Prof. Dr. Thorsten Ohl
Raimond Abt, Adam Büchner,
Robert Franken, David Rodriguez Fernandez

1. Übung zur Quantenmechanik
26. April 2019

Was Sie schon immer über 2×2-Matrizen wissen wollten … und nie zu fragen wagten

Warum Sie viel über 2×2-Matrizen wissen wollen, sollte in der Vorlesung am Montag 29. April klar werden …

Zur Erinnerung an die Vorlesungen zur Mathematik und den mathematischen Rechenmethoden:

- Die zu einer Matrix M hermitisch adjungierte Matrix $M^\dagger = (M^T)^*$ hat die Matrixelemente
$$\left[M^\dagger\right]_{ij} = M^*_{ji}\,. \tag{1}$$
- Eine selbstadjungierte Matrix H erfüllt $H^\dagger = H$.
- Eine unitäre Matrix U erfüllt $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbf{1}$, bzw. $U^\dagger = U^{-1}$.

1.1 Pauli-Matrizen

Betrachten Sie die drei Pauli-Matrizen
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2a}$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \tag{2b}$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2c}$$
zusammen mit der 2×2-Einheitsmatrix
$$\sigma_0 = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{2d}$$

1. Zeigen Sie, daß jede komplexe 2×2-Matrix M als eine Linearkombination
$$M = \Sigma(a_0, \vec{a}) = a_0\mathbf{1} + \vec{a}\vec{\sigma} = a_0\mathbf{1} + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 = \sum_{i=0}^{3} a_i\sigma_i \tag{3}$$
mit komplexen Koeffizienten $a_{0,1,2,3} \in \mathbf{C}$ geschrieben werden kann.

2. Zeigen Sie, daß alle Produkte $\sigma_i\sigma_j$ als eine der Matrizen (2), multipliziert mit einer komplexen Zahl, geschrieben werden können.

   Verwenden Sie ab hier möglichst Ihr Ergebnis für die Produkte $\sigma_i\sigma_j$ anstelle von expliziter Matrixmultiplikation.

3. Bestimmen Sie die Funktionen $c_0(a_0, \vec{a}, b_0, \vec{b})$ und $\vec{c}(a_0, \vec{a}, b_0, \vec{b})$ im Multiplikationsgesetz
$$\Sigma(a_0, \vec{a})\Sigma(b_0, \vec{b}) = \Sigma(c_0, \vec{c})\,. \tag{4}$$

4. Bestimmen Sie die Funktionen $b_0(a_0, \vec{a})$ und $\vec{b}(a_0, \vec{a})$ in der adjungierten Matrix
$$(\Sigma(a_0, \vec{a}))^\dagger = \Sigma(b_0, \vec{b})\,. \tag{5}$$

5. Bestimmen Sie die Funktionen $b_0(a_0, \vec{a})$ und $\vec{b}(a_0, \vec{a})$ in der inversen Matrix
$$(\Sigma(a_0, \vec{a}))^{-1} = \Sigma(b_0, \vec{b})\,. \tag{6}$$

6. Berechenen Sie die Determinante $\det(\Sigma(a_0, \vec{a}))$ und Spur $\mathrm{tr}(\Sigma(a_0, \vec{a}))$.

7. Für welche Koeffizienten $a_{0,1,2,3} \in \mathbf{C}$ ist $\Sigma(a_0, \vec{a})$ selbstadjungiert?

8. Für welche Koeffizienten $a_{0,1,2,3} \in \mathbf{C}$ ist $\Sigma(a_0, \vec{a})$ unitär? Zeigen Sie, daß die beiden Ansätze
$$a_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sqrt{1 - \vec{\alpha}^2},\ \vec{a} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\vec{\alpha} \tag{7}$$
   mit $\phi \in [0, 2\pi) \subset \mathbf{R}$, $\alpha_{1,2,3} \in \mathbf{R}$ und $|\vec{\alpha}| < 1$ und
$$a_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\cos|\vec{\beta}|,\ \vec{a} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\frac{\sin|\vec{\beta}|}{|\vec{\beta}|}\vec{\beta} \tag{8}$$
   mit $\phi \in [0, 2\pi) \subset \mathbf{R}$, $\beta_{1,2,3} \in \mathbf{R}$ und $|\vec{\beta}| < 1$ zu unitären Matrizen führen.

1.2 Exponentialfunktion

1. Berechnen Sie die Exponentialfunktion der Vielfachen der Pauli-Matrizen (2)

$$e^{i\alpha\sigma_i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} (\sigma_i)^n \tag{9}$$

   für $i = 0, 1, 2, 3$ und $\alpha \in \mathbf{R}$ durch Berechnung von $(\sigma_i)^n$ und Vergleich der Potenzreihe mit den Reihen für Sinus und Kosinus.

2. Berechnen Sie die Exponentialfunktion

$$e^{i\Sigma(a_0,\vec{a})} . \tag{10}$$

1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

1. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Pauli-Matrizen (2).

2. Zeigen Sie durch konkrete Rechnung, daß die Eigenvektoren einer Pauli-Matrix zu *verschiedenen* Eigenwerten aufeinander orthogonal stehen.