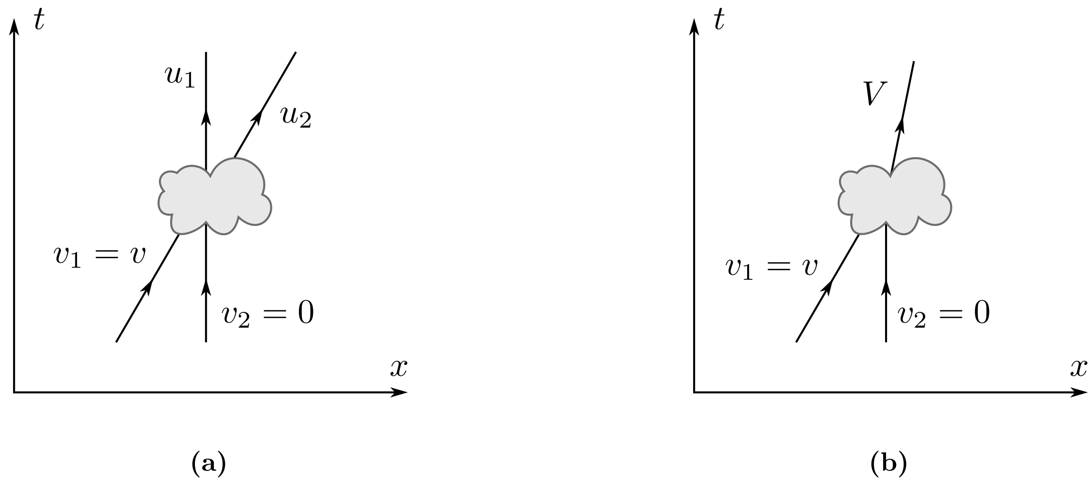

Abbildung 1: Skizzen zu den Aufgaben: (a) Elastischer Stoß. (b) Inelastischer Stoß.

8 Anwendungen

8.1 Relativistische Kollision

Elastische und inelastische Stöße kennen Sie bereits aus der klassischen Mechanik. Im Wesentlichen werden diese durch die Erhaltungsgrößen Energie und Impuls charakterisiert. In dieser Aufgabe lernen Sie deren relativistische Ensprechungen kennen, die auch vollständig durch Erhaltungsgrößen gelöst werden können. Wir betrachten dazu wieder die Wirkung

$$S[\gamma] = \int_\gamma \mathrm{d}\tau\, L \quad \text{mit} \quad L = -mc\sqrt{c^2\dot{t}^2 - \|\dot{\vec{x}}\|^2}$$

mit $\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}$.

(a) Alle Koordinaten t und x_i sind zyklisch. Bestimmen Sie die zugehörigen Erhaltungsgrößen $E := -p_t$ und $p_i := p_{x_i}$.

(b) Zeigen Sie die Einstein-Relation

$$E^2 - c^2\|\vec{p}\|^2 = m^2c^4 \quad \text{bzw.} \quad E = \sqrt{(mc^2)^2 + c^2\|\vec{p}\|^2}.$$

(c) Wir nutzen nun die Reparametrisierungsinvarianz der Wirkung und setzen $\dot{t} \equiv 1$, sodass die Geschwindigkeit durch

$$\vec{v} := \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau}\Big/\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \dot{\vec{x}}$$

gegeben ist. Welche bekannte Form nehmen E und $\vec{p}$ in dieser Parametrisierung an?

(d) Ab jetzt beschränken wir uns auf den eindimensionalen ($\vec{x} = x$) Fall. Zunächst betrachten wir das Problem des *elastischen* Stoßes zweier Teilchen der Massen $m_1 =$

$m_2 = m$ mit anfänglichen Geschwindigkeiten $v_1 = v$ und $v_2 = 0$, skizziert in Abb. 1a. Energie- und Impulserhaltung haben die Form

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \text{const.} \quad \text{und} \quad \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = \text{const.} \tag{1}$$

mit $\beta_i = v_i/c$ und dem Lorentzfaktor $\gamma_i = 1\big/\sqrt{1-\beta_i^2}$. Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten u_1 und u_2 der Teilchen nach dem Stoß[1].

(e) Für den *inelastischen* Stoß sei wieder $m_1 = m_2 = m$ mit $v_1 = v$ und $v_2 = 0$. Aufgrund der Inelastizität "verschmelzen" beide Teilchen (vgl. Abb. 1b) während des Stoßes zu einem einzigen Teilchen der Masse M mit Geschwindigkeit V. Wie sehen in diesem Fall die Erhaltungsgleichungen aus? Bestimmen Sie M und V. Was passiert im nichtrelativistischen Grenzfall $c \to \infty$?

(f) *Bonus:* Wiederholen Sie die Teilaufgaben (d) und (e) für $\mu := m_2/m_1 \neq 1$.

[1] Dazu müssen Sie Gleichung (1) solange quadrieren, bis keine Wurzeln mehr auftauchen. Evtl. ist es einfacher, erst $\beta_i = \sqrt{1-\gamma_i^{-2}}$ in Gleichung (1) einzusetzen und dann nach γ_i^2 zu lösen.