Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Fakultät für Physik und Astronomie
Prof. Dr. Thorsten Ohl
Raimond Abt, Stefan Beyl, Alexander Kowalski,
Julian-Benedikt Mayer, Ignacio Reyes

11. Übung zur Quantenmechanik
20. Juni 2018

Magnetfeld, Drehimpulskopplung

11.1 Laudau-Levels und Eichinvarianz

Betrachten Sie ein Teilchen mit Ladung q und Masse m in einem *konstanten* und *homogenen* Magnetfeld

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

das sich in der x_1-x_2-Ebene bewegen kann und auf $x_3 = 0$ eingeschränkt ist. Der zugehörige Hamiltonoperator ist

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{2} \Pi_i^2 \tag{2}$$

mit dem kinetischen Impuls

$$\vec{\Pi} = \vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{X}) \,. \tag{3}$$

1. Zeigen Sie, daß
$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{x} \tag{4}$$
ein geeignetes Vektorpotential für ein *beliebiges* konstantes und homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ ist.

2. Zeigen Sie, daß die Operatoren
$$a = \sqrt{\frac{c}{2\hbar q B_3}} (\Pi_1 + \mathrm{i}\Pi_2) \tag{5}$$
und $a^\dagger$ für $\vec{B} = (0, 0, B_3)^T$ mit $qB_3 > 0$ wie Erzeuger und Vernichter wirken. NB: für $qB_3 < 0$ muß man Π_1 und Π_2 vertauschen.

3. Drücken Sie (2) durch (5) aus bestimmen Sie die Eigenwerte von H analog zum harmonischen Oszillator.

4. Zeigen Sie, daß

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{B_3}{2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6a}$$

$$\vec{A}'(\vec{x}) = B_3 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6b}$$

beides geeignete Vektorpotentiale sind (Sie dürfen das Ergebnis der ersten Teilaufgabe benutzen).

5. Drücken Sie (2) mit (6a) zunächst als Funktion von X_1, P_1, X_2 und P_2 aus und anschließend als quadratische Form

$$H = \hbar \sum_{i,j=1}^{2} a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j + \hbar\omega \tag{7}$$

der Erzeuger und Vernichter

$$a_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X_i + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}P_i\right) \tag{8}$$

und

$$\omega = \frac{qB_3}{2mc}\,. \tag{9}$$

Finden Sie geeignete Linearkombinationen von a_1 und a_2, die die 2×2-Matrix auf Diagonalgestalt bringen und bestimmen Sie so die Eigenwerte von (2). Vergleichen Sie das Ergebnis mit der dritten Teilaufgabe.

6. Drücken Sie (2) mit (6b) als Funktion von P_1 und

$$X_1' = X_1 - \frac{c}{qB_3}P_2 \tag{10}$$

aus. Zeigen Sie, daß

$$a = \sqrt{\frac{m\omega'}{2\hbar}}\left(X_1' + \frac{\mathrm{i}}{m\omega'}P_1\right) \tag{11}$$

mit

$$\omega' = \frac{qB_3}{mc} = 2\omega \tag{12}$$

ein Vernichter ist und bestimmen Sie so die Eigenwerte von (2). Vergleichen Sie das Ergebnis mit den früheren Teilaufgaben.

7. Sind die Eigenwerte von (2) entartet? Wenn ja, wie?

Hinweis: der Stoff der Übungsaufgaben 11.2 und 11.3 wird erst in der Vorlesung am Freitag den 22. Juni 2018 behandelt werden!

11.2 Addition von Drehimpulsen

Konstruieren Sie die Eigenzustände zum Gesamtdrehimpuls

$$\vec{J} = \vec{L} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \vec{S}\,, \tag{13}$$

in einem System, das durch einen Bahndrehimpuls $l = 1$ und Spin $s = 1/2$ beschrieben wird

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}\,, \tag{14}$$

wobei

$$\vec{L}^2 \left|l, m\right\rangle = \hbar^2 l(l+1) \left|l, m\right\rangle \qquad L_3 \left|l, m\right\rangle = \hbar m \left|l, m\right\rangle \tag{15a}$$

$$\vec{S}^2 \left|s, s_3\right\rangle = \hbar^2 s(s+1) \left|s, s_3\right\rangle \qquad S_3 \left|s, s_3\right\rangle = \hbar s_3 \left|s, s_3\right\rangle\ . \tag{15b}$$

11.3 Addition von Drehimpulsen redux

Betrachten Sie ein System, das aus Teilsystemen mit Drehimpuls $l_1 = 1$ und $l_2 = 3/2$ zusammengesetzt ist:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_{\frac{3}{2}}\,, \tag{16}$$

wobei

$$\vec{L}_i^2 \left|l_i, m_i\right\rangle = \hbar^2 l_i(l_i+1) \left|l_i, m_i\right\rangle \qquad L_{i,3} \left|l_i, m_i\right\rangle = \hbar m_i \left|l_i, m_i\right\rangle \tag{17a}$$

für $i = 1, 2$.

1. Berechnen Sie den Erwartungswert des Operators

$$\Delta H = g\vec{L}_1 \otimes \vec{L}_2 \tag{18}$$

   in *allen* Eigenzuständen des Gesamtdrehimpulses

$$\vec{L} = \vec{L}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \vec{L}_2\,. \tag{19}$$

2. Konstruieren Sie die Eigenzustände zum Gesamtdrehimpuls mit magnetischer Quantenzahl $m = 3/2$.