Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Fakultät für Physik und Astronomie
Prof. Dr. Thorsten Ohl
MSc. Robert Franken, MSc. Philipp Kagerer, Dr. David Rodriguez-Fernandez

2. Übung zur Klassischen Mechanik
21. Oktober 2019

Konservative Kräfte, Variationsrechnung

2.1 (Nicht-)Konservative Kraftfelder

Betrachten Sie die folgenden Familien von Kraftfeldern auf geeigneten Definitionsbereichen $D_\eta^{(n)} \subseteq \mathbf{R}^3$:

$$F_\eta^{(1)} : D_\eta^{(1)} \ni \vec{x} \mapsto r^\eta \cdot \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \tag{1a}$$

$$F_\eta^{(2)} : D_\eta^{(2)} \ni \vec{x} \mapsto r_{12}^\eta \cdot (x_1 \vec{e}_1 - x_2 \vec{e}_2) \in \mathbf{R}^3 \tag{1b}$$

$$F_\eta^{(3)} : D_\eta^{(3)} \ni \vec{x} \mapsto r_{12}^\eta \cdot (x_2 \vec{e}_1 - x_1 \vec{e}_2) \in \mathbf{R}^3 \tag{1c}$$

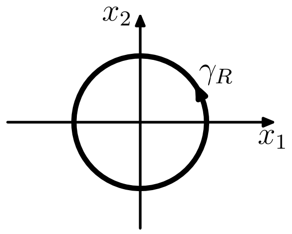
$$F_\eta^{(4)} : D_\eta^{(3)} \ni \vec{x} \mapsto r_{12}^\eta \cdot (x_2 \vec{e}_1 + x_1 \vec{e}_2) \in \mathbf{R}^3 \tag{1d}$$

wobei $r_{12} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ und $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Skizzieren Sie die Felder $\vec{F}_\eta^{(n)}$ als Vektorpfeile in der von den Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ aufgespannten Ebene (hier genügt es, zwischen den Fällen $\eta > -1$, $\eta = -1$ und $\eta < -1$ zu unterscheiden).

Bestimmen Sie, abhängig von der Potenz $\eta \in \mathbf{R}$,

1. den maximalen Definitionsbereich $D_\eta^{(n)}$,
2. die maximale Bereiche $C_\eta^{(n)} \subseteq D_\eta^{(n)}$, auf denen $F_\eta^{(n)}$ konservativ ist,
3. eine Potentialfunktion $V_\eta^{(n)} : C_\eta^{(n)} \to \mathbf{R}$ mit $\vec{F}_\eta^{(n)} = -\vec{\nabla} V_\eta^{(n)}$, sofern sie existiert,
4. das Kurvenintegral
$$I_\eta^{(n)}(R) = \int_{\gamma_R} \mathrm{d}\vec{\xi} \cdot \vec{F}_\eta^{(n)}(\vec{\xi}) \tag{2}$$
über den gegen den Uhrzeigersinn umlaufenen Kreis γ_R mit Radius R und Mittelpunkt $\vec{0}$ in der von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ aufgespannten Ebene



2.2 Variationsrechnung mit Seifenblasen

Zwischen zwei Kreisringen mit Radius R, die bei $x = -x_0$ und $x = x_0$ zentriert in der yz-Ebene liegen, sei eine Seifenhaut gespannt (s. Skizze). Aufgrund der Oberflächenspannung wird sich die Seifenhaut so ausbilden, dass die entsprechende Oberfläche minimal ist.

1. Das gesamte Problem ist rotationssymmetrisch um die x-Achse. Zeigen Sie, dass die Fläche der Rotationsfigur um die x-Achse für die Funktion $y : [-x_0, x_0] \to \mathbf{R}$ zwischen den Kreisringen durch

$$F(y) = \int_{-x_0}^{x_0} 2\pi y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x \tag{3}$$

   mit $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ gegeben ist.

2. Benutzen Sie nun die in der Vorlesung kennengelernte Methode der Variationsrechnung, um die Minimalfläche zu finden, die von der Seifenhaut gebildet wird. Gesucht ist also die Funktion y, die $F(y)$ minimiert.

   (Hinweis: Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung für dieses Problem in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\sqrt{1 + y'^2} - y\frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0 \tag{4}$$

   geschrieben werden kann.)