Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Fakultät für Physik und Astronomie
Prof. Dr. Thorsten Ohl
Raimond Abt, Stefan Beyl, Alexander Kowalski,
Julian-Benedikt Mayer, Ignacio Reyes

12. Übung zur Quantenmechanik
27. Juni 2018 (korrigiert)

Störungsrechnung

12.1 Harmonischer Oszillator

Betrachten Sie einen gestörten harmonischen Oszillator

$$H = H_0 + gV \tag{1a}$$

$$H_0 = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}X^2 \tag{1b}$$

$$V = \sqrt{m\hbar\omega^3}X\,. \tag{1c}$$

Der ungestörte harmonische Oszillator H_0 kann mit Hilfe der Leiteroperatoren

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}P\right) \tag{2a}$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X - \frac{\mathrm{i}}{m\omega}P\right) \tag{2b}$$

diagonalisiert werden.

1. Berechnen Sie die Änderung der Energien der ungestörten Eigenzustände in erster und zweiter Ordnung Störungsrechnung in g, sowie die neuen Eigenzustände in erster Ordnung g.

2. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem exakten Ergebnis, das sie durch eine Verschiebung des Koordinatenursprungs finden können.

12.2 Harmonischer Oszillator $2D$

Betrachten Sie einen gestörten zweidimensionalen harmonischen Oszillator

$$
\begin{aligned}
H &= H_0 + gV && \text{(3a)}\\
H_0 &= \frac{1}{2m}\left(P_1^2 + P_2^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(X_1^2 + X_2^2\right) && \text{(3b)}\\
V &= \frac{\Omega^2}{m} X_1 X_2 && \text{(3c)}
\end{aligned}
$$

mit $|g|\Omega^2 < \omega^2$. Der ungestörte zweidimensionale harmonische Oszillator H_0 kann mit Hilfe der Leiteroperatoren

$$
\begin{aligned}
a_i &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X_i + \frac{\mathrm{i}}{m\omega} P_i\right) && \text{(4a)}\\
a_i^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X_i - \frac{\mathrm{i}}{m\omega} P_i\right) && \text{(4b)}
\end{aligned}
$$

$(i = 1, 2)$ diagonalisiert werden.

1. Berechnen Sie die Änderung der Energie des Grundzustands in erster und zweiter Ordnung Störungsrechnung in g.

2. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem exakten Ergebnis. Tip: eine geeignete Drehung des Koordinatensystems vereinfacht die exakte Lösung drastisch.

12.3 Drei Zustände

Betrachten Sie ein quantenmechanisches System mit drei Zuständen

$$|1\rangle\,,|2\rangle\,,|3\rangle\;. \tag{5}$$

Der Hamiltonoperator H des Systems zerfalle in einen ungestörten Teil H_0 und eine kleine Störung gV

$$H = H_0 + gV\,, \tag{6}$$

wobei H_0 in der Basis $|n\rangle$ diagonal sei

$$H_0\,|n\rangle = E_n^{(0)}\,|n\rangle \qquad (n = 1,2,3)\,. \tag{7}$$

Nehmen Sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit $E_1 < E_2 < E_3$ an. Die Matrixelemente der Störung seien

$$V_{nm} = \langle n|V|m\rangle \qquad (n,m = 1,2,3)\,. \tag{8}$$

Betrachten Sie die Änderung der Energieeigenwerte in Störungsrechnung

$$E_n = E_n^{(0)} + gE_n^{(1)} + g^2E_n^{(2)} + \mathcal{O}(g^3) \qquad (n = 1,2,3)\,. \tag{9}$$

1. Berechnen Sie $E_n^{(1)}$ für $n = 1,2,3$.
2. Berechnen Sie $E_n^{(2)}$ für $n = 1,2,3$. Welches Vorzeichen muß $E_1^{(2)}$ haben? *NB: Sie können damit das Vorzeichen der Formel für $E_n^{(2)}$ festlegen, falls Sie sich unsicher sind. Der Rest der Formel ist bis auf eine positive Konstante durch Dimensionsanalyse und durch die Tatsache festgelegt, daß die Auswirkung energetisch benachbarter Zustände am stärksten ist.*
3. Was folgt aus $E_3^{(2)} = E_1^{(2)}$ für V?