

## 8. Übung zur Quantenmechanik

30. Mai 2018

### Harmonischer Oszillator

#### 8.1 Jacobi-Identität

Zeigen Sie die Jacobi-Identität

$$[A[B, C]] + [B[C, A]] + [C[A, B]] = 0 \quad (1)$$

für den Kommutator

$$[A, B] = AB - BA \quad (2)$$

von Operatoren  $A, B, C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ .

#### 8.2 Kohärente Zustände im Ortsraum

In der Vorlesung wurden die kohärenten Zustände  $|z\rangle$  des harmonischen Oszillators mit  $z \in \mathbf{C}$  als Eigenzustände

$$a |z\rangle = z |z\rangle \quad (3)$$

des Vernichters

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( X + \frac{i}{m\omega} P \right) \quad (4)$$

in der Eigenbasis des Anzahloperators  $N = a^\dagger a$  konstruiert

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (5)$$

- Bestimmen Sie die Ortsraumwellenfunktionen

$$\psi_z(x) = \langle x|z\rangle. \quad (6)$$

*Hinweis: es ist einfacher, die aus (3) folgende Differentialgleichung für  $\psi_z(x)$  zu lösen, als  $\langle x|z\rangle$  mit Hermite-Polynomen zu berechnen.*

- In der Vorlesung wurde gezeigt, daß die zeitabhängigen kohärenten Zustände

$$|z, t\rangle = e^{-i\omega t/2} |e^{-i\omega t} z\rangle \quad (7)$$

die Schrödingergleichung lösen. Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p_{z,t}(x) = |\psi_{z,t}(x)|^2 = |\langle x|z, t\rangle|^2 \quad (8)$$

und ihre Zeitabhängigkeit.

### 8.3 Unschärfen

Betrachten Sie erneut die kohärenten Zustände

$$a|z\rangle = z|z\rangle. \quad (3)$$

1. Überprüfen Sie das Ergebnis aus der Vorlesung für die Unschärfen von Ort und Impuls

$$(\Delta_z X)^2 = \langle z|X^2|z\rangle - \langle z|X|z\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \quad (9a)$$

$$(\Delta_z P)^2 = \langle z|P^2|z\rangle - \langle z|P|z\rangle^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}. \quad (9b)$$

Verwenden Sie dazu *nur* die Eigenwertgleichung (3)!

2. Wie hängen diese Unschärfen von der Zeit ab?

### 8.4 Gekoppelte Harmonische Oszillatoren

Betrachten Sie den Hamilton-Operator für zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren

$$H = H_a + H_b + \hbar\lambda (a^\dagger b + b^\dagger a) \quad (10a)$$

$$H_a = \hbar\omega_a \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (10b)$$

$$H_b = \hbar\omega_b \left( b^\dagger b + \frac{1}{2} \right) \quad (10c)$$

mit

$$[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = \mathbf{1} \quad (11a)$$

$$[a, b] = [a, b^\dagger] = 0 \quad (11b)$$

und  $\lambda \in \mathbf{R}$  als Kopplungsstärke.

1. Finden Sie Schiebepoperatoren  $A$  und  $B$  mit denen

$$H = \hbar\omega_A A^\dagger A + \hbar\omega_B B^\dagger B \quad (12)$$

geschrieben werden kann.

2. Finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren

$$H |E\rangle = E |E\rangle . \quad (13)$$

3. Drücken Sie die Eigenvektoren  $|E\rangle$  in der Eigenbasis der ungekoppelten Oszillatoren

$$a^\dagger a |n_a, n_b\rangle = n_a |n_a, n_b\rangle \quad (14a)$$

$$b^\dagger b |n_a, n_b\rangle = n_b |n_a, n_b\rangle \quad (14b)$$

aus.