Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Fakultät für Physik und Astronomie
Prof. Dr. Thorsten Ohl
Raimond Abt, Adam Büchner,
Robert Franken, David Rodriguez Fernandez

8. Übung zur Quantenmechanik
12. Juni 2019 (rev.)

Harmonischer Oszillator

8.1 Jacobi-Identität

Zeigen Sie die Jacobi-Identität

$$[A[B,C]] + [B[C,A]] + [C[A,B]] = 0 \tag{1}$$

für den Kommutator

$$[A,B] = AB - BA \tag{2}$$

von Operatoren $A, B, C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

8.2 Gekoppelte Harmonische Oszillatoren

Betrachten Sie den Hamilton-Operator für zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren

$$H = H_a + H_b + \hbar\lambda \left(a^\dagger b + b^\dagger a\right) \tag{3a}$$

$$H_a = \hbar\omega_a \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \tag{3b}$$

$$H_b = \hbar\omega_b \left(b^\dagger b + \frac{1}{2}\right) \tag{3c}$$

mit

$$[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = \mathbf{1} \tag{4a}$$

$$[a, b] = [a, b^\dagger] = 0 \tag{4b}$$

und $\lambda \in \mathbf{R}$ als Kopplungsstärke.

1. Finden Sie Schiebeperatoren A und B mit denen

$$H = \hbar\omega_A A^\dagger A + \hbar\omega_B B^\dagger B + \hbar\frac{\omega_A + \omega_B}{2} \tag{5}$$

geschrieben werden kann.

2. Finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren

$$H\left|E\right\rangle = E\left|E\right\rangle \ . \tag{6}$$

3. Drücken Sie die Eigenvektoren $|E\rangle$ in der Eigenbasis der ungekoppelten Oszillatoren

$$a^\dagger a\left|n_a, n_b\right\rangle = n_a\left|n_a, n_b\right\rangle \tag{7a}$$

$$b^\dagger b\left|n_a, n_b\right\rangle = n_b\left|n_a, n_b\right\rangle \tag{7b}$$

aus.

8.3 Kohärente Zustände im Ortsraum

In der Vorlesung werden die kohärenten Zustände $|z\rangle$ des harmonischen Oszillators mit $z \in \mathbf{C}$ als Eigenzustände

$$a\left|z\right\rangle = z\left|z\right\rangle \tag{8}$$

des Vernichters

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}P\right) \tag{9}$$

in der Eigenbasis des Anzahloperators $N = a^\dagger a$ konstruiert

$$\left|z\right\rangle = \mathrm{e}^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\left|n\right\rangle \ . \tag{10}$$

1. Bestimmen Sie die Ortsraumwellenfunktionen

$$\psi_z(x) = \langle x|z\rangle \ . \tag{11}$$

Hinweis: es ist einfacher, die aus (8) *folgende Differentialgleichung für* $\psi_z(x)$ *zu lösen, als* $\langle x|z\rangle$ *mit Hermite-Polynomen zu berechnen.*

2. In der Vorlesung wird gezeigt, daß die zeitabhängigen kohärenten Zustände

$$\left|z, t\right\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}z\right\rangle \tag{12}$$

die Schrödigergleichung lösen. Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p_{z,t}(x) = \left|\psi_{z,t}(x)\right|^2 = \left|\langle x|z,t\rangle\right|^2 \tag{13}$$

und ihre Zeitabhängigkeit.

8.4 Unschärfen

Betrachten Sie erneut die kohärenten Zustände

$$a\,|z\rangle = z\,|z\rangle\ . \tag{8}$$

1. Überprüfen Sie das Ergebnis aus der Vorlesung für die Unschärfen von Ort und Impuls

$$(\Delta_z X)^2 = \langle z|X^2|z\rangle - \langle z|X|z\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \tag{14a}$$

$$(\Delta_z P)^2 = \langle z|P^2|z\rangle - \langle z|P|z\rangle^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}\,. \tag{14b}$$

   Verwenden Sie dazu *nur* die Eigenwertgleichung (8)!

2. Wie hängen diese Unschärfen von der Zeit ab?