Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG
Fakultät für Physik und Astronomie
Prof. Dr. Thorsten Ohl
Raimond Abt, Adam Büchner,
Robert Franken, David Rodriguez Fernandez

2. Übung zur Quantenmechanik
2. Mai 2019

Noch mehr Matrizen . . .

Zur Erinnerung:

- Eine orthogonale Projektion ist eine selbstadjungierte Matrix $P = P^\dagger$ mit
$$P = P^2 \,. \tag{1}$$
- Wir betrachten wieder die Familie der 2×2 Matrizen
$$\Sigma(a_0, \vec{a}) = a_0\mathbf{1} + \vec{a}\vec{\sigma} = a_0\mathbf{1} + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 \tag{2}$$
mit den Pauli-Matrizen $\sigma_{1,2,3}$ (vgl. 1. Übungsblatt) und $a_{0,1,2,3} \in \mathbf{C}$.

2.1 Dichtematrizen und Projektionen

1. Für welche Koeffizienten $a_{0,1,2,3} \in \mathbf{C}$ ist $\Sigma(a_0, \vec{a})$ eine orthogonale Projektion?
2. In der übernächsten Woche werden wir „Dichtematrizen“ kennen lernen. Dies sind selbstadjungierte Matrizen $\rho = \rho^\dagger$, die keine negativen Eigenwerte haben und
$$\mathrm{tr}(\rho) = \sum_i \rho_{ii} = 1 \tag{3}$$
erfüllen. Für welche Koeffizienten $a_{0,1,2,3} \in \mathbf{C}$ ist $\Sigma(a_0, \vec{a})$ eine Dichtematrix?

2.2 Spektralzerlegung

1. Berechnen Sie die Eigenwerte s und normierten Eigenvektoren ψ der 2×2 Matrizen $\Sigma(a_0, \vec{a})$

$$\Sigma(a_0, \vec{a})\psi = s\psi \tag{4}$$

   mit reellen Koeffizienten $a_{0,1,2,3} \in \mathbf{R}$ und

$$\psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^{2} \psi_i^* \psi_i = 1 \tag{5}$$

2. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, daß die Eigenvektoren ψ_1 und ψ_2 von $\Sigma(a_0, \vec{a})$ zu *verschiedenen* Eigenwerten aufeinander orthogonal stehen:

$$\psi_1^\dagger \psi_2 = \sum_{i=1}^{2} \psi_{1,i}^* \psi_{2,i} = 0 \tag{6}$$

3. Berechnen Sie für jeden normierten Eigenvektor ψ von $\Sigma(a_0, \vec{a})$ die zugehörige 2×2 Projektionsmatrix

$$P_\psi = \psi \otimes \psi^\dagger \tag{7}$$

   mit den Matrixelementen

$$[P_\psi]_{ij} = \psi_i \psi_j^* \,. \tag{8}$$

   Überzeugen Sie sich davon, daß es sich um orthogonale Projektionen handelt.

4. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, daß sich die aus den beiden normierten Eigenvektoren ψ_1 und ψ_2 von $\Sigma(a_0, \vec{a})$ gebildeten Projektionen zur Einheitsmatrix addieren:

$$\mathbf{1} = P_{\psi_1} + P_{\psi_2} \,. \tag{9}$$

5. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, daß $\Sigma(a_0, \vec{a})$ mit diesen Projektionen und den zugehörigen Eigenwerten auch als

$$\Sigma(a_0, \vec{a}) = s_1 P_{\psi_1} + s_2 P_{\psi_2} \tag{10}$$

   geschrieben werden kann.

2.3 Drehungen um $\pi/2$

In der Vorlesung werden nächste Woche die Matrizen

$$U_1(\pm\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mp\mathrm{i} \\ \mp\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \tag{11a}$$

$$U_2(\pm\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mp 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{11b}$$

$$U_3(\pm\pi/2) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi/4} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/4} \end{pmatrix}\,, \tag{11c}$$

definiert werden.

1. Überprüfen Sie die Eigenschaften

$$U_n^\dagger(\pm\pi/2) = U_n^{-1}(\pm\pi/2) = U_n(\mp\pi/2) \tag{12a}$$

$$\left(U_n(\pm\pi/2)\right)^4 = -\mathbf{1}\,. \tag{12b}$$

2. Überprüfen Sie die Eigenschaft

$$U_1(\pi/2)U_2(\pi/2)U_1(-\pi/2) = U_3(\pi/2) \tag{13}$$

durch Matrixmultiplikation und zeigen Sie, daß daraus mit (12a) und $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ auch

$$U_1(+\pi/2)U_2(-\pi/2)U_1(-\pi/2) = U_3(-\pi/2) \tag{14a}$$

$$U_1(-\pi/2)U_3(+\pi/2)U_1(+\pi/2) = U_2(+\pi/2) \tag{14b}$$

$$U_1(-\pi/2)U_3(-\pi/2)U_1(+\pi/2) = U_2(-\pi/2) \tag{14c}$$

folgen.

3. Überprüfen Sie die Eigenschaften

$$U_2(\pi/2)U_3(+\pi/2)U_2(-\pi/2) = U_1(+\pi/2) \tag{15a}$$

$$U_3(\pi/2)U_1(+\pi/2)U_3(-\pi/2) = U_2(+\pi/2) \tag{15b}$$

durch Matrixmultiplikation und leiten Sie daraus analog zur vorherigen Aufgabe sechs weitere Beziehungen her.