MSc. Robert Franken, MSc. Philipp Kagerer, Dr. David Rodriguez-Fernandez

14. Übung zur Klassischen Mechanik
27. Januar 2020

Wiederholung

Dieser Übungszettel soll Ihnen Gelegenheit geben, noch einmal klausurrelevante Themen zu rekapitulieren und Sie auf den zu erwartenden Schwierigkeitsgrad vorzubereiten. Einige der Aufgaben sind umfangreicher als in der Klausur, um Ihnen mehr Übung zu ermöglichen.

14.1 Verständnisfragen

Begründen Sie Ihre Antworten *kurz*.

1. Welche der folgenden Kraftfelder $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ sind konservativ?

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{\nabla}(x_1 x_2 x_3) \tag{1a}$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = (x_1^2, b\, x_3, a\, x_2) \qquad \text{mit } a, b \in \mathbf{R} \tag{1b}$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = (x_2 x_3, x_1 x_3, x_1 x_2) \tag{1c}$$

2. Haben die folgenden Potentiale stabile oder instabile Gleichgewichtslagen? Wenn ja, welche?

$$V(\vec{x}) = e^{-\vec{x}^2} \tag{2a}$$

$$V(x) = x^2 (5 - x)^3 \tag{2b}$$

$$V(x) = \sin(x) \tag{2c}$$

3. Welche Erhaltungsgröße folgt mit dem Noether-Theorem aus der Translationsinvarianz eines Systems? (Hier ist keine Begründung verlangt!)

4. Entscheiden Sie, welche der Transformationen $T^*Q \to T^*Q$ mit $\mathbf{R} \ni \beta \neq 0, |\beta| \neq 1$ kanonisch sind.

$$(q, p) \mapsto (\beta q, -p/\beta) \tag{3a}$$

$$(q, p) \mapsto (\beta q, \beta p) \tag{3b}$$

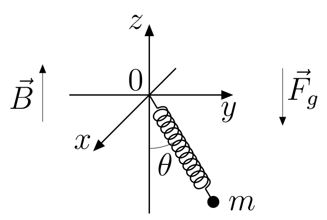
$$(q, p) \mapsto (\beta p, -q/\beta) \tag{3c}$$

5. Welche Form der relativistischen Geschwindigkeitsaddition ist korrekt

   (a) $v_1 \boxplus v_2 = (v_1 + v_2)/(1 + v_1 v_2/c^2)$ oder
   (b) $v_1 \boxplus v_2 = (v_1 + v_2)/\sqrt{1 + v_1 v_2/c^2}$?

14.2 Schwingende Feder im Magnetfeld

Ein Teilchen der Masse m und Ladung e ist durch eine Feder der Ruhelänge r_0 (mit Federkonstante k und vernachlässigbarer Masse) mit dem Ursprung verbunden. Die Feder kann frei um der Ursprung schwingen. Das Teilchen koppelt an ein konstantes homogenes Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Der System befindet sich unter dem Effekt einer konstanten homogenen Schwerkraft $\vec{F}_g = -mg\vec{e}_z$.



1. Bestimmen Sie eine Lagrangefunktion L für das System. *Zur Erinnerung: für konstante homogene Magnetfelder kann als Vektorpotential $\vec{A}(x) = \vec{B} \times \vec{x}/2$ gewählt werden.*

2. Leiten Sie aus L die Bewegungsgleichungen ab.

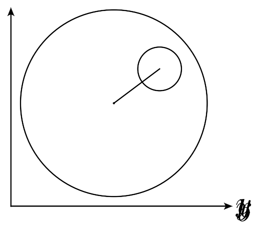
3. Finden Sie alle Lösungen der Bewegungsgleichungen, in denen die folgenden Größen konstant sind:

   - der Abstand r des Teilchens vom Ursprung,
   - die Auslenkung θ der Feder aus dem Lot und
   - die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi} = \omega$, der Rotation um die z-Achse.

4. Halten Sie wieder r und $\dot{\phi} = \omega$ konstant und lösen Sie nun die Bewegungsgleichung für kleine Schwingungen der Auslenkung θ aus dem Lot um $\theta = 0$.

14.3 Scheibe mit Loch

Betrachten Sie eine homogene Scheibe D_M mit Radius R und Masse M welche reibungsfrei in der x-y-Ebene rutsche. Im Abstand b vom Mittelpunkt der Scheibe D_M sei eine zylindrisches Loch mit Radius $r < R$ (siehe Abbildung). Der Einfluss der Gravitation sei vernachlässigbar. *Hinweis: wegen der Additivität der Massen können Sie das Loch durch eine Scheibe D_{-m} mit negativer Masse $-m$ beschreiben.*



1. Berechnen Sie den Schwerpunkt des Systems. *Hinweis: überzeugen Sie sich davon, daß sie dafür die Scheiben als Punktmassen ansehen können.*

2. Berechnen Sie das Gesamtträgheitsmoment des Systems für eine Rotation um den Schwerpunkt.

3. Stellen sie eine Lagrangefunktion in Schwerpunktskoordinaten auf.

4. Betrachten sie nun die beiden Scheiben als zunächst unabhängige Objekte. Bestimmen sie die jeweiligen kinetischen Energien der Schwerpunktsbewegung und die entsprechenden Rotationsenergien. Nutzen sie anschließend die Zwangsbedingungen. Geben sie wieder eine Lagrangefunktion an und vergleichen sie mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil 3).

5. Geben sie die Bewegungsgleichungen für beide Fälle an.

14.4 Hamiltonformalismus

Betrachten Sie einen Massenpunkt in drei Dimensionen mit der Lagrangefunktion ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$)

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + \alpha \vec{x}\dot{\vec{x}} - \frac{\beta}{|\vec{x}|}\,. \tag{4}$$

1. Warum sind Kugelkoordinaten die geeigneten Koordinaten für dieses Problem?
2. Drücken Sie L in Kugelkoordinaten aus. *Hinweis: versuchen Sie $\vec{x}\dot{\vec{x}}$ durch r und $\dot{r}$ auszudrücken.*
3. Bestimmen Sie mit einer Legendre-Transformation die Hamiltonfunktion in Kugelkoordinaten.
4. Leiten Sie die kanonischen Gleichungen ab.
5. Gibt es Erhaltungsgrößen? Wenn ja, welche?

14.5 Bewegung im Phasenraum

Betrachten Sie ein Hamilton'sches System mit einem Freiheitsgrad. Der Phasenraum ist $T^*Q = \mathbf{R}^2$ und die Hamiltonfunktion $H : T^*Q \to \mathbf{R}$

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 - \frac{m\omega^2}{2}q^2 + \frac{\lambda}{3}q^3 \,. \tag{5}$$

Wählen Sie für die folgenden Skizzen $m = \omega = \lambda = 1$, sodaß die interessanten Aspekte im Bereich $(q,p) \in [-2,2] \times [-2,2] \subset T^*Q$ zu sehen sind.

Bei den Skizzen kommt es nicht darauf an, daß alles präzise maßstabsgerecht ist. Vielmehr sollen die qualitativen Eigenschaften (Nullstellen, Asymptoten, etc.) klar erkennbar sein.

1. Skizzieren Sie die potentielle Energie $V : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

   $$V(q) = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 \tag{6}$$

   und finden Sie die stabilen und instabilen Gleichgewichtslagen.

2. Skizzieren Sie Linien konstanter Energie $H(q,p) = E$ in T^*Q. Wählen Sie dafür Werte der Energie E so, daß klar erkennbar ist, wo sich diese Linien qualitativ unterschiedlich verhalten.

3. Skizzieren Sie typische Trajektorien in T^*Q. Wählen Sie wieder die Trajektorien so, daß klar erkennbar ist, wo sie sich qualitativ unterschiedlich verhalten. In welchen Bereichen des Phasenraums gibt es, wenn überhaupt, geschlossene oder offene Bahnen?

4. Skizzieren Sie das Hamilton'sche Vektorfeld $X_H : T^*Q \to \mathbf{R}^2$

   $$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right) \,. \tag{7}$$