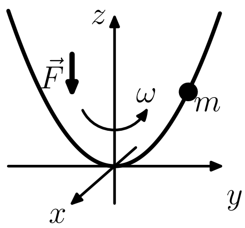
Prof. Dr. Thorsten Ohl
MSc. Robert Franken, MSc. Philipp Kagerer, Dr. David Rodriguez-Fernandez

5. Übung zur Klassischen Mechanik
11. November 2019

Lagrangeformalismus / Variationsrechnung

5.1 Teilchen auf einer rotierenden Parabel

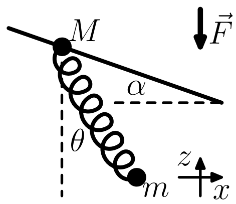
Ein Teilchen der Masse m gleite reibungslos unter Einwirkung der Gravitationskraft $\vec{F} = -mg\,\vec{e}_z$ auf einer Parabel mit Krümmung $\alpha > 0$. Die Parabel rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Symmetrieachse.



1. Formulieren und klassifizieren Sie die Zwangsbedingungen.
2. Stellen Sie eine Lagrangefunktion auf und leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab.
3. Finden Sie die Gleichgewichtslagen in Abhängigkeit von ω.
4. Bestimmen Sie die Frequenz kleiner Schwingungen um die stabile(n) Gleichgewichtlage(n).

5.2 Schwingende Hantel auf schiefer Ebene

Eine Masse M kann in der (x, z)-Ebene reibungslos eine schiefe Ebene mit Winkel α hinabrutschen. Eine zweite Masse m ist durch eine Feder mit Ruhelänge l_0, Federkonstante k und vernachlässigbarer Masse mit M verbunden und kann in der (x, z)-Ebene frei schwingen. Auf beide Massen wirke die Schwerkraft $\vec{F} = -mg\,\vec{e}_z$.



1. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen des Systems und geben Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten an.

2. Bestimmen Sie eine Lagrangefunktion in den verallgemeinerten Koordinaten und leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab.

3. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für das System mit der Nebenbedingung $\theta =$ konstant.

5.3 Geodäten unter Nebenbedingungen

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ eine glatte reguläre Kurve in $\mathbb{R}^3$ mit festen Endpunkten $\gamma(0) = \vec{a}, \gamma(1) = \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Regulär bedeutet $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 := \sum_{i=1}^{3} \big(\dot{\gamma}_i(t)\big)^2 \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$.

1. Finden Sie einen Ausdruck für die Länge $L[\gamma]$ der Kurve γ.

2. Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für dieses System auf. (Tipp: Machen Sie zur Vereinfachung Gebrauch von der Reparametrisierungsinvarianz regulärer Kurven, die es *nach* der Variation erlaubt die Parametrisierung so zu wählen, dass $\|\dot{\gamma}(t)\| \equiv N > 0$ zeitlich konstant ist.) Ermitteln Sie nun die extremalen Kurven γ im $\mathbb{R}^3$.

3. Um zu prüfen, welche Art von Extremum vorliegt, muss man die zweite Variation bestimmen. Dies ist im allgemeinen kompliziert, aber für unseren Spezialfall des Funktionals L findet man

$$\delta^2 L[\gamma] = \sum_{i,j=1}^{3} \int_0^1 dt \left(\frac{\partial^2}{\partial \dot{\gamma}_i \partial \dot{\gamma}_j} \|\dot{\gamma}\| \right) \delta\dot{\gamma}_i \delta\dot{\gamma}_j \ .$$

   Berechnen Sie die Matrix $M_{ij} := \frac{\partial^2}{\partial \dot{\gamma}_i \partial \dot{\gamma}_j} \|\dot{\gamma}\|$, und bestimmen Sie deren Definitheit, nachdem Sie die extremale Lsüng aus Teilaufgabe 2 eingesetzt haben. Welche Definitheit liefert ein Minimum? Kann man somit hier Aussagen über die Art des Extremums treffen?

4. Betrachten Sie nun eine eingeschränkte Klasse von Kurven, welche die Nebenbedingung $\chi = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 1 = 0$ erfüllen. (Anschaulich sind dies Kurven auf einem Zylinder mit Radius 1 um die z-Achse.) Bestimmen Sie in diesem Fall die extremalen Kurven mithilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst unter der Verwendung der Bewegungsgleichung für γ_3 und den Bedingungen $\chi = \dot{\chi} = \ddot{\chi} = 0$, dass der Lagrange-Multiplikator λ zeitlich konstant sein muss. Lösen Sie dann die Bewegungsgleichungen für γ_1 und γ_2, und bestimmen Sie den Wert von λ aus den Anfangs- und Endpunkten $a, b \in \mathbb{R}^3$ der Kurve.

5. Berechnen Sie erneut die extremalen Kurven auf dem Zylinder, jedoch diesmal unter Verwendung von geeigneten verallgemeinerten Koordinaten.