

1. Übung zur Quantenmechanik

11. April 2018

Was Sie schon immer über 2×2 -Matrizen wissen wollten ... und nie zu fragen wagten

Zur Erinnerung:

- Die zu einer Matrix M hermitisch adjungierte Matrix $M^\dagger = (M^T)^*$ hat die Matrixelemente

$$[M^\dagger]_{ij} = M_{ji}^*. \quad (1)$$

- Eine selbstadjungierte Matrix H erfüllt $H^\dagger = H$.
- Eine unitäre Matrix U erfüllt $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbf{1}$, bzw. $U^\dagger = U^{-1}$.

1.1 Pauli-Matrizen

Betrachten Sie die drei Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2a)$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2b)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2c)$$

zusammen mit der 2×2 -Einheitsmatrix

$$\sigma_0 = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2d)$$

1. Zeigen Sie, daß jede komplexe 2×2 -Matrix M als eine Linearkombination

$$M = \Sigma(a_0, \vec{a}) = a_0 \mathbf{1} + \vec{a} \vec{\sigma} = a_0 \mathbf{1} + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3 = \sum_{i=0}^3 a_i \sigma_i \quad (3)$$

mit komplexen Koeffizienten $a_{0,1,2,3} \in \mathbf{C}$ geschrieben werden kann.

2. Zeigen Sie, daß alle Produkte $\sigma_i \sigma_j$ als eine der Matrizen (2), multipliziert mit einer komplexen Zahl, geschrieben werden können.
3. Bestimmen Sie die Funktionen $c_0(a_0, \vec{a}, b_0, \vec{b})$ und $\vec{c}(a_0, \vec{a}, b_0, \vec{b})$ im Multiplikationsgesetz

$$\Sigma(a_0, \vec{a})\Sigma(b_0, \vec{b}) = \Sigma(c_0, \vec{c}). \quad (4)$$

4. Bestimmen Sie die Funktionen $b_0(a_0, \vec{a})$ und $\vec{b}(a_0, \vec{a})$ in der adjungierten Matrix

$$(\Sigma(a_0, \vec{a}))^\dagger = \Sigma(b_0, \vec{b}). \quad (5)$$

5. Bestimmen Sie die Funktionen $b_0(a_0, \vec{a})$ und $\vec{b}(a_0, \vec{a})$ in der inversen Matrix

$$(\Sigma(a_0, \vec{a}))^{-1} = \Sigma(b_0, \vec{b}). \quad (6)$$

6. Berechnen Sie die Determinante $\det(\Sigma(a_0, \vec{a}))$ und Spur $\text{tr}(\Sigma(a_0, \vec{a}))$.
7. Für welche Koeffizienten $a_{0,1,2,3} \in \mathbf{C}$ ist $\Sigma(a_0, \vec{a})$ selbstadjungiert?
8. Für welche Koeffizienten $a_{0,1,2,3} \in \mathbf{C}$ ist $\Sigma(a_0, \vec{a})$ unitär? Zeigen Sie, daß die beiden Ansätze

$$a_0 = e^{i\phi} \sqrt{1 - \vec{\alpha}^2}, \quad \vec{a} = ie^{i\phi} \vec{\alpha} \quad (7)$$

mit $\phi \in [0, 2\pi) \subset \mathbf{R}$, $\alpha_{1,2,3} \in \mathbf{R}$ und $|\vec{\alpha}| < 1$ und

$$a_0 = e^{i\phi} \cos |\vec{\beta}|, \quad \vec{a} = ie^{i\phi} \frac{\sin |\vec{\beta}|}{|\vec{\beta}|} \vec{\beta} \quad (8)$$

mit $\phi \in [0, 2\pi) \subset \mathbf{R}$, $\beta_{1,2,3} \in \mathbf{R}$ und $|\vec{\beta}| < 1$ zu unitären Matrizen führen.

1.2 Exponentialfunktion

1. Berechnen Sie die Exponentialfunktion der Vielfachen der Pauli-Matrizen (2)

$$e^{i\alpha\sigma_i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} (\sigma_i)^n \quad (9)$$

für $i = 0, 1, 2, 3$ und $\alpha \in \mathbf{R}$ durch Berechnung von $(\sigma_i)^n$ und Vergleich der Potenzreihe mit den Reihen für Sinus und Kosinus.

2. Berechnen Sie die Exponentialfunktion

$$e^{i\Sigma(a_0, \vec{a})}. \quad (10)$$

1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

1. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Pauli-Matrizen (2).
2. Zeigen Sie durch konkrete Rechnung, daß die Eigenvektoren einer Pauli-Matrix zu *verschiedenen* Eigenwerten aufeinander orthogonal stehen.