

3. Übung zur Quantenmechanik

25. April 2018

QTrits

Um ein Quantensystem das drei Zustände annehmen kann, benutzen wir als Observable die Matrizen

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Diese Matrizen entsprechen als Observablen, z. B., der Messung des Spins entlang der Koordinatenachsen in einem System mit Gesamtspin 1.

3.1 Drehungen im \mathbf{R}^3

1. Berechnen Sie die Matrizen

$$R_n(\theta) = e^{-i\theta\tau_n} \quad (2)$$

für $n = 1, 2, 3$ und $\theta \in \mathbf{R}$.

2. Zeigen Sie, daß $R_n(\theta)$ eine Drehung um die \vec{e}_n -Achse um den Winkel θ im dreidimensionalen Anschauungsraum beschreibt.

3.2 Eigenbasis

1. Finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen τ_n .
2. Konstruieren Sie aus den Eigenvektoren jeweils eine Orthonormalbasis im Hilbertraum \mathbf{C}^3 .

3.3 Zustände

Benennen Sie die Eigenzustände von τ_n nach dem Vorzeichen des Eigenwerts (ein Eigenwert verschwindet für alle τ_n)

$$|-\; ; n\rangle \quad |0; n\rangle \quad |+\; ; n\rangle \quad (3)$$

und benutzen Sie die Ergebnisse einer Messung entlang der \vec{e}_3 -Achse

$$|+\rangle = |+; 3\rangle \quad (4a)$$

$$|0\rangle = |0; 3\rangle \quad (4b)$$

$$|-\rangle = |-\; 3\rangle \quad (4c)$$

als Basis.

1. Drücken Sie alle Eigenzustände $|l; n\rangle$ für $l = -, 0, +$ und $n = 1$ durch die Basis (4) aus.
2. Berechnen Sie alle Matrixelemente $\langle l; n | l'; n' \rangle$ für $l, l' = -, 0, +$ und $n, n' = 1, 2, 3$, sowie ihre Betragsquadrate.
3. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse als Wahrscheinlichkeiten für sukzessive Spinmessungen entlang verschiedener Koordinatenachsen.

3.4 Drehungen im \mathbf{C}^3

Zeigen Sie exemplarisch, daß die Drehmatrizen $R_n(\theta)$ auch im Zustandsraum \mathbf{C}^3 die richtigen Transformationen realisieren. Erklären Sie, warum gerade diese Ergebnisse physikalisch richtig sind.

1. Drehungen um $\theta = \pi$:

$$R_3(\pi) |\pm; 1\rangle \propto |\mp; 1\rangle \quad (5a)$$

$$R_3(\pi) |0; 1\rangle \propto |0; 1\rangle \quad (5b)$$

$$R_3(\pi) |\pm; 2\rangle \propto |\mp; 2\rangle \quad (5c)$$

$$R_3(\pi) |0; 2\rangle \propto |0; 2\rangle \quad (5d)$$

$$R_3(\pi) |\pm; 3\rangle \propto |\pm; 3\rangle \quad (5e)$$

$$R_3(\pi) |0; 3\rangle \propto |0; 3\rangle \quad (5f)$$

2. Drehungen um $\theta = \pi/2$:

$$R_3(\pi/2) |\pm; 1\rangle \propto |\pm; 2\rangle \quad (6a)$$

$$R_3(\pi/2) |0; 1\rangle \propto |0; 2\rangle \quad (6b)$$

$$R_3(\pi/2) |\pm; 2\rangle \propto |\mp; 1\rangle \quad (6c)$$

$$R_3(\pi/2) |0; 2\rangle \propto |0; 1\rangle \quad (6d)$$

$$R_3(\pi/2) |\pm; 3\rangle \propto |\pm; 3\rangle \quad (6e)$$

$$R_3(\pi/2) |0; 3\rangle \propto |0; 3\rangle \quad (6f)$$

3. Wie sehen die entsprechenden Relationen für $R_1(\theta)$ und $R_2(\theta)$ aus?