Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Fakultät für Physik und Astronomie
Prof. Dr. Thorsten Ohl
Raimond Abt, Stefan Beyl, Alexander Kowalski,
Julian-Benedikt Mayer, Ignacio Reyes

6. Übung zur Quantenmechanik
16. Mai 2018

Einstein, Podolsky und Rosen

6.1 Zustand

Betrachten Sie ein System aus zwei Massenpunkten, die sich unabhängig auf einer Geraden bewegen. Nennen Sie die Ortsoperatoren X_1 und X_2 und die entsprechenden Ortseigenzustände $|x_1, x_2\rangle$

$$X_i\,|x_1, x_2\rangle = x_i\,|x_1, x_2\rangle\ . \tag{1}$$

Die Zustände $|a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_-\rangle$ mit Wellenfunktion

$$\begin{aligned}\psi_{a,k_+,k_-,\epsilon_+,\epsilon_-}(x_1, x_2) &= \langle x_1, x_2|a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_-\rangle \\ &= N(\epsilon_+, \epsilon_-)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_+(x_1+x_2)/2+\mathrm{i}k_-(x_1-x_2-a)-(x_1-x_2-a)^2/(4\epsilon_-)-\epsilon_+(x_1+x_2)^2}\end{aligned} \tag{2}$$

sind für $\epsilon_\pm > 0$ normierbare Zustände (die Normierungskonstante $N(\epsilon_+, \epsilon_-)$ ist zu bestimmen), die gemeinsame Eigenzustände der Observablen $X_1 - X_2$ und $P_1 + P_2$ approximieren.

1. Warum gibt es eine gemeinsame Eigenbasis von $X_1 - X_2$ und $P_1 + P_2$, und keine gemeinsame Eigenbasis von X_1 und P_1, bzw. X_2 und P_2?

2. Berechnen Sie die Normierungskonstante $N(\epsilon_+, \epsilon_-)$ aus der Bedingung $\langle a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_-|a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_-\rangle = 1$. *Hinweis: die Wahl von $x_\pm = x_1 \pm x_2$ als Integrationsvariable vereinfacht die Rechnungen mithilfe der Formeln für Gaußsche Integrale!*

3. Berechnen Sie die Erwartungswerte

$$E(X_1 \pm X_2) = \langle\psi|(X_1 \pm X_2)|\psi\rangle \tag{3a}$$
$$V(X_1 \pm X_2) = \langle\psi|(X_1 \pm X_2)^2|\psi\rangle - \langle\psi|(X_1 \pm X_2)|\psi\rangle^2 \tag{3b}$$
$$E(P_1 \pm P_2) = \langle\psi|(P_1 \pm P_2)|\psi\rangle \tag{3c}$$
$$V(P_1 \pm P_2) = \langle\psi|(P_1 \pm P_2)^2|\psi\rangle - \langle\psi|(P_1 \pm P_2)|\psi\rangle^2 \tag{3d}$$

mit $|\psi\rangle = |a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_-\rangle$. *Hinweis: überzeugen Sie sich mit der Kettenregel von*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \pm \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2\frac{\partial f'}{\partial x_\pm}(x_+, x_-) \tag{4}$$

mit

$$f'(x_+, x_-) = f\left(\frac{x_+ + x_-}{2}, \frac{x_+ - x_-}{2}\right) \tag{5}$$

und benutzen Sie es zur Berechnung der Erwartungswerte für Impulse.

4. Interpretieren Sie den Zustand $|a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_-\rangle$ für kleine $\epsilon_\pm$ und skizzieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte

$$\left|\psi_{a,k_+,k_-,\epsilon_+,\epsilon_-}(x_1, x_2)\right|^2 \tag{6}$$

als Funktion von (x_1, x_2) für kleine $\epsilon_\pm$.

5. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{\epsilon_\pm \to 0+} \psi_{a,k_+,k_-,\epsilon_+,\epsilon_-}(x_1, x_2) = \delta(x_1 - x_2 - a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_+(x_1+x_2)/2} \tag{7}$$

6. Zeigen Sie damit, daß

$$|a, k_+\rangle = \lim_{\epsilon_\pm \to 0+} |a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_-\rangle \tag{8}$$

ein *gemeinsamer* (nicht normierbarer) Eigenvektor der Observablen $X_1 - X_2$ und $P_1 + P_2$ ist

$$(X_1 - X_2)\,|a, k_+\rangle = a\,|a, k_+\rangle \tag{9a}$$

$$(P_1 + P_2)\,|a, k_+\rangle = k_+\,|a, k_+\rangle\ . \tag{9b}$$

6.2 Messung

Betrachten Sie im Folgenden Messungen an einem System im Zustand $|\psi\rangle = |a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_-\rangle$ aus der Aufgabe 6.1 für kleine $\epsilon_\pm$.

Nehmen sie den Grenzfall $\epsilon_\pm \to 0$ so früh wie möglich, um zu aufwendige Fouriertransformationen und Integralberechnungen zu vermeiden. Sie dürfen z. B. argumentieren, daß ein Zustand $|\psi\rangle$ mit nicht normierbarer Wellenfunktion $\langle x|\psi\rangle \propto \delta(x - x_0)$ zu einer um x_0 konzentrierten Wahrscheinlichkeitsdichte führt, wenn man den Zustand durch normierbare Wellenfunktionen approximiert.

1. Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Messung der Observablen X_1 im Zustand $|\psi\rangle$.

2. Welcher Zustand $|\hat{x}_1\rangle$ beschreibt das System nach einer Messung der Observablen X_1 mit dem Ergebnis $\hat{x}_1$? Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Messung der Observablen X_2 in diesem Zustand.

3. Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Messung der Observablen P_1 im Zustand $|\psi\rangle$. *Hinweis: hier sind die Wellenfunktionen im Impulsraum*
$$\phi_{a,k_+,k_-,\epsilon_+,\epsilon_-}(k_1, k_2) = \langle k_1, k_2|a, k_+, k_-, \epsilon_+, \epsilon_-\rangle \tag{10}$$
mit
$$\langle x_1, x_2|k_1, k_2\rangle = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1x_1+\mathrm{i}k_2x_2} \tag{11}$$
praktischer als die Wellenfunktionen im Ortsraum. Sie können leicht für $\epsilon_\pm \to 0$ berechnet werden.

4. Welcher Zustand $|\hat{p}_1\rangle$ beschreibt das System nach einer Messung der Observablen P_1 mit dem Ergebnis $\hat{p}_1$? Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Messung der Observablen P_2 in diesem Zustand.

5. Welcher Zustand $|\hat{x}_1, \hat{p}_1\rangle$ beschreibt das System nach einer Messung der Observablen X_1 mit dem Ergebnis $\hat{x}_1$ im Zustand $|\hat{p}_1\rangle$, d. h. nachdem zuvor die Observable P_1 mit dem Ergebnis $\hat{p}_1$ gemessen wurde? Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten für die Messung der Observablen X_1 und P_2 in diesem Zustand.

6. Wie interpretieren Sie Ihre Ergebnisse in dem Fall, daß
$$a \gg \sqrt{\epsilon_\pm}\,, \tag{12}$$
also daß a viel größer als die typischen Längen in der Wellenfunktion des Zustandes.