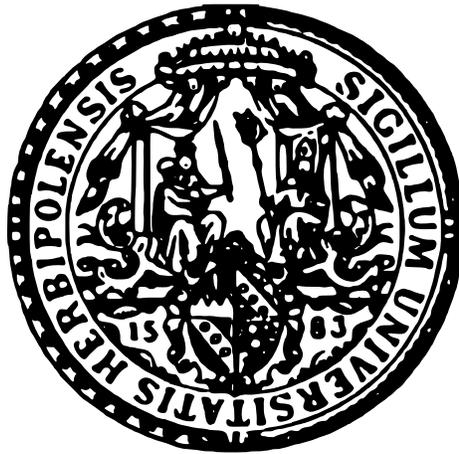


Top Quark Paar Produktion am LHC

Diplomarbeit
von
Peter Bärnreuther



vorgelegt bei
Prof. Dr. Reinhold Rückl

am
Institut für Theoretische Physik und Astrophysik
der
Bayerischen Julius-Maximilians-Universität
Würzburg

19. September 2008

In dieser Arbeit wird die NNLO Rechnung der 2-Schleifen virtuellen Korrekturen für die Top Quark Paar Produktion motiviert, beschrieben und zum größten Teil durchgeführt. Kapitel 2 erläutert die Top Quark Produktion, den Zerfall und die Messung des Wirkungsquerschnitts und der Top Quark Masse aus der experimentellen Sichtweise. Kapitel 3 gibt eine kurze Einführung in die Störungsrechnung in der QCD, insbesondere wird das Faktorisierungstheorem behandelt. Des Weiteren wird der Status Quo der Top Quark Paar Produktionsrechnung beschrieben und ein Ausblick auf die zukünftig volle NNLO Rechnung wird gegeben. Im 4. Kapitel werden die Methoden erklärt, mit denen die Berechnung der 2-Schleifen virtuellen Korrekturen im Gluon Fusions Kanal durchgeführt wurde und einige Ergebnisse explizit angegeben. Anschließend erfolgt eine Zusammenfassung der Diplomarbeit und ein Ausblick in die Zukunft. Die Ergebnisse werden in Kürze in einem Papier veröffentlicht.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Experimentelle Top Quark Physik	3
2.1	Top Quark Produktion	3
2.1.1	Single Top Quark Produktion	3
2.1.2	Top Quark Paar Produktion	6
2.2	Top Quark Zerfall	7
2.3	Messung des Wirkungsquerschnitts der Top Quark Paar Produktion	9
2.4	Experimentelle Bestimmung der Top Quark Masse	13
2.4.1	Bestimmung der Top Quark Masse aus der Rekonstruktion von Zerfällen	13
2.4.2	Bestimmung der Top Quark Masse aus dem Wirkungsquerschnitt	16
2.5	Weitere Top Quark Eigenschaften	17
3	Theoretischer Zugang zur Top Quark Physik	19
3.1	Grundzüge der QCD	19
3.2	Störungsrechnung in der QCD	20
3.3	Das Faktorisierungs-Theorem	21
3.3.1	Die Parton Verteilungs Funktionen	23
3.3.2	Der harte Wirkungsquerschnitt	24
3.4	Status der Berechnung des Top Quark Wirkungsquerschnitts	25
3.5	Die Zukunft: Eine vollständige NNLO Rechnung	29
4	Berechnung der virtuellen 2-Schleifen Korrekturen	32
4.1	Vom Prozess zu den Master Integralen	32
4.2	Berechnung der Master Integrale	36
4.2.1	Mellin Barnes Darstellung	36
4.2.2	Entwicklung in ϵ	38
4.2.3	Entwicklung in der Masse	40
4.2.4	Barnes Lemmas	41
4.2.5	Berechnung von 1- und 2-fachen Integralen	41
4.2.6	Weitere Methoden	44
4.3	Vom Hochenergielimes zum Niedrigenergielimes	46
4.4	Beispiele von Ergebnissen für Master Integrale	48
5	Zusammenfassung und Ausblick	53

1 Einleitung

Seit wenigen Tagen ist der Large Hadron Collider (LHC) in Betrieb. Mit seiner Hilfe ist es möglich, die Natur bei vorher unerreichbaren Energien zu erforschen. Für seinen Bau gibt es drei Hauptmotivationen: Erstens, die Suche nach dem Higgs Teilchen, zweitens, die Suche nach Physik jenseits des Standardmodells und drittens, die Vermessung der Top Quark Eigenschaften.

Alle drei Hauptmotivationen für den Bau des LHC's sind mit der Top Quark Paar Produktion verknüpft. Obwohl das Top Quark bereits 1996 am Tevatron entdeckt wurde, konnten seine Eigenschaften aufgrund der niedrigen Statistik nur spärlich vermessen werden (mit Ausnahme seiner Masse, welche am Tevatron mit einer Genauigkeit von unter 1% bestimmt werden konnte). Am LHC werden aufgrund der höheren Beschleunigerenergie und einer um einen Faktor 10-100 höheren Luminosität genügend Top Quark Paare für eine detaillierte Vermessung ihrer Eigenschaften zur Verfügung stehen (siehe Kapitel 2.1).

Des Weiteren bietet der Top Quark Paar Kanal die Möglichkeit, Physik jenseits des Standardmodells zu entdecken, indem man experimentell zum einen den Wirkungsquerschnitt und zum anderen die Top Quark Masse misst. Beide Größen sind korreliert, da der Wirkungsquerschnitt massenabhängig ist (siehe Abbildung 2.12). Sollte nun der berechnete Wirkungsquerschnitt, welcher mit Hilfe der gemessenen Top Quark Masse gewonnen wird, von dem experimentell gemessenen Wirkungsquerschnitt abweichen, wäre dies ein Hinweis auf neue Physik. Es könnten neue Teilchen in Top Quarks zerfallen oder neue Zerfallskanäle für die Top Quarks entdeckt werden. Außerdem bilden Top Quark Zerfälle oft dominante Hintergründe zu vielen SM Erweiterungen, wie Supersymmetrie.

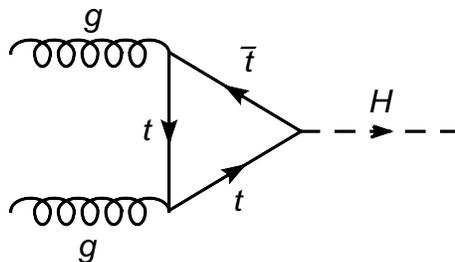


Abbildung 1.1: Der Hauptproduktionskanal des Higgs Bosons verläuft über eine Top Quark Schleife.

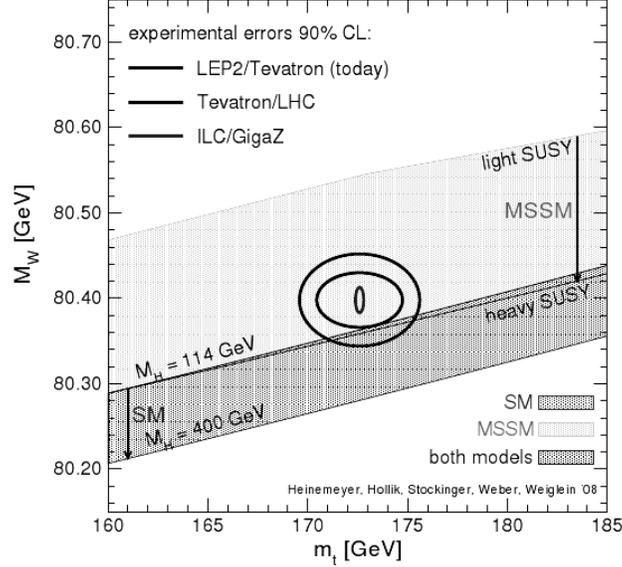


Abbildung 1.2: Die Higgs Masse wird in Abhängigkeit von der Top Quark und der W Boson Masse dargestellt. Die Kreise verdeutlichen die Messgenauigkeit der verschiedenen Beschleuniger. Zusätzlich ist der für die Higgs Masse erlaubte Bereich für das SM und das MSSM eingezeichnet.

Bei der Suche nach dem Higgs Boson spielt das Top Quark gleich zweifach eine entscheidende Rolle. Zum einen verläuft der Hauptproduktionskanal des Higgs Teilchen über eine Top Quark Schleife im Gluon Fusions Kanal (siehe Abbildung 1.1). Um also den Wirkungsquerschnitt für die Higgs Produktion berechnen zu können, müssen die Gluon Verteilungs Funktionen (PDF's) (Kapitel 3.1.3) für hohe Energien bekannt sein, welche bis jetzt nur relativ ungenau vermessen werden konnten¹. Da am LHC 90% der Top Quark Paare im Gluon Kanal produziert werden, kann aus dem Wirkungsquerschnitt $\sigma_{t\bar{t}}$ auf die PDF's zurückgeschlossen werden und somit die Vorhersage für den Wirkungsquerschnitt $\sigma_{gg \rightarrow H}$ verbessert werden.

Des Weiteren kann die Higgs Masse, aufgrund von Strahlungskorrekturen, durch die W Boson Masse m_W und die Top Quark Masse m_{Top} abgeschätzt werden. Aus dem Wirkungsquerschnitt $\sigma_{t\bar{t}}$ kann also, wie oben beschrieben, die Top Quark Masse und damit auch die Higgs Masse indirekt bestimmt werden. Abbildung 1.2 zeigt die Higgs Masse in Abhängigkeit von m_{Top} und m_W und ihre Messgenauigkeit an den verschiedenen Beschleunigern.

¹In der Nähe der Produktionsschwelle für Top Quark Paare (350 GeV) liegt die Unsicherheit des Gluon Flusses bei ca. 3% und wächst dann an bis auf 10% bei 1TeV.

2 Experimentelle Top Quark Physik

Nach der Entdeckung des Bottom Quarks 1977 bestand an der Existenz seines Isospin Doublet Partners, des Top Quarks, kaum Zweifel. Doch erst 18 Jahre später war es nach intensiver Suche an verschiedenen Beschleunigeranlagen an dem Proton Antiproton Beschleuniger Tevatron möglich, ausreichend hohe Energien zu erzeugen, um das mit über 170 GeV extrem schwere Quark zu produzieren [1, 2]. Eine genaue Untersuchung der Quanteneigenschaften des Top Quarks ist -neben der Entdeckung des Higgs Teilchens und Physik jenseits des SM- die Hauptmotivation für den Bau des LHC.

2.1 Top Quark Produktion

Am LHC wird es zum ersten Mal möglich sein eine große Anzahl von Top Quarks zu produzieren. Während in der gesamten Laufzeit des Tevatrons lediglich einige tausend Top Quark Zerfälle nachgewiesen werden konnten, wird am LHC ungefähr jede Sekunde ein Top Quark Paar produziert werden. Diese enorme Steigerung der Produktionsrate hat zwei Gründe. Zum einen ist die Beschleunigerenergie des LHC mit 14 TeV wesentlich größer als die des Tevatrons (1.96 TeV), wodurch mehr Partonpaare über die notwendige Energie verfügen um Top Quarks zu erzeugen. Dies allein führt zu einem 100 mal höheren Wirkungsquerschnitt (≈ 7.3 pb am Tevatron und ≈ 800 pb am LHC). Diese Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Beschleunigerenergie wird in Abbildung 2.1 wiedergegeben. Zum anderen liegt die hohe Produktionsrate an der um einen Faktor 10-100 höheren Luminosität des LHC gegenüber der des Tevatron.

Durch die große Menge an zur Verfügung stehenden Daten am LHC kann der statistische Fehler bei vielen Top Quark Messungen vernachlässigt werden und die Ergebnisse werden durch den systematischen Fehler beschränkt. Dies ist am Beispiel der Top Paar Produktion in Abbildung 2.2 verdeutlicht, welche eine Fehlerabschätzung für den Top Anti-Top Wirkungsquerschnitt liefert.

Prinzipell gibt es zwei Mechanismen um ein Top Quark zu erzeugen: Die Single Top Quark Produktion und die Top Quark Paar Produktion. Da sich diese Arbeit mit der wichtigeren Top Quark Paar Erzeugung befasst, soll hier auf die Single Top Quark Produktion nur kurz eingegangen werden. Für weitere Informationen wird auf [3, 4, 5] verwiesen.

2.1.1 Single Top Quark Produktion

Top Quarks können einzeln durch die elektroschwache Wechselwirkung erzeugt werden. Hierbei koppelt das Top Quark an ein Bottom Quark und ein W Boson. Die Entdeckung dieser Single

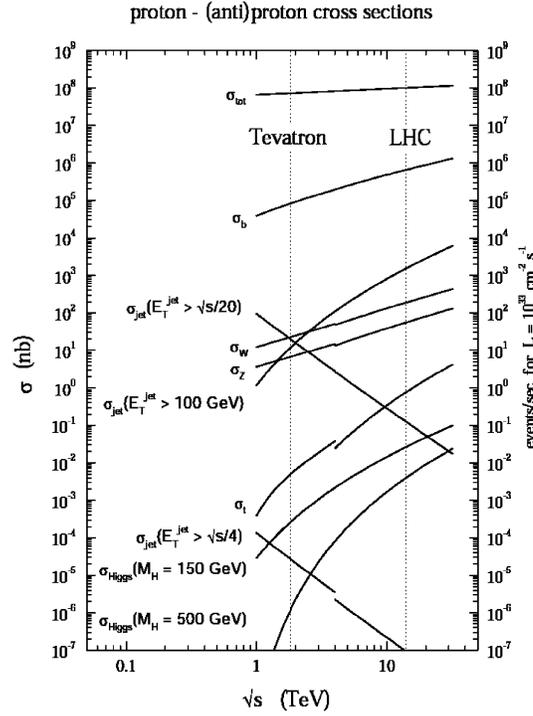


Abbildung 2.1: Der Verlauf des Wirkungsquerschnitts in Abhängigkeit von der Energie in logarithmischer Skala.

	$\Delta \delta_{t\bar{t}(j)} / \delta_{t\bar{t}(j)}$		
	1 fb^{-1}	5 fb^{-1}	10 fb^{-1}
Simulation samples (ϵ_{sim})	0.6%		
Simulation samples (F_{sim})	0.2%		
Pile-Up (30% On-Off)	3.2%		
Underlying Event	0.8%		
Jet Energy Scale (light quarks) (2%)	1.6%		
Jet Energy Scale (heavy quarks) (2%)	1.6%		
Radiation (A_{QCD}, Q_{ij}^2)	2.6%		
Fragmentation (Lund b, σ_q)	1.0%		
b-tagging (5%)	7.0%		
Parton Density Functions	3.4%		
Background level	0.9%		
Integrated luminosity	10%	5%	3%
Statistical Uncertainty	1.2%	0.6%	0.4%
Total Systematic Uncertainty	13.6%	10.5%	9.7%
Total Uncertainty	13.7%	10.5%	9.7%

Abbildung 2.2: Fehlerabschätzung für die $t\bar{t}$ - Paarproduktion

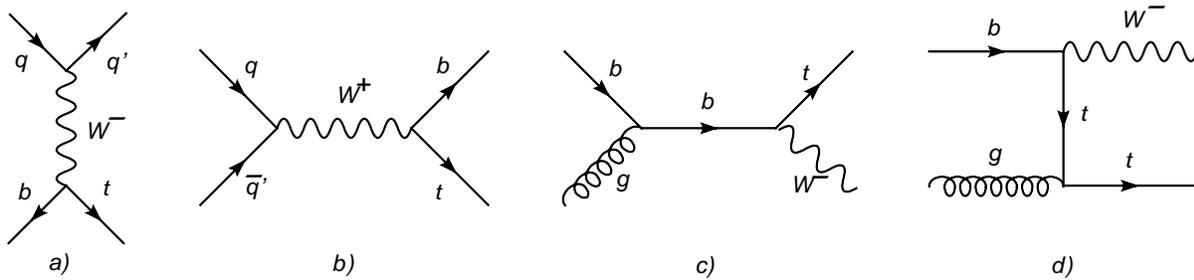


Abbildung 2.3: LO Feynman Diagramme für verschiedene Single Top Quark Produktionskanäle: t-Kanal (a), s-Kanal (b) und verknüpfte Produktion (c,d)

Top Quarks ist schwieriger als die der Top Quarks aus der Paarproduktion, wobei zwei Effekte eine Rolle spielen: Zum einen ist der Single Top Quark Wirkungsquerschnitt geringer als der Top Quark Paar Wirkungsquerschnitt, zum anderen ist der Hintergrund bei Single Top Prozessen wesentlich größer. Der größere Hintergrund beruht einerseits darauf, dass weniger Teilchen im Zerfallsprozess vorliegen (es entsteht höchstens ein Lepton), welche zur Prozessidentifizierung benutzt werden können, andererseits weisen typische Zerfallsprozesse, wie die Produktion von Eichbosonen plus schwerer Quarks ein ähnliches Zerfallsmuster auf. Aufgrund dieser Schwierigkeiten konnte die Single-Top-Produktion erst 2006 am $D\bar{\nu}$ Experiment und kürzlich auch am CDF Experiment am Tevatron nachgewiesen werden [6, 7]. Die mit einem großem Fehler behafteten Ergebnisse stehen im Einklang mit dem Standardmodell.

Man unterscheidet drei Fälle in der Single Top Quark Produktion:

- a) t-Kanal: Dieser Kanal ist sowohl am Tevatron als auch am LHC der dominante Kanal für die Single Top Quark Produktion. Das virtuelle W Boson wandelt ein Bottom Quark in ein Top Quark um (Abbildung 2.3 (a)).
- b) s-Kanal: Zwei zum selben Isospin Doublett gehörende Quarks erzeugen ein W Boson, das in ein Bottom Quark und ein Top Quark zerfällt (Abbildung 2.3 (b)).
- c) verknüpfte Produktion: In diesem Kanal wird durch ein Bottom Seequark und ein Gluon ein Top Quark und ein reelles W Boson erzeugt (Abbildung 2.3 (c,d)).

Trotz des schwierigen Nachweises bietet die Untersuchung der Single Top Quark Produktion und des Zerfalls interessante und einzigartige Möglichkeiten das Standardmodell (SM) am LHC zu testen. Dazu zählt die direkte Messung von $|V_{bt}|^2$ [6]. Dieses Matrixelement konnte bis jetzt nur indirekt aus der Unitaritätsforderung der CKM Matrix bestimmt werden. Sollte der gemessene Wert für $|V_{bt}|^2$ die Unitarität verletzen, könnte dies ein Hinweis auf eine vierte Generation von Quarks sein. Des Weiteren sind die erzeugten Top Quarks aufgrund der schwachen Wechselwir-

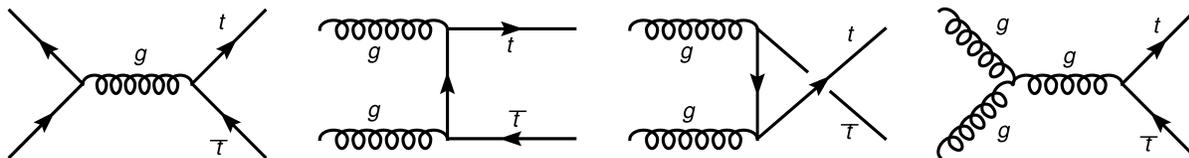


Abbildung 2.4: LO Feynman Diagramme für den $q\bar{q}$ -Vernichtungskanal und den Gluon Fusionskanal

kung polarisiert und die Zerfallsprodukte (das W Boson und das Bottom Quark) mit dem Top Quark Spin korreliert (siehe Kapitel 2.2). Ein vom SM abweichendes experimentelles Ergebnis für das Polarisationsverhältnis der W Bosonen aus Single Top Quark Zerfällen würde auf einen anderen Entstehungsmechanismus für Top Quarks hinweisen. In einigen Modellen verändern neue, schwere W^\pm Bosonen, die auch eine rechtshändige Kopplung aufweisen, oder geladene Higgs Bosonen das Polarisationsverhältnis der W Bosonen.

2.1.2 Top Quark Paar Produktion

Die Top Quark Paarproduktion ist wegen des größeren Wirkungsquerschnitts und des kleinen Hintergrundes der Hauptbeobachtungskanal für Top Quark Physik.

Top Quark Paare können entweder durch Quark Anti-Quark Vernichtung oder durch Gluon Fusion entstehen¹. Die LO Diagramme sind in Abbildung 2.4 abgebildet. Im ersten Fall wird durch Vernichtung eines Quarks mit einem Anti-Quark ein Top-Quark Paar über ein virtuelles Gluon produziert. Im zweiten Fall vereinigen sich zwei reelle Gluonen zu einem virtuellen Gluon, das in ein Top Paar zerfällt oder die beiden einlaufenden Gluonen tauschen ein Top Quark bzw. Anti-Top Quark aus.

Am Tevatron lag der Beitrag des $q\bar{q}$ -Vernichtungskanals bei 90% und der Beitrag des Gluon Fusionskanals bei 10%. Am LHC ist diese Relation genau umgekehrt. Der Gluon Fusionskanal spielt mit 90% die bedeutendere Rolle. Es gibt dafür zwei verschiedene Gründe. Bei beiden liegt der Schlüssel zum Verständnis in den PDF's². Erstens treffen beim Tevatron Protonen und Anti-Protonen aufeinander, d.h. es existieren sowohl (Valenz-)Quarks als auch (Valenz-)Anti-Quarks in großer Anzahl, was den Quark Vernichtungskanal unterstützt. Hingegen stehen beim Proton Proton Beschleuniger LHC lediglich wenige See-Anti-Quarks für den Vernichtungskanal zur Verfügung. Zweitens besitzen durch die höhere Beschleunigerenergie des LHC auch immer mehr Partonen mit einem kleinen Energieanteil z die Möglichkeit an einer Top Quark Paar Produktion teilzunehmen. Alle Partonenpaare mit einer höheren Energie als der in Abbildung 2.5 durch vertikale Linien für den LHC bzw. Tevatron markierter, besitzen genügend Energie um ein Top Quark Paar zu produzieren. Wie man aus Abbildung 2.5 erkennt, nimmt die Anzahl der

¹Top Quark Paare können auch durch die elektroschwache Wechselwirkung erzeugt werden (z.B. durch $q\bar{q}$ -Vernichtung zu einem Z Boson oder Photon, welches wiederum in ein Top Quark Paar zerfällt), doch diese sind vernachlässigbar, da sie von der Ordnung α^2 , statt Ordnung α_s^2 , sind.

²Für genaueres zum Thema PDF's siehe Kapitel 3.3

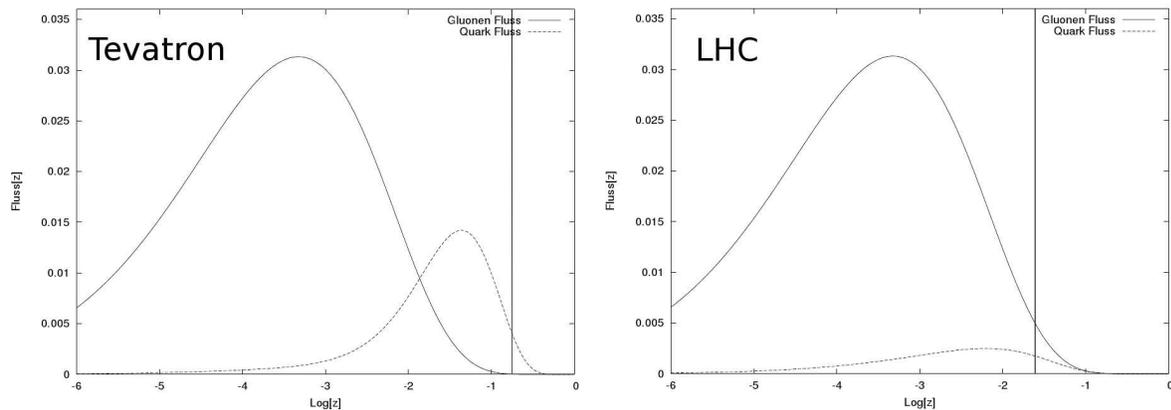


Abbildung 2.5: Der Gluon- und Quarkfluss für den Tevatron bzw. LHC in logarithmischer Skala. Die Faktorisierungsskala μ_r wurde auf die Top Masse gesetzt.

Gluonpaare mit abnehmendem z (= Energieanteil des Partonpaares an der Beschleunigerenergie) viel stärker zu als die Anzahl der Quarkpaare. Während am Tevatron noch die Quarkpaare überwiegen, besitzen am LHC deutlich mehr Gluonpaare die nötige Energie, ein Top Anti-Top Quark Paar zu erzeugen.

2.2 Top Quark Zerfall

Die Lebensdauer des Top Quarks ist mit $\approx 10^{-25}$ Sekunden extrem kurz, was zum einen bedeutet, dass es nur indirekt über seine Zerfallsprodukte nachgewiesen werden kann, zum anderen ist die mittlere Lebensdauer kleiner als die charakteristische Zeit $1/\Lambda_{QCD}$ von 10^{-23} s bis 10^{-24} s, die vom Quark benötigt wird, um zu hadronisieren. Das heißt, dass das Top Quark -im Gegensatz zu seinen leichteren Geschwistern- keine gebundenen Zustände, wie Top Mesonen oder ein Toponium [8, 9, 10], bilden kann.

Das Top Quark kann nach dem Standardmodell in ein W Boson und ein Bottom-, Strange- oder Down Quark zerfallen, wobei die beiden letzteren gegenüber dem ersteren stark unterdrückt sind. Dies liegt daran, dass die nicht-diagonalen Einträge in der CKM-Matrix sehr klein sind. Es ist deshalb ausreichend, sich auf den ersten Fall zu beschränken.

Beim Zerfall des Top Quarks in ein W Boson und ein Bottom Quark koppelt das W Boson nur an ein Bottom Quark mit linkshändiger Chiralität. Dies ist eine allgemeine Vorhersage des SM. Nimmt man das Bottom Quark in einer guten Näherung als masselos an ($\frac{m_b}{M_W} \approx 0.04$), so ist die Helizität des Bottom Quarks ebenfalls linkshändig. Um die Drehimpulserhaltung zu erfüllen, erfordert ein parallel zur Top Quark Spinrichtung ausgesandtes Bottom Quark (Abbildung 2.6 (b)) ein transversal polarisiertes W Boson mit der Helizität $h^w = -1$, während ein antiparallel zur Spinrichtung ausgesandtes Bottom Quark (a) ein longitudinal polarisiertes W

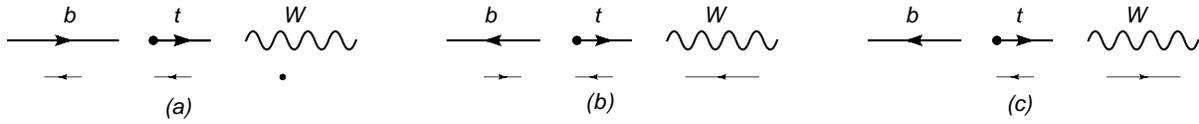


Abbildung 2.6: Verschiedene Polarisationsmöglichkeiten des W Bosons beim Top Quark Zerfall

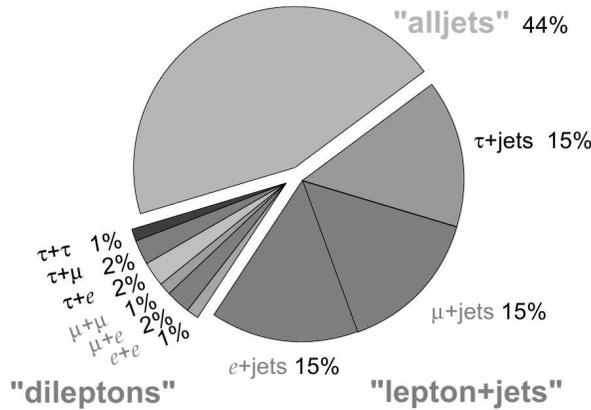


Abbildung 2.7: Das Verzweungsverhältnis für einen Top Quark Paar Zerfall.

Boson mit der Helizität $h^w = 0$ fordert. Eine Helizität des W Bosons von $+1$ (c) ist durch die Drehimpulserhaltung verboten. Die Verteilung der W Boson Helizitäten ist mit obiger Näherung gegeben durch [11]:

$$A(h^w = 1) : A(h^w = 0) : A(h^w = -1) = 1 : \frac{M_{top}^2}{2M_W^2} : 0 \quad (2.1)$$

Diese wird durch Korrekturen aus höheren Ordnungen und der von Null verschiedenen Bottom Quark Masse m_b leicht modifiziert. Somit ermöglichen Top Quark Zerfälle das Erzeugen und Untersuchen von polarisierten W Bosonen. Darüber hinaus würde eine experimentell gefundene Abweichung von obenstehenden Polarisationsverhältnissen auf neue Physik hindeuten. Hier gibt es verschiedene SM Erweiterungen wie die Einführung von schweren Vektorbosonen oder geladenen Skalaren.

Die Top Quark Paar Zerfälle werden experimentell nach den Zerfallsmoden der W Bosonen unterschieden. Es gibt drei leptonic Modi ($e^- + \nu_e, \mu^- + \nu_\mu, \tau^- + \nu_\tau$) und sechs hadronische Modi ($\bar{u} + d, \bar{u} + s, \bar{u} + b, \bar{c} + d, \bar{c} + s, \bar{c} + b$), woraus sich leicht die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zerfälle ergeben (siehe Abbildung 2.7). Die Top Paar Zerfälle werden in vier Kategorien eingeteilt:

- (i) Dileptonischer Zerfall: Beide W Bosonen zerfallen in Elektronen und/oder Myonen plus die

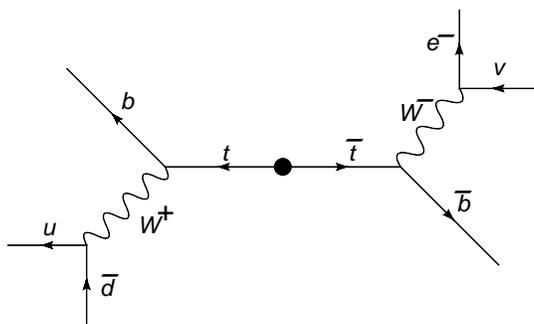


Abbildung 2.8: Zerfall eines Top Anti-Top Paares in zwei b-Jets und zwei W Bosonen, wobei ein W Boson hadronisch in zwei leichte Jets und das andere W Boson leptonic weiterzerfällt

entsprechenden Neutrinos. Die Leptonen können direkt im Detektor nachgewiesen werden.

(ii) Single-Lepton Zerfall: Ein W Boson zerfällt in ein Elektron oder ein Myon, während das andere hadronisch in Jets zerfällt (Abbildung 2.8).

(iii) Hadronischer Kanal: Beide W Bosonen zerfallen in Hadronen. Es werden zwei Bottom Jets und vier leichte Quark Jets im Detektor registriert.

(vi) Mindestens ein W Boson zerfällt in ein tau Lepton, welches wiederum leptonic oder hadronisch weiter zerfallen kann. Der Nachweis dieser Zerfälle ist kompliziert. Sie bilden Hintergrundprozesse zu den anderen Kanälen.

2.3 Messung des Wirkungsquerschnitts der Top Quark Paar Produktion

Insgesamt wird die Messungenauigkeit für den totalen Top Quark Paar Wirkungsquerschnitt am LHC bei 5% - 10% liegen [12] (Abbildung 2.2). Der Fehler aus der Skalenabhängigkeit der momentan zur Verfügung stehenden NLO Rechnung beläuft sich auf 15% [13, 14]. Wie im Kapitel 3 noch weiter erläutert wird, liegt der Fehler einer kompletten NNLO Rechnung bei 3% - 4% und dementsprechend ist diese für genaue theoretische Vorhersagen zur Überprüfung des Standardmodells unerlässlich.

Der Wirkungsquerschnitt wird im dileptonischen, im single-leptonischen und im hadronischen Kanal gemessen und am Ende zum gesamten Wirkungsquerschnitt zusammengefügt (Abbildung 2.9). Eine Abweichung des experimentellen Wirkungsquerschnitts vom theoretisch Vorhergesagtem ließe auf neue Physik schließen. So kann die Top Quark Paar Produktion erhöht werden, falls bisher unbekannte Teilchen in Top Quark Paare zerfallen. Andererseits kann auch ein bisher unbekannter Zerfallsmechanismus der Top Quarks zu einer Verkleinerung des gemessenen Wir-

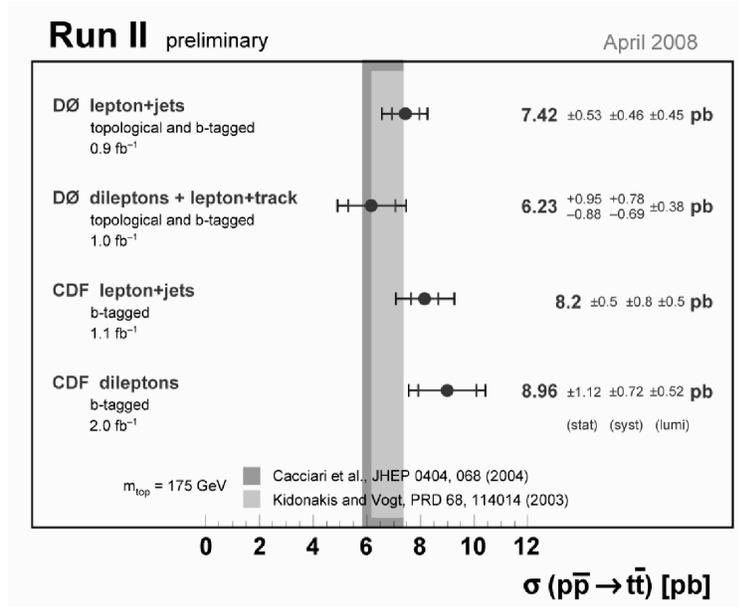


Abbildung 2.9: Wirkungsquerschnitt für die verschiedenen Zerfallskanäle gemessen am DØ Experiment am Tevatron

kungsquerschnitts führen. Des Weiteren kann aus dem Wirkungsquerschnitt die Top Quark Masse gewonnen werden (siehe Kapitel 2.4).

Allgemein werden die experimentellen Daten in einem bestimmten Zerfallskanal nach möglichen Top Quark Paar Ereignissen durchsucht und hiervon die zu erwarteten Hintergrundereignisse abgezogen. Um den Wirkungsquerschnitt zu berechnen, wird die Anzahl der echten Top Quark Zerfälle durch die Luminosität und die Ereignisdetektierungseffizienz geteilt.

$$\sigma = \frac{N_{\text{obs}} - N_{\text{hint}}}{\varepsilon L} \quad (2.2)$$

Für die Identifizierung von Top Quark Paar Zerfallsereignissen werden verschiedene Methoden eingesetzt. Allen Kanälen ist gemein, dass zwei Bottom Quarks produziert werden, welche zwei Jets bilden. Es wird versucht, diese durch b-tagging zu identifizieren [15, 16]. Dabei wird der Jet von den Detektorsignalen bis zu seinem Entstehungsort zurückrekonstruiert und der Abstand zur Beamline gemessen (Abbildung 2.10). Abstände von ein bis zwei Millimeter lassen auf ein zerfallenes Bottom Quark schließen. B-tagging ist möglich, da die Lebenszeit des Bottom Quarks kurz genug ist, so dass es noch im Detektor zerfällt, andererseits aber lange genug, damit das Bottom Quark eine messbare Distanz zurücklegt. Wie weiter unten gezeigt wird, ist b-tagging vorteilhaft, um die aus einem Top Quark Zerfallsereignis stammenden Jets zuzuordnen und somit die Messungenauigkeit zu verkleinern. Zu einer Wahrscheinlichkeit im unteren einstelligen Prozentbereich werden jedoch auch leichte Jets (uds-Jets) oder Gluon-Jets als Bottom-Jets fehlidentifiziert (engl. Fakes) und Bottom Jets werden nur zu einer Wahrscheinlichkeit von ca.

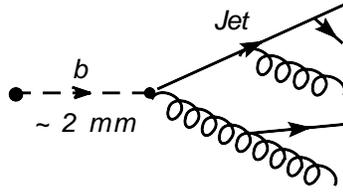


Abbildung 2.10: Zerfall eines Bottom Quarks zur Verdeutlichung des b-tagging

40% [16] als solche erkannt. Dies führt zu der dominanten systematischen Unsicherheit bei der Messung des Top Quark Paar Wirkungsquerschnitts (siehe Abbildung 2.2).

Des Weiteren werden zur Identifizierung von Top Quark Paar Zerfällen, neben b-tagging, die Detektordaten nach den Zerfallssignaturen der einzelnen Kanäle durchsucht.

Dileptonischer Kanal

Experimentell ist der dileptonische Kanal am leichtesten von allen Kanälen zu identifizieren. Beide W Bosonen zerfallen leptonisch in Elektronen und Myonen, welche direkt vom Detektor nachgewiesen werden können. Als Signatur erhält man zwei isolierte, gegensätzlich geladene Elektronen oder Myonen mit hohen transversalen Impulsen p_T , fehlende transversale Energie E_{Tmiss} aufgrund der beiden nicht auflösbaren Neutrinos, und zwei Jets, von denen einer oder beide als Bottom Jets identifiziert werden können. Typische Cuts sind $p_T^{Lepton} > 20\text{GeV}/c$, $E_{Tmiss} > 15\text{ GeV}$ und $E_{Tmiss} < 40\text{ GeV}$. Dieser klare Fingerabdruck ergibt ein Signal/Hintergrund-Verhältnis von 1.5 bis 3 am Tevatron.

Der Hintergrund besteht hauptsächlich aus dem Di-Boson Zerfall $WW \rightarrow \nu\nu ll$, der Drell-Yan Produktion $qq \rightarrow Z \rightarrow ll$ oder τ -Zerfällen. Er ist geringer als in den anderen Kanälen und wird mit Monte Carlo simuliert.

Er kann weiter verringert werden indem zum einem nach b-getaggten Jets gesucht wird, welche in den anderen Hintergrundprozessen nicht vorkommen, und zum anderem kann man sich auf den $e + \mu$ Kanal konzentrieren, was den wesentlichen Hintergrund, kommend vom Z-Boson Zerfall, ausschließt.

Der Nachteil des Kanals ist der größere statistische Fehler am Tevatron, herrührend aus dem mit 5% kleinen Verzweigungsverhältnis. Doch dies sollte am LHC nicht von Bedeutung sein, denn dort werden die Messungen wegen der hohen Luminosität nicht durch Statistik, sondern vor allem durch systematische Fehler begrenzt (Abbildung 2.2). Jedoch gibt es in diesem Kanal bei der Rekonstruktion der Top Quark Massen Probleme aufgrund der nicht messbaren Energie der beiden Neutrinos. Der gemessene Wirkungsquerschnitt im Dilepton Kanal ist beim CDF Experiment 8.96 ± 1.12 (stat.) ± 0.72 (syst.) ± 0.52 (Lumi.) pb und $6.23^{+0.95}_{-0.88}$ (stat.) $^{+0.78}_{-0.69}$ (syst.) ± 0.38 (Lumi.) pb beim DØ Experiment.

Single Lepton Kanal

Der Single Lepton Kanal wird auch als Goldener Kanal bezeichnet. Er besitzt einerseits ein hohes Verzweigungsverhältnis von 30% und kann andererseits durch das Lepton gut identifiziert werden. Ein W Boson zerfällt leptonisch in ein Myon oder ein Elektron und in das dazugehörige Neutrino, das andere zerfällt hadronisch und bildet somit zwei leichte Jets. Die Merkmale sind ein Lepton mit hohem transversalem Impuls $p_T^{Lepton} > 20\text{GeV}/c$, fehlender transversaler Energie E_{Tmiss} von dem undetektierten Neutrino, zwei Bottom Quark Jets vom Top Zerfall und zwei leichte Jets von einem W Boson Zerfall.

Jedoch ist der Hintergrund, hauptsächlich bestehend aus W Boson plus Multi-Jet Produktion, groß und zwingt zu verschiedenen Strategien, um das Signal/Hintergrund-Verhältnis zu verbessern. Dazu werden verschiedene topologische Variablen eingeführt. H_T ist zum Beispiel definiert als die skalare Summe aller transversalen Jet Energien, E_{LT} ist die skalare Summe von E_{Tmiss} und p_{Tmiss} , und A quantifiziert Ereignisse nach ihrer Flachheit im Detektor. Diese neuen Variablen werden benutzt, um die relevanten Ereignisse herauszuschneiden. Nach den Schnitten ergibt sich ein Signal/Hintergrund-Verhältnis von 4.5 ± 0.9 am Tevatron.

Für den Wirkungsquerschnitt ergibt sich im Goldenen Kanal $8.2 \pm 0.5(\text{stat.}) \pm 0.8(\text{syst.}) \pm 0.5(\text{Lumi.})$ pb am CDF Experiment bzw. $7.42 \pm 0.53(\text{stat.}) \pm 0.46(\text{syst.}) \pm 0.45(\text{Lumi.})$ pb am DØ Experiment. Wie dem Namen nach zu erwarten ist, besitzt dieser Kanal den kleinsten Fehler.

Hadronischer Kanal

Der hadronische Kanal besitzt mit 44% das größte Verzweigungsverhältnis. Beide W Bosonen zerfallen hadronisch. Dies ergibt eine Signatur von zwei schweren b-Jets, vier leichten Jets und keinen Leptonen. Doch selbst mit b-tagging ist der Hintergrund recht hoch, hauptsächlich von QCD Multi-Jet Prozessen mit b-tags von schweren Quarks (Bottom oder Charm Quarks) oder auch als schwere Quark Jets fehlidentifizierte leichte Quark oder Gluon Jets (engl. Fakes). Insgesamt wurden in der Analyse von DØ, neben Schnitten an die Jets ($E_T \geq 15$ GeV und Rapidität ≤ 2.5) und b-tagging, 13 kinematische oder topologische Variablen eingeführt, um ein Signal/Hintergrund-Verhältnis von 1.2 zu erreichen. Trotzdem bleibt der Fehler der Messungen im hadronischen Kanal hoch. Der gemessene Wirkungsquerschnitt an den Tevatron Experimenten CDF bzw. DØ war $8.3 \pm 1.0(\text{stat.}) \pm 2.0(\text{syst.}) \pm 0.5(\text{Lumi.})$ pb bzw. $12.1 \pm 4.9(\text{stat.}) \pm 4.5(\text{syst.}) \pm 0.5(\text{Lumi.})$ pb.

Tau Kanal

Das Tau Lepton kann im Detektor entweder leptonisch in ein Elektron oder Myon, oder hadronisch, in Quarks zerfallen und bildet -je nach Zerfallsart- Hintergrund zu einem der drei oben beschriebenen Kanälen. Durch den Zerfall in ein Elektron oder Myon und ein weiteres Neutrino erhöht sich der Anteil der fehlenden Energie weiter, was eine Rekonstruktion des Prozesses schwierig macht. Zwar wurden kürzlich erste Ergebnisse [17] des DØ Experiments mit hadronisch zerfallenen Taus veröffentlicht, doch ist der Fehler des Wirkungsquerschnitts recht hoch.

Auch am LHC dürfte dieser Kanal weiter an Bedeutung verlieren, da der Hintergrund, bestehend aus Multi-Jet Ereignissen, stark zunehmen dürfte.

2.4 Experimentelle Bestimmung der Top Quark Masse

Die Masse des Top Quarks ist einer der freien Parameter des Standardmodells und muss deshalb experimentell ermittelt werden. Je genauer die freien Parameter bekannt sind, umso besser kann das Standardmodell getestet werden und/oder es können Vorhersagen für zukünftige Experimente gemacht werden. Ein Test des SM ist der Zusammenhang zwischen der Top Quark Masse und dem Wirkungsquerschnitt, welcher weiter unten beschrieben wird. Eine Messung beider Größen führt also zu einer Überprüfung des SM.

Eine weitere Motivation die Top Quark Masse zu messen, ist die in der Einleitung beschriebene Relation zwischen der Top Masse und der Higgs Masse. Eine genaue Kenntnis der Top Masse würde die Higgs Masse sehr genau festlegen und das SM überprüfen. Mit dem aktuellsten Wert für die Top Masse ergibt sich eine Obergrenze für die Higgs Masse von ungefähr 182 GeV.

Während die meisten Top Quark Eigenschaften aufgrund von fehlender Statistik eher spärlich untersucht werden konnten, wurde am Tevatron die Top Quark Masse sehr genau auf 172.6 ± 1.4 GeV bestimmt. Damit ist sie mit einem relativen Fehler von weniger als 1% besser bekannt als alle anderen Quark Massen. Die Erwartungen an den LHC sind eine Messung der Top Quark Masse innerhalb eines Jahres mit einem Fehler von weniger als 2 GeV und eine Reduktion des Fehlers auf unter 1 GeV nach längerer Laufzeit zu erreichen. Erst dem ILC wird es möglich sein, durch Scannen der Produktionsschwelle, eine Top Quark Massenbestimmung mit einem Fehler von circa 200 MeV durchzuführen [12], was im Bereich von Λ_{QCD} liegt. Aufgrund von Confinement ist eine genauere Messung der Polmasse³ nur mit zusätzlichen Tricks zu erreichen [12].

Die Bestimmung der Top Quark Masse kann auf verschiedene Arten erfolgen.

2.4.1 Bestimmung der Top Quark Masse aus der Rekonstruktion von Zerfällen

Eine Möglichkeit die Top Quark Masse zu messen ist, die einzelnen Top Paar Zerfallsereignisse zu identifizieren, zu rekonstruieren und dann auf die Top Quark Masse zurückzuschließen. Diese Methode kann nicht beim Tau Kanal angewendet werden, da diese Ereignisse zum einen schwer zu detektieren sind und zum anderen das zusätzliche dritte Neutrino die Vorhersagekraft für die Top Quark Masse deutlich limitiert. Dazu werden die Detektordaten mit geeigneten Schnitten auf potentielle Top Quark Paar Zerfälle durchsucht und den Zerfallskanälen zugeordnet. Da sich die Kanäle hinsichtlich Signal und Hintergrund unterscheiden, erfolgt die Rekonstruktion auf die den Kanälen angepassten Arten:

³Die Polmasse wird hier definiert als Masse, welche das Quark in der Abwesenheit von Confinement hätte

Zuerst müssen die vom Detektor gemessenen Jets und Leptonen den Zerfallsprodukten zugeordnet werden. Hierfür gibt es mehrere Kombinationsmöglichkeiten. Es ist möglich die Anzahl dieser Kombinationsmöglichkeiten durch b-tagging zu reduzieren, da dann ein b-getaggtter Jet nur einem (der beiden) Bottom Jet zugeordnet werden kann. Des Weiteren können die zwei aus einem hadronischen W Boson Zerfall stammenden Jets vertauscht werden, ohne dass dies einen Einfluss auf die rekonstruierte Top Quark Masse hat. Nimmt man an, dass die Top Quark Masse und die Anti-Top Quark Masse gleich groß sind, gibt es eine zusätzliche Symmetrie zwischen den beiden Dreiergruppen von Jets, wobei eine dem Top Quark Zerfall und die andere dem Anti-Top Quark Zerfall entstammt. Doch auch nach der Reduktion der Kombinationsmöglichkeiten durch die Ausnutzung von Symmetrien bleibt oft eine große Anzahl bestehen. Aus den verbliebenen Möglichkeiten wählt man nun diejenige aus, welche die Zusatzbedingungen am Besten erfüllt. Dazu zählt, dass die Top Quark Masse und die Anti-Top Quark Masse gleich groß sind und sich im Bereich von 172 GeV bewegt. Des Weiteren besitzen die aus dem W Boson Zerfall stammenden Jets eine Energie, die der W Boson Masse entspricht. In der Praxis wird nachfolgende Funktion χ definiert und diejenige Möglichkeit ausgewählt, welche χ minimiert.

$$\chi^2 = \left(\frac{M_{t_1} - M_{t_2}}{\sigma_{M_t}} \right)^2 + \left(\frac{M_{W_1} - M_{W_0}}{\sigma_{M_W}} \right)^2 + \left(\frac{M_{W_2} - M_{W_0}}{\sigma_{M_W}} \right)^2 \quad (2.3)$$

Hierbei ist M_{W_0} die bekannte W Boson Masse, M_{W_1} , M_{W_2} bzw. M_{t_1} , M_{t_2} sind die aus dem Zerfall rekonstruierten W Boson Massen bzw. Top Quark, Anti-Top Quark Massen und σ_X bezeichnet die Unsicherheit einer Größe X . Die Auswahl der Kombinationsmöglichkeit mit dem geringsten χ^2 hebt die Mehrdeutigkeit auf.

Die vom CDF bzw. $D\bar{0}$ Experiment am Tevatron gemessenen Top Quark Massen sind in Abbildung 2.11 zusammengefasst.

Hadronischer Kanal

Die 6 gemessenen Jets können auf $6! / (2! 2! 2!) = 90$ verschiedene Weisen den Zerfallprodukten zugeordnet werden. Sind ein oder zwei Jets als Bottom Jets identifiziert, dann reduziert sich deren Anzahl auf 30 bzw. 6. Aus diesen Kombinationen wird nun diejenige ausgewählt, bei der die rekonstruierten W Boson und Top Quark Massen den experimentell bekannten Massen am nächsten sind, d.h. diejenige Kombination, welche χ^2 minimiert. Dieser Kanal spielt beim LHC eine geringe Rolle aufgrund des relativ hohen Fehlers, herrührend von dem großen Hintergrund und den vielen Kombinationsmöglichkeiten. Am Tevatron wurde die Top Quark Masse in diesem Kanal am CDF Experiment zu $177.0 \pm 4.1 \text{ GeV}$ bestimmt.

Single Lepton Kanal

Das Signal im Single Lepton Kanal ist wesentlich reiner als das des hadronischen Kanals, doch es leidet immer noch unter Mehrdeutigkeiten in der Rekonstruktion. Dem nicht messbaren Neutrino wird die fehlende transversale Energie des Prozesses zugeordnet. Die gemessenen vier Jets ergeben, mit der zweifachen Mehrdeutigkeit des Neutrinoimpulses p_z , $2 \cdot 4! / 2 = 24$ Kombinationsmöglichkeiten bzw. mit ein oder zwei identifizierten b-Jets bleiben $2 \cdot 2 \cdot 3! / 2 = 12$

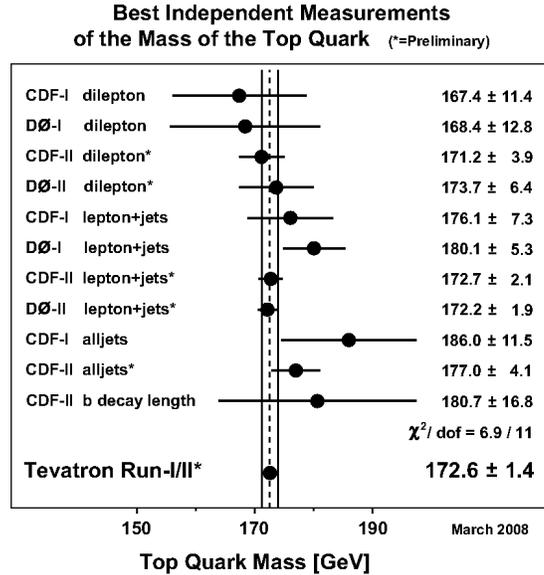


Abbildung 2.11: Messungen der Top Quark Masse am CDF bzw. DØ Experiment am Tevatron

bzw. 4 Kombinationsmöglichkeiten. Aus diesen wird wiederum diejenige Kombination ausgewählt, die die bekannten W Boson und Top Quark Massen am besten wiedergibt. Die gemessenen Werte des CDF bzw. DØ Experiments sind $172.7 \pm 2.1 \text{ GeV}$ bzw. $172.2 \pm 1.9 \text{ GeV}$. Der Fehler ist also nur halb so groß wie beim hadronischem Kanal.

Dileptonischer Kanal

Die Statistik des dileptonischen Kanals war beim Tevatron aufgrund des geringen Verzweigungsverhältnisses klein. Diesen Nachteil dürfte der LHC aber mit seiner hohen Luminosität wettmachen. Die beiden Leptonen mit einem hohen transversalen Impuls ergeben ein sehr reines Signal für den Zerfallsprozess. Die beiden Jets können auch ohne b-tagging den b Jets zugeordnet werden. Wenn die Ladung der aus dem W Bosonen Zerfall entstehenden gegensätzlich geladenen Leptonen gemessen wird, ist eine eindeutige Zuordnung zu den W Bosonen möglich und damit bleiben nur 2 Kombinationsmöglichkeiten. Das Problem im dileptonischen Kanal ist auf die Impulse der beiden Neutrinos zurückzuschließen. Lediglich deren Gesamtenergie kann als die fehlende transversale Energie angenommen werden. Das System ist unterbestimmt und um Ergebnisse der Top Quark Masse zu erhalten, müssen die Messungen verschiedenen Rekonstruktionsverfahren, wie einem Vergleich mit Monte Carlo Simulationen, unterworfen werden [18]. Die Ergebnisse in diesem Kanal sind $171.2 \pm 3.9 \text{ GeV}$ am CDF bzw. $173.7 \pm 6.4 \text{ GeV}$ am DØ Experiment. Die Fehler sind, im Vergleich zu den anderen Kanälen, groß.

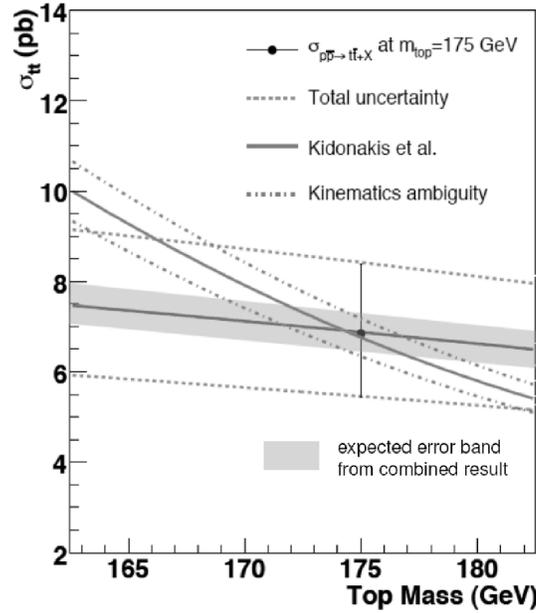


Abbildung 2.12: Abhängigkeit des theoretischen Wirkungsquerschnitts von der Top Quark Masse.

2.4.2 Bestimmung der Top Quark Masse aus dem Wirkungsquerschnitt

Eine andere Möglichkeit die Top Quark Masse zu bestimmen, ergibt sich aus dem Vergleich des gemessenen totalen Wirkungsquerschnitts der Top Quark Paar Produktion und dem theoretisch berechneten, massenabhängigen Wirkungsquerschnitt. Die Massenabhängigkeit des theoretischen Wirkungsquerschnitts ist offensichtlich. Je schwerer das Top Quark ist, umso weniger zusammenstoßende Partonen verfügen über die nötige Energie ein Top Quark Paar erzeugen zu können und umso kleiner ist damit der Wirkungsquerschnitt. In der Abbildung 2.12 wird die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Top Quark Masse gezeigt. Zwischen 160 GeV und 180 GeV nimmt der Wirkungsquerschnitt pro Änderung von 1 GeV in der Top Quark Masse um ungefähr 0.2 pb ab [19].

Des Weiteren gilt die Näherung $\frac{\Delta\sigma}{\sigma} \approx 5 \frac{\Delta m_t}{m_t}$ zwischen den Fehlern in der Messung des Wirkungsquerschnitts und der Top Quark Masse. Eine Messung des Wirkungsquerschnitts auf 5% genau liefert eine Unsicherheit in m_t von 1% und vice versa. Die Erwartungen an den LHC sind eine direkte Top Quark Massenbestimmung auf ungefähr 1 GeV ($\approx 0.6\%$) genau, was eine indirekte Bestimmung des Wirkungsquerschnitts mit einer Unsicherheit von 3% bedeutet. Außerdem soll in Experimenten am LHC der Top Paar Wirkungsquerschnitt auf 9% genau bestimmt werden, was zu einer Unsicherheit in der berechneten Top Quark Masse von 1.8% (≈ 3.1 GeV) führt. Durch die Messungen der Top Quark Masse, des Top Paar Wirkungsquerschnitts am LHC und der oben genannten Umrechnung der beiden Größen ineinander, ist es möglich das SM zu überprüfen.

Der experimentell gemessene Wirkungsquerschnitt könnte größer sein als der vom Standardmodell vorhergesagte, wenn zusätzlich neue Teilchen postuliert werden, die in Top Quarks zerfallen. Andererseits könnte der experimentelle Wirkungsquerschnitt auch geringer sein, wenn entstandene Top Quark Paare durch einen neuen Mechanismus zerfallen und somit nicht vom Detektor als Top Quark Zerfall erkannt werden. Ein Beispiel für eine Erweiterung des Standardmodells ist Topcolor. Hier können ein Top Quark und ein Anti-Top Quark ein Top Quark Kondensat bilden, welches effektiv wie ein Higgs Feld wirkt. Dieses koppelt vorzugsweise an die dritte Quark Generation und sollte die Anzahl der im Detektor registrierten Top Anti-Top Zerfälle erhöhen [20].

2.5 Weitere Top Quark Eigenschaften

Neben seiner Masse wurde das Top Quark am Tevatron auf seine Quanteneigenschaften hin vermessen, was am LHC weiter vertieft werden soll. Abweichungen der gemessenen Ergebnisse von den Standardmodellvorhersagen würden auf neue Physik hindeuten. Auf die Quanteneigenschaften des Top Quarks und ihre Modifikationen in verschiedenen neuen Modellen wird hier nur kurz eingegangen.

Ladung

Einige exotische Modelle sagen ein viel schwereres Top Quark voraus und postulieren das beobachtete Top Quark zu einem exotischen Quark mit Ladung $-4/3$ [21]. Um diese Modelle zu untersuchen werden Single Lepton Zerfälle mit harter Photon Abstrahlung, also $t\bar{t} \rightarrow b\bar{b}q\bar{q}l\nu + \gamma$ betrachtet. Mit geeigneten Schnitten werden Ereignisse, in denen das harte Photon vom Top Quark abgestrahlt wurde, selektiert. Da die Wahrscheinlichkeit, dass ein hartes Photon abgestrahlt wird ungefähr mit Q^2 wächst, wird bei einer erhöhten Top Quark Ladung der Wirkungsquerschnitt vergrößert, was sowohl am Tevatron als auch am LHC nachgewiesen werden kann. Bisherige Ergebnisse favorisieren aber klar die Standardmodellvorhersage mit einer Top Quark Ladung von $+2/3$ [22]. Jüngste Messungen der Top Quark Ladung mittels Messung der Ladungen der Zerfallsprodukte kommen auf ein ähnliches Ergebnis [23].

Spin

Um das experimentell gefundene Top Quark als das Standardmodell Top Quark zu identifizieren, muss auch der Spin von $1/2$ überprüft werden. Dies kann zwar erst am LHC experimentell verifiziert werden, gilt aber als gesichert. Wäre der Spin des experimentell gefundenen Top Quarks ganzzahlig, müssten aufgrund der Spinerhaltung zusätzliche Teilchen postuliert werden. Ein halbzahliger Spin des Top Quarks von $3/2$ oder höher kann mit der Messung des Wirkungsquerschnitts ausgeschlossen werden, da dieser mit dem Spin stark anwächst. Eine direkte Messung des Spins ist durch Überprüfung der Winkelverteilung der Zerfallsprodukte des Top Quarks möglich [5, 21].

Anomale Kopplungen

Verschiedene Erweiterungen des Standardmodells sagen eine anomale schwache Wechselwirkung des Top Quarks mit einem schweren Boson Y voraus. Nimmt man das Top und Bottom Quark als on shell an, dann kann die allgemeinste lorentzinvariante Form des Ytb Vertex wie folgt parametrisiert werden [12]:

$$\Gamma^\mu = -\frac{g}{\sqrt{2}}V_{bt}(\gamma^\mu[f_1^L P_L + f_1^R P_R] - \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{M_Y}(p_t - p_b)_\nu[f_2^L P_L + f_2^R P_R]) \quad (2.4)$$

Hier ist $P_{L|R}$ der Projektionsoperator $(1 \pm \gamma^5)/2$. $f_{1|2}^{L|R}$ sind unbekannte Funktionen, die lediglich von der Virtualität des Y Bosons p_Y^2 abhängen. Ein von dem berechneten Polarisationsverhältnis der W^\pm Bosonen abweichendes experimentelles Ergebnis (siehe Kapitel 2.2) könnte auf das Nichtverschwinden der Funktionen $f_{1|2}^{L|R}$ und somit auf die Existenz von schweren (links- oder auch rechtshändigen) Eichbosonen hindeuten.

3 Theoretischer Zugang zur Top Quark Physik

3.1 Grundzüge der QCD

Das Standardmodell (SM) beschreibt die bekannten Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen. Zu den Kräften gehören die starke Kraft, die schwache Kraft und die elektromagnetische Kraft, wobei die beiden Letzteren zur elektroschwachen Kraft vereinheitlicht wurden.

Das Verhalten der Quarks und der Leptonen ist ähnlich unter der elektroschwachen Wechselwirkung. Sowohl die linkshändigen Quarks als auch die linkshändigen Leptonen und Neutrinos werden in 3 $SU(2)_L$ Doublets angeordnet und wechselwirken in der gleichen Weise mit den Eichbosonen der $SU(2)_L$ (W^+, W^-, Z^0, γ). Hierbei ist zu beachten, dass sowohl im Quark Sektor als auch, wie neue Ergebnisse von Neutrinooszillationsexperimenten zeigen, im Lepton Sektor die Masseneigenzustände nicht mit den Flavoreigenzuständen übereinstimmen. Die rechtshändigen Quarks und Leptonen bilden ein Singlet unter $SU(2)_L$.

Der Hauptunterschied zwischen den Quarks und den Leptonen ist, dass Quarks auch eine Farbladung tragen und somit der starken Kraft unterliegen. Diese beschreibt die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen und wird mathematisch als $SU(3)_C$ Eichtheorie formuliert. Die Quarks transformieren sich unter der fundamentalen Darstellung der $SU(3)_C$, die Gluonen, die Eichbosonen der starken Kraft, unter der adjungierten Darstellung. Die Tatsache, dass $SU(3)_C$ eine nichtabelsche Gruppe ist (d.h. die Kommutatoren der Generatoren von $SU(3)_C$ verschwinden nicht alle), bedeutet, dass auch die Eichbosonen untereinander wechselwirken können. Dies unterscheidet sie grundsätzlich vom Photon, dem Eichboson der elektromagnetischen Kraft, welches sich unter der abelschen Gruppe $U(1)$ transformiert und deshalb nicht mit sich selber wechselwirken kann.

Der Lagrangian \mathcal{L}_{str} kann geschrieben werden als

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu,a} + \sum \bar{q}(i\mathcal{D} - m)q \quad (3.1)$$

wobei $\mathcal{D} = \not{\partial} - \frac{ig_s}{2}G_{\mu}^a\gamma^{\mu}\lambda_a$ die kovariante Ableitung und λ_a die Gell-Mann Matrizen sind.

Dieser Lagrangian folgt aus dem freien Lagrange $\mathcal{L}_{frei} = \sum \bar{q}(i\not{\partial} - m)q$ für Fermionen und der Forderung, dass die Theorie lokal invariant unter $SU(3)_C$ Eichtransformationen sein soll. Die Ableitung $\not{\partial}$ muss dazu durch die kovariante Ableitung \mathcal{D} ersetzt werden, wobei das Gluon-Feld G_{μ}^a eingeführt wird.

Als kinetischer Term für das Gluon Feld wird der unter $SU(3)_C$ eichinvariante Feldstärketensor $G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu,a}$ hinzugefügt, wobei $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - \alpha_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$ ist. Hier sind f^{abc} die Strukturkonstanten von $SU(3)_C$ und der Factor α_s ist die Kopplungskonstante, die die gleiche Rolle spielt wie die elektrische Ladung e in der QED und muss, wie die Massen, experimentell bestimmt werden.

Experimentell sind sechs verschiedene Quark Flavors entdeckt worden: Das Up-, Down-, Strange-, Charm-, Bottom- und das Top Quark. Alle sechs Quarks können drei verschiedene Farbladungen annehmen (grün, rot, blau), besitzen eine elektrische Ladung von $+2/3$ oder $-1/3$ und haben unterschiedliche Massen.

3.2 Störungsrechnung in der QCD

Aus der Forderung, dass der totale Wirkungsquerschnitt $\sigma_{t\bar{t}}$ unabhängig von der Renormierungsskala μ ist, d.h. $\frac{d}{d\mu}\sigma_{t\bar{t}} = 0$, folgt die Renormierungsgruppengleichung. Aus der Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich die Abhängigkeit der Kopplungskonstanten von der Skala μ . Außerdem muss noch die Randbedingung bekannt sein, d.h. die Kopplungskonstante bei einer Skala μ_0 .

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu)} = \frac{1}{\alpha_s(\mu_0)} + \beta_0 \log\left(\frac{\mu_0^2}{\mu^2}\right) \quad (3.2)$$

Die β -Funktion für QCD in erster Ordnung Störungstheorie ist $\beta_0 = \frac{g_s^4}{48\pi^2}(2n_q - 11N)$ und für QED ist $\beta_0 = \frac{e^4}{12\pi^2}[\frac{1}{9}n_{-1/3} + \frac{4}{9}n_{+2/3} + n_{-1}]$. Dabei ist $n_{-1/3}$ die Anzahl der Dirac Fermionen mit der Ladung $-1/3$, entsprechend $n_{+2/3}$ und n_{-1} , sowie n_q ist die Anzahl der verschiedenen Flavors und N die Anzahl der Farben.

Bedeutend ist die Beobachtung, dass (für n_q kleiner als 17) das Vorzeichen von β_{QED} und β_{QCD} verschieden ist. Das bedeutet, während α mit der Skala wächst, d.h. die Kopplung mit zunehmender Energie immer größer wird, verkleinert sich α_s mit steigender Energie. Diese bemerkenswerte Tatsache, dass die Kopplungskonstante zu hohen Energien hin verschwindet und sich Quarks somit wie freie Teilchen verhalten, nennt man asymptotische Freiheit. Dies ist eine Eigenschaft von nichtabelschen Eichtheorien und erst diese Tatsache rechtfertigt die Störungsrechnung in der QCD. Andererseits ist bei kleinen Energien die Kopplungskonstante groß und die Teilchen können sich nicht frei bewegen. Diese Eigenschaft der QCD heißt 'Confinement' und führt dazu, dass sich Quarks nicht einzeln beobachten lassen, sondern nur in farbneutrale Zustände wie Mesonen oder Baryonen existieren. Bei kleinen Energien, also großen Kopplungskonstanten ($\alpha_s \sim 1$), ist der störungstheoretische Zugang nicht mehr erlaubt, so dass andere Zugänge notwendig sind um theoretische Vorhersagen zu machen, wie zum Beispiel Gitterfeldtheorien.

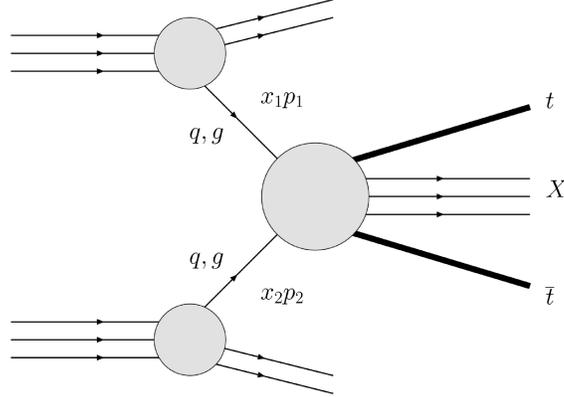


Abbildung 3.1: Veranschaulichung des Faktorisierungsprozesses für die Top Quark Paar Produktion.

3.3 Das Faktorisierungs-Theorem

Eine charakteristische Eigenschaft der QCD ist die Faktorisierung des Wirkungsquerschnittes in einen kurzreichweitigen (oder harten) Anteil $\hat{\sigma}_{t\bar{t}}$ und einen langreichweitigen Anteil, den PDF's (engl. Parton Distribution Functions) $\phi_{i,A}$.

$$\sigma(s, m_t) = \sum_{i,j} \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 \phi_{i,A}(x_1, \mu_F) \phi_{j,B}(x_2, \mu_F) \hat{\sigma}_{ij \rightarrow t\bar{t}}(\hat{s}, \mu_R, \mu_F, \alpha_s(\mu_R)) \quad (3.3)$$

Wobei s die Beschleunigerenergie, $\hat{s} = x_1 x_2 s^1$ die Schwerpunktsenergie der beteiligten Partonen i und j der zusammenstoßenden Hadronen A und B , α_s die Kopplungskonstante, μ_R die Renormierungsskala und μ_F die Faktorisierungsskala ist.

Das Faktorisierungs-Theorem kann wie folgt veranschaulicht werden: Ausgehend vom Partonmodell bestehen sämtliche Hadronen aus Partonen (in der realen Welt sind dies Gluonen und Quarks), welche durch ihre Wechselwirkung zusammengehalten werden, dessen genaue Struktur aber nicht berechnet werden kann. Bei einem Elektron Proton Streuprozess stoßen, vom Schwerpunktsystem aus gesehen, ein hochenergetisches Elektron und ein hochenergetisches Hadron zusammen. Letzteres ist ausgedehnt und wird deshalb lorentzkontrahiert. Des Weiteren sind seine internen Wechselwirkungen verlangsamt (Zeitdilatation), so dass im Schwerpunktsystem mit höherern Beschleunigerenergien die Lebenszeit jedes virtuellen Teilchens verlängert wird, während die Zeit, die das Elektron braucht um das Hadron zu durchqueren verkürzt wird. Wenn letztere Zeit kurz ist gegenüber jener, die das Hadron braucht um seinen inneren Zustand zu ändern, kann man das Hadron als 'eingefroren' betrachten. Da die 'eingefrorenen' Partonen nicht wechselwirken, wird jedem Parton ein Impulsanteil x am gesamten Hadronimpuls zugeschrieben. Jetzt kann das Elektron mit einem einzelnen Parton wechselwirken. Durch die Zeitdilatation interferieren die Streuprozesse vor und nach dem hartem Streuprozess nicht mit ihm selbst.

¹ bezeichnet hier und im Folgendem immer eine Größe auf Partonlevel.

Der Wirkungsquerschnitt kann also berechnet werden als $\phi_{i,A}(x)$, der Wahrscheinlichkeit, dass das Elektron auf ein 'eingefrorenes' Parton i mit dem Impulsanteil x stößt, mal dem Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}_{e,parton}(Q^2)$, welcher angibt, wie ein Elektron mit einem freien Parton durch den Impulstransfer Q^2 wechselwirkt. D.h. der Wirkungsquerschnitt für einen tief inelastischen Streuprozess kann symbolisch geschrieben werden als:

$$\sigma = \sum_i \int_0^1 dx \phi_{i,A}(x) \hat{\sigma}_{eH}(x, Q^2) \quad (3.4)$$

Das gleiche Bild kann auch für die Hadron Hadron Streuung verwendet werden. Die Zeitskala der Wechselwirkungen, welche die Struktur eines Hadrons produzieren, sind wieder viel länger (durch Zeitdilatation) als die Parton Parton Wechselwirkungen der zwei verschiedenen Hadronen. Zu beachten ist, dass die kurze Wechselwirkungszeit nur durch die Lorentzkontraktion erreicht werden kann, welche somit einen entscheidenden Beitrag für die Universalität der PDF's liefert. Die Gleichung 3.4 kann dadurch zu Gleichung 3.3 verallgemeinert werden. Sie wurde beispielsweise für tief-inelastische Streuprozesse oder für den Drell-Yan Prozess bewiesen [24].

Gleichung 3.4 kann mit Hilfe des Flusses Φ ,

$$\Phi_{ij}(\tau, \mu_F, \mu_R) = \tau \sum_{i,j} \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 \phi_i(x_1, \mu_F) \phi_j(x_2, \mu_F) \delta(x_1 x_2 - \tau) \quad (3.5)$$

welcher nur von den PDF abhängt, umgeschrieben werden in:

$$\sigma(s, m_t) = \sum_{i,j} \int_{p_H}^1 \frac{d\tau}{\tau} \Phi_{ij}(\tau, \mu_F) \hat{\sigma}_{ij \rightarrow t\bar{t}}(\tau s, \mu_R, \mu_F, \alpha_s(\mu_R)) \quad (3.6)$$

Der kurzreichweitige Anteil $\hat{\sigma}_{t\bar{t}}$ ist mittels Störungstheorie berechenbar, der langreichweitige Anteil, die PDF's, hingegen muss experimentell bestimmt werden.

Die Aufteilung des Wirkungsquerschnittes in den kurzreichweitigen und langreichweitigen Anteil ist nicht eindeutig. Es ist möglich, endliche Terme zwischen den beiden Anteilen hin und her zu verschieben. Deshalb ist eine Skala μ_F (die Faktorisierungsskala) nötig, relativ zu welcher die weichen und harten Anteile definiert sind und eine Vorschrift, die die Aufteilung der endlichen Terme beschreibt. Beide Punkte werden durch ein Faktorisierungsschema festgelegt.

Die PDF's hängen von der Faktorisierungsskala, der kurzreichweitige Anteil zusätzlich von der Renormierungsskala ab. Die Renormierungsskala wird benötigt um in der dimensional Regularisierung die Massendimension der Kopplungskonstante zu erhalten. Hingegen wird die Faktorisierungsskala erst durch die Faktorisierung eingeführt. Sie gibt an wie die Terme zwischen den PDF's und dem kurzreichweitigen Wirkungsquerschnitt aufgeteilt sind. Beide eingeführte Skalen können prinzipiell beliebige Werte annehmen, aber das exakte physikalische Endergebnis, der totale Wirkungsquerschnitt, darf nicht von ihnen abhängen. Sie sind somit nur ein Relikt von Störungsrechnungen zur endlichen Ordnung. Die Skalenabhängigkeit der Ergebnisse nimmt mit steigender Ordnung ab.

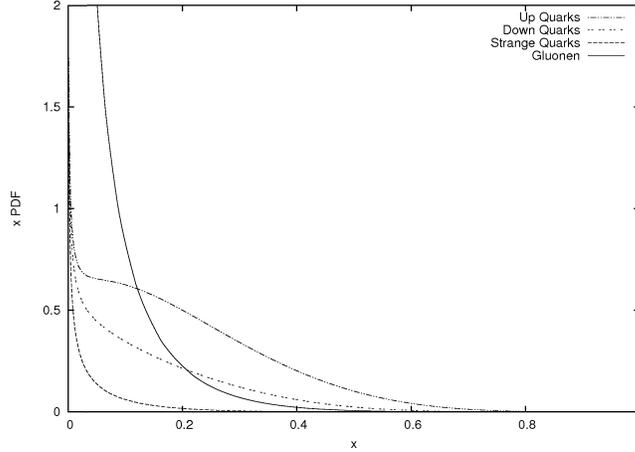


Abbildung 3.2: Die PDF's für die Up-, Down- und Strange Quarks, sowie für die Gluonen. Die Faktorisierungsskala wurde auf m_{Top} gesetzt.

Obwohl μ_R und μ_F eigentlich für eine Störungsrechnung n -ter Ordnung unabhängig sind, werden sie oft auf μ gleichgesetzt, da der begangene Fehler von der Ordnung $(n + 1)$ ist. Normalerweise wird μ auf die für den Prozess relevante Skala gesetzt, hier die Top Quark Masse, und für die Abschätzung der Skalenabhängigkeit, also der theoretischen Unsicherheit, wird sie zwischen $\frac{m_{Skala}}{2}$ und $2m_{Skala}$ variiert.

3.3.1 Die Parton Verteilungs Funktionen

Die Partonverteilungsfunktion (siehe Abbildung 3.2) $\phi_{i,A}(x_i, \mu_F)$ gibt an, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, ein Parton i in dem Hadron A (meist Proton oder Anti-Proton) mit dem Impulsanteil $x_i = \frac{p_i}{p_A}$ zu finden, wobei p_i der longitudinale Impuls des Partons und p_A der longitudinale Impuls des Hadrons ist. Sie sind ebenfalls abhängig von der Faktorisierungsskala. Die PDF's hängen von den äußeren Hadronen ab, aber nicht von den wechselwirkenden Bosonen, d.h. sie sind universell. Sie sind unabhängig von dem Impulsübertrag $Q^2 = -q$ (siehe Abbildung 3.1), welcher bei dem harten Wirkungsquerschnitt auftritt. Da sie die langreichweitigen Effekte beschreiben, enthalten sie das infrarote Verhalten des Wirkungsquerschnitts und sind nicht perturbativ berechenbar.

Die PDF's werden aus tief inelastischen Streuexperimenten gewonnen. Für NNLO Rechnungen ist es wichtig auch NNLO PDF's zur Verfügung zu haben, da es zu großen Auslöschungen zwischen Termen der PDF's und des kurzreichweitigen Wirkungsquerschnitts kommen kann. Im Moment stehen die CTEQ6.5 [25, 26] und MRSTW-06 [27, 28] auf NNLO Level zur Verfügung. Dafür ist neben einer sehr genauen experimentellen Messung vonnöten, dass der harte Wirkungsquerschnitt auf NNLO Level bekannt ist. Daraus können die NNLO PDF's bei der Prozessenergie abstrahiert werden. Um die NNLO PDF's auch bei anderen Prozessenergien zu erhalten, ist es

notwendig die Splitting Funktionen auf NNLO Level zu kennen. Diese sind ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, in einem Parton ein anderes Parton mit dem Impulsbruchteil $(1-x)$ zu finden. Dann können die PDF's mit Hilfe der DGLAP Gleichungen [29] für alle Energien berechnet werden. Seit 1990 konnten die PDF's z.B. am Elektron-Proton Beschleuniger DESY, in der Nähe von Hamburg, mit hoher Präzision bestimmt werden. Nur mit genau bekannten PDF's sind gute Vorhersagen für Wirkungsquerschnitte möglich. Die Unsicherheit in den PDF's macht, nach dem Fehler beim b-tagging und der Luminosität, den größten Beitrag zum Gesamtfehler der Top Paar Produktion aus (siehe Abbildung 2.2).

Der CTEQ6.5 PDF Satz besitzt einen Fehler von 6% für den Tevatron und 3 % für den LHC für die Top Quark Paar Produktion. Zwar hat die Bevorzugung des Gluon Fusions Kanals gegenüber dem Quark Anti-Quark Vernichtungskanal am LHC einen negativen Effekt, da die Quark PDF's besser vermessen sind als die Gluon PDF's, jedoch konnten am Tevatron nur Quarks mit hohem Impulsanteil x ein Top Quark Paar erzeugen. Diese sind schlechter bekannt als die Gluon PDF's im mittleren Impulsbereich (welche beim LHC einen großen Beitrag liefern).

3.3.2 Der harte Wirkungsquerschnitt

Der harte oder auch kurzreichweitige Wirkungsquerschnitt kann perturbativ berechnet werden, solange die relevanten Skalen weit größer sind als Λ_{QCD} . Er hängt nicht von den äußeren Hadronen ab, sondern nur von den Partonen und den Bosonen welche wechselwirken. Seine Entwicklung in dimensionslose Skalenfunktionen (engl. scaling functions) ist in Gleichung 3.7 gegeben (μ_R und μ_F wurden dabei gleichgesetzt, $\rho = \frac{4m_{Top}^2}{s}$).

$$\hat{\sigma}_{ij}(s, m_{Top}, \mu) = \frac{\alpha_s^2(\mu)}{m_{Top}^2} \sum_{k=0}^{\infty} (4\pi\alpha_s(\mu))^k \sum_{l=0}^k f_{ij}^{kl}(\rho) \log^l \left(\frac{\mu^2}{m_{Top}^2} \right) \quad (3.7)$$

Der Ansatz ist eine Reihenentwicklung in α_s und bricht zusammen wenn α_s gegen 1 strebt. Dann müssen nicht perturbative Methoden wie Gittertheorien verwendet werden. Der Betrag von k gibt die Ordnung der Rechnung an ($k = 0 \rightarrow$ LO, $k = 1 \rightarrow$ NLO, ...). Die logarithmischen Terme entstehen (bei der dimensional Regularisierung) aus der Entwicklung von $(\frac{\mu}{m})^\epsilon$ nach ϵ , was $1 + \epsilon \log(\frac{\mu}{m}) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \log^2(\frac{\mu}{m}) + \dots$ ergibt. In einer Rechnung der Ordnung k verhalten sich die Terme niedrigster Ordnung in ϵ wie $\frac{1}{\epsilon^{2k}}$. Die infraroten Divergenzen heben sich jedoch gegenseitig auf, so dass nur noch die ultravioletten Divergenzen bis zur Ordnung $\frac{1}{\epsilon^k}$ übrigbleiben. Daraus folgt, zusammen mit der Reihenentwicklung von $(\frac{\mu}{m})^\epsilon$, dass die höchste verbleibende Potenz des Logarithmus $\log^l(\frac{\mu}{m})$ der Ordnung der Rechnung entspricht, also $l \leq k$ ist, was den Ansatz in Gleichung 3.7 erklärt.

3.4 Status der Berechnung des Top Quark Wirkungsquerschnitts

Leitende Ordnung (LO)

Die Diagramme der leitenden Ordnung sind in der Abbildung 2.3 gezeigt. Sie enthalten den Quark Anti-Quark Vernichtungskanal und den Gluon Fusions Kanal. Während am Tevatron der erstere mit 90% den bedeutenderen Anteil an der Top Paar Produktion liefert, ist beim LHC der Gluon Fusions Kanal mit einem Anteil von 90% der Entscheidende (siehe Kapitel 2.1). Die Ergebnisse der leitenden Ordnung wurden bereits in den späten 70'ern für die Charm Quark Produktion berechnet [4]. Sie sind für den Quark Vernichtungs Kanal:

$$\frac{d\sigma_{q\bar{q}\rightarrow t\bar{t}}}{d\hat{t}} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^4} [(m^2 - \hat{t})^2 + (m^2 - \hat{u})^2 + 2m^2\hat{s}] \quad (3.8)$$

und für den Gluon Gluon Kanal,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{gg\rightarrow t\bar{t}}}{d\hat{t}} = & \frac{\pi\alpha_s^2}{8\hat{s}^2} \left[\frac{6(m^2 - \hat{t})(m^2 - \hat{u})}{\hat{s}^2} - \frac{m^2(\hat{s} - 4m^2)}{3(m^2 - \hat{t})(m^2 - \hat{u})} + \right. \\ & \frac{4}{3} \frac{(m^2 - \hat{t})(m^2 - \hat{u}) - 2m^2(m^2 + \hat{t})}{(m^2 - \hat{t})^2} + \frac{4}{3} \frac{(m^2 - \hat{t})(m^2 - \hat{u}) - 2m^2(m^2 + \hat{u})}{(m^2 - \hat{u})^2} \\ & \left. - 3 \frac{(m^2 - \hat{t})(m^2 - \hat{u}) - m^2(\hat{u} - \hat{t})}{\hat{s}(m^2 - \hat{t})^2} - 3 \frac{(m^2 - \hat{t})(m^2 - \hat{u}) - m^2(\hat{t} - \hat{u})}{\hat{s}(m^2 - \hat{u})^2} \right] \quad (3.9) \end{aligned}$$

wobei s, t, u die Mandelstammvariablen sind². Der Fehler von $\sigma_{t\bar{t}}^{LO}$ ist mit $\sim 50\%$ relativ groß. Der Hauptanteil kommt von der Unsicherheit in μ_R, μ_F und ihren Effekte auf α_s . Zusätzliche Fehlerquellen kommen von den PDF's, der Top Quark Masse und $\alpha_s(M_z)$.

Nächste leitende Ordnung (NLO)

Eine komplette Top Paar Produktionsrechnung zur nächst höheren Ordnung (NLO) wurde etwa 10 Jahre später von Nason, Dawson und Ellis durchgeführt [13, 14]. Sie beinhaltet sowohl die Berechnung von 1-Schleifen Diagrammen (virtuelle Korrekturen), als auch die Berechnung von Korrekturen aus reellen Partonabstrahlungen auf Treelevel. Abbildung 3.3 zeigt zwei 1-Schleifen Korrekturen, eine im $q\bar{q}$ -Kanal die andere im gg -Kanal. Beispiele von reeller Abstrahlung auf NLO Level werden in Abbildung 3.4 gezeigt. Die NLO Rechnung erhöht $\sigma_{t\bar{t}}^{LO}$ um ca. 30% und die theoretische Unsicherheit aus der Skalenabhängigkeit reduziert sich auf ca. 12%.

Alle Größen, wie der harte Wirkungsquerschnitt, die PDF's und α_s müssen auf dem gleichen Level bekannt sein, da es zu großen Auslöschungen zwischen den Termen der reellen Abstrahlung und den PDF's kommen kann. Des Weiteren müssen alle Größen konsistent im selben Renormierungsschema definiert werden, da in verschiedenen Schemata die Anteile der reellen Abstrahlungen unterschiedlich zwischen den PDF's, $\alpha_s(\mu)$ und dem harten Wirkungsquerschnitt aufgeteilt werden.

²Diese sind wie üblich definiert: $s = (p_1 + p_2)^2, t = (p_1 - p_3)^2, u = (p_1 - p_4)^2$.

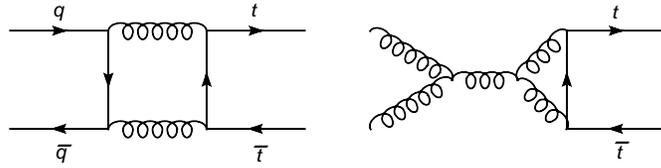


Abbildung 3.3: NLO virtuelle Korrekturen

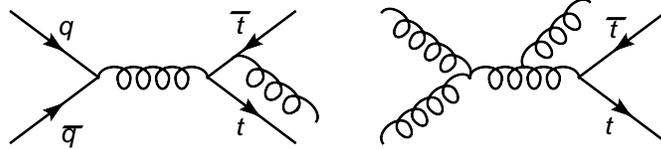


Abbildung 3.4: NLO reelle Korrekturen

Aufsummierung von weichen Gluonen

Die Abstrahlung von niedrigenergetischen Gluonen verursacht eine Korrektur zum totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{t\bar{t}}$. Dies ist vor allem beim Tevatron relevant, weil dort, aufgrund der niedrigeren Beschleunigerenergie, viele Top Anti-Top Paare in der Nähe der Produktionsschwelle produziert werden. Mit ihrer Hilfe konnte die Skalenabhängigkeit der NLO Rechnung auf ca. 5% reduziert werden. Beim LHC ist dieser Effekt geringer, da auch viele Top Quark Paar weit entfernt von der Produktionsschwelle produziert werden.

Bei Rechnungen zu höheren Ordnungen (NLO, NNLO,..) erzeugen die virtuellen Gluonen infrarote Divergenzen, welche sich exakt mit denjenigen Divergenzen von nicht detektierbaren, reellen Gluonen auslöschen, da der gesamte Wirkungsquerschnitt infrarot endlich ist [30]. In bestimmten kinematischen Regionen des Phasenraumes (z.B. in der Nähe von Produktionsschwellen) ist die reelle Emmision stark unterdrückt, wodurch die reellen und die virtuellen Anteile sich nicht mehr vollständig aufheben, sondern endliche Terme der Form $\sim \alpha_s^n * \log^m \beta$ ($m \leq 2n$)³ übrigbleiben, wobei β ein Maß für den Abstand von der Produktionsschwelle ist⁴. Der Beitrag der weichen Gluonen für $\beta \rightarrow 0$ (also in der Nähe zur Produktionsschwelle) ist groß und kann die Konvergenz der perturbative Reihe in der kinematischen Region zerstören. Durch Aufsummierung zu hohen oder allen Ordnungen in α_s ist es möglich auch dort gute Ergebnisse zu erhalten. Auf NLO Niveau gibt es $m = 0$ leitende Logarithmen (LL) und $m = 1$ nächste leitende Logarithmen (NLL) Terme und NNLL Terme ($m = 2$). Auf NNLO Level kann m die Werte 0 bis 4 annehmen, dass heißt es gibt LL bis NNLL ($= \alpha_s^2 * \log^4 \beta$) Terme. Momentan sind alle NNLO Logarithmen aus weicher Gluon Abstrahlung bekannt⁵, außer einigen NNLL, welche numerisch klein sein dürften [31]. Aus diesen Ergebnissen kann ein verbesserter Wirkungsquerschnitt $\sigma_{t\bar{t}}^{NLO+weicheGluonen}$

³Die Anzahl der Logs ist durch die höchste Anzahl von abgestrahlten weichen Gluonen in der Amplitude gegeben. Auf NNLO ist sie vier (Siehe Abbildung 3.7)

⁴ β ist die Geschwindigkeit der Top Quarks $\beta = \sqrt{1 - \frac{4m_{top}^2}{s}}$.

⁵Es existiert eine anhaltende Diskussion zwischen Experten, welche dieser Logarithmen bekannt sind.

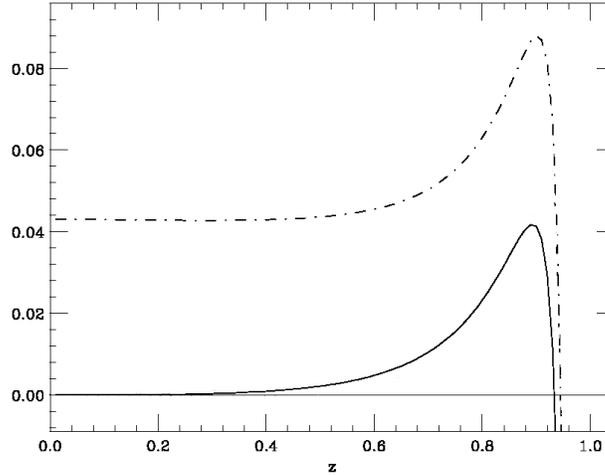


Abbildung 3.5: Die durchgezogene Linie zeigt die korrekten Korrekturen auf α_s^2 Level für den Prozess $b \rightarrow s + \gamma$, die gepunktet gestrichelte Linie die durch die Aufsummierung weicher Gluonen erhaltenen Korrekturen. Die Diskrepanz ist offensichtlich.

gewonnen werden [31].

In [32, 33], werden die weichen Gluonen zu allen Ordnungen aufsummiert (bis NNLL). Es wird behauptet, dass die Aufsummierung der weichen Gluonen den Großteil der NNLO Korrekturen beinhaltet und somit die Summe des NLO Wirkungsquerschnitts und des Ergebnisses der Aufsummierung mit dem exakten Wirkungsquerschnitt σ^{NNLO} auf NNLO Level sehr genau übereinstimmt. Die Behauptung stützt sich zum einen darauf, dass die meisten Top Quarks an der Produktionsschwelle produziert werden (wo die Korrekturen aus der Aufsummierung am größten sind), und zum anderen wird behauptet, dass die restlichen Korrekturen verhältnismäßig klein sein sollten. Diese Rechnung ist für den Tevatron, wo mehr Top Quark Paare an der Produktionsschwelle produziert werden, relevanter als für den LHC.

Dem gegenüber steht zum einen, dass die in [32, 33] verwendeten Methoden unter Experten umstritten sind.

Zum anderen liefern Korrekturen aus der Aufsummierung von weichen Gluonen oft nicht korrekte Ergebnisse. Beispielsweise wurde in [34] die exakte Korrektur zur Ordnung α_s^2 für den Prozess $b \rightarrow X_s + \gamma$ (durchgezogene Linie in Abbildung 3.5) mit den Korrekturen zur Ordnung α_s^2 aus der Aufsummierung weicher Gluonen (gepunktet gestrichelte Linie) verglichen. Letztere überschätzen die echte Korrektur bei z.B. $z = 0.8$ um einen Faktor 3. Hier war es also nicht möglich, aus der Aufsummierung der weichen Gluonen eine Verbesserung des Ergebnisses zu erhalten. Des Weiteren wurde in [35] das exakte Ergebnis der NNLO Rechnung für den Wirkungsquerschnitt der Higgs Boson Produktion mit den zuvor veröffentlichten NLO Wirkungsquerschnitt verglichen, welche durch Aufsummierung weicher Gluonen verbessert wurde. Wie aus Abbildung 3.6 zu erkennen, unterschätzt die Aufsummierung weicher Gluonen die exakten NNLO Korrekturen um 10% bis 15%. Der K-Faktor ist dabei definiert als $K^{NNLO} = \frac{\sigma^{NNLO}}{\sigma^{LO}}$.

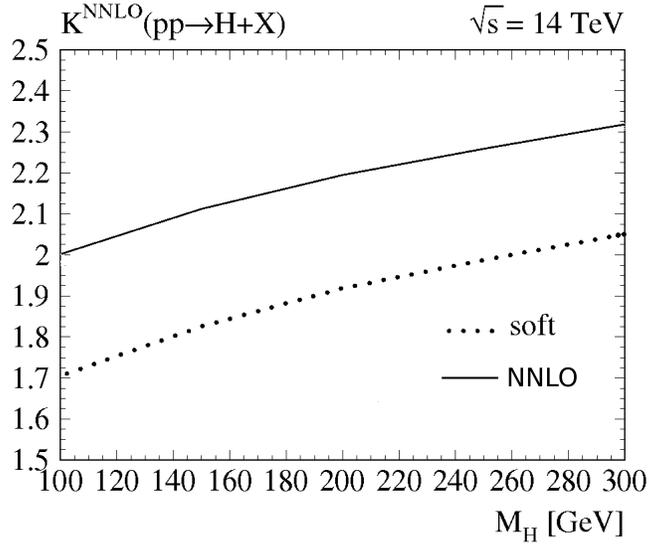


Abbildung 3.6: Es wird der K-Faktor ($K^{NNLO} = \frac{\sigma^{NNLO}}{\sigma^{LO}}$), aufgetragen gegen die Higgs Masse, gezeigt, für die NNLO Rechnung (durchgezogene Linie) und die NLO + Aufsummierung weicher Gluonen (gepunktete Linie). Die Wirkungsquerschnitte von σ^{NNLO} und $\sigma^{NLO+weicheGluonen}$ unterscheiden sich um 10% bis 15%.

Das Ergebnis in [32, 33] für den näherungsweise exakten Wirkungsquerschnitt auf NNLO Level ist also mit Vorsicht zu betrachten und kann erst durch eine komplette NNLO Rechnung bestätigt oder widerlegt werden. Des Weiteren ist ein Ergebnis, welches durch die Aufsummierung von weichen Gluonen gewonnen wurde, nicht für einen Monte Carlo Generator geeignet, im Gegensatz zu einer vollen NNLO Rechnung.

Weitere Korrekturen

Neben der Aufsummierung weicher Gluonen können auch Coulomb Effekte in der Nähe der Produktionsschwelle eine Rolle spielen. In [36] wurde jedoch gezeigt, dass diese nur einen geringen Beitrag leisten. Auch der elektroschwache Beitrag auf NLO Level ist klein. Die Korrekturen belaufen sich auf ca. 1% [37].

Bisherige Ergebnisse der NNLO Rechnung

Bereits letztes Jahr (2007) konnte der Hochenergielimes ($\frac{m_{Top}^2}{s} \rightarrow 0$) sowohl im Quark Kanal [38] als auch im Gluon Fusions Kanal [39] berechnet werden. Allerdings kann mit dieser Rechnung weder die Vorhersage des Wirkungsquerschnitts $\sigma_{t\bar{t}}$ verbessert werden, noch kann der Niedrigenergielimes erhalten werden⁶, welcher für einen Monte Carlo benötigt wird. Die Berechnung

⁶Dies ist nicht möglich da diese Ergebniss nicht für die Methode der Differentialgleichungen verwendet werden können, siehe Kapitel 4.3

des Niedrigenergielimes des Quark Anti-Quark Vernichtungs Kanals der 2-Schleifen virtuellen Korrekturen wurde dieses Jahr (2008) fertiggestellt [40].

3.5 Die Zukunft: Eine vollständige NNLO Rechnung

Wie aus Abbildung 2.2 zu erkennen ist, wird der experimentelle Fehler beim LHC für die Messung des Top Quark Wirkungsquerschnitt unter 10% liegen. Im letztem Kapitel wurde erwähnt, dass der Fehler der NLO Rechnung 12% ist und die Aufsummierung weicher Gluonen nur eine begrenzte Verbesserung liefert. Um eine genaue Vorhersage für den Top Quark Wirkungsquerschnitt am LHC zu erhalten ist also eine NNLO Rechnung unumgänglich.

Die theoretische Unsicherheit aufgrund der Skalenabhängigkeit auf NNLO Level kann mit Hilfe des vollen NLO Ergebnisses und der Renormierungsgruppengleichung berechnet werden. Der Ansatz macht von der Tatsache Gebrauch, dass der totale Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}_{t\bar{t}}^{NNLO}$ (für jede Ordnung) nicht von der Skala μ abhängen darf.

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \sigma_{t\bar{t}} = 0 \quad (3.10)$$

Nach dem Einsetzen von Gleichung 3.3 und der Tatsache, dass die Ableitung der PDF's nach μ aus den DGLAP Gleichungen bekannt sind,

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} f_{i,A}(x, \mu) = \frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} [P_{ij} \otimes f_{j,A}(z, \mu)](x) \quad (3.11)$$

wobei P_{ij} die Splitting-Funktion und \otimes eine Faltung ist⁷, erhält man:

$$\sum_{ijk} f_{i,A} \otimes \left[\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} P_{ik} \otimes \frac{\sigma_{kj}(z, \mu)}{z} + \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \frac{\sigma_{kj}(z, \mu)}{z} + \frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \frac{\sigma_{ik}(z, \mu)}{z} \otimes P_{kj} \right] \otimes f_{j,B} = 0 \quad (3.12)$$

Da diese vorherige Gleichung für allgemeines μ und x gilt, muss der Ausdruck in den eckigen Klammern gleich Null sein. Daraus folgt:

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \frac{\sigma_{kj}(z, \mu)}{z} = -\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \left[P_{ik} \otimes \frac{\sigma_{kj}(z, \mu)}{z} + \frac{\sigma_{ik}(z, \mu)}{z} \otimes P_{kj} \right] \quad (3.13)$$

Für $\sigma_{kj}(z, \mu)$ wird der Ansatz

$$\hat{\sigma}_{ij}(\mu) = \frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \hat{\sigma}^{LO}(\mu) + \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \right)^2 \hat{\sigma}^{NLO}(\mu) + \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \right)^3 \hat{\sigma}^{NNLO}(\mu) + \dots \quad (3.14)$$

in Gleichung 3.13 eingesetzt und Ordnung für Ordnung in α_s gelöst, wobei die Integrationskonstanten nicht bekannt sind. Dennoch liefert diese Gleichung zwei wichtige Beiträge:

⁷ $[P_{ij} \otimes f_{j,A}](x) := \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 P_{ij}(x_1) f_{j,A}(x_2) \delta(x_1 x_2 - x)$

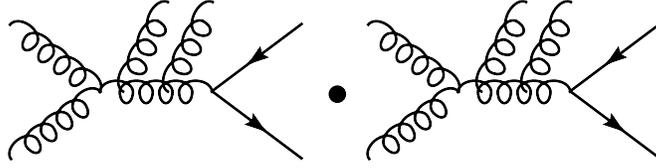


Abbildung 3.7:

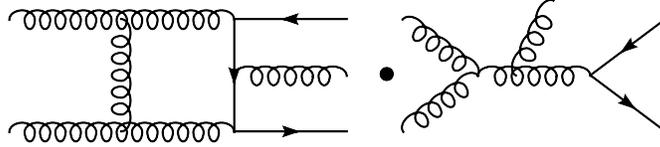


Abbildung 3.8:

Zum einen kann die Gleichung 3.14 benutzt werden, um die μ Abhängigkeit eines bis zur Ordnung n exakt berechneten Ergebnisses zu überprüfen, indem man das exakte Ergebnis mit dem aus Gleichung 3.14 erhaltenen Ergebnis vergleicht. Zum anderen kann, bei vollständiger Kenntnis des analytischen Wirkungsquerschnittes bis zur Ordnung n , die μ -Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes auf Ordnung $n + 1$ abgeschätzt werden. Eine exakte Berechnung der Abhängigkeit ist nicht möglich, da die Integrationskonstante auf diesem Level nicht bekannt ist. Trotzdem ist sie meist relativ genau und bietet wertvolle Informationen, inwieweit eine Rechnung zur nächsten Ordnung die μ -Abhängigkeit verbessert.

Diese Rechnung wurde für die Top Quark Paar Produktion durchgeführt mit den Splittingfunktionen aus [41, 29] und dem NLO Ergebnis aus [13]. Die Skalenabhängigkeit beträgt auf NNLO Level zwischen 3% und 4%, wenn μ zwischen $\frac{1}{2}M_{Top}$ und $2M_{Top}$ variiert wird.

Für die Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts auf NNLO Level werden vier Teile unterschieden. Der Beitrag σ_1 zum totalen Wirkungsquerschnitt kommt aus der Interferenz zweier Feynman Diagramme mit je zwei reellen Abstrahlungen (Abbildung 3.7), der zweite Beitrag σ_2 aus der Interferenz eines Ein-Schleifen Graphen mit einer reellen Abstrahlung mit einem Treelevel Graphen ebenfalls mit einer reellen Abstrahlung (Abbildung 3.8). Der dritte ist der quadrierte 1-Schleifen Beitrag σ_3 (Abbildung 3.9) und der letzte sind die 2-Schleifen virtuellen Korrekturen σ_4 interferiert mit den Treelevel Graphen (Abbildung 3.10).

Alle vier Teile existieren sowohl im Quark Anti-Quark Kanal als auch im Gluon Fusions Kanal. Um den Wirkungsquerschnitt zu erhalten wird die Amplitude über den Phasenraum integriert.

$$\sigma_{t\bar{t}}^{NNLO} = \sum_{Partonen} \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 \quad (3.15)$$

Während es für den ersten Anteil noch kein Ergebnis gibt, ist der zweite Anteil prinzipiell aus [42] bekannt. Der zweite Anteil kann auch mit Hilfe der neu entwickelten OPP Methode [43] gewonnen werden oder, ähnlich zu den 2-Schleifen virtuellen Korrekturen, kann das Ergebnis aus

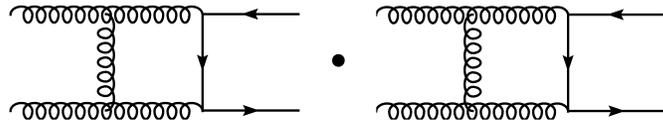


Abbildung 3.9:

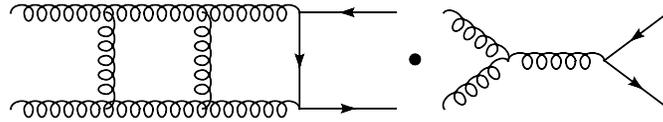


Abbildung 3.10:

dem Hochenergielimes berechnet werden [44]. Der dritte Anteil wurde in [45, 46, 47] berechnet. Der 2-Schleifen Anteil $\hat{\sigma}_4$ (Abbildung 3.10), welcher in dieser Diplomarbeit für Gluonen berechnet wurde, ist der schwerste Teil. Für den Quark Anti-Quark Kanal ist er seit diesem Jahr bekannt [40]. Die vollständige NNLO Rechnung kann mit einem Monte Carlo Generator kombiniert werden um Vorhersagen für den LHC zu treffen. Jedoch müssen die für die Phasenraumintegration notwendigen 'subtraction terms' (engl.) [48] auf NNLO Level noch bestimmt werden.

4 Berechnung der virtuellen 2-Schleifen Korrekturen

In den beiden vorhergehenden Kapiteln wurde die Notwendigkeit der Berechnung des Top Anti-Top Wirkungsquerschnitts auf NNLO Level für präzise Vorhersagen am LHC gezeigt. In diesem Kapitel soll nun die Vorgehensweise für die Berechnung des virtuellen 2-Schleifen Anteils erklärt werden.

4.1 Vom Prozess zu den Master Integralen

Um den kurzreichweitigen Wirkungsquerschnitt bis zu einer gewünschten Ordnung in α_s zu berechnen, müssen alle möglichen Feynman Diagramme bis zu dieser Ordnung in Betracht gezogen werden. Die Anzahl dieser Feynman Diagramme steigt stark mit der Ordnung an. So ist die Anzahl der Diagramme auf Treelevel für die Top Anti-Top Paar Produktion 4, für NLO bereits 43 Schleifendiagramme und auf NNLO schließlich 916 Diagramme, allein für die virtuellen 2-Schleifen Korrekturen. Beispiele für Diagramme sind in den Abbildungen 3.7-3.9 zu sehen. Die Diagramme wurden automatisch mit der Software `Diagen` [49] produziert.

Diese Diagramme können mit Hilfe der Feynman Regeln in Feynman Integrale übergeführt werden, wobei Schleifen sich als Integrale über den Schleifenimpuls ausdrücken.

Im Folgenden werden nur noch die virtuellen 2-Schleifen Korrekturen behandelt, da ihre Berechnung das Ziel dieser Diplomarbeit war. Vor der Berechnung der einzelnen Feynman Integrale werden noch Vereinfachungen vorgenommen.

Ein allgemeines Feynman Integral kann mehrere Lorentz- und Colorindizes besitzen. Die Integrale der virtuellen 2-Schleifen Korrekturen werden mit den Born Integralen multipliziert und über die Farben und den Spin gemittelt, so dass das Ergebnis lediglich eine Funktion von der Anzahl der Farben ist. Deshalb werden wir im Folgendem nur Feynman Integrale ohne Lorentz- oder Colorindizes betrachten. Bei der Top Anti-Top Produktion müssen im Quark Vernichtungskanal 2812 und im Gluon Fusions Kanal 8676 vollständig kontrahierte Feynman Integrale berechnet werden. Das Vorgehen ist schematisch in Abbildung 4.1 dargestellt.

Einzelne Feynman Integrale können divergent sein. Diese Divergenzen müssen sich jedoch gegenseitig aufheben, da der gesamte Wirkungsquerschnitt, als physikalische Observable, einen endlichen Wert haben muss. Dafür gibt es verschiedene Regularisierungsschematas, das gebräuchlichste



Abbildung 4.1: Von Feynman Diagrammen zu Master Integralen

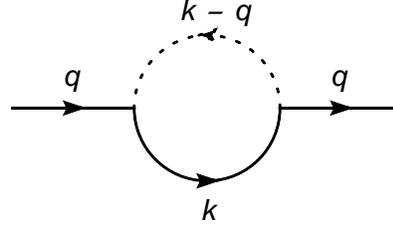


Abbildung 4.2: Ein-Schleifen Selbstenergie Diagramm eines Spin 0 Teilchens mit Masse m . Die gestrichelte Linie symbolisiert ein masseloses Spin 0 Teilchen.

ist die dimensionale Regularisierung. Hier wird nicht das Schleifen Integral über 4 Dimensionen ausgeführt, sondern ein kleiner Parameter ε eingeführt und über d ($d = 4 - 2\varepsilon$) Dimensionen integriert, wodurch das Integral endlich wird. Im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$, also in 4 Dimensionen, wird das Integral wieder divergent.

Aufgrund der großen Anzahl von Diagrammen ist die direkte Berechnung aller Integrale schwierig. Sie ist auch nicht notwendig, denn die zu berechnenden Integrale sind nicht voneinander unabhängig, sondern es gibt eine kleinere Gruppe von sogenannten Master Integralen, die eine Basis zu den benötigten Feynman Integralen bilden. Es genügt folglich, lediglich die Master Integrale zu kennen, um alle Feynman Integrale berechnen zu können. Diese Relationen zwischen den Integralen werden mit Hilfe der partiellen Integration (IBP)¹ aufgestellt.

Dies sei an einem Beispiel erläutert [50]:

Das Diagramm in Abbildung 4.2 kann als Feynman Integral geschrieben werden:

$$I(q^2, m^2, d, a_1, a_2) = \int \frac{d^d k}{(k^2 - m^2)^{a_1} ((q - k)^2)^{a_2}} \quad (4.1)$$

Wird $\frac{\partial}{\partial k^\mu} k^\mu f(a_1, a_2)$ und $q^\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu} f(a_1, a_2)$ explizit berechnet, wobei $f(a_1, a_2)$ der Integrand von Formel 4.1 ist, und werden die Ergebnisse auf 0 gesetzt, da diese nach der Integration über $d^d k$ (für $a_1 + a_2 \geq 3$) verschwinden, ergeben sich die Relationen:

¹Partielle Integration in Bezug auf Feynman Diagramme wird als Synonym für das Verschwinden des Oberflächenterms genommen, d.h. also $\int d^d k \frac{\partial f}{\partial k^\mu} = 0$.

$$(d-2a_1-a_2)f(a_1, a_2) - 2m^2 a_1 f(a_1+1, a_2) - a_2 f(a_1-1, a_2+1) + a_2(q^2-m^2)f(a_1, a_2+1) = 0 \quad (4.2)$$

$$(a_2 - a_1)f(a_1, a_2) + a_1 f(a_1 + 1, a_2 - 1) - a_1(q^2 + m^2)f(a_1 + 1, a_2) - a_2 f(a_1 - 1, a_2 + 1) + a_2(q^2 - m^2)f(a_1, a_2 + 2) = 0 \quad (4.3)$$

Wird die Differenz der beiden Gleichungen genommen und wird a_1 durch $a_1 - 1$ ersetzt, so erhält man:

$$f(a_1, a_2) = \frac{1}{(a_1 - 1)(q^2 - m^2)}((-d - 1 + a_1 + 2a_2)f(a_1 - 1, a_2) + (a_1 - 1)f(a_1, a_2 - 1)) \quad (4.4)$$

Für $a_1 = 2$ und $a_2 = 1$ ergibt sich beispielsweise $f(2,1) = \frac{1}{(q^2-m^2)}(-1 + 2\varepsilon)f(1, 1) - f(2,0)$. Das Bemerkenswerte ist hier, dass es möglich ist Integranden höherer Ordnung (a_1, a_2) durch Integranden niedrigerer Ordnung $(a_1 - 1, a_2)$ und $(a_1, a_2 - 1)$ auszudrücken. Durch sukzessive Reduktion ist es also möglich, alle Integranden $f(a_1, a_2)$ durch Integrale zu beschreiben, welche entweder $a_1 \leq 0$, $a_2 \leq 0$ oder $f(1,1)$ sind. Da alle Integrale mit $a_1 \leq 0$ verschwinden (masselose Tadpole Diagramme) und $f(1,1)$ sowie alle Integrale mit $a_2 \leq 0$ berechenbar sind, hat man einen Satz von Master Integralen gefunden. Für die Berechnung von $f(a_1, a_2)$ mit $a_1, a_2 \leq N$ genügt es, die Integrale $f(a_1, 0)$, $f(0, a_2)$, $f(1, 1)$ für $a_1, a_2 \leq N$ zu kennen.

Wahl der Master Integrale

Da der totale Wirkungsquerschnitt für einen physikalischen Prozess in 4 Dimensionen endlich ist, müssen sich alle ε Pole gegenseitig aufheben. Terme mit positiven Potenzen von ε dagegen verschwinden, sobald $\varepsilon \rightarrow 0$. Da der Wirkungsquerschnitt $\sigma \approx |A|^2 \approx |\sum_i F_i|^2$, wobei A die Amplitude und F_i die einzelnen Feynman Integrale sind, genügt es alle Feynman Integrale lediglich bis zur Ordnung $O(\varepsilon^0)$ zu kennen. Die Feynman Integrale werden jedoch nicht, wie oben beschrieben, einzeln berechnet, sondern lediglich die Master Integrale M_j , durch welche alle in der Amplitude vorkommenden Feynman Integrale ausgedrückt werden können: $F_i = \sum_j C_{ij} M_j$. Es kann vorkommen, dass C_{ij} einen Pol in ε besitzt, einen sogenannten unechten Pol (z.B. $C_{ij} = \frac{1}{\varepsilon}$ besitzt einen unechten Pol 1. Ordnung in ε). Die zu diesem C_{ij} gehörigen Master Integrale M_j müssen deshalb zu der ersten Ordnung in ε berechnet werden, damit das Feynman Integral F_i bis zur Ordnung $O(\varepsilon^0)$ bekannt ist. Das Berechnen von höheren Ordnungen der Master Integrale in ε , d.h. also wenn unechte Pole auftreten, ist schwierig und es wurde deshalb immer versucht, dies durch eine geschickte Wahl der Basis der Master Integralen zu umgehen. Besonders im Zusammenhang mit der Differentialgleichungsmethode (siehe Kapitel 4.2.6) ist dies aber manchmal unumgänglich. Im Gluon Fusions Kanal der Top Quark Paar Produktion werden die 8676 zu berechnenden Feynman Integrale auf lediglich 422 Master Integrale, im Quark Vernichtungskanal werden 2812 Feynman Integrale auf 145 Master Integrale, reduziert, die berechnet werden müssen.

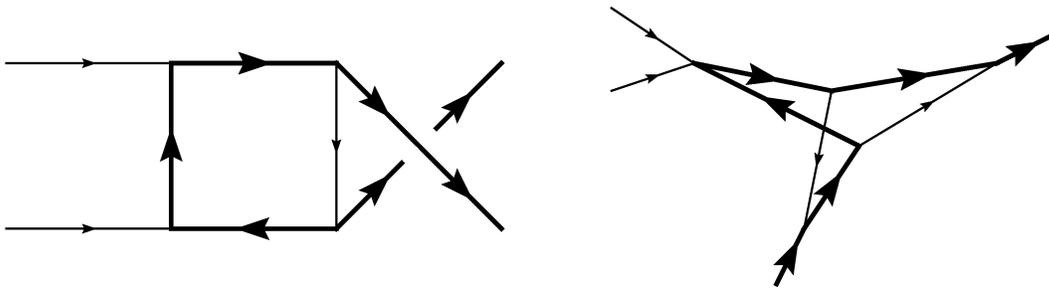


Abbildung 4.3: Feynman Diagramme für einen planaren und einen nicht-planaren 6-Liner. Die fetten Linien bezeichnen massive Teilchen, die dünnen masselose Teilchen.

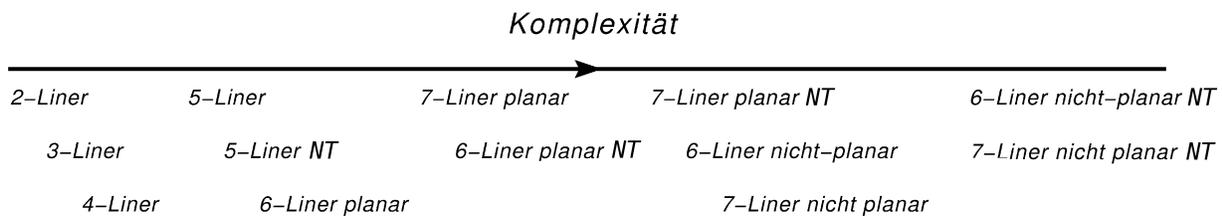


Abbildung 4.4: Übersicht über die verschiedenen Komplexitätsstufen bei der Berechnung der Master Integrale (NT bedeutet mit nicht trivialen irreduziblen Zähler, d.h. der Zähler des Integrals ist ungleich 1, sondern ein Produkt aus den Impulsen).

Klassifizierung der Master Integrale

Die 422 Master Integrale lassen sich in verschiedene Gruppen einteilen. Ein Unterscheidungskriterium ist die Anzahl von verschiedenen Propagatoren im Integranden. Im Gluon Fusions Kanal gibt es Master Integrale mit 2 bis 7 verschiedenen Propagatoren (sogenannte 2-Liner bzw. 7-Liner). Diese Anzahl entspricht der Anzahl der inneren Linien. In Abbildung 4.2 und Abbildung 4.3 sind ein 2-Liner und zwei 6-Liner zu sehen. Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal ist der Zähler des Integranden. Ist er gleich eins, so wird von Integralen mit trivialem irreduziblen Zähler gesprochen, ist er ein Produkt von inneren und/oder äußeren Impulsen, so wird von Integralen mit nicht-trivialem irreduziblen Zähler gesprochen. Integrale mit nicht trivialen irreduziblen Zählern sind meist eine besondere Herausforderung, da im Allgemeinen die MB-Darstellung (siehe Kapitel 4.2) wesentlich komplizierter ist als bei den entsprechenden Integralen mit einem Zähler von 1, und damit auch die Berechnung. Als dritten Unterschied haben 6- und 7-Liner die Möglichkeit planar oder nicht-planar zu sein. In Abbildung 4.3 ist ein planarer und ein nicht-planarer 6-Liner gezeigt. Der Grund für diese Benennung ist offensichtlich. Die nicht-planaren Integrale sind besonders schwer zu berechnen, da sie im Allgemeinen von allen drei Mandelstammvariablen s, t, u abhängen, im Gegensatz zu den planaren Integralen, die nur von 2 Variablen abhängen. Abbildung 4.4 zeigt die unterschiedlichen Arten von Master Integralen, nach ihrer Komplexität geordnet.

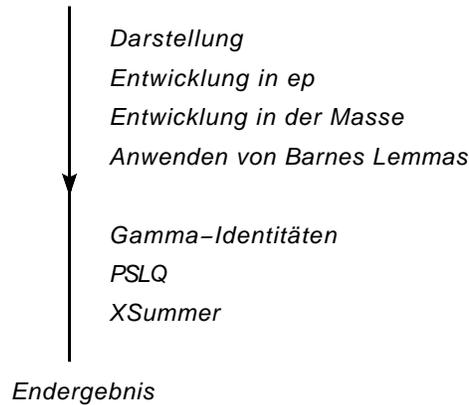


Abbildung 4.5: Vorgehensweise zur Berechnung eines Feynman Integrals

4.2 Berechnung der Master Integrale

Die typische Vorgehensweise zur Berechnung von Master Integralen wird in Abbildung 4.5 erläutert.

4.2.1 Mellin Barnes Darstellung

Die Notwendigkeit Feynman Integrale zu berechnen ergibt sich automatisch in perturbativer Feldtheorie. Um für diese Feynman Integrale analytische Ergebnisse zu erhalten, wurde in den letzten 60 Jahren eine Anzahl verschiedener Methoden entwickelt, wie Feynman Parameter oder Cutkosky Regeln. Eine sehr mächtige Methode dafür ist die Mellin-Barnes (MB) Methode. Die Grundidee von MB und der Feynman Parameter Methode ist ähnlich. Es werden zusätzliche Integrale über neue Hilfsparameter z_i eingeführt, um den Integranden zu vereinfachen. Nun ist es möglich, nach der Vertauschung der Integrationen, über den Schleifenimpuls zu integrieren. Daraus ergibt sich ein Integral über die Hilfsparameter, welches nun einfacher zu berechnen ist als die Integration über den Schleifenimpuls.

Die Mellin Barnes Darstellung ist gegeben durch:

$$\frac{1}{(X+Y)^\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{-i\infty}^{i\infty} dz \Gamma(\lambda+z) \Gamma(-z) \frac{Y^z}{X^{\lambda+z}} \quad (4.5)$$

Die Γ -Funktion besitzt Pole bei ganzzahligen Argumenten ≤ 0 . Die Integrationskontur geht von $-i\infty$ bis $i\infty$, wobei alle Pole der Form $\Gamma(\dots + z)$ links von der Kontur (linke Pole), und alle Pole der Form $\Gamma(\dots - z)$ rechts von der Kontur (rechte Pole) liegen². Die Abbildungen 4.6 und 4.7 zeigen solche Konturen und Pole.

²Es kann durchaus vorkommen, dass der erste rechte Pol weiter links liegt als der erste linke Pol. Dies sollte keinen Anlass zur Verwirrung geben.

Als Beispiel sei wieder auf das Feynman Integral von Abbildung 4.2 bzw Formel 1.1 zurückgegriffen. Letztere ergibt mit Formel (1.5):

$$\frac{1}{(m^2 - k^2)^{a_1}} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Gamma(a_1)} \int_{-i\infty}^{i\infty} dz \Gamma(a_1 + z) \Gamma(-z) \frac{(m^2)^z}{(-k^2)^{a_1+z}} \quad (4.6)$$

$$I(q^2, m^2, d, a_1, a_2) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Gamma(a_1)} \int d^d k \int_{-i\infty}^{i\infty} dz \Gamma(a_1 + z) \Gamma(-z) \frac{(m^2)^z}{(-k^2)^{a_1+z}} \frac{1}{((q - k)^2)^{a_2}} \quad (4.7)$$

Nach der Vertauschung der Integrationen und Ausführung der Integration über k erhält man folgendes Ergebnis, wobei die Kontur wieder zwischen den rechten und den linken Polen hindurch entlang der imaginären Achse verläuft.

$$I(q^2, m^2, d, a_1, a_2) = \frac{i\pi^{d/2} (-1)^{a_1+a_2} \Gamma(2 - \varepsilon - a_2)}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2) (-q^2)^{a_1+a_2+\varepsilon-2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dz \left(\frac{m^2}{-q^2} \right)^z \Gamma(a_1 + a_2 + \varepsilon - 2 + z) \frac{\Gamma(2 - \varepsilon - a_1 - z) \Gamma(-z)}{\Gamma(4 - 2\varepsilon - a_1 - a_2 - z)} \quad (4.8)$$

Die Formel kann dann benutzt werden, um das Feynman Integral für beliebige Exponenten a_1, a_2 zu berechnen. Für $a_1 = 1, a_2 = 1$ bzw. $a_1 = 2, a_2 = 1$ ergeben sich nachfolgende Formeln. In Abbildung 4.6 sind die Konturen und die Pole für $a_1 = 2$ und $a_2 = 1$ und in Abbildung 4.7 für $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$ wiedergegeben.

$$I(q^2, m^2, d, 1, 1) = \frac{i\pi^{d/2} \Gamma(1 - \varepsilon)}{(-q^2)^\varepsilon} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dz \left(\frac{m^2}{-q^2} \right)^z \Gamma(\varepsilon + z) \frac{\Gamma(1 - \varepsilon - z) \Gamma(-z)}{\Gamma(2 - 2\varepsilon - z)} \quad (4.9)$$

$$I(q^2, m^2, d, 2, 1) = \frac{-i\pi^{d/2} \Gamma(1 - \varepsilon)}{(-q^2)^{1+\varepsilon}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dz \left(\frac{m^2}{-q^2} \right)^z \Gamma(1 + \varepsilon + z) \frac{\Gamma(-\varepsilon - z) \Gamma(-z)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon - z)} \quad (4.10)$$

MBrepresentation

Das oben beschriebene Vorgehen besitzt den Nachteil, dass es, wegen der Integration über den Schleifen-Impuls k , nicht als Computeralgorithmus implementiert werden kann. Andererseits ist bekannt, dass jedes Feynman Integral durch die Feynman Parameter Methode auf folgende Form gebracht werden kann [51, 50]:

$$G[\Gamma(k)] = \frac{(-1)^{N_\nu} \Gamma(N_\nu - \frac{d}{2}L)}{\prod_{i=1}^N \Gamma(\nu_i)} \int_0^1 \prod_{j=1}^N dx^j x_j^{\nu_j-1} \delta(1 - \sum_{i=1}^N x_i) \frac{U(x^{N_\nu-d(L+1)/2})}{F(x)^{N_\nu-dL/2}} P(T(k)) \quad (4.11)$$

ν_i sind die Exponenten der einzelnen Propagatoren des Feynman Integrals, $N_\nu = \sum \nu_i$, x_i sind die Feynman Parameter, N bezeichnet die Anzahl der Propagatoren und L die Anzahl der Schleifens und P ist eine Funktion der Tensorstruktur $T(k)$ des Feynman Integrals.

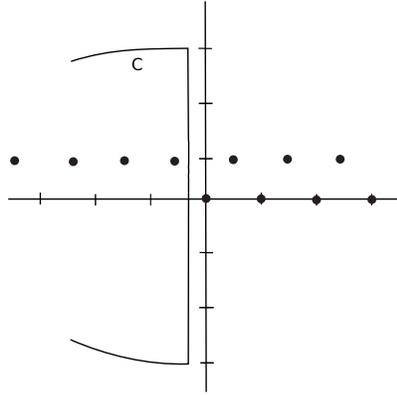


Abbildung 4.6: Kontur C und die Pole der Γ -Funktionen des Feynman Integrals 4.10 mit $\varepsilon = -\frac{1}{2} - i$

$F(x)$ und $U(x)$ sind Polynome und charakterisieren die Topologie des Feynman Integrals. Um die Integration über die Feynman Parameter ausführen zu können, muss das F-Polynom mit Hilfe der Mellin Barnes Darstellung (Gleichung 4.1) in Monome zerlegt werden. Dieses Vorgehen wurde automatisch in das Mathematica Programm `MBrepresentation` [52] implementiert. Durch eine geschickte manuelle Wahl von verschiedenen U- und F-Polynomen kann man oft eine leichter zu berechnende MB-Darstellung erhalten.

4.2.2 Entwicklung in ε

Bevor das MB-Integral berechnet wird, muss es erst noch in dem Parameter ε der dimensionalen Regularisierung entwickelt werden. Die Divergenz einiger Feynman Integrale kommt bei den MB-Integralen darin zum Ausdruck, dass für $\varepsilon \rightarrow 0$ zwei verschiedene Pole (also ein rechter Pol und ein linker Pol) aufeinanderzulaufen. Im Grenzfall $\varepsilon = 0$ würde die Kontur nicht mehr zwischen den beiden Polen hindurchlaufen können, da diese den Abstand 0 haben.

Für den speziellen Fall $a_1 = 2$ und $a_2 = 1$ ist die Kontur eine Gerade parallel zur imaginären Achse (Abbildung 4.6). Das Integral ist also einfach mittels des Cauchy-Theorems berechenbar unter der Annahme, dass der Halbkreis im Unendlichen verschwindet. Die Kontur wird zu einer Seite (hier links) geschlossen und es wird über die Residuen der im Inneren der Kontur liegenden Pole summiert. Sind alle linken und rechten Pole³ durch eine gerade, parallel zur imaginären Achse verlaufende Kontur getrennt, dann gibt es keine Divergenzen für $d \rightarrow 4 - 2\varepsilon$. Mit Hilfe von Identitäten der Γ -Funktion erhält man für $d \rightarrow 4$ für die Formel 4.10:

³Zur Erinnerung: Linke Pole sind dadurch definiert, dass sie links von der Kontur liegen und rechte Pole liegen rechts von der Kontur.

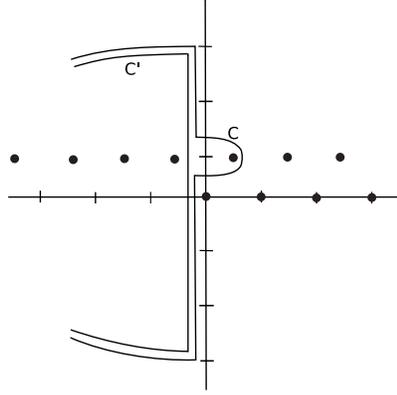


Abbildung 4.7: Kontur C und die Pole der Γ -Funktionen des Feynman Integrals 4.9 mit $\varepsilon = -\frac{1}{2} - i$. Des Weiteren ist die Kontur C' eingezeichnet, welche sich nach dem Nehmen des Residuums bei $z = -\varepsilon$ ergibt.

$$\begin{aligned}
 I(q^2, m^2, d = 4, 2, 1) &= \frac{i\pi^2}{q^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dz \left(\frac{m^2}{-q^2}\right)^z \frac{\Gamma(1+z)\Gamma(-z)^2}{\Gamma(1-z)} \\
 &= -\frac{i\pi^2}{q^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dz \left(\frac{m^2}{-q^2}\right)^z \Gamma(+z)\Gamma(-z) \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Die an den Punkten $z = 0, 1, 2, 3, \dots$ genommenen Residuen⁴ ergeben die Reihe:

$$I(q^2, m^2, 4, 2, 1) = \frac{i\pi^2}{q^2} \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) + \frac{i\pi^2}{q^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{m^2}{q^2}\right)^n = \frac{i\pi^2}{q^2} \ln\left(1 - \frac{q^2}{m^2}\right) \quad (4.13)$$

Für $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$ ergibt sich:

$$I(q^2, m^2, d, 1, 1) = \frac{i\pi^{d/2}\Gamma(1-\varepsilon)}{(-q^2)^\varepsilon} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dz \left(\frac{m^2}{-q^2}\right)^z \Gamma(\varepsilon+z) \frac{\Gamma(1-\varepsilon-z)\Gamma(-z)}{\Gamma(2-2\varepsilon-z)} \quad (4.14)$$

Wie aus der Abbildung 4.7 zu erkennen, ist die Kontur für $\varepsilon \leq 0$ keine Parallele zur imaginären Achse und die Pole der Γ -Funktionen $\Gamma(\varepsilon+z)$ und $\Gamma(-z)$ bewegen sich für $\varepsilon \rightarrow 0$ bei $z = 0$ aufeinander zu. Der Grenzfall $\varepsilon = 0$ ist nicht mehr erlaubt, da die Kontur C nicht mehr zwischen diesen beiden Polen durchlaufen kann. Als Lösung des Problems führt man die Kontur C in eine neue Kontur C' über, indem man sie über den am weitesten rechts liegenden linken Pol hebt (mathematisch wird das Residuum an $z = -\varepsilon$ genommen) und lässt dann ε gegen 0 laufen. Man zerlegt also das ursprüngliche Integral in zwei Teile. Der erste Teil ist das ursprüngliche Integral über eine neue Kontur C' (Abbildung 4.7), welches, wie oben beschrieben, berechnet werden

⁴Das Residuum von $\Gamma(-n)$ ist $\frac{(-1)^n}{n!}$ für $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

kann. Der zweite Teil ist das Residuum an dem kritischen Punkt $z = -\varepsilon$. Dieses divergiert für $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\text{Res}(z = -\varepsilon) = i\pi^2 \frac{\Gamma(\varepsilon)}{(m^2)^\varepsilon(1-\varepsilon)} \quad (4.15)$$

Das Integral über die neue Kontur C' kann problemlos für ε gegen 0 berechnet werden, indem die Kontur auf der linken Seite der komplexen Ebene geschlossen wird.

$$I'(q^2, m^2, d, 1, 1) = i\pi^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dz \left(\frac{m^2}{-q^2} \right)^z \frac{\Gamma(-z)\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(2-z)} \quad (4.16)$$

Das Endergebnis nach der Entwicklung des Residuums in ε bis $O(\varepsilon^0)$ lautet:

$$I(q^2, m^2, d, 1, 1) = i\pi^2 e^{\gamma_E \varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \ln(m^2) + 2 - \left(1 - \frac{m^2}{q^2}\right) \ln \left(1 - \frac{m^2}{q^2}\right) + O(\varepsilon) \right] \quad (4.17)$$

4.2.3 Entwicklung in der Masse

Außer für die einfachsten Feynman Integrale ist es im Allgemeinen unmöglich, sie nach der Entwicklung in ε exakt zu berechnen. Um das Integral weiter zu vereinfachen wird deswegen zunächst lediglich der Hochenergielimes, $m_{Top}^2 \ll s$ (s sei die Schwerpunktsenergie der Partonen), berechnet. In Kapitel 4.3 wird erläutert wie aus dem analytischen Ergebnis für den Hochenergielimes das volle, numerische Ergebnis gewonnen werden kann.

Wie aus Formel 4.5 ersichtlich, hängt die Skala $m_s = \frac{m_{Top}^2}{s}$ meist exponentiell von einer (oder mehreren) Integrationsvariablen ab. Für bestimmte Werte dieser Integrationsvariablen besitzt der Integrand Pole aufgrund der Γ -Funktionen. Beispielsweise besitzt nachfolgende Funktion

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz_1 dz_3 dz_4 (m_s)^{z_1-1} \frac{\Gamma(1-z_1)\Gamma(-z_1-z_3)}{\Gamma(z_3+z_4)} \quad (4.18)$$

Pole bei $z_1 = 1, 2, 3, 4 \dots$ kommend von $\Gamma(1-z_1)$. Wird nur der Hochenergielimes, d.h. Terme bis m_s^0 , betrachtet, so muss nur der erste Pol bei $z_1 = 1$ berücksichtigt werden. Nach dem Nehmen des Residuums ergibt sich:

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz_3 dz_4 \frac{\Gamma(-1-z_3)}{\Gamma(z_3+z_4)} \quad (4.19)$$

Des Weiteren liefert auch $\Gamma(-z_1-z_3)$ Pole, falls $-z_1-z_3 = -N$, wobei N eine natürliche Zahl oder 0 ist. Das liefert, nach dem Nehmen der Residuen, den zweiten Beitrag:

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dz_4 \frac{1}{\Gamma(-1+z_4)} \quad (4.20)$$

Für die Berechnung des Hochenergielimes ist es ausreichend nur diejenigen Residuen mit der Ordnung $O(m_s^0) \leq 0$ ($m_s = \frac{m_{Top}^2}{s}$) zu beachten. Wiederum müssen eventuell einige Master

Integrale zu höheren Ordnungen in m_s entwickelt werden, falls sie unechte Pole in m_s besitzen (siehe Kapitel 4.1). In der Diplomarbeit konnte die Entwicklung um ε und m_s mit Hilfe des Mathematica Packets MB [53] durchgeführt werden.

4.2.4 Barnes Lemmas

Eine Darstellung eines Feynman Integrals besteht, nach wiederholter Anwendung von Formel (1.5), aus mehreren Integralen über z_i (sogenannte n-Fold, wobei n die Anzahl von Integralen ist). Üblicherweise erhält man für die nicht-trivialen Master Integrale, je nach Komplexitätsgrad, ein 7- bis 10-faches Integral als Darstellung. Nach der Entwicklung in ε und m_s bleiben typischerweise 4- bis 6-fache Integrale übrig. Lediglich die meisten 1-fachen Integrale und einige Klassen von 2-fachen Integralen können jedoch direkt berechnet werden. Das Ziel ist es also, nach der Entwicklung in der Masse und ε , die noch vorhandene mehr-fachen Integrale auf 1- und 2- fache Integrale zu reduzieren. Ein geeignetes Werkzeug dafür sind Barnes Lemmas:

Falls eine Kontur in der komplexen Ebene so beschaffen ist, dass sie die linken und rechten Pole trennt, dann gilt:

Erstes Barnes Lemma

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz \Gamma(\alpha + z) \Gamma(\beta + z) \Gamma(\gamma - z) \Gamma(\delta - z) = \frac{\Gamma(\alpha + \gamma) \Gamma(\alpha + \delta) \Gamma(\beta + \gamma) \Gamma(\beta + \delta)}{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + \delta)} \quad (4.21)$$

und zweites Barnes Lemma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz \frac{\Gamma(\alpha + z) \Gamma(\beta + z) \Gamma(\gamma + z) \Gamma(\delta - z) \Gamma(\zeta - z)}{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \zeta + z)} = \\ \frac{\Gamma(\alpha + \delta) \Gamma(\alpha + \zeta) \Gamma(\beta + \delta) \Gamma(\beta + \zeta) \Gamma(\gamma + \delta) \Gamma(\gamma + \zeta)}{\Gamma(\alpha + \beta + \delta + \zeta) \Gamma(\alpha + \gamma + \delta + \zeta) \Gamma(\beta + \gamma + \delta + \zeta)} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Beide Lemmas reduzieren also die Dimensionalität der zu berechnenden Integrale. Durch rekursives Anwenden beider Lemmas ist es meist möglich, die Integrale auf 1- bis 4-fache Integrale zu reduzieren. Diese müssen dann direkt berechnet werden. Ist eine direkte Berechnung dieser Integrale nicht möglich, müssen andere Methoden verwendet werden (siehe Kapitel 4.2.6).

4.2.5 Berechnung von 1- und 2-fachen Integralen

Nach Anwenden der Barnes Lemmas erhält man oft nur noch 1- bis 4-fache Integrale. 3- oder 4-fache Integrale müssen per Hand, durch Ausnutzung verschiedener Identitäten der Gamma- und Polygammafunktion, in 1- und 2-fache Integrale übergeführt werden, da lediglich (die meisten) 1- und 2-fachen Integrale berechenbar sind. Ist dies nicht möglich muss auf andere, weiter unten beschriebene Methoden zurückgegriffen werden. Untenstehend ist eine Tabelle, die angibt, welche Klassen von Integralen mit welchen Methoden berechenbar sind. Doppelte Argumente bedeutet, dass in den Argumenten der Γ -Funktion die Koeffizienten vor der Variablen ungleich 1 ist,

z.B. $\Gamma(2z_1)$. Die zu diesen Integralen gehörenden Funktionen sind oft nicht einmal bekannt und somit analytisch nicht berechenbar. Diese werden im Folgenden erläutert. Die Anzahl von Unter-Integralen eines Master Integrals ist oft groß und kann einige zehntausend erreichen. Nur mit effizienten Programmen war es deshalb möglich die Master zu berechnen. Lediglich eine kleine Anzahl von Integralen pro Master, die nicht automatisch bestimmt werden konnte, musste per Hand berechnet werden.

	Doppelte Argumente	Exponentielle Abh.	Dopp. Arg. und expon. Abh.
1-faches Integ.	Num. Integr. / PSLQ	XSummer	Im Allgemeinen nicht lösbar
2-faches Integ.	Quadprec / PSLQ	XSummer2	Im Allgemeinen nicht lösbar
n-faches Integ.	Anwenden von Barnes Lemmas und Identitäten der Γ -Funktion		

XSummer

Die analytischen Lösungen von Feynman Integralen sind oft hypergeometrische Funktionen. Sie werden über hypergeometrische Reihen definiert. Diese Reihen sind Potenzreihen, wobei der k-te Koeffizient durch eine rationale Funktion mit dem Argument k beschrieben wird.

Als Beispiel sei folgende hypergeometrische Funktion gegeben:

$${}_2F_1(a, b, c, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+a)\Gamma(k+b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(k+c)} \frac{x^k}{k!}$$

Des Weiteren gehören Polylogarithmen oder deren Verallgemeinerung, die Nielsen-Polylogarithmen [54], ebenfalls zu den hypergeometrischen Funktionen.

In dieser Arbeit konnten alle vorkommenden Funktionen auf die HPL's (harmonische Polylogarithmen) [55] zurückgeführt werden. Sie sind eine Verallgemeinerung der Nielsen Polylogarithmen und bilden eine Produktalgebra. Definiert werden sie durch rekursive Integration von sogenannten Gewichtsfunktionen. Die Anzahl der Integrationen bestimmt das Gewicht des HPL's. Die Gewichtsfunktionen sind $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_0(x) = \frac{1}{x}$, $f_{-1}(x) = \frac{1}{1+x}$. Die dazugehörigen HPL's mit Gewicht 1 sind $H(1, x) = \int_0^x f_1(t) dt$, $H(0, x) = \log x$, $H(-1, x) = \int_0^x f_{-1}(t) dt$. HPL's mit dem Gewicht $k + 1$ sind definiert durch $H(a, a_1, \dots, a_k) = \int_0^x f_a(t)H(a_1, \dots, a_k) dt$. Die Frage, wieso alle in der Rechnung vorkommenden Funktionen durch HPL's darstellbar sind, ist unbeantwortet. Das Programm XSummer [56] ermöglicht es, die meisten 1- und 2-fachen Integrale mit einfachen Argumenten zu berechnen, indem es die Residuen aufsummiert und von der Summe auf hypergeometrische Funktionen, wie HPL's, zurückschließt.

Als Beispiel aus meiner Arbeit sei nachfolgendes Integral gegeben:

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dz_1 \frac{-2\varepsilon Y^{z_4} \Gamma(1 - z_4)^2 \Gamma(2 - z_4) \Gamma(-1 + z_2)^2 \Gamma(z_4)}{t^2} \quad (4.23)$$

Aufgrund der exponentiellen Abhängigkeit Y^{z_4} kann das Integral nicht numerisch mit hoher Präzision bestimmt werden (was für PSLQ (siehe nächsten Teilabschnitt) notwendig wäre), sondern es wird analytisch mit Hilfe von XSummer berechnet. Das Ergebnis ist,

$$\frac{\varepsilon Y(6H(0, 0, 1, -Y) + 3H(1, -Y)(\pi^2 + \log(Y)^2) + \log(Y)(3\pi^2 - 6H(0, 1, -Y)) + \log(Y)^2)}{3t^2} \quad (4.24)$$

wobei $Y = \frac{t}{u}$ mit t, u als Mandelstammvariablen und H sind die harmonischen Polylogarithmen.

PSLQ

Oft ist es nicht möglich ein analytisches Ergebnis für ein MB-Integral zu erhalten⁵, aber es kann numerisch mit hoher Präzision bestimmt werden. Dies ist vor allem dann der Fall, wenn keine exponentiellen Abhängigkeiten im Integranden z.B. der Form Y^{z_1} vorkommen. Die Anzahl der korrekten Stellen in der numerischen Berechnung hängt stark von der Dimensionalität des Integrals ab. Erfahrungsgemäß ist es möglich, ein 1-faches Integral auf 100 Stellen in wenigen Minuten zu berechnen. 2-fache Integrale werden mit der Software `Quadprec` [57] berechnet. Innerhalb eines Tages kann ein 2-faches Integral auf ca. 40 bis 60 Stellen, abhängig von der Komplexität, berechnet werden. Integrale einer höheren Ordnung, wie 3-fache Integrale sind nur unter extremen Zeitaufwand berechenbar (ca. 4 Tage für 15 Stellen).

Obwohl einige Feynman Integrale analytisch nicht berechenbar sind, wurde in vielen Rechnungen gezeigt, dass das Endergebnis aller Integrale eines Master Integrals sehr einfach ist, d.h. sich in wenigen Zahlen und Funktionen(HPL's) ausdrücken lässt. Dies ist eine Erfahrungstatsache, der Beweis steht noch aus. In der Top Quark Paar Produktion ist eine Basis für diese Zahlen: 1, $\zeta(2)$, $\zeta(2) \log(2)$, $\zeta(3)$, $\zeta(4)$ ⁶. Es können aber durchaus andere Zahlen, wie $\zeta(5)$ oder $\zeta(2)\zeta(3)$ vorkommen, die sich erst in der Amplitude herausheben. Nun werden z.B. alle Integrale eines Masters, welche die gleiche Ordnung in ε aufweisen, auf ca. 40 Stellen berechnet und es wird versucht, eine Kombination von Koeffizienten a_i vor der Basis zu finden, damit das Ergebnis auf mindestens der vorgegebenen Stellenanzahl mit dem numerisch berechnetem Ergebnis übereinstimmt.

$$\text{Numerisches Ergebnis} = a_1 + a_2\zeta(2) + a_3\zeta(2) \cdot \log(2) + a_4\zeta(3) + a_5\zeta(4) + a_6\zeta(5) + a_7\zeta(2) \cdot \zeta(3) \quad (4.25)$$

Eine extrem effiziente Weise die Koeffizienten zu bestimmen, bietet der PSLQ Algorithmus [58]. Das zuvor nur numerisch bekannte Ergebnis liegt jetzt in analytischer Form vor. Obwohl der PSLQ Algorithmus keinen Beweis liefert, ist es doch extrem unwahrscheinlich, dass es eine zweite Menge von Koeffizienten von kleinen rationalen Zahlen gibt, so dass das Ergebnis wiederum auf 40 Stellen genau dem numerischen Ergebnis entspricht. Um dies zu überprüfen wird die Stabilität der Lösung getestet, d.h. es wird überprüft ob sich die Lösung verändert, wenn der numerische Wert mit einer anderen Anzahl von (richtigen) Stellen bekannt ist. Verändert sich die Lösung nicht mehr für eine genügend hohe Anzahl von Stellen, ist dies ein weiterer Hinweis für die Korrektheit der Lösung. Würde wider Erwarten doch ein Fehler auftreten, hätte man eine

⁵Z.B. bei 1-fachen Integralen mit doppelten Argumenten, wie $\Gamma(2z_1)$.

⁶ $\zeta(a)$ bezeichnet hier die Riemannsche Zeta-Funktion, $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$.

sehr genaue analytische Näherung eines analytischen Ausdrucks. Dieser Fehler kann, aufgrund von ca. 40 sicheren Stellen, in dem numerischen Endergebnis des totalen Wirkungsquerschnitts vernachlässigt werden.

Als Beispiel musste das Integral

$$\int \int dz_1 dz_2 \frac{-2\Gamma(-z_1)^2\Gamma(1+z_1)\Gamma(-z_2)\Gamma(-z_2+z_1)^2\Gamma(z_2-z_1)\Gamma(1+2z_1)\text{Poly}\Gamma(1+z_1-z_2)}{\Gamma(1-z_1)\Gamma(1-z_2+z_1)} \quad (4.26)$$

berechnet werden. Es besitzt doppelte Argumente und konnte deshalb nicht mit XSummer gelöst werden. Mit Quadprec [57] war es möglich, das Integral innerhalb einiger Stunden numerisch auf 31 Stellen genau zu bestimmen⁷.

$$Wert_{numerisch} = 3.1821994206790423606690066315384 \quad (4.27)$$

Als Basis wurde $\zeta(2)$, $\zeta(2) \cdot \log(2)$, $\zeta(3)$, $\zeta(4)$, $\zeta(5)$, $\zeta(2) \cdot \zeta(3)$ angenommen.

Damit errechnete PSLQ die Relation zwischen den Basiselementen und dem numerischem Wert:

$$Wert_{analytisch} = 10 \cdot \zeta(2) \cdot \zeta(3) - 16 \cdot \zeta(5) \quad (4.28)$$

Die berechneten Koeffizienten sind 10 bzw -16. Die Überprüfung des analytischen und numerischen Ergebnis liefert:

$$Wert_{numerisch} - Wert_{analytisch} = 5 \cdot 10^{-32} \quad (4.29)$$

d.h. das analytische und das numerische Ergebnis stimmen in den ersten 31 Stellen überein⁸.

4.2.6 Weitere Methoden

Bei komplizierteren Feynman Integralen, insbesondere bei Integralen mit nicht trivialen irreduziblen Zähler (Zähler ungleich 1), bleiben oft nach dem Anwenden von Barnes Lemmas Integrale höherer Ordnung übrig, die sich nicht weiter vereinfachen lassen. Hier lässt es sich nicht vermeiden andere Wege zu gehen. Entweder wird, wie weiter unten beschrieben, die Methode der Differentialgleichungen benutzt oder es wird versucht eine bessere MB-Darstellung zu finden, deren Berechnung möglich ist.

Auffinden einer anderen Darstellung

Die MB-Darstellung eines Feynman Integrals ist nicht einzigartig, sondern hängt stark von der Wahl des F- und des U-Polynoms ab. Durch die manuelle Wahl dieser Polynome ist es also möglich verschiedene Darstellungen zu erzeugen, welche zu verschiedenen MB-Integralen führen. Es war oft möglich durch eine geschickte Wahl eines F- und U-Polynoms eine berechenbare

⁷Da das exakte Ergebnis nicht bekannt ist, muss die Anzahl der richtigen Stellen abgeschätzt werden.

⁸Eine höhere Übereinstimmung ist hier nicht möglich, da $Wert_{numerisch}$ nur auf 31 Stellen berechnet wurde.

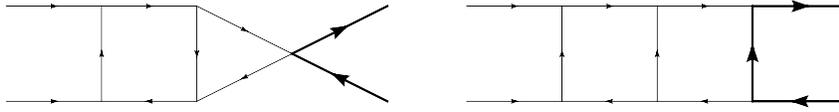


Abbildung 4.8: Anstatt der (schlechten) Darstellung des 6-Liners wird die (gute) Darstellung des 7-Liners berechnet und der Exponent des zusätzlichen Propagators anschließend um 0 entwickelt.

Darstellung zu finden.

Sollte dies nicht zum gewünschten Erfolg führen gibt es einen anderen Trick. Anstatt der Darstellung für z.B. einen 6-Liner, wird die Darstellung eines 7-Liners, also eine Ordnung höher berechnet, wobei der zusätzliche Propagator einen Exponenten α trägt. Jetzt wird die (vielleicht bessere) Darstellung dieses 7-Liners um $\alpha = 0$ entwickelt. Ein Beispiel ist in der Abbildung 4.8 gegeben.

Basiswechsel

Eine andere Möglichkeit ein Master Integral zu berechnen ist einen Basiswechsel durchzuführen. Es wird versucht ein anderes Feynman Integral zu finden, welches zum einen berechenbar ist und zum anderen durch partielle Integration von dem zu berechnenden Master Integral abhängt. Wird dieses Feynman Integral berechnet und sind die anderen vorkommenden Master Integrale in der Relation schon bekannt, dann ist auch das Master Integral bekannt. Es können wiederum unechte Pole (siehe Kapitel 4.1) entstehen und das Feynman Integral, oder andere Master Integrale, müssen zur höheren Ordnung entwickelt werden. Besonders sinnvoll ist diese Methode, wenn ein Master Integral aufgrund von unechten Polen schwer zu berechnen ist. Hier bietet sich oft ein Wechsel zu einem neuen Master Integral an, welches nicht eine Ordnung höher in ε oder m_s berechnet werden muss. Von dieser Methode wurde oft Gebrauch gemacht.

Methode der Differentialgleichungen

Bei 6- und 7-Linern mit nicht trivialen irreduziblen Zählern (Zähler ungleich 1) war es manchmal unmöglich eine berechenbare MB-Darstellung zu finden oder den Master zu wechseln. Hier musste auf eine ganz andere Methode zurückgegriffen werden: Die Methode der Differentialgleichungen. Die Idee ist, das gesuchte Master Integral nach einer kinematischen Invarianten (wie $t = (p_1 - p_3)^2$ oder $u = (p_1 - p_4)^2$) abzuleiten. Dadurch entstehen neue skalare Integrale, welche wiederum auf die Master Integrale M_i zurückgeführt werden können.

$$\frac{d}{dt}M_i = \sum \text{skalareIntegrale} = \sum a_{ij}M_j \quad (4.30)$$

Der Clou ist dabei, dass beim Ableiten eines n-Liners die Master Integrale auf der rechten Seite höchstens wieder n-Liner sein können. Wurden alle auf der rechten Seite vorkommenden

(leichteren) Master Integrale schon berechnet, dann genügt es, die inhomogene Differentialgleichung zu lösen. Sollten auf der rechten Seite auch noch nicht berechnete Master Integrale auftauchen, so müssen diese erst gelöst werden oder für diese Master Integrale kann ebenfalls eine Differentialgleichung aufgestellt werden und daraufhin muss ein gekoppeltes Gleichungssystem gelöst werden. Bereits für ein Gleichungssystem mit 3 Differentialgleichungen ist dies jedoch im Allgemeinen nicht möglich. Zusätzlich kommt oft noch erschwerend hinzu, dass schon bekannte Master Integrale zu einer höheren Ordnung in m_s oder ε entwickelt werden müssen, da die Koeffizienten a_i unechte Pole in ε und m_s haben können.

Neben der Differentialgleichung muss noch die Randbedingung bekannt sein, um die Integrationskonstante bestimmen zu können. Um diese Randbedingung zu berechnen muss nicht das gesamte (in ε und m_s entwickelte) MB-Integral berechnet werden, sondern es genügt, sich auf den Limes $t \rightarrow 0$ bzw. $u \rightarrow 0$ zu konzentrieren. Nur diejenigen Integrale werden berechnet, die im Limes einen Beitrag liefern. Ähnlich wie in der Entwicklung in der Masse werden diese Integrale bis zur gewünschten Ordnung in der Invarianten durch Nehmen von Residuen berechnet.

Wird das Ergebnis aus dem Lösen der Differentialgleichungen mit der Randbedingung verglichen, ist es möglich die Integrationskonstante zu bestimmen und die vollständige Lösung des Master Integrals zu erhalten.

4.3 Vom Hochenergielimes zum Niedrigenergielimes

In den beiden obigen Abschnitten wurde erklärt wie es möglich ist, die virtuellen 2-Schleifen Korrekturen für den Fall $m_{Top}^2 \ll s$, d.h. den Hochenergielimes analytisch zu berechnen. In diesem Kapitel wird gezeigt, wie sich daraus die vollen numerischen 2-Schleifen Korrekturen (Niedrigenergielimes) herleiten lassen, indem die Master Integrale zu höheren Ordnungen in $m_s = \frac{m_{Top}^2}{s}$ entwickelt werden. Die Berechnung kann zu beliebiger Ordnung in m_s durchgeführt werden und ist lediglich durch die Rechenkapazität begrenzt. Der Fehler des exakten Ergebnisses zu dem in m_s entwickeltem Ergebnis wird im Vergleich zu anderen (siehe Abbildung 2.1) vernachlässigbar sein (siehe [40]).

Das Vorgehen ist ähnlich zu dem im Kapitel 1.2.7 beschriebenen. Anstatt nach der Mandelstammvariablen t wird nach m_s abgeleitet. Daraus ergeben sich wiederum Relationen zwischen den Master Integralen M_i ,

$$\frac{d}{dm_s} M_i = \sum \text{skalareIntegrale} = \sum a_{ij} M_j \quad (4.31)$$

wobei ein n-Liner höchstens wieder von n-Linern abhängen kann. Alle n-Liner bilden also zusammen ein gekoppeltes System aus Differentialgleichungen, welche von sich selber und m -Linern ($m \leq n$) abhängen. Das Gleichungssystem wird rekursiv gelöst mit dem folgendem Ansatz⁹ für den einzigen 2-Liner¹⁰ (Abbildung 4.9):

⁹Die in der exakten Lösung vorkommenden Funktionen sind momentan nicht bekannt, deshalb muss eine direkte Integration in die Zukunft verschoben werden.

¹⁰Bei den virtuellen 2-Schleifen Korrekturen kann es nur einen 2-Liner geben (einer mit 2 massiven Linien), da masselose Tadpols verschwinden.

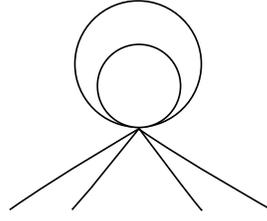


Abbildung 4.9: Einziger 2-Liner für die virtuellen 2-Schleifen Korrekturen. Er besitzt zwei massive Tadpols, da masselose Tadpols verschwinden.

$$M_{2-Liner} = \sum_{i=-4}^0 \sum_{m=m_0}^M \sum_{n=n_0}^N \varepsilon^i C_{i,n,m} m_s^m \log(m_s)^n \quad (4.32)$$

Der Ansatz wird aus der Erfahrung motiviert. Die Wahl von M , d.h. die Wahl bis zu welcher Ordnung die Reihe in m_s angesetzt wird, bestimmt bis zu welcher Ordnung in m_s die 2-Schleifen Korrekturen am Ende bekannt sind. Die $\log(m_s)$ Terme haben ihren Ursprung in m_s^ε , welche aus der Integration über den Impuls und der MB Integration entstehen und ergeben, um $\varepsilon = 0$ entwickelt, $1 + \varepsilon \log(m_s) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \log(m_s)^2 + \dots$. Des Weiteren kann ein 2-Schleifen Diagramm höchstens Terme von $\frac{1}{\varepsilon^4}$ besitzen, was gemeinsam dazu führt, dass $i + n \leq 0$, d.h. die höchste nicht verschwindende Ordnung von $\log(m_s)$ ist 4.

Im Folgendem wird das Vorgehen veranschaulicht.

Der einzige 2-Liner kann nur nachfolgende Differentialgleichung besitzen:

$$\frac{d}{dm_s} M_{2-Liner} = \sum \text{skalareIntegrale} = a_{2-Liner} M_{2-Liner} \quad (4.33)$$

Nach dem Einsetzen des Ansatzes 4.32 wird die homogene Differentialgleichung durch Integration gelöst. Die Integrationskonstante wird durch das analytische Ergebnis bei m_s^0 bestimmt¹¹.

Als nächstes wird das (eventuell) gekoppelte Gleichungssystem von 3-Linern aufgestellt. Für jeden 3-Liner wird ein zur Gleichung 4.32 äquivalenter Ansatz gemacht und das inhomogene Gleichungssystem für die Koeffizienten gelöst.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dm_s} M_i^{3-Liner} &= \sum \text{skalareIntegrale} = a^{2-Liner} M^{2-Liner} + \sum_j a_{ij} M_j^{3-Liner} \\ &= a^{2-Liner} M^{2-Liner} + \sum_j a_{ij} M_j^{3-Liner} \end{aligned} \quad (4.34)$$

¹¹Es können Fälle auftreten, bei denen diese Ordnung nicht ausreicht um die Integrationskonstante vollständig festzulegen, dann muss die Randbedingung (= der Hochenergielimes) zu einer höheren Ordnung berechnet werden.

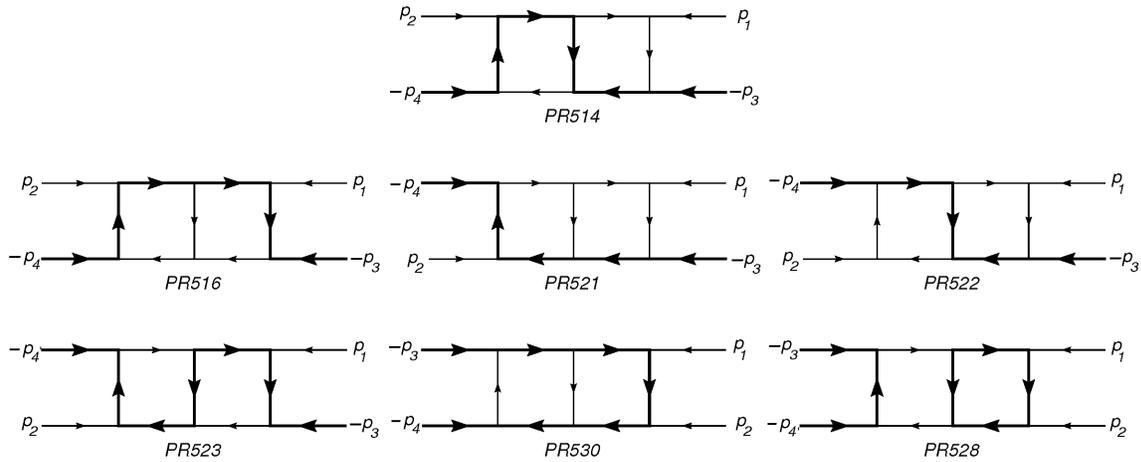


Abbildung 4.10: 7 Liner Integrale, welche in der Diplomarbeit berechnet wurden. Die dünnen Linien bezeichnen masselose, die dicken massive Propagatoren.

Die übrig gebliebenen Koeffizienten (Integrationskonstanten) werden wiederum aus den Randbedingungen (= Hochenergielimes) bestimmt. Das rekursive Fortführen dieses Verfahrens ermöglicht die Berechnung aller Master Integrale bis zur gewünschten Ordnung in m_s und somit auch aller Feynman Diagramme und der 2-Schleifen Korrekturen. Daraus folgt, das Ziel dieser Arbeit, die Berechnung des Niedrigenergielimes, wird durch Lösen von obiger Differentialgleichung und der Bestimmung der Randbedingungen (= der Hochenergielimes) erreicht. Die Berechnung der Randbedingungen, welche im Rahmen der Diplomarbeit durchgeführt wurde, ist die Schlüsselstelle dieser Rechnung.

4.4 Beispiele von Ergebnissen für Master Integrale

Im Folgendem werden die Ergebnisse für die in Abbildung 4.10 dargestellten 7-Liner gegeben. Dies sind alle 7-Liner, welche einerseits nicht bereits in [40] berechnet wurden und andererseits nicht trivial durch TU-Symmetrie mit ihnen zusammenhängen. Aufgrund des zu Verfügung stehenden Platzes können lediglich die Ergebnisse für die Integrale mit trivialem irreduziblen Zähler (= 1) angegeben werden.

$$\begin{aligned}
\text{PR514} = & \frac{1}{x^2} \left(+ \frac{1}{\text{ep}^3} \left(\frac{\log(\text{ms})}{4} + \frac{i\pi}{4} \right) + \frac{1}{\text{ep}^2} \left(\frac{3 \log^2(\text{ms})}{4} + (i\pi - \log(-x)) \log(\text{ms}) - i\pi \log(-x) - \frac{11\pi^2}{24} \right) \right. \\
& + \frac{1}{\text{ep}} \left(\frac{\log^3(\text{ms})}{2} + \left(\frac{3i\pi}{2} - \frac{3 \log(-x)}{2} \right) \log^2(\text{ms}) + \left(\log^2(-x) - 3i\pi \log(-x) - \frac{47\pi^2}{24} \right) \log(\text{ms}) \right. \\
& + \frac{1}{6} \log^3(-x) + \left(\frac{1}{2} H(1, -x) + \frac{3i\pi}{2} \right) \log^2(-x) - i\pi H(0, 1, -x) + H(0, 0, 1, -x) \\
& + \left(i\pi H(1, -x) - H(0, 1, -x) + 2\pi^2 \right) \log(-x) - \frac{25\zeta(3)}{4} - \frac{13i\pi^3}{24} \Big) \\
& - \frac{7}{6} \log^4(\text{ms}) + \left(\frac{17 \log(-x)}{6} - \frac{5i\pi}{6} \right) \log^3(\text{ms}) + \left(-\frac{5}{2} \log^2(-x) + \frac{1}{2} i\pi \log(-x) - \frac{7\pi^2}{24} \right) \log^2(\text{ms}) \\
& + \left(\frac{5}{6} \log^3(-x) + \left(\frac{1}{2} H(1, -x) - \frac{i\pi}{2} \right) \log^2(-x) + \left(i\pi H(1, -x) - H(0, 1, -x) + \frac{5\pi^2}{2} \right) \log(-x) \right. \\
& - i\pi H(0, 1, -x) + H(0, 0, 1, -x) + \frac{65\zeta(3)}{6} - 2i\pi^3 \Big) \log(\text{ms}) - \frac{1}{4} \log^4(-x) \\
& + \left(\frac{i\pi}{6} - H(1, -x) \right) \log^3(-x) + \left(-\frac{1}{4} H(1, -x)^2 - \frac{3}{2} i\pi H(1, -x) + \frac{5}{2} H(0, 1, -x) - \frac{19\pi^2}{12} \right) \log^2(-x) \\
& + \frac{7}{6} \pi^2 H(0, 1, -x) - H(1, -x) H(0, 0, 1, -x) - i\pi H(0, 0, 1, -x) \\
& i\pi + (H(1, -x) H(0, 1, -x) - 2H(0, 1, 1, -x)) + i\pi H(0, 1, 1, -x) + 3H(0, 0, 0, 1, -x) \\
& + H(0, 0, 1, 1, -x) + \log(-x) \left(-\frac{1}{2} i\pi H(1, -x)^2 + H(0, 1, -x) H(1, -x) - \frac{7}{6} \pi^2 H(1, -x) \right. \\
& + 2i\pi H(0, 1, -x) - 4H(0, 0, 1, -x) - H(0, 1, 1, -x) + \zeta(3) + 2i\pi^3 \Big) \\
& \left. + H(1, -x) \left(-\frac{i\pi^3}{6} + \zeta(3) \right) - \frac{2}{3} i\pi \zeta(3) + \frac{79\pi^4}{90} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{PR516} = & \frac{1}{x^2} \left(\frac{\log^4(\text{ms})}{2} + \left(\frac{4i\pi}{3} - \frac{4 \log(-x)}{3} \right) \log^3(\text{ms}) + \left(-4i\pi \log(-x) - \frac{3\pi^2}{2} \right) \log^2(\text{ms}) \right. \\
& + \left(\frac{8}{3} \pi^2 \log(-x) - 2\zeta(3) - \frac{5i\pi^3}{3} \right) \log(\text{ms}) \\
& \left. + \frac{\frac{\log^3(\text{ms})}{3} + i\pi \log^2(\text{ms}) - \frac{2}{3} \pi^2 \log(\text{ms})}{\text{ep}} - 2i\pi \zeta(3) + \frac{13\pi^4}{18} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{PR521} = & \frac{1}{x^2(x+1)} \left(-\frac{1}{4\text{ep}^4} + \frac{1}{\text{ep}^3} \left(-\frac{7}{12}H(1, -x) - \frac{\log(\text{ms})}{2} + \frac{5\log(-x)}{12} \right) \right) \\
& + \frac{1}{\text{ep}^2} \left(-\frac{5}{12}H(1, -x)^2 + \frac{3}{2}\log(-x)H(1, -x) - \frac{\log^2(\text{ms})}{2} - \frac{1}{12}\log^2(-x) \right) \\
& + \log(\text{ms}) \left(\frac{5\log(-x)}{6} - \frac{7}{6}H(1, -x) \right) + \frac{\pi^2}{4} \\
& + \frac{1}{\text{ep}} \left(\frac{1}{9}H(1, -x)^3 - \frac{1}{2}\log^2(-x)H(1, -x) + \frac{31}{24}\pi^2H(1, -x) - \frac{2}{9}\log^3(-x) + H(0, 0, 1, -x) \right. \\
& \left. - H(0, 1, 1, -x) + \log^2(\text{ms}) \left(\frac{\log(-x)}{3} - \frac{2}{3}H(1, -x) \right) \right) \\
& + \left(2H(1, -x)^2 - H(0, 1, -x) - \frac{3\pi^2}{8} \right) \log(-x) \\
& + \log(\text{ms}) \left(-\frac{5}{6}H(1, -x)^2 + 2\log(-x)H(1, -x) - \frac{1}{6}\log^2(-x) + \frac{2\pi^2}{3} \right) + \frac{29\zeta(3)}{12} \\
& + \frac{4}{9}H(1, -x)^4 + \frac{55}{24}\pi^2H(1, -x)^2 - \frac{3}{2}\log^3(-x)H(1, -x) + \frac{145}{18}\zeta(3)H(1, -x) \\
& + \frac{\log^4(\text{ms})}{12} + \frac{1}{18}\log^4(-x) + \left(-H(1, -x)^2 + \frac{9}{2}H(0, 1, -x) - \frac{13\pi^2}{24} \right) \log^2(-x) \\
& + \frac{8}{3}\pi^2H(0, 1, -x) + 15H(0, 0, 0, 1, -x) - 2H(0, 0, 1, 1, -x) + 7(H(1, -x)H(0, 0, 1, -x) \\
& - 2H(0, 0, 1, 1, -x) - H(0, 1, 0, 1, -x)) + 7H(0, 1, 0, 1, -x) - 7(H(1, -x)H(0, 1, 1, -x) \\
& - 3H(0, 1, 1, 1, -x)) - 4H(0, 1, 1, 1, -x) + \log^3(\text{ms}) \left(\frac{1}{18}H(1, -x) - \frac{5\log(-x)}{18} \right) \\
& + \log^2(\text{ms}) \left(-\frac{1}{3}H(1, -x)^2 + \frac{1}{2}\log(-x)H(1, -x) + \frac{1}{3}\log^2(-x) + \frac{\pi^2}{4} \right) \\
& + \log(-x) \left(\frac{3}{2}H(1, -x)^3 - \frac{41}{12}\pi^2H(1, -x) - 12H(0, 0, 1, -x) - 7(H(1, -x)H(0, 1, -x) \right. \\
& \left. - 2H(0, 1, 1, -x)) - H(0, 1, 1, -x) - \frac{65\zeta(3)}{18} \right) \\
& + \log(\text{ms}) \left(\frac{1}{18}H(1, -x)^3 + \frac{23}{12}\pi^2H(1, -x) - \frac{5}{18}\log^3(-x) + H(0, 0, 1, -x) - H(0, 1, 1, -x) \right. \\
& \left. + \left(\frac{5}{2}H(1, -x)^2 - H(0, 1, -x) - \frac{5\pi^2}{12} \right) \log(-x) + \frac{35\zeta(3)}{6} \right) - \frac{613\pi^4}{1440}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{PR522} = & \frac{1}{x^2(x+1)} \left(-\frac{1}{2\text{ep}^4} + \frac{1}{\text{ep}^3} (-H(1, -x) - \log(\text{ms}) + \log(-x)) \right. \\
& + \frac{1}{\text{ep}^2} \left(-\frac{1}{2}H(1, -x)^2 + 3\log(-x)H(1, -x) - \log^2(\text{ms}) + \log(\text{ms})(2\log(-x)) \right. \\
& \left. \left. - 2H(1, -x) - \frac{1}{2}\log^2(-x) + \frac{7\pi^2}{12} \right) \right. \\
& + \frac{1}{\text{ep}} \left(\frac{1}{3}H(1, -x)^3 - 2\log^2(-x)H(1, -x) + \frac{13}{6}\pi^2H(1, -x) - \frac{1}{3}\log^3(-x) + 2H(0, 0, 1, -x) \right. \\
& \left. - 2H(0, 1, 1, -x) + \left(3H(1, -x)^2 - 2H(0, 1, -x) - \frac{3\pi^2}{2} \right) \log(-x) \right. \\
& \left. + \log^2(\text{ms})(\log(-x) - H(1, -x)) + \log(\text{ms}) \left(-H(1, -x)^2 + 4\log(-x)H(1, -x) - \log^2(-x) + \frac{3\pi^2}{2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{13\zeta(3)}{3} \right) + \frac{2}{3}H(1, -x)^4 + \frac{37}{12}\pi^2H(1, -x)^2 - \frac{7}{3}\log^3(-x)H(1, -x) + \frac{14}{3}\zeta(3)H(1, -x) \\
& + \frac{3\log^4(\text{ms})}{2} + \frac{1}{2}\log^4(-x) + \left(-2H(1, -x)^2 + 7H(0, 1, -x) + \frac{\pi^2}{12} \right) \log^2(-x) \\
& + \frac{10}{3}\pi^2H(0, 1, -x) + 18H(0, 0, 0, 1, -x) + 10(H(1, -x)H(0, 0, 1, -x) - 2H(0, 0, 1, 1, -x) \\
& - H(0, 1, 0, 1, -x)) + 10H(0, 1, 0, 1, -x) - 10(H(1, -x)H(0, 1, 1, -x) - 3H(0, 1, 1, 1, -x)) \\
& - 8H(0, 1, 1, 1, -x) + \log^3(\text{ms}) \left(\frac{5}{3}H(1, -x) - \frac{13\log(-x)}{3} \right) \\
& + \log^2(\text{ms}) (4\log^2(-x) - 3H(1, -x)\log(-x)) \\
& + \log(\text{ms}) \left(\frac{1}{3}H(1, -x)^3 + 2\log^2(-x)H(1, -x) + 3\pi^2H(1, -x) - \frac{5}{3}\log^3(-x) \right. \\
& \left. + 2H(0, 0, 1, -x) - 2H(0, 1, 1, -x) + \left(3H(1, -x)^2 - 2H(0, 1, -x) - \pi^2 \right) \log(-x) - \frac{28\zeta(3)}{3} \right) \\
& + \log(-x) \left(\frac{5}{3}H(1, -x)^3 - \frac{37}{6}\pi^2H(1, -x) - 16H(0, 0, 1, -x) - 10(H(1, -x)H(0, 1, -x)) \right. \\
& \left. - 2H(0, 1, 1, -x) - 2H(0, 1, 1, -x) + \frac{10\zeta(3)}{3} \right) - \frac{479\pi^4}{720} \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{PR523} = & \frac{1}{x^2(x+1)} \left(-\frac{4}{3} \log^4(m_s) + \left(\frac{4 \log(-x)}{3} - 4H(1, -x) \right) \log^3(m_s) \right. \\
& + (4H(1, -x) \log(-x) - 4H^2(1, -x)) \log^2(m_s) \\
& + \left(-\frac{4}{3} H^3(1, -x) + \frac{4}{3} \pi^2 H(1, -x) + \left(4H^2(1, -x) + \frac{4\pi^2}{3} \right) \log(-x) + 8\zeta(3) \right) \log(m_s) \\
& - \frac{1}{6} \log^4(-x) - \frac{2}{3} H(1, -x) \log^3(-x) + \frac{4}{3} \pi^2 H^2(1, -x) + (2H(0, 1, -x) - \pi^2) \log^2(-x) \\
& + 2\pi^2 H(0, 1, -x) + 12H(0, 0, 0, 1, -x) - 4H(0, 0, 1, 1, -x) + 4(H(1, -x)H(0, 0, 1, -x) \\
& - 2H(0, 0, 1, 1, -x) - H(0, 1, 0, 1, -x)) + 4H(0, 1, 0, 1, -x) - 4(H(1, -x)H(0, 1, 1, -x) \\
& - 3H(0, 1, 1, 1, -x)) + \log(-x) \left(\frac{4}{3} H^3(1, -x) - \frac{2}{3} \pi^2 H(1, -x) - 8H(0, 0, 1, -x) \right. \\
& \left. - 4(H(1, -x)H(0, 1, -x) - 2H(0, 1, 1, -x)) + 4\zeta(3) \right) + 12H(1, -x)\zeta(3) + \frac{37\pi^4}{180} \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{PR530} = & \frac{1}{x} \left(+\frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\log^2(m_s)}{2} + i\pi \log(m_s) - \frac{\pi^2}{2} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{2 \log^3(m_s)}{3} + (i\pi - 2 \log(-x)) \log^2(m_s) \right. \right. \\
& + \left(-4i\pi \log(-x) - \frac{2\pi^2}{3} \right) \log(m_s) + 2\pi^2 \log(-x) - \zeta(3) - \frac{i\pi^3}{3} \Big) \\
& - \frac{5}{6} \log^4(m_s) + \left(\frac{\log(-x)}{3} - \frac{5i\pi}{3} \right) \log^3(m_s) + \left(2 \log^2(-x) + i\pi \log(-x) + \frac{\pi^2}{4} \right) \log^2(m_s) \\
& + \left(\frac{1}{3} \log^3(-x) + (H(1, -x) + 5i\pi) \log^2(-x) + (2i\pi H(1, -x) - 2H(0, 1, -x) + \pi^2) \log(-x) \right. \\
& \left. - 2i\pi H(0, 1, -x) + 2H(0, 0, 1, -x) - 6\zeta(3) + \frac{i\pi^3}{6} \right) \log(m_s) \\
& + \frac{1}{3} i\pi \log^3(-x) + (i\pi H(1, -x) - 3\pi^2) \log^2(-x) + 2\pi^2 H(0, 1, -x) + 2i\pi H(0, 0, 1, -x) \\
& + \log(-x) \left(-2\pi^2 H(1, -x) - 2i\pi H(0, 1, -x) + 4\zeta(3) + \frac{5i\pi^3}{3} \right) - 4i\pi\zeta(3) - \frac{19\pi^4}{36} \Big) \quad (4.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{PR528} = & \frac{1}{x} \left(\frac{4 \log^4(m_s)}{3} + \left(\frac{4i\pi}{3} - 4 \log(-x) \right) \log^3(m_s) + (4 \log^2(-x) - 4i\pi \log(-x)) \log^2(m_s) \right. \\
& + \left(-\frac{4}{3} \log^3(-x) + 4i\pi \log^2(-x) + \frac{4}{3} \pi^2 \log(-x) - 8\zeta(3) + \frac{4i\pi^3}{3} \right) \log(m_s) \\
& \left. - \frac{4}{3} i\pi \log^3(-x) - \frac{4}{3} \pi^2 \log^2(-x) + \log(-x) \left(-\frac{4i\pi^3}{3} + 12\zeta(3) \right) + 4i\pi\zeta(3) - \frac{139\pi^4}{180} \right)
\end{aligned}$$

5 Zusammenfassung und Ausblick

Im Mittelpunkt dieser Arbeit stand die Berechnung der 2-Schleifen virtuellen Korrekturen der Top Quark Paar Produktion im Gluon Fusions Kanal.

Im Kapitel 2 wurde die experimentelle Sichtweise auf das Top Quark beschrieben. Es wurden die verschiedenen Produktions- und Zerfallskanäle besprochen, sowie die Messung des Wirkungsquerschnitts der Top Quark Paar Produktion und der Top Quark Masse. Des Weiteren wurden die Unterschiede der Top Quark Physik am LHC und am Tevatron, sowie die am LHC messbaren Top Quark Eigenschaften erläutert.

Das dritte Kapitel gab einen kurzen Einblick in die Störungsrechnung der QCD. Asymptotische Freiheit und besonders das Faktorisierungstheorem wurden erklärt. Danach konnte der Leser einen Einblick über den bisherigen Status der Berechnung des Wirkungsquerschnitts der Top Quark Paar Produktion erhalten. Insbesondere wurde die Behauptung widerlegt, dass durch die NLO Rechnung und die Aufsummierung weicher Gluonen das Ergebnis der NNLO Rechnung schon in einer guten Approximation bekannt ist.

Im letzten Kapitel wurde die Vorgehensweise einer 2-Schleifen Rechnung erläutert. Ausgehend von sämtlichen Feynman Graphen wurden die Master Integrale erreicht. Im Folgenden wurde die Mellin Barnes Methode sowie weitere Hilfsmittel vorgestellt, mit denen der Hochenergielimes der Top Quark Paar Produktion analytisch gewonnen werden konnte. In 4.3 wurde schließlich der Weg vom Hochenergielimes zum numerischen Niedrigenergielimes skizziert und einige Ergebnisse für die Randbedingungen von 7-Linern mit einem trivialem Zähler von 1 angegeben. Die Aufgabe dieser Arbeit, die Berechnung der Randbedingungen ist die schwere Schlüsselstelle auf dem Weg zum Niedrigenergielimes.

Zwanzig Jahre nach der Veröffentlichung der NLO Rechnung für die schwere Quark Produktion ist die NNLO Rechnung in Reichweite. Von den 422 Master Integralen der virtuellen 2-Schleifen Korrekturen des Gluon Fusions Kanals wurden bereits über 400 berechnet. Neben sämtlichen planaren Diagrammen (siehe Abbildung 4.4) konnten auch alle (skalare und tensoriale) nicht planaren 6-Liner berechnet werden. Die übriggebliebenen nicht planaren 7-Liner Tensorintegrale werden in den beiden kommenden Monaten fertiggestellt, so dass mit den Ergebnissen aus [40] die gesamten virtuellen 2-Schleifen Korrekturen der Top Quark Paar Produktion bekannt sein werden. Nach der Berechnung der Treelevel- und 1-Schleifen Korrekturen (mit radiativer Abstrahlung) auf NNLO Level ist ein NNLO Monte Carlo Generator für die schwere Quark Produktion in greifbarer Nähe, welcher von den Experimentalphysikern zur Überprüfung der Vorhersagen des Standardmodells benutzt werden kann. Vielleicht wird es mit diesem Werkzeug erstmals möglich sein, Physik jenseits des Standardmodells zu entdecken und zu erforschen.

Die Ergebnisse für die 2-Schleifen Korrekturen werden in Kürze publiziert.

Literaturverzeichnis

- [1] F. Abe et al. Observation of top quark production in $\bar{p}p$ collisions. *Phys. Rev. Lett.*, 74:2626–2631, 1995.
- [2] S. Abachi et al. Observation of the top quark. *Phys. Rev. Lett.*, 74:2632–2637, 1995.
- [3] Tim Tait and C. P. Yuan. The phenomenology of single top quark production at the Fermilab Tevatron. 1997.
- [4] Wolfgang Wagner. Top quark physics in hadron collisions. *Rept. Prog. Phys.*, 68:2409–2494, 2005.
- [5] Werner Bernreuther. Top quark physics at the LHC. *J. Phys.*, G35:083001, 2008.
- [6] V. M. Abazov et al. Evidence for production of single top quarks and first direct measurement of $-\mathcal{V}(tb)-$. *Phys. Rev. Lett.*, 98:181802, 2007.
- [7] Jovan Mitrevski. Single Top Quark Production at the Fermilab Tevatron Collider. 2008.
- [8] N. Fabiano. Top mesons. *Eur. Phys. J.*, C2:345–350, 1998.
- [9] O. Cakir, R. Ciftci, E. Recepoglu, and S. Sultansoy. Toponium revisited. *Acta Phys. Polon.*, B35:2103–2107, 2004.
- [10] Johann H. Kuhn and P. M. Zerwas. THE TOPONIUM SCENARIO. *Phys. Rept.*, 167:321, 1988.
- [11] Johann H. Kuhn. Theory of top quark production and decay. 1996.
- [12] Scott Willenbrock. top2008 Conference Summary. 2008.
- [13] P. Nason, S. Dawson, and R. Keith Ellis. The Total Cross-Section for the Production of Heavy Quarks in Hadronic Collisions. *Nucl. Phys.*, B303:607, 1988.
- [14] P. Nason, S. Dawson, and R. Keith Ellis. The One Particle Inclusive Differential Cross-Section for Heavy Quark Production in Hadronic Collisions. *Nucl. Phys.*, B327:49–92, 1989.
- [15] Thomas Wright. b-tagging at CDF and D0, lessons for LHC. 2006.
- [16] K. Hanagaki. b-tagging at D0. Prepared for Hadron Collider Physics Symposium 2005, Les Diablerets, Switzerland, 4-9 Jul 2005.

- [17] Suharyo Sumowidagdo. First measurement of top quark pair production cross-section in muon plus hadronic tau final states. FERMILAB-THESIS-2007-41.
- [18] Kenneth D. Lane. Top quarks and flavor physics. *Phys. Rev.*, D52:1546–1555, 1995.
- [19] Nikolaos Kidonakis and Ramona Vogt. The theoretical top quark cross section at the Tevatron and the LHC. 2008.
- [20] Robert M. Harris, Christopher T. Hill, and Stephen J. Parke. Cross section for topcolor $Z'(t)$ decaying to t anti- t . 1999.
- [21] Dhiman Chakraborty, Jacobo Konigsberg, and David L. Rainwater. Review of top quark physics. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 53:301–351, 2003.
- [22] U. Baur, M. Buice, and Lynne H. Orr. Direct measurement of the top quark charge at hadron colliders. *Phys. Rev.*, D64:094019, 2001.
- [23] Z. Gunay Unalan. First CDF measurement of the top quark charge using the top decay products. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 177-178:297–299, 2008.
- [24] John C. Collins, Davison E. Soper, and George Sterman. Factorization of Hard Processes in QCD. *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.*, 5:1–91, 1988.
- [25] H. L. Lai et al. Global QCD analysis and the CTEQ parton distributions. *Phys. Rev.*, D51:4763–4782, 1995.
- [26] Pavel M. Nadolsky et al. Implications of CTEQ global analysis for collider observables. *Phys. Rev.*, D78:013004, 2008.
- [27] A. D. Martin, W. J. Stirling, R. S. Thorne, and G. Watt. Update of Parton Distributions at NNLO. *Phys. Lett.*, B652:292–299, 2007.
- [28] R. S. Thorne, A. D. Martin, and W. J. Stirling. MRST parton distributions: Status 2006. 2006.
- [29] Guido Altarelli and G. Parisi. Asymptotic Freedom in Parton Language. *Nucl. Phys.*, B126:298, 1977.
- [30] S. Catani. Soft-gluon resummation: A short review. 1997.
- [31] Nikolaos Kidonakis and Ramona Vogt. Theoretical status of the top quark cross section. *Int. J. Mod. Phys.*, A20:3171, 2005.
- [32] Sven Moch and Peter Uwer. Theoretical status and prospects for top-quark pair production at hadron colliders. *Phys. Rev.*, D78:034003, 2008.
- [33] S. Moch and P. Uwer. Heavy-quark pair production at two loops in QCD. 2008.

- [34] Kirill Melnikov and Alexander Mitov. The photon energy spectrum in $B \rightarrow X/s + \text{gamma}$ in perturbative QCD through $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$. *Phys. Lett.*, B620:69–79, 2005.
- [35] Robert V. Harlander and William B. Kilgore. Next-to-next-to-leading order Higgs production at hadron colliders. *Phys. Rev. Lett.*, 88:201801, 2002.
- [36] Stefano Catani, Michelangelo L. Mangano, Paolo Nason, and Luca Trentadue. The Top Cross Section in Hadronic Collisions. *Phys. Lett.*, B378:329–336, 1996.
- [37] W. Beenakker et al. Electroweak one loop contributions to top pair production in hadron colliders. *Nucl. Phys.*, B411:343–380, 1994.
- [38] M. Czakon, A. Mitov, and S. Moch. Heavy-quark production in massless quark scattering at two loops in QCD. *Phys. Lett.*, B651:147–159, 2007.
- [39] M. Czakon, A. Mitov, and S. Moch. Heavy-quark production in gluon fusion at two loops in QCD. *Nucl. Phys.*, B798:210–250, 2008.
- [40] M. Czakon. Tops from Light Quarks: Full Mass Dependence at Two-Loops in QCD. *Phys. Lett.*, B664:307–314, 2008.
- [41] Michael Edward Peskin and Daniel V. Schroeder. An Introduction to quantum field theory. Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.
- [42] S. Dittmaier, P. Uwer, and S. Weinzierl. NLO QCD corrections to $t \text{ anti-}t + \text{jet}$ production at hadron colliders. *Phys. Rev. Lett.*, 98:262002, 2007.
- [43] Giovanni Ossola, Costas G. Papadopoulos, and Roberto Pittau. CutTools: a program implementing the OPP reduction method to compute one-loop amplitudes. *JHEP*, 03:042, 2008.
- [44] G. Chachamis, M. Czakon, and D. Eiras. W Pair Production at the LHC - II. One-loop Squared Corrections in the High Energy Limit. 2008.
- [45] J. G. Korner, Z. Merebashvili, and M. Rogal. NNLO $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ results for heavy quark pair production in quark–antiquark collisions: The one-loop squared contributions. *Phys. Rev.*, D77:094011, 2008.
- [46] J. G. Korner, Z. Merebashvili, and M. Rogal. One-loop amplitudes for four-point functions with two external massive quarks and two external massless partons up to $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. *Phys. Rev.*, D73:034030, 2006.
- [47] Charalampos Anastasiou and S. Mert Aybat. The one-loop gluon amplitude for heavy-quark production at NNLO. 2008.
- [48] Stefan Weinzierl. Subtraction terms at NNLO. *JHEP*, 03:062, 2003.
- [49] M. Czakon. *Diagen*. Unveröffentlicht.

- [50] V. A. Smirnov. *Evaluating Feynman Integrals*. Springer, 2004.
- [51] J. Gluza, K. Kajda, and T. Riemann. AMBRE - a Mathematica package for the construction of Mellin-Barnes representations for Feynman integrals. *Comput. Phys. Commun.*, 177:879–893, 2007.
- [52] M. Czakon G. Chachamis. *MBrepresentation*. Unveröffentlicht, 2007.
- [53] M. Czakon. Automatized analytic continuation of Mellin-Barnes integrals. *Comput. Phys. Commun.*, 175:559–571, 2006.
- [54] N. Nielsen. *Der Eulersche Dilogarithmus und seine Verallgemeinerungen*. Nova Acta Leopoldina (Halle), 1909.
- [55] E. Remiddi and J. A. M. Vermaseren. Harmonic polylogarithms. *Int. J. Mod. Phys.*, A15:725–754, 2000.
- [56] S. Moch and P. Uwer. XSummer: Transcendental functions and symbolic summation in Form. *Comput. Phys. Commun.*, 174:759–770, 2006.
- [57] M. Czakon. *Quadprec*. Unveröffentlicht, 2008.
- [58] David H. Bailey and David J. Broadhurst. Parallel integer relation detection: Techniques and applications. *MATH.COMPUT.*, 70:1719, 2001.

Danksagung

Es benötigt eine Vielzahl von Zutaten um aus einer neuen Stadt eine neue Heimat, aus einem Diplomarbeitsthema eine Diplomarbeit zu machen. Daher möchte ich hier alldenjenigen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit direkt oder indirekt beigetragen haben.

Mein großer Dank richtet sich an Dr. M. Czakon, zum einen für dieses absolut bedeutende und interessante Diplomarbeitsthema, zum anderen für die ausgezeichnete Betreuung und die Möglichkeit an verschiedenen Konferenzen teilzunehmen. Des Weiteren möchte ich mich für das Stipendium bedanken, welches mir ermöglicht, die nächsten zwei Monate an diesem Thema weiterzuarbeiten.

Ein besonderer Dank geht auch an Prof. Dr. R. Rückl für die Ermöglichung des Hochschulwechsels und die kurzfristige Aufnahme an seinem Lehrstuhl. Des Weiteren bedanke ich mich für sein und Prof. Dr. H. Fraas gutes Teamplaying im Bezug auf Notenankennung oder Abgabefristen.

Einen wesentlichen Anteil am Gelingen dieser Arbeit hat auch Thomas Schutzmeier beigetragen. Ohne seine wertvollen Diskussionen und seine unermüdliche Unterstützung wäre diese Arbeit nicht in dieser Form vollendet worden.

Ebenso danke ich Radja Boughezal, Grigorio Chachamis und Dolores Eiras für den ergiebigen Dialog, die gute Zusammenarbeit und die tolle Zeit auf den Konferenzen.

Ein großer Dank geht auch an alle Mitbewohner des Verfügungsbaus für die schöne Zeit und die anregenden Gespräche. Besonders möchte ich Lisa, Alex, Alex, Laslo, Matthias, Christian, Christoph, Karo und Nadin danken.

Ein besonderer Dank geht auch an meine Eltern die mich während des Studiums uneingeschränkt gefördert und unterstützt haben und zum Gelingen dieser Arbeit sowohl finanziell als auch mit ihrer Korrekturarbeit beigetragen haben. Für letzteres geht auch ein großer Dank an meine Schwester Birgit.

Zuletzt möchte ich noch allen Leute danken, die Würzburg für mich in ein neues zu Hause verwandelt haben. Dazu gehören neben oben genannten: Nina, Tine und Ben, Minka, Alex und Eva, Jellena, Ramona, Katharina, Bettina und Johannes, Jörg und viele weitere.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Würzburg, den 19. September 2008

Peter Bärnreuther