}$$

wobei $-p^4\pi^{-2} f_{\mathrm{sing}}$ die obigen zwei Terme der Entwicklung sind und

$$\langle f_{\mathrm{sing}} \rangle = \frac{1}{\pi - 2\theta_{\mathrm{cut}}} \int_{\theta_{\mathrm{cut}}}^{\pi-\theta_{\mathrm{cut}}} d\theta\, f_{\mathrm{sing}} . \tag{4.12}$$

Kapitel 5

Zusammenfassung

In den zurückliegenden Kapiteln wurden die elektroschwachen Strahlungskorrekturen zum Wirkungsquerschnitt für den Prozeß $Z + Z \rightarrow Z + Z$ mit Hilfe von Feynman-Diagrammen störungstheoretisch ausgerechnet. Die theoretische Grundlage war das elektroschwache Standardmodell und die Rechnung wurde auf Ein-Schleifen-Niveau durchgeführt, d.h. eine geschlossene Schleife im Feynman-Diagramm.

Die Feynman-Diagramme wurden mit dem Programmpaket *FeynArts* in Mathematica erzeugt und mit dem Programm *FeynCalc* algebraisch vereinfacht. Die Diagramme wurden im On-Shell-Schema renormiert und numerisch in C++ ausgewertet. Die Resonanz durch das instabile Higgs-Boson und die Landau-Singularitäten in der D_0-Funktion wurden untersucht.

Da die Diagramme in niedrigster Ordnung, der Bornschen Näherung, mit zunehmender Energie stark unterdrückt sind, sind die Beiträge der Ein-Schleifen-Diagramme relativ groß und eigentlich keine Korrekturen mehr. Für Z-Streuung ist es zur Berechnung der führenden Terme also wirklich notwendig, die erste Ordnung mitzunehmen.

Die Rechnung stellt insgesamt aber in zweifacher Hinsicht eine Idealisierung dar. Geht man von der in Abbildung 1.1 dargestellten Möglichkeit aus, Z-Streuung in einem Proton–Proton-Speicherring zu realisieren, so muß der Wirkungsquerschnitt noch mit der Verteilung der Z-Bosonen im Proton gefaltet werden, um die theoretischen Kurven mit den experimentellen Daten vergleichen zu können. Da das Z-Boson ein instabiles Teilchen ist, ist es auch eine Idealisierung, einen Endzustand mit zwei (on-shell) Z's anzunehmen. Lange bevor die Z's den Detektor treffen, sind sie in Fermion–Antifermion-Paare zerfallen und unterliegen nicht mehr exakt der Massenschalenbedingung freier Teilchen.

Abgesehen jedoch von diesen eher durch das Experiment bedingten Provisos ist die theoretische Arbeit zum Prozeß $Z + Z \to Z + Z$ geleistet und da sich der LHC nun schon in der fortgeschrittenen Planungsphase befindet, bleibt zu hoffen, daß in nicht allzu ferner Zukunft Z-Streuung experimentell durchführbar ist.

Anhang A

Formeln für den Bornschen Wirkungsquerschnitt

Es folgt eine Auflistung der Formeln für das invariante Matrixelement in Bornscher Näherung für alle Polarisationen. Die implizite Winkelabhängigkeit in $t = -4p^2 \sin^2\theta/2$ und $u = -4p^2\cos^2\theta/2$ wurde nicht explizit ausgeschrieben, um kompaktere Formeln zu bekommen. Der differentielle Wirkungsquerschnitt berechnet sich nach der Formel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{256\pi^2 E^2}\left|\frac{e^2}{M_W^2 s_W^2} \times \text{Tabelleneintrag}\right|^2 . \tag{A.1}$$

Es ist $p^2 = E^2 - M_Z^2$ und $s_W = \sin\theta_W$. Die ersten zwei Zeichen in der Klammer geben die Polarisation der einlaufenden Z's und die letzten zwei Zeichen die der auslaufenden Z's an.

Polarisationen	$\frac{M_W^2 s_W^2}{e^2}\mathcal{M}$
[0000]	$\frac{(E^2+p^2)^2}{s-M_H^2} + \frac{(p^2-E^2\cos\theta)^2}{t-M_H^2} + \frac{(p^2+E^2\cos\theta)^2}{u-M_H^2}$
[00++], [00−−] : + [++00], [−−00] : −	$\pm\frac{M_Z^2}{2}\left[\frac{2(E^2+p^2)}{s-M_H^2} + \frac{E^2\sin^2\theta}{t-M_H^2} + \frac{E^2\sin^2\theta}{u-M_H^2}\right]$
[000+], [000−], [00+0], [00−0], [+000], [−000] : + [0+00], [0−00] : −	$\pm\frac{M_Z}{\sqrt{2}}\frac{E\sin\theta\,[E^2\cos\theta\,(2M_H^2-t-u)-p^2(t-u)]}{(t-M_H^2)(u-M_H^2)}$
[0+0+], [0−0−] : + [+0+0], [−0−0] : −	$\pm\frac{M_Z^2}{2}\left[\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}\,(E^2\cos\theta-p^2)}{t-M_H^2} - \frac{E^2\sin^2\theta}{u-M_H^2}\right]$

Polarisationen	$\frac{M_W^2 s_W^2}{e^2}\mathcal{M}$
$[+0-0], [-0+0] : +$ $[0+0-], [0-0+] : -$	$\pm\frac{M_Z^2}{2}\left[\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}\,(E^2\cos\theta - p^2)}{t-M_H^2} + \frac{E^2\sin^2\theta}{u-M_H^2}\right]$
$[+00+], [-00-] : +$ $[0++0], [0--0] : -$	$\pm\frac{M_Z^2}{2}\left[\frac{E^2\sin^2\theta}{t-M_H^2} + \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}\,(E^2\cos\theta + p^2)}{u-M_H^2}\right]$
$[+00-], [-00+] : +$ $[0+-0], [0-+0] : -$	$\pm\frac{M_Z^2}{2}\left[\frac{E^2\sin^2\theta}{t-M_H^2} - \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}\,(E^2\cos\theta + p^2)}{u-M_H^2}\right]$
$[0+++], [0---], [++0+],$ $[+++0], [--0-], [---0] : +$ $[+0++], [-0--] : -$	$\pm\frac{M_Z^3}{2\sqrt{2}}\frac{E\sin\theta\,[\cos\theta\,(2M_H^2-t-u)+t-u]}{(t-M_H^2)(u-M_H^2)}$
$[++0-], [++-0], [--0+],$ $[--+0], [0+--], [0-++] : +$ $[+0--], [-0++] : -$	$\pm\frac{M_Z^3}{2\sqrt{2}}\frac{E\sin\theta\,[\cos\theta\,(2M_H^2-t-u)-t+u]}{(t-M_H^2)(u-M_H^2)}$
$[0+-+], [0-+-], [+-0-],$ $[+-+0], [-+0+], [-+-0] : +$ $[+0+-], [-0-+] : -$	$\pm\sqrt{2}M_Z^3\frac{E\sin\frac{\theta}{2}\cos^3\frac{\theta}{2}\,(2M_H^2-t-u)}{(t-M_H^2)(u-M_H^2)}$
$[+0-+], [-0+-] : +$ $[0++-], [0--+], [+-0+],$ $[+--0], [-+0-], [-++0] : -$	$\pm\sqrt{2}M_Z^3\frac{E\cos\frac{\theta}{2}\sin^3\frac{\theta}{2}\,(2M_H^2-t-u)}{(t-M_H^2)(u-M_H^2)}$
$[+-00], [-+00] : +$ $[00+-], [00-+] : -$	$\pm\frac{M_Z^2}{2}\frac{E^2\sin^2\theta\,(2M_H^2-t-u)}{(t-M_H^2)(u-M_H^2)}$
$[+++-], [++-+], [+-++],$ $[+---], [-+++], [-+--],$ $[--+-], [---+]$	$-\frac{M_Z^4}{4}\frac{\sin^2\theta\,(2M_H^2-t-u)}{(t-M_H^2)(u-M_H^2)}$
$[++++], [----]$	$-M_Z^4\left[\frac{1}{s-M_H^2} + \frac{\cos^4\frac{\theta}{2}}{t-M_H^2} + \frac{\sin^4\frac{\theta}{2}}{u-M_H^2}\right]$
$[++--], [--++]$	$-M_Z^4\left[\frac{1}{s-M_H^2} + \frac{\sin^4\frac{\theta}{2}}{t-M_H^2} + \frac{\cos^4\frac{\theta}{2}}{u-M_H^2}\right]$
$[+-+-], [-+-+]$	$-M_Z^4\cos^4\frac{\theta}{2}\left[\frac{1}{t-M_H^2} + \frac{1}{u-M_H^2}\right]$
$[+--+], [-++-]$	$-M_Z^4\sin^4\frac{\theta}{2}\left[\frac{1}{t-M_H^2} + \frac{1}{u-M_H^2}\right]$

Anhang B

Tabellierte Werte

Für numerische Vergleiche sind hier für einige ausgewählte Energien, Winkel und Polarisationen die Werte gelistet. Die Angabe in Prozent hinter dem absoluten Wert ist die prozentuale Änderung gegenüber dem Bornschen Wirkungsquerschnitt, also

$$\Delta = \frac{(d\sigma/d\Omega)_{\mathrm{1loop}} - (d\sigma/d\Omega)_{\mathrm{Born}}}{(d\sigma/d\Omega)_{\mathrm{Born}}} \cdot 100\% \,. \tag{B.1}$$

E GeV	θ	$d\sigma/d\Omega/\mathrm{pb}$ unpolarisiert		$[0,0] \to [0,0]$		$[+,-] \to [0,0]$	
$M_H = 100$ GeV							
100	.17453	5.2210	2.0767%	6.6370	6.0590%	.0025257	2.0455%
	.75166	4.9385	1.3070%	.81836	10.892%	.56145	.54887%
	1.5754	4.6469	.74045%	.97478	−7.6017%	2.4034	.26695%
300	.17453	.87433	120.40%	.35902	25.921%	.00602	−.61747%
	.75166	.28590	25.308%	.19662	3.3443%	.09520	−5.5401%
	1.5754	.20984	−1.1154%	.35591	−1.4554%	.11601	−9.5712%
500	.17453	1.2176	957.92%	.12906	714.02%	.0082222	−1.9603%
	.75166	.14573	92.424%	.11253	3.1302%	.035631	−11.419%
	1.5754	.12539	69.818%	.10810	−20.564%	.036172	−17.797%
700	.17453	1.6735	3238.1%	.17331	70878%	.0078047	−3.2357%
	.75166	.22328	490.15%	.059725	−4.9723%	.017524	−17.171%
	1.5754	.24631	559.34%	.042051	−40.155%	.016653	−24.847%

E GeV	θ	$d\sigma/d\Omega/\mathrm{pb}$ unpolarisiert		$[0,0] \to [0,0]$		$[+,-] \to [0,0]$	
$M_H = 300$ GeV							
100	.17453	.76415	63.529%	6.6370	39.281%	.0025257	56.725%
	.75166	.74741	62.556%	.81836	56.594%	.56145	20.984%
	1.5754	.73767	63.699%	.97478	116.12%	2.4034	18.438%
300	.17453	1.8584	44.595%	11.213	8.3223%	.00013866	−9.1935%
	.75166	2.2253	10.970%	17.946	8.1498%	.019161	−11.152%
	1.5754	2.7580	8.0179%	23.893	8.1154%	.052927	−12.130%
500	.17453	1.6133	248.04%	4.1832	13.105%	.00026789	−12.691%
	.75166	1.0721	16.852%	8.3643	9.5541%	.015806	−14.040%
	1.5754	1.2425	12.945%	10.271	8.0983%	.026944	−17.300%
700	.17453	1.9177	629.51%	2.4944	20.203%	.00041572	−13.860%
	.75166	.76594	41.891%	4.8839	7.6501%	.010942	−18.487%
	1.5754	.84864	39.657%	5.4910	4.7740%	.014440	−23.681%

$M_H = 500$ GeV							
100	.17453	5.1620	12759%	14.305	11274%	.000033258	447.88%
	.75166	5.1620	13024%	14.326	19620%	.0047657	228.37%
	1.5754	5.1683	13380%	14.393	52304%	.021195	217.59%
300	.17453	28.986	−15.316%	252.48	−16.824%	.000024092	−15.459%
	.75166	31.334	−15.358%	277.47	−15.620%	.0047321	−18.962%
	1.5754	34.165	−14.528%	304.38	−14.565%	.018103	−19.773%
500	.17453	6.3037	42.636%	46.375	18.064%	.000040704	−24.527%
	.75166	7.0798	16.018%	62.245	14.986%	.0057076	−22.203%
	1.5754	8.4698	14.740%	75.395	14.014%	.015377	−22.899%
700	.17453	4.2716	100.09%	23.667	25.059%	.000064098	−25.332%
	.75166	4.2432	24.490%	35.994	19.240%	.0053378	−24.192%
	1.5754	5.0441	23.879%	43.290	18.716%	.010588	−25.749%

Literaturverzeichnis

[1] W. Hollik. Preprint hep-ph/9507406.

[2] M. Kaku. Quantum Field Theory. Oxford Univ. Press, New York (1993).

L.H. Ryder. Quantum Field Theory. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1985).

P. Ramond. Field Theory: a modern primer. Addison Wesley, Reading (1990).

F. Mandl, G. Shaw. Quantum Field Theory. Wiley, Chichester (1993).

C. Itzkson, J.B. Zuber. Quantum Field Theory. McGraw–Hill, New York (1980).

[3] A. Denner. *Fortschr. Phys.* **41** (1993) 4.

[4] C.N. Yang, R.L. Mills. *Phys. Rev.* **96** (1954) 191.

[5] S.L. Glashow. *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579.

S. Weinberg. *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264.

A. Salam, in: Elementary particle theory. Ed. N. Svartholm, Almqvist and Wiksell, Stockholm (1968) 367.

[6] P.W. Higgs. *Phys. Lett.* **B12** (1964) 132; *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508; *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156.

R. Brout, F. Englert. *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321.

T.W.B. Kibble. *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554.

[7] L.D. Faddeev, V.N. Popov. *Phys. Lett.* **B25** (1967) 29.

[8] G. 't Hooft, M. Veltman. *Nucl. Phys.* **B44** (1972) 189.

C.G. Bollini, J.J. Giambiagi. *Nuovo Cimento* **12B** (1972) 20.

J.F. Ashmore. *Nuovo Cimento Lett.* **4** (1972) 289.

G. Leibbrandt. *Rev. Mod. Phys.* **47** (1979) 849.

[9] G. 't Hooft. *Nucl. Phys.* **B33** (1971) 173; **B35** (1971) 167.

[10] D.A. Ross, J.C. Taylor. *Nucl. Phys.* **B51** (1973) 125; **B58** (1973) 643.

M. Böhm, W. Hollik, H. Spiesberger. *Fortschr. Phys.* **34** (1986) 687.

A. Sirlin. *Phys. Rev.* **D22** (1980) 2695.

[11] G. 't Hooft, M. Veltman. *Nucl. Phys.* **B153** (1979) 365.

A. Denner, U. Nierste, R. Scharf. *Nucl. Phys.* **B367** (1991) 637.

[12] G.J. van Oldenborgh, J.A.M. Vermaseren. *Z. Phys.* **C46** (1990) 425. Siehe auch Preprint NIKHEF–H/90–15.

[13] H. Veltman. *Z. Phys.* **C62** (1994) 35.

A. Aeppli, G.J. van Oldenborgh, D. Wyler. *Nucl. Phys.* **B428** (1994) 126.

E.N. Argyres *et al.* Preprint INLO–PUB–8/95.

Reports of the working group on precision calculations for the Z resonance. Eds. D. Bardin, W. Hollik, G. Passarino, CERN Report 95–03.

[14] J. Küblbeck, M. Böhm, A. Denner. *Comp. Phys. Commun.* **60** (1991) 165.

H. Eck, J. Küblbeck. Guide to FeynArts 1.0. Universität Würzburg (1992).

H. Eck, J. Küblbeck. Guide to FeynArts 2.0. Universität Würzburg, in Vorbereitung.

[15] S. Wolfram. Mathematica (2^{nd} ed). Addison-Wesley, Reading (1991).

[16] R. Mertig, M. Böhm, A. Denner. *Comp. Phys. Commun.* **64** (1991) 345.

R. Mertig. Guide to FeynCalc 1.0. Universität Würzburg (1992).

[17] L. Montanet et al. *Phys. Rev.* **D50** (1994) 1173. Die jeweils neuesten Werte sind auf der WWW-page der Particle Data Group unter http://pdg.lbl.gov/ zu finden.

[18] R.J. Eden, P.V. Landshoff, D.I. Olive, J.C. Polkinghorne. The analytic S-Matrix. Cambridge Univ. Press (1966).

G.F. Wolter, in: Methods in subnuclear physics. Ed. M. Nikolić, Vol. II, Gordon and Breach (1968) 523.

I.T. Todorov. Analytic properties of Feynman diagrams in quantum field theory. Pergamon Press (1971).

C. Kacser. *Phys. Lett.* **12** (1964) 269.

Danksagung

Herzlichen Dank an alle, die mir geholfen haben: Prof. M. Böhm für diese Arbeit und die ununterbrochene Unterstützung. A. Denner für die vielen Antworten auf meine noch zahlreicheren Fragen. R. Schuster für die praktische Einführung in die Feyncomputerei. S. Bauberger für das Korrekturlesen und H. Eck und T. Grund für die Beratung in TEXnischen Problemen.

Bestätigung

Hiermit bestätige ich, daß ich diese Diplomarbeit alleine und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Würzburg, den 28. August 1995

....