MSc. Robert Franken, MSc. Philipp Kagerer, Dr. David Rodriguez-Fernandez

12. Übung zur Klassischen Mechanik
13. Januar 2020

Legendretransformation / Kreisel / Kegel

12.1 Legendretransformationen

Bestimmen Sie die Legendre-Transformierten

1. $g : \mathbf{R} \ni u \mapsto g(u) \in \mathbf{R}$ der Funktion
$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto f(x) = \alpha\,(x+\beta)^2 \end{aligned} \tag{1}$$
2. $g : \mathbf{R}^2 \ni (u_1, u_2) \mapsto g(u_1, u_2) \in \mathbf{R}$ der Funktion
$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\to \mathbf{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto f(x_1, x_2) = \alpha x_1^3 x_2^5 \end{aligned} \tag{2}$$

($\alpha, \beta = \text{const.}$). Führen Sie zur Kontrolle die Rücktransformation durch.

12.2 Kreisel

Betrachten Sie einen homogenen Zylinder der Masse M mit der Höhe h und Radius R. Legen Sie das Koordinatensystem mit der x_3-Achse entlang der Symmetrieachse und seinen Ursprung in den Schwerpunkt des Zylinders.

1. Berechnen Sie alle Elemente $\{\theta_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$ des Trägheitstensors θ
$$\theta_{ij} = \int \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x})\left(\vec{x}^2\delta_{ij} - x_i x_j\right) \tag{3}$$
für den Zylinder bzgl. seines Schwerpunkts. Nutzen Sie Symmetrien, um möglichst wenig Integrale berechnen zu müssen.
2. Schreiben Sie die Euler'schen Gleichungen für die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ des Zylinders bzgl. seines Schwerpunkts im körperfesten System
$$\theta\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \theta\vec{\omega} = 0 \tag{4}$$
in Komponenten.
3. Lösen Sie in (4) zunächst die Gleichung für ω_3 und anschließend die Gleichungen für ω_1 und ω_2.

12.3 Rollender Kegel

Betrachten Sie einen geraden Kreiskegel mit Masse M, Öffnungswinkel 2α und Höhe h.

1. Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente des Kegels mit dem Ursprung des Koordinatensystems in der Spitze.

2. Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente des Kegels mit dem Ursprung des Koordinatensystems in seinem Schwerpunkt.

3. Berechnen Sie die kinetische Energie T des Kegels, wenn seine Spitze fest im Ursprung liegt und sein Mantel auf der waagrechten (x, y)-Ebene abrollt.

   Formulieren Sie dazu geeignete Zwangsbedingung(en) und wählen Sie geeignete Koordinaten. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System als Funktion dieser Koordinate(n) und der zugehörigen Geschwindigkeit(en).

   Hinweis: Das Ergebnis lautet

   $$T = \frac{3}{40} M\, h^2 \,(1 + 5\cos^2\alpha)\, \dot{\phi}^2$$

   wobei ϕ der Winkel von der x-Achse zur momentan Berührgeraden des Mantels mit der (x, y)-Ebene ist.