MSc. Robert Franken, MSc. Philipp Kagerer, Dr. David Rodriguez-Fernandez

13. Übung zur Klassischen Mechanik
20. Januar 2020

Hamiltonformalismus

13.1 Hamiltonformalismus für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld

Die Lagrangefunktion für ein geladenes Teilchen der Masse m mit Ladung e im elektromagnetischen Feld ist gegeben durch

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + e\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} - e\varphi \tag{1}$$

1. Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion durch Legendretransformation.

2. Betrachten Sie im folgenden den Spezialfall mit verschwindendem elektrischem Feld (d. h. $\varphi = 0$) und konstantem Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$, welches durch das Vektorpotential in der Form $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ beschrieben wird. Für ein gegebenes $\vec{B}$ ist die Wahl von $\vec{A}$ nicht eindeutig, und Eichtransformationen $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ lassen das Magnetfeld und damit auch die Bewegungsgleichungen invariant. Zeigen Sie, dass die beiden Vektorpotentiale

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} -x_2 B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{A}_2 = \tfrac{1}{2}\vec{B} \times \vec{x} \tag{2}$$

äquivalent sind, also durch Eichtransformationen ineinander übergehen, und bestimmen Sie die zugehörigen Hamiltongleichungen.

3. Zeigen Sie, dass die Hamiltongleichungen für $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$ äquivalent sind, also zu den gleichen Lösungen führen.

13.2 Hamilton'sche Vektorfelder

Sei $T^*Q = \mathbf{R}^{2n}$ ein kanonischer Phasenraum mit globalen Koordinaten

$$x = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)\,.$$

Für jede Funktion $f : T^*Q \to \mathbf{R}$ kann man ein Vektorfeld definieren

$$X_f := \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial p_n}, -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial f}{\partial q_n} \right) \, . \tag{3}$$

das man das *Hamilton'sche Vektorfeld* der Funktion f nennt. Von besonderer Interesse ist das Hamilton'sche Vektorfeld der Hamiltonfunktion H, da es die kanonischen Gleichungen bestimmt und somit die Tangentenvektoren an die Trajektorien im Phasenraum darstellt:

$$(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right) = X_H \, . \tag{4}$$

Wir wollen nun die Hamilton'schen Vektorfelder von bekannten Hamiltonfunktionen besser verstehen. Dazu sollen Sie X_H der folgenden Systemen berechnen und skizzieren. Für die Skizzen dürfen Sie Mathematica oder ähnliches verwenden. (Hinweis: verwenden Sie den Befehl *VectorPlot*)

1. **Freies Teilchen in 1D:**

$$H_1 = \frac{1}{2m} p^2 \tag{5a}$$

2. **Harmonischer Oszillator in 1D:**

$$H_2 = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\,\omega^2}{2} q^2 \tag{5b}$$

3. **Mathematisches Pendel in 1D:**

$$H_3 = \frac{1}{2m} p^2 - \alpha \cos q \; , \quad \alpha > 0 \tag{5c}$$

4. **Keplerproblem bei festem Drehimpuls:** $(q = r > 0)$

$$H_4 = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{\beta}{r^2} - \frac{\alpha}{r} \; , \quad \alpha, \beta > 0 \tag{5d}$$

5. **3D harmonischer Oszillator bei festem Drehimpuls:** $(q = r > 0)$

$$H_5 = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{\beta}{r^2} + \frac{m\,\omega^2}{2} r^2 \; , \quad \beta > 0 \tag{5e}$$

Die Phasenraum-Trajektorie des Teilchens ist gegeben als die Integralkurve der Hamilton'schen Vektorfelder X_{H_i}. Skizzieren Sie typische Trajektorien und indentifizieren Sie Bereiche periodischer und nicht-periodischer Bewegung.

13.3 Kanonische Transformation

Die Hamiltonfunktion eines eindimensionalen mechanischen Systems laute

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 q^4 + \frac{1}{2q^2}. \tag{6}$$

Die Bewegung soll mit Hilfe einer kanonischen Transformation $(q,p) \mapsto (Q,P)$ des Phasenraums $T^*Q = T^*\mathbf{R} \cong \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ bestimmt werden.

1. Bestimmen Sie die Bedingungen an die konstanten Parameter A, $\alpha \neq 0$, β und γ, unter denen die Transformation

   $$q = P^\alpha\,, \quad p = AQ^\beta P^\gamma \tag{7}$$

   kanonisch ist, indem Sie fordern, daß die kanonischen Gleichungen auch für die neuen Koordinaten Q und P gelten.

2. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil 1, indem Sie die Poissonklammern nutzen, um die Bedingungen an die Parameter zu finden, unter denen die Transformation in Gl. (7) kanonisch ist.

3. Bestimmen Sie den in Teilaufgabe 1 verbliebenen freien Parameter so, daß $H'(Q,P)$ eine wohlbekannte Form annimmt und lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für Q und P. Ermitteln Sie anhand der Lösung für die Anfangswerte $P(0) = P_0$ und $Q(0) = Q_0$ die gesuchte Zeitabhängigkeit der ursprünglichen Variablen p und q.