Prof. Dr. Thorsten Ohl
Raimond Abt, Adam Büchner,
Robert Franken, David Rodriguez Fernandez

13. Übung zur Quantenmechanik
17. Juli 2019

Wiederholung

Wenn nicht anders angegeben, bezeichnen $\vec{X}$, $\vec{P}$ und $\vec{L} = \vec{X} \times \vec{P}$ die Observablen Ort, Impuls, und Drehimpuls. Außerdem bezeichnet $\vec{\sigma}$ die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

13.1 Verständnisfragen

Begründen sie Ihre Antworten *kurz*.

1. Was ist die physikalische Interpretation der Eigenwerte und Eigenvektoren des Operators
$$O = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sigma_1 + \sigma_3) \tag{2}$$
für ein Spin-1/2 System.

2. Welche der Paare von Observablen können für Teilchen im dreidimensionalen Raum gleichzeitig gemessen werden
$$(L_1, X_1), \quad (P_3, L_2), \quad (\vec{P}^2, \vec{X}^2), \quad (L_3, \vec{X}\vec{P})\,? \tag{3}$$

3. Welches sind die jeweiligen Minima der Erwartungswerte $\langle\psi|O|\psi\rangle$ der Observablen
$$\frac{1}{2m}P^2, \quad \frac{m\omega^2}{2}X^2, \quad \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}X^2 \tag{4}$$
für ein Teilchen auf der reellen Achse?

4. Was ist die physikalische Interpretation des Erwartungswerts der Observablen $P_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$ im Zustand $|\psi\rangle$ mit $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$?

5. Welche der Operatoren im zweidimensionalen Hilberraum
$$\frac{1}{2}\sigma_1, \quad \frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_2, \quad \frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{1}{3}\sigma_3, \quad \frac{1}{2}\mathbf{1} + \sigma_1 \tag{5}$$
sind Dichtematrizen?

13.2 Wellenfunktionen

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m

$$H = \frac{1}{2m}\vec{P}^{\,2} + V(\vec{X}) \tag{6a}$$

unter dem Einfluß einer anziehenden rotationssymmetrischen δ-Potentialkugelschale

$$V(r,\theta,\phi) = -V_0 \cdot \delta(r-\rho) \tag{6b}$$

mit $V_0 > 0$.

1. Verwenden Sie die Darstellung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(r,\theta,\phi) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi(r,\theta,\phi)) + \frac{1}{2m}\frac{1}{r^2}\vec{L}^{\,2}\psi(r,\theta,\phi)\,, \tag{7}$$

   um die Schrödingergleichung zu separieren und drücken Sie die allgemeine Lösung durch Eigenfunktionen des Drehimpules und Lösungen der Radialgleichung aus.

2. Lösen Sie die Radialgleichung für normierbare gebundene Zustände für verschwindenden Gesamtdrehimpuls ($l = 0$) und geben Sie die Energie-Eigenwerte und Eigenvektoren an. Berücksichtigen Sie, daß $\psi(\vec{r})$ auch für $\vec{r} \to 0$ beschränkt bleiben muß.

   Hinweis: es ist nicht verlangt, die Normierung der Eigenvektoren explizit zu berechnen und für die Eigenwerte genügt eine graphische Diskussion der Lösungen der entsprechenden Gleichung, falls diese nicht mit elementaren Funktionen gelöst werden kann.

13.3 Operatoralgebra

Betrachten Sie den dreidimensionalen isotropen Oszillator

$$H = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{2m}P_i^2 + \frac{m\omega^2}{2}X_i^2\right) \tag{8}$$

und den sogenannten *Fradkin-Tensor* F mit den Komponenten

$$F_{ij} = \frac{1}{2m}P_iP_j + \frac{m\omega^2}{2}X_iX_j\,. \tag{9}$$

1. Zeigen Sie, daß F symmetrisch in den Indices ist.
2. Zeigen Sie, daß F im Heisenbergbild konstant ist.
3. Berechnen Sie die Erwartungswerte

   $$f_{ij}(\xi) = \langle\vec{\xi}|F_{ij}|\vec{\xi}\rangle \tag{10}$$

   der Komponenten von F in kohärenten Zuständen $\left|\vec{\xi}\right\rangle$ mit

   $$a_i\left|\vec{\xi}\right\rangle = \xi_i\left|\vec{\xi}\right\rangle\,. \tag{11}$$

   Zur Erinnerung: die Leiteroperatoren sind als

   $$a_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X_i + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}P_i\right) \tag{12a}$$

   $$a_i^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X_i - \frac{\mathrm{i}}{m\omega}P_i\right) \tag{12b}$$

   definiert.

13.4 Drehimpulsaddition

Betrachten Sie ein System aus drei Spins

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

mit

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \ni c_+\left|\uparrow\right\rangle + c_-\left|\downarrow\right\rangle \tag{14}$$

und

$$\sigma_3\left|\uparrow\right\rangle = +\left|\uparrow\right\rangle \tag{15a}$$

$$\sigma_3\left|\downarrow\right\rangle = -\left|\downarrow\right\rangle\,. \tag{15b}$$

Konstruieren Sie Zustände $\left|l,m\right\rangle$ mit „gutem“ Gesamtspin

$$\vec{S} = \left(\frac{\vec{\sigma}}{2}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right) + \left(\mathbf{1}\otimes\frac{\vec{\sigma}}{2}\otimes\mathbf{1}\right) + \left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \tag{16}$$

d. h.

$$\vec{S}^2\left|l,m\right\rangle = \hbar^2 l(l+1)\left|l,m\right\rangle \tag{17a}$$

$$S_3\left|l,m\right\rangle = \hbar m\left|l,m\right\rangle\,. \tag{17b}$$

1. Bestimmen Sie zunächst durch mehrfache Anwendung der Clebsh-Gordan-Reihe, welche l in der Zerlegung des Hilbertraums in eine direkte Summe
$$\mathcal{H} = \bigoplus_l \mathcal{H}_l \tag{18}$$
wie häufig beitragen.

2. Konstruieren Sie anschließend das Multiplett mit dem größtmöglichen Gesamtspin l.

13.5 Störungsrechnung

Betrachten Sie ein QBit mit Hamiltonoperator

$$H = \underbrace{E_0\mathbf{1} + \frac{\Delta E}{2}\sigma_3}_{=H_0} + \underbrace{\lambda\vec{\sigma}\vec{e}}_{=\lambda H_I} \; . \tag{19}$$

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte und -vektoren von H für $\lambda = 0$.

2. Bestimmen Sie die Korrekturen zu den Eigenwerten von H in erster Ordnung in λ.

3. Bestimmen Sie die Korrekturen zu den Eigenwerten von H in zweiter Ordnung in λ.

4. Bestimmen Sie die Eigenwerte von H exakt und vergleichen Sie die Entwicklung in λ mit Ihrem Ergebnis.

   Hinweis: $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + \ldots$