

11. Übung zur Quantenmechanik

3. Juli 2019

Teilchen im Magnetfeld

Betrachten Sie ein Teilchen mit Ladung q und Masse m in einem *konstanten* und *homogenen* Magnetfeld

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

das sich in der x_1 - x_2 -Ebene bewegen kann und auf $x_3 = 0$ eingeschränkt ist. Der zugehörige Hamiltonoperator ist

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^2 \Pi_i^2 \quad (2)$$

mit dem kinetischen Impuls

$$\vec{\Pi} = \vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{X}). \quad (3)$$

11.1 Landau-Levels

1. Zeigen Sie, daß

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{x} \quad (4)$$

ein geeignetes Vektorpotential für ein *beliebiges* konstantes und homogenes Magnetfeld \vec{B} ist.

2. Zeigen Sie, daß die Operatoren

$$a = \sqrt{\frac{c}{2\hbar q B_3}} (\Pi_1 + i\Pi_2) \quad (5)$$

und a^\dagger für $\vec{B} = (0, 0, B_3)^T$ mit $qB_3 > 0$ wie Erzeuger und Vernichter wirken. NB: für $qB_3 < 0$ muß man Π_1 und Π_2 vertauschen.

3. Drücken Sie (2) durch (5) aus bestimmen Sie die Eigenwerte von H analog zum harmonischen Oszillator.

11.2 Eichinvarianz

1. Zeigen Sie, daß

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{B_3}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6a)$$

$$\vec{A}'(\vec{x}) = B_3 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6b)$$

beides geeignete Vektorpotentiale sind (Sie dürfen das Ergebnis der ersten Teilaufgabe benutzen).

2. Drücken Sie (2) mit (6a) zunächst als Funktion von X_1 , P_1 , X_2 und P_2 aus und anschließend als quadratische Form

$$H = \hbar \sum_{i,j=1}^2 a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j + \hbar\omega \quad (7)$$

der Erzeuger und Vernichter

$$a_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(X_i + \frac{i}{m\omega} P_i \right) \quad (8)$$

und

$$\omega = \frac{qB_3}{2mc}. \quad (9)$$

Finden Sie geeignete Linearkombinationen von a_1 und a_2 , die die 2×2 -Matrix auf Diagonalgestalt bringen und bestimmen Sie so die Eigenwerte von (2). Vergleichen Sie das Ergebnis mit der ersten Aufgabe.

11.3 Landau-Levels redux

1. Drücken Sie (2) mit (6b) als Funktion von P_1 und

$$X'_1 = X_1 - \frac{c}{qB_3} P_2 \quad (10)$$

aus. Zeigen Sie, daß

$$a = \sqrt{\frac{m\omega'}{2\hbar}} \left(X'_1 + \frac{i}{m\omega'} P_1 \right) \quad (11)$$

mit

$$\omega' = \frac{qB_3}{mc} = 2\omega \quad (12)$$

ein Vernichter ist und bestimmen Sie so die Eigenwerte von (2). Vergleichen Sie das Ergebnis mit den früheren Teilaufgaben.

2. Sind die Eigenwerte von (2) entartet? Wenn ja, wie?