Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG
Fakultät für Physik und Astronomie
Prof. Dr. Thorsten Ohl
Raimond Abt, Adam Büchner,
Robert Franken, David Rodriguez Fernandez

12. Übung zur Quantenmechanik
10. Juli 2019

Drehimpulsaddition, Störungsrechnung

Hinweis: der Stoff der Übungsaufgaben 12.1 und 12.2 wird in der Vorlesung am Freitag, 12. Juli 2019 und der der Übungsaufgaben 12.3 und 12.4 in der Vorlesung am Montag den 15. Juli 2019 behandelt werden!

12.1 Addition von Drehimpulsen

Konstruieren Sie die Eigenzustände zum Gesamtdrehimpuls

$$\vec{J} = \vec{L} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \vec{S}\,, \tag{1}$$

in einem System, das durch einen Bahndrehimpuls $l = 1$ und Spin $s = 1/2$ beschrieben wird

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}\,, \tag{2}$$

wobei

$$\vec{L}^2 \left|l, m\right\rangle = \hbar^2 l(l+1) \left|l, m\right\rangle \qquad L_3 \left|l, m\right\rangle = \hbar m \left|l, m\right\rangle \tag{3a}$$

$$\vec{S}^2 \left|s, s_3\right\rangle = \hbar^2 s(s+1) \left|s, s_3\right\rangle \qquad S_3 \left|s, s_3\right\rangle = \hbar s_3 \left|s, s_3\right\rangle\,. \tag{3b}$$

12.2 Addition von Drehimpulsen redux

Betrachten Sie ein System, das aus Teilsystemen mit Drehimpuls $l_1 = 1$ und $l_2 = 3/2$ zusammengesetzt ist:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_{\frac{3}{2}}\,, \tag{4}$$

wobei

$$\vec{L}_i^2 \left|l_i, m_i\right\rangle = \hbar^2 l_i(l_i+1) \left|l_i, m_i\right\rangle \qquad L_{i,3} \left|l_i, m_i\right\rangle = \hbar m_i \left|l_i, m_i\right\rangle \tag{5a}$$

für $i = 1, 2$.

1. Berechnen Sie den Erwartungswert des Operators

$$\Delta H = g \vec{L}_1 \otimes \vec{L}_2 \tag{6}$$

in *allen* Eigenzuständen des Gesamtdrehimpulses

$$\vec{L} = \vec{L}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \vec{L}_2\,. \tag{7}$$

2. Konstruieren Sie die Eigenzustände zum Gesamtdrehimpuls mit magnetischer Quantenzahl $m = 3/2$.

12.3 Harmonischer Oszillator

Betrachten Sie einen gestörten harmonischen Oszillator

$$H = H_0 + gV \tag{8a}$$

$$H_0 = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}X^2 \tag{8b}$$

$$V = \sqrt{m\hbar\omega^3}X\,. \tag{8c}$$

Der ungestörte harmonische Oszillator H_0 kann mit Hilfe der Leiteroperatoren

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}P\right) \tag{9a}$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X - \frac{\mathrm{i}}{m\omega}P\right) \tag{9b}$$

diagonalisiert werden.

1. Berechnen Sie die Änderung der Energien der ungestörten Eigenzustände in erster und zweiter Ordnung Störungsrechnung in g, sowie die neuen Eigenzustände in erster Ordnung g.

2. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem exakten Ergebnis, das sie durch eine Verschiebung des Koordinatenursprungs finden können.

12.4 Harmonischer Oszillator $2D$

Betrachten Sie einen gestörten zweidimensionalen harmonischen Oszillator

$$H = H_0 + gV \tag{10a}$$

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(P_1^2 + P_2^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(X_1^2 + X_2^2\right) \tag{10b}$$

$$V = \frac{\Omega^2}{m}X_1X_2 \tag{10c}$$

mit $|g|\Omega^2 < \omega^2$. Der ungestörte zweidimensionale harmonische Oszillator H_0 kann mit Hilfe der Leiteroperatoren

$$a_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X_i + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}P_i\right) \tag{11a}$$

$$a_i^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X_i - \frac{\mathrm{i}}{m\omega}P_i\right) \tag{11b}$$

($i = 1, 2$) diagonalisiert werden.

1. Berechnen Sie die Änderung der Energie des Grundzustands in erster und zweiter Ordnung Störungsrechnung in g.

2. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem exakten Ergebnis. Tip: eine geeignete Drehung des Koordinatensystems vereinfacht die exakte Lösung drastisch.