Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Fakultät für Physik und Astronomie
**Prof. Dr. Thorsten Ohl**
Raimond Abt, Stefan Beyl, Alexander Kowalski,
Julian-Benedikt Mayer, Ignacio Reyes

**10. Übung zur Quantenmechanik**
13. Juni 2018

# Separationsansatz, Drehimpuls

## 10.1 Separationsansatz

Betrachten Sie ein Teilchen im dreidimensionalen Raum $\mathbf{R}^3$ mit Hamilton-operator

$$H = \frac{1}{2m}\vec{P}^2 + V(\vec{X})\,. \tag{1}$$

1. Betrachten Sie Spezialfälle

$$V_{\text{Produkt}}(\vec{X}) = V_1(X_1)V_2(X_2)V_3(X_3) \tag{2a}$$
$$V_{\text{Summe}}(\vec{X}) = V_1(X_1) + V_2(X_2) + V_3(X_3) \tag{2b}$$

   mit reellen $V_i$, sodaß

$$H_i = \frac{1}{2m}P_i^2 + V_i(X_i) \tag{3}$$

   für alle $i = 1,2,3$ selbstadjungiert. In welchen dieser Fälle können sie die Lösungen der stationären Schrödingergleichung

$$H\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle \tag{4}$$

   faktorisieren

$$\psi(\vec{x}) = \langle\vec{x}|\psi\rangle = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3) \quad ? \tag{5}$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Betrachten Sie als weiteren Spezialfall den unendlich tiefen Potentialtopf in 3 Dimensionen

$$V(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 0 & \text{für } \max\{x_i\}_{i=1,2,3} < a/2 \\ V_0 \to +\infty & \text{für } \max\{x_i\}_{i=1,2,3} \geq a/2 \end{cases} \tag{6}$$

   und nutzen Sie einen Separationsansatz um alle Eigenwerte und -funktionen des Hamiltonoperators zu finden.

3. Zählen Sie die Anzahl der Eigenwerte $E_n$ und Eigenfunktionen des Hamiltonoperators mit $E_n \leq E$ und mit $E \leq E_n \leq E + \mathrm{d}E$ für $E$ so groß, daß Sie das Ergebnis gut durch eine reelle Funktion approximieren können.

## 10.2 Kugelflächenfunktionen

Betrachten Sie die normierten Kugelflächenfunktionen, die der maximalen Ausrichtung des Drehimpulses entlang der 3-Achse entsprechen

$$Y_{l,\pm l}(\theta,\phi) = \langle \theta,\phi | l, \pm l\rangle \ . \tag{7}$$

1. Bestimmen Sie die normierten Kugelflächenfunktionen $Y_{l,\pm l}$ aus

$$L_3 \left| l, \pm l \right\rangle = \pm\hbar l \left| l, \pm l \right\rangle \tag{8a}$$

$$L_\pm \left| l, \pm l \right\rangle = 0 \tag{8b}$$

   *Hinweis:* lösen Sie zuerst (8a) und anschließend (8b).

2. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Formel aus der Vorlesung.

3. Können Sie die relative Phase zwischen $Y_{l,+l}$ und $Y_{l,-l}$ festlegen?

4. Berechnen Sie die normierten Kugelflächenfunktionen $Y_{l,\pm(l-1)}$ und vergleichen Sie wieder Ihr Ergebnis mit der Formel aus der Vorlesung.

## 10.3 Spin 1

Betrachten Sie die Matrixelemente des Drehimpulses für Spin 1

1. Berechnen Sie die Matrizen

$$D_i = \begin{pmatrix} \langle 1|L_i|1\rangle & \langle 1|L_i|0\rangle & \langle 1|L_i|-1\rangle \\ \langle 0|L_i|1\rangle & \langle 0|L_i|0\rangle & \langle 0|L_i|-1\rangle \\ \langle -1|L_i|1\rangle & \langle -1|L_i|0\rangle & \langle -1|L_i|-1\rangle \end{pmatrix} \tag{9}$$

   für $i = 1,2,3$ und $i = \pm$ in der Basis $|m\rangle = |1,m\rangle$ mit $m = 1,0,-1$.

2. Berechnen Sie die Matrizen

$$D'_i = \begin{pmatrix} \langle x|L_i|x\rangle & \langle y|L_i|x\rangle & \langle z|L_i|x\rangle \\ \langle x|L_i|y\rangle & \langle y|L_i|y\rangle & \langle z|L_i|y\rangle \\ \langle x|L_i|z\rangle & \langle y|L_i|z\rangle & \langle z|L_i|z\rangle \end{pmatrix} \tag{10}$$

   für $i = 1,2,3$ und $i = \pm$ in der Basis

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |{-1}\rangle - |1\rangle \right) \tag{11a}$$

$$|y\rangle = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \left( |{-1}\rangle + |1\rangle \right) \tag{11b}$$

$$|z\rangle = |0\rangle \ . \tag{11c}$$

3. Interpretieren Sie die beiden Basen physikalisch.