

5. Übung zur Quantenmechanik

9. Mai 2018

Gaußsche Integrale und Wellenfunktionen

5.1 Gaußsche Integrale

1. Verifizieren Sie mit den Standard-Trick „quadrieren und Polarkoordinaten einführen“ die Gaußsche Integralformel

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}. \quad (1)$$

2. Transformieren Sie (1), um

$$I(0, a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} \quad (2)$$

zu berechnen.

3. Transformieren Sie (2) weiter, um die Formel

$$I(k, a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2} + ikx} = \sqrt{2\pi} a e^{-\frac{a^2 k^2}{2} + ikb} \quad (3)$$

für die Fouriertransformation einer Gaußfunktion nachzuweisen.

4. Verallgemeinern Sie die eindimensionale Formel (3) auf den dreidimensionalen Anschauungsraum

$$I(\vec{k}, A, \vec{b}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (x_i - b_i) A_{ij} (x_j - b_j) + i \sum_{i=1}^3 k_i x_i} \quad (4)$$

mit der reell symmetrischen quadratischen Form $A_{ij} = A_{ji}$. *Hinweis: betrachten Sie zuerst den Fall, daß A diagonal mit positiven Diagonalelementen ist*

$$A_{ij} = a_i^2 \delta_{ij} \quad (5)$$

und verallgemeinern Sie anschließend. Welche Bedingungen müssen Sie an A stellen?

5.2 Erzeugende Funktion

Benutzen Sie die Formel (3), um Integrale der Form

$$J_n(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} \quad (6)$$

zu berechnen.

1. Drücken Sie $J_n(a, b)$ durch

$$\frac{\partial^n I}{\partial k^n}(0, a, b) \quad (7)$$

aus.

2. Berechnen Sie $J_n(a, b)$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4$.
3. Definieren Sie den Mittelwert

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}} \quad (8)$$

und berechnen Sie

$$\langle x \rangle, \quad (9)$$

sowie

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle. \quad (10)$$

4. Wie können Sie mit dieser Methode Integrale der Form

$$K_{n_1, n_2, n_3}(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 x x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (x_i - b_i) A_{ij} (x_j - b_j)} \quad (11)$$

berechnen?

5. Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3 x \vec{x} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (x_i - b_i) A_{ij} (x_j - b_j)} \quad (12)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3 x x_i x_j e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (x_i - b_i) A_{ij} (x_j - b_j)}, \quad (13)$$

sowie

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3 x \vec{x}^2 e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (x_i - b_i) A_{ij} (x_j - b_j)}. \quad (14)$$

5.3 Wellenfunktionen

Betrachten Sie das Gaußsche Wellenpaket $|A, \vec{b}\rangle$ mit Wellenfunktion

$$\psi_{A, \vec{b}} = \langle \vec{x} | A, \vec{b} \rangle = N e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (x_i - b_i) A_{ij} (x_j - b_j)} \quad (15)$$

mit $A_{ij} = A_{ji}$ reell symmetrisch.

1. Bestimmen Sie die Normierungskonstante N aus

$$\langle A, \vec{b} | A, \vec{b} \rangle = 1 \quad (16)$$

2. Berechnen Sie die Erwartungswerte

$$E_{A, \vec{b}}(X_i) = \langle A, \vec{b} | X_i | A, \vec{b} \rangle \quad (17a)$$

$$E_{A, \vec{b}}\left((X_i - E_{A, \vec{b}}(X_i))^2\right) = \langle A, \vec{b} | X_i^2 | A, \vec{b} \rangle - \langle A, \vec{b} | X_i | A, \vec{b} \rangle^2 \quad (17b)$$

3. Betrachten Sie auch den Impulsoperator

$$(P_i \psi)(\vec{x}) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\vec{x}) \quad (18)$$

und berechnen Sie die Erwartungswerte

$$E_{A, \vec{b}}(P_i) = \langle A, \vec{b} | P_i | A, \vec{b} \rangle \quad (19a)$$

$$E_{A, \vec{b}}\left((P_i - E_{A, \vec{b}}(P_i))^2\right) = \langle A, \vec{b} | P_i^2 | A, \vec{b} \rangle - \langle A, \vec{b} | P_i | A, \vec{b} \rangle^2. \quad (19b)$$

4. Entsprechen die Ergebnisse Ihren intuitiven Erwartungen?