

6. Übung zur Quantenmechanik

29. Mai 2019

Einstein, Podolsky und Rosen

6.1 Zustand

Betrachten Sie ein System aus zwei Massenpunkten, die sich unabhängig auf einer Geraden bewegen. Nennen Sie die Ortsoperatoren X_1 und X_2 und die entsprechenden Ortseigenzustände $|x_1, x_2\rangle$

$$X_i |x_1, x_2\rangle = x_i |x_1, x_2\rangle . \quad (1)$$

Die Zustände $|a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_-\rangle$ mit Wellenfunktion

$$\begin{aligned} \psi_{a,k_+,k_-, \epsilon_+, \epsilon_-}(x_1, x_2) &= \langle x_1, x_2 | a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_- \rangle \\ &= N(\epsilon_+, \epsilon_-) e^{ik_+(x_1+x_2)/2 + ik_-(x_1-x_2-a) - (x_1-x_2-a)^2/(4\epsilon_-) - \epsilon_+(x_1+x_2)^2} \end{aligned} \quad (2)$$

sind für $\epsilon_{\pm} > 0$ normierbare Zustände (die Normierungskonstante $N(\epsilon_+, \epsilon_-)$ ist zu bestimmen), die gemeinsame Eigenzustände der Observablen $X_1 - X_2$ und $P_1 + P_2$ approximieren.

1. Warum gibt es eine gemeinsame Eigenbasis von $X_1 - X_2$ und $P_1 + P_2$, und keine gemeinsame Eigenbasis von X_1 und P_1 , bzw. X_2 und P_2 ?
2. Berechnen Sie die Normierungskonstante $N(\epsilon_+, \epsilon_-)$ aus der Bedingung $\langle a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_- | a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_- \rangle = 1$. *Hinweis: die Wahl von $x_{\pm} = x_1 \pm x_2$ als Integrationsvariable vereinfacht die Rechnungen mithilfe der Formeln für Gaußsche Integrale!*
3. Berechnen Sie die Erwartungswerte

$$E(X_1 \pm X_2) = \langle \psi | (X_1 \pm X_2) | \psi \rangle \quad (3a)$$

$$V(X_1 \pm X_2) = \langle \psi | (X_1 \pm X_2)^2 | \psi \rangle - \langle \psi | (X_1 \pm X_2) | \psi \rangle^2 \quad (3b)$$

$$E(P_1 \pm P_2) = \langle \psi | (P_1 \pm P_2) | \psi \rangle \quad (3c)$$

$$V(P_1 \pm P_2) = \langle \psi | (P_1 \pm P_2)^2 | \psi \rangle - \langle \psi | (P_1 \pm P_2) | \psi \rangle^2 \quad (3d)$$

mit $|\psi\rangle = |a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_-\rangle$. *Hinweis: überzeugen Sie sich mit der Kettenregel von*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \pm \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2 \frac{\partial f'}{\partial x_{\pm}}(x_+, x_-) \quad (4)$$

mit

$$f'(x_+, x_-) = f\left(\frac{x_+ + x_-}{2}, \frac{x_+ - x_-}{2}\right) \quad (5)$$

und benutzen Sie es zur Berechnung der Erwartungswerte für Impulse.

4. Interpretieren Sie den Zustand $|a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_- \rangle$ für kleine ϵ_{\pm} und skizzieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte

$$|\psi_{a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_-}(x_1, x_2)|^2 \quad (6)$$

als Funktion von (x_1, x_2) für kleine ϵ_{\pm} .

5. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{\epsilon_{\pm} \rightarrow 0^+} \frac{\psi_{a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_-}(x_1, x_2)}{(\epsilon_+ \epsilon_-)^{1/4}} = \delta(x_1 - x_2 - a) e^{ik_+(x_1+x_2)/2} \quad (7)$$

6. Zeigen Sie damit, daß

$$|a, k_+ \rangle = \lim_{\epsilon_{\pm} \rightarrow 0^+} \frac{|a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_- \rangle}{(\epsilon_+ \epsilon_-)^{1/4}} \quad (8)$$

ein *gemeinsamer* (nicht normierbarer) Eigenvektor der Observablen $X_1 - X_2$ und $P_1 + P_2$ ist

$$(X_1 - X_2) |a, k_+ \rangle = a |a, k_+ \rangle \quad (9a)$$

$$(P_1 + P_2) |a, k_+ \rangle = \hbar k_+ |a, k_+ \rangle . \quad (9b)$$

6.2 Messung

Betrachten Sie im Folgenden Messungen an einem System im Zustand $|\psi\rangle = |a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_-\rangle$ aus der Aufgabe 6.1 für kleine ϵ_{\pm} .

Nehmen sie den Grenzfall $\epsilon_{\pm} \rightarrow 0$ so früh wie möglich, um zu aufwendige Fouriertransformationen und Integralberechnungen zu vermeiden. Sie dürfen z. B. argumentieren, daß ein Zustand $|\psi\rangle$ mit nicht normierbarer Wellenfunktion $\langle x|\psi\rangle \propto \delta(x - x_0)$ zu einer um x_0 konzentrierten Wahrscheinlichkeitsdichte führt, wenn man den Zustand durch normierbare Wellenfunktionen approximiert.

1. Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Messung der Observablen X_1 im Zustand $|\psi\rangle$.
2. Welcher Zustand $|\hat{x}_1\rangle$ beschreibt das System nach einer Messung der Observablen X_1 mit dem Ergebnis \hat{x}_1 ? Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Messung der Observablen X_2 in diesem Zustand.
3. Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Messung der Observablen P_1 im Zustand $|\psi\rangle$. *Hinweis: hier sind die Wellenfunktionen im Impulsraum*

$$\phi_{a,k_+,k_-, \epsilon_+, \epsilon_-}(k_1, k_2) = \langle k_1, k_2 | a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_- \rangle \quad (10)$$

mit

$$\langle x_1, x_2 | k_1, k_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} \quad (11)$$

praktischer als die Wellenfunktionen im Ortsraum. Sie können leicht für $\epsilon_{\pm} \rightarrow 0$ berechnet werden.

4. Welcher Zustand $|\hat{p}_1\rangle$ beschreibt das System nach einer Messung der Observablen P_1 mit dem Ergebnis \hat{p}_1 ? Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Messung der Observablen P_2 in diesem Zustand.
5. Welcher Zustand $|\hat{x}_1, \hat{p}_1\rangle$ beschreibt das System nach einer Messung der Observablen X_1 mit dem Ergebnis \hat{x}_1 im Zustand $|\hat{p}_1\rangle$, d. h. nachdem zuvor die Observable P_1 mit dem Ergebnis \hat{p}_1 gemessen wurde? Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten für die Messung der Observablen X_2 und P_2 in diesem Zustand.
6. Wie interpretieren Sie Ihre Ergebnisse in dem Fall, daß

$$a \gg \sqrt{\epsilon_-} \wedge a \gg 1/\sqrt{\epsilon_+}, \quad (12)$$

also daß a viel größer als die typischen Längen in der Wellenfunktion des Zustandes.