

2. Übung zur Quantenmechanik

18. April 2018

Noch mehr Matrizen ...

Zur Erinnerung:

- Eine orthogonale Projektion ist eine selbstadjungierte Matrix $P = P^\dagger$ mit

$$P = P^2. \quad (1)$$

- Wir betrachten wieder die Familie der 2×2 Matrizen

$$\Sigma(a_0, \vec{a}) = a_0 \mathbf{1} + \vec{a} \vec{\sigma} = a_0 \mathbf{1} + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3 \quad (2)$$

mit den Pauli-Matrizen $\sigma_{1,2,3}$ (vgl. 1. Übungsblatt) und $a_{0,1,2,3} \in \mathbf{C}$.

2.1 Dichtematrizen und Projektionen

1. Für welche Koeffizienten $a_{0,1,2,3} \in \mathbf{C}$ ist $\Sigma(a_0, \vec{a})$ eine orthogonale Projektion?
2. In der nächsten Woche werden wir „Dichtematrizen“ kennen lernen. Dies sind selbstadjungierte Matrizen $\rho = \rho^\dagger$, die keine negativen Eigenwerte haben und

$$\text{tr}(\rho) = \sum_i \rho_{ii} = 1 \quad (3)$$

erfüllen. Für welche Koeffizienten $a_{0,1,2,3} \in \mathbf{C}$ ist $\Sigma(a_0, \vec{a})$ eine Dichtematrix?

2.2 Spektralzerlegung

1. Berechnen Sie die Eigenwerte s und normierten Eigenvektoren ψ der 2×2 Matrizen $\Sigma(a_0, \vec{a})$

$$\Sigma(a_0, \vec{a})\psi = s\psi \quad (4)$$

mit reellen Koeffizienten $a_{0,1,2,3} \in \mathbf{R}$ und

$$\psi^\dagger\psi = \sum_{i=1}^2 \psi_i^* \psi_i = 1 \quad (5)$$

2. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, daß die Eigenvektoren ψ_1 und ψ_2 von $\Sigma(a_0, \vec{a})$ zu *verschiedenen* Eigenwerten aufeinander orthogonal stehen:

$$\psi_1^\dagger\psi_2 = \sum_{i=1}^2 \psi_{1,i}^* \psi_{2,i} = 0 \quad (6)$$

3. Berechnen Sie für jeden normierten Eigenvektor ψ von $\Sigma(a_0, \vec{a})$ die zugehörige 2×2 Projektionsmatrix

$$P_\psi = \psi \otimes \psi^\dagger \quad (7)$$

mit den Matrixelementen

$$[P_\psi]_{ij} = \psi_i \psi_j^* . \quad (8)$$

Überzeugen Sie sich davon, daß es sich um orthogonale Projektionen handelt.

4. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, daß sich die aus den beiden normierten Eigenvektoren ψ_1 und ψ_2 von $\Sigma(a_0, \vec{a})$ gebildeten Projektionen zur Einheitsmatrix addieren:

$$\mathbf{1} = P_{\psi_1} + P_{\psi_2} . \quad (9)$$

5. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, daß $\Sigma(a_0, \vec{a})$ mit diesen Projektionen und den zugehörigen Eigenwerten auch als

$$\Sigma(a_0, \vec{a}) = s_1 P_{\psi_1} + s_2 P_{\psi_2} \quad (10)$$

geschrieben werden kann.

2.3 Drehungen um $\pi/2$

In der Vorlesung werden die Matrizen

$$U_1(\pm\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \mp i & 1 \end{pmatrix} \quad (11a)$$

$$U_2(\pm\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mp 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (11b)$$

$$U_3(\pm\pi/2) = \begin{pmatrix} e^{\mp i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{\pm i\pi/4} \end{pmatrix}, \quad (11c)$$

definiert.

1. Überprüfen Sie die Eigenschaften

$$U_n^\dagger(\pm\pi/2) = U_n^{-1}(\pm\pi/2) = U_n(\mp\pi/2) \quad (12a)$$

$$(U_n(\pm\pi/2))^4 = -\mathbf{1}. \quad (12b)$$

2. Überprüfen Sie die Eigenschaft

$$U_1(\pi/2)U_2(\pi/2)U_1(-\pi/2) = U_3(\pi/2) \quad (13)$$

durch Matrixmultiplikation und zeigen Sie, daß daraus mit (12a) und $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ auch

$$U_1(+\pi/2)U_2(-\pi/2)U_1(-\pi/2) = U_3(-\pi/2) \quad (14a)$$

$$U_1(-\pi/2)U_3(+\pi/2)U_1(+\pi/2) = U_2(+\pi/2) \quad (14b)$$

$$U_1(-\pi/2)U_3(-\pi/2)U_1(+\pi/2) = U_2(-\pi/2) \quad (14c)$$

folgen.

3. Überprüfen Sie die Eigenschaften

$$U_2(\pi/2)U_3(+\pi/2)U_2(-\pi/2) = U_1(+\pi/2) \quad (15a)$$

$$U_3(\pi/2)U_1(+\pi/2)U_3(-\pi/2) = U_2(+\pi/2) \quad (15b)$$

durch Matrixmultiplikation und leiten Sie daraus analog zur vorherigen Aufgabe sechs weitere Beziehungen her.