

10. Übung zur Quantenmechanik

27. Juni 2019 (rev)

Separationsansatz, Drehimpuls

10.1 Separationsansatz

Betrachten Sie ein Teilchen im dreidimensionalen Raum \mathbf{R}^3 mit Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m} \vec{P}^2 + V(\vec{X}). \quad (1)$$

1. Betrachten Sie Spezialfälle

$$V_{\text{Produkt}}(\vec{X}) = V_1(X_1)V_2(X_2)V_3(X_3) \quad (2a)$$

$$V_{\text{Summe}}(\vec{X}) = V_1(X_1) + V_2(X_2) + V_3(X_3) \quad (2b)$$

mit reellen V_i . In welchen dieser Fälle können sie die Lösungen der stationären Schrödingergleichung

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (3)$$

faktorisieren

$$\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \psi \rangle = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3) \quad ? \quad (4)$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Betrachten Sie als weiteren Spezialfall den unendlich tiefen Potentialtopf in 3 Dimensionen

$$V(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x_i| < a/2 \\ V_0 \rightarrow +\infty & \text{für } |x_i| \geq a/2 \end{cases} \quad (5)$$

und nutzen Sie einen Separationsansatz um alle Eigenwerte und -funktionen des Hamiltonoperators zu finden.

3. Zählen Sie die Anzahl der Eigenwerte E_n und Eigenfunktionen des Hamiltonoperators mit $E_n \leq E$ und mit $E \leq E_n \leq E + dE$ für E so groß, daß Sie die Verteilung der diskreten Impulse durch eine kontinuierliche Dichte approximieren können.

10.2 Kugelflächenfunktionen

Betrachten Sie die normierten Kugelflächenfunktionen, die der maximalen Ausrichtung des Drehimpulses entlang der 3-Achse entsprechen

$$Y_{l,\pm l}(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi | l, \pm l \rangle . \quad (6)$$

1. Bestimmen Sie die normierten Kugelflächenfunktionen $Y_{l,\pm l}$ aus

$$L_3 |l, \pm l\rangle = \pm \hbar l |l, \pm l\rangle \quad (7a)$$

$$L_{\pm} |l, \pm l\rangle = 0 \quad (7b)$$

Hinweis: lösen Sie zuerst (7a) und anschließend (7b).

2. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Formel aus der Vorlesung.
3. Können Sie die relative Phase zwischen $Y_{l,+l}$ und $Y_{l,-l}$ festlegen?
4. Berechnen Sie die normierten Kugelflächenfunktionen $Y_{l,\pm(l-1)}$ und vergleichen Sie wieder Ihr Ergebnis mit der Formel aus der Vorlesung.

10.3 Spin 1

Betrachten Sie die Matrixelemente des Drehimpulses für Spin 1

1. Berechnen Sie die Matrizen

$$D_i = \begin{pmatrix} \langle 1|L_i|1\rangle & \langle 1|L_i|0\rangle & \langle 1|L_i|-1\rangle \\ \langle 0|L_i|1\rangle & \langle 0|L_i|0\rangle & \langle 0|L_i|-1\rangle \\ \langle -1|L_i|1\rangle & \langle -1|L_i|0\rangle & \langle -1|L_i|-1\rangle \end{pmatrix} \quad (8)$$

für $i = 1, 2, 3$ und $i = \pm$ in der Basis $|m\rangle = |1, m\rangle$ mit $m = 1, 0, -1$.

2. Berechnen Sie die Matrizen

$$D'_i = \begin{pmatrix} \langle x|L_i|x\rangle & \langle x|L_i|y\rangle & \langle x|L_i|z\rangle \\ \langle y|L_i|x\rangle & \langle y|L_i|y\rangle & \langle y|L_i|z\rangle \\ \langle z|L_i|x\rangle & \langle z|L_i|y\rangle & \langle z|L_i|z\rangle \end{pmatrix} \quad (9)$$

für $i = 1, 2, 3$ und $i = \pm$ in der Basis

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1\rangle - |1\rangle) \quad (10a)$$

$$|y\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|-1\rangle + |1\rangle) \quad (10b)$$

$$|z\rangle = |0\rangle . \quad (10c)$$

3. Interpretieren Sie die beiden Basen physikalisch.