Prof. Dr. Thorsten Ohl
Raimond Abt, Adam Büchner,
Robert Franken, David Rodriguez Fernandez

7. Übung zur Quantenmechanik
05. Juni 2019

Freie Wellenpakete

7.1 Gaußsche Wellenpakete ohne Wechselwirkung

Betrachten Sie die Zustände $|a(t), \beta(t), \gamma(t)\rangle$ mit den zeitabhängigen Parametern $a(t)$, $\beta(t)$ und $\gamma(t)$ und der Wellenfunktion in einer Dimension

$$\psi(x,t) = \langle x|\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)\rangle = \mathrm{e}^{\alpha(t)x^2+\beta(t)x+\gamma(t)}\,. \tag{1}$$

Wir müssen zulassen, daß die Parameter $\alpha(t)$, $\beta(t)$ und $\gamma(t)$ komplexe Werte annehmen können. Damit die Zustände $|\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)\rangle$ normierbar sind, wählen wir $\mathrm{Re}\,\alpha(t) < 0$.

1. Zeigen Sie, daß Gaußsche Wellenpakete der Form (1) ohne Wechselwirkung Gaußsche Wellenpakete mit geänderten Parametern bleiben. Mit anderen Worten, zeigen Sie, daß $|\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)\rangle$ die freie Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)\rangle = \frac{P^2}{2m}\,|\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)\rangle \tag{2}$$

erfüllt, wenn $\alpha(t)$, $\beta(t)$ und $\gamma(t)$ ein System gekoppelter Differentialgleichungen löst. Leiten Sie dieses Differentialgleichungssystem her.

2. Lösen Sie die gekoppelten Differentialgleichungen für $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ mit der Anfangsbedingung

$$\alpha(0) = \alpha_0 \in \mathbf{C} \tag{3a}$$
$$\beta(0) = \beta_0 \in \mathbf{C} \tag{3b}$$

Was fällt Ihnen auf? Bleibt die Bedingung $\mathrm{Re}\,\alpha(t) < 0$ entlang der Lösungen erhalten? Vergleichen Sie den Fall $\alpha_0 = -a^2$, $\beta_o = ik_0$ mit der Vorlesung.

3. Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$|\psi(x,t)|^2 = |\langle x|\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)\rangle|^2 \tag{4}$$

auch für komplexe $\alpha(t)$, $\beta(t)$ und $\gamma(t)$ eine Gaußverteilung ist, deren Breite nur von $\alpha(t)$ abhängt. Berechnen sie die Zeitabhängigkeit dieser Breite aus der Lösung der Differentialgleichung und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus der Vorlesung.

7.2 Beliebige Wellenpakete ohne Wechselwirkung

Betrachten Sie nun einen beliebigen normierbaren Zustand $|\psi(t)\rangle$ eines Teilchens in einer Dimension und studieren Sie die Zeitabhängigkeit der Erwartungswerte von Ort und Impuls

$$x(t) = E_{\psi(t)}(X) = \langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle \tag{5a}$$
$$p(t) = E_{\psi(t)}(P) = \langle\psi(t)|P|\psi(t)\rangle \tag{5b}$$

sowie der Unschärfen

$$(\delta x)^2(t) = \left(\Delta_{\psi(t)}X\right)^2 = \langle\psi(t)|X^2|\psi(t)\rangle - \langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle^2 \tag{5c}$$
$$(\delta p)^2(t) = \left(\Delta_{\psi(t)}P\right)^2 = \langle\psi(t)|P^2|\psi(t)\rangle - \langle\psi(t)|P|\psi(t)\rangle^2 \tag{5d}$$

für den wechselwirkungsfreien Fall mit Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m}P^2\,. \tag{6}$$

1. Berechnen Sie mit dem Ehrenfestschen Theorem

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)\,,\qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t) \tag{7}$$

   und zeigen Sie, daß Sie ein geschlossenes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für $x(t)$ und $p(t)$ erhalten.

2. Lösen Sie es mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0 \tag{8a}$$
$$p(0) = p_0\,. \tag{8b}$$

3. Berechen Sie mit dem Ehrenfestschen Theorem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x)^2(t)\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\delta x)^2(t)\,,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta p)^2(t) \tag{9}$$

   und zeigen Sie, daß Sie ein geschlossenes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für $x(t)$, $p(t)$, $(\delta x)^2(t)$ und $(\delta p)^2(t)$ erhalten. *Hinweis: in Zwischenschritten taucht der Erwartungswert*

$$f(t) = \frac{1}{m}\langle\psi(t)|(XP+PX)|\psi(t)\rangle \tag{10}$$

   auf, dessen Anfangswert für die Eindeutigkeit der Lösungen auch spezifiziert werden muß.

4. Lösen Sie das System von Differentialgleichungen mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0 \tag{11a}$$
$$p(0) = p_0 \tag{11b}$$
$$\delta x(0) = \delta_0 x \tag{11c}$$
$$\delta p(0) = \delta_0 p \tag{11d}$$
$$f(0) = f_0 \tag{11e}$$

5. Diskutieren Sie das Verhalten der Ortsunschärfe $\delta x(t)$:

   (a) Minima und Maxima (sofern vorhanden)

   (b) asymptotisches Verhalten

6. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Spezialfall eines Gaußschen Wellenpakets.